Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Аткарская Агата Сергеевна

Изоморфизмы линейных групп над ассоциативными кольцами.

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
д. ф.-м. н.
Бунина Елена Игоревна
д. ф.-м. н., профессор
Михалёв Александр Васильевич

Москва
2014

Оглавление

Введение

Работа посвящена изучению изоморфизмов между линейными группами над ассоциативными кольцами. Кроме классической полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(R)$, рассматриваются также группы над ассоциативными градуированными кольцами, стабильные линейные группы и стабильные унитарные группы. Описывается действие изоморфизма между данными группами на соответствующих элементарных подгруппах.

Изучение автоморфизмов линейных групп началось с работы Шрайера и Ван-дер-Вардена [29], в которой были описаны автоморфизмы группы PSL_n, $n \geqslant 3$, над произвольным полем. Затем примененный в этой работе метод был обобщен в работе [16], и с его помощью Хуа были описаны автоморфизмы симплектических групп над полем характеристики, не равной 2. Далее в 1950х Дьёдонне и Риккартом был введен метод инволюций. С его помощью в работах [14], [26] и [27] были исследованы автоморфизмы группы GL_n, $n \geqslant 3$, а также унитарных и симплектических групп над телами характеристики, не равной 2.

Затем Хуа и Райнером [17] было получено описание автоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. В работах [19](Лэндин, Райнер) и [30](Вань Чжесянь) их результат был обобщен на некоммутативные области главных идеалов.

В 1960х О'Мирой был разработан метод вычетных пространств. При помощи данного метода были изучены автоморфизмы GL_n, $n \geqslant 3$, над областями целостности, [24], и автоморфизмы симплектических групп специального вида над полями (так называемые *группы, богатые трансвекциями*), [25]. Независимо с помощью метода инволюций Янь Щицзянем [28] также были описаны автоморфизмы группы $\mathrm{E}_n(R)$, $n \geqslant 3$, где R — область целостности характеристики $\neq 2$.

В работе [21] Макдональдом и Помфрэ были исследованы автоморфизмы GL_n, $n \geqslant 3$, над коммутативным локальным кольцом с $\frac{1}{2}$. Далее, Уотерхаузом [31] было получено описание автоморфизмов группы GL_n, $n \geqslant 3$, над произвольными коммутативными кольцами с $\frac{1}{2}$. Затем В.М. Петечуком [8] изучены автоморфизмы GL_n, $n \geqslant 3$, над коммутативным локальным кольцом с $\frac{1}{3}$. После этого при помощи разработанного им метода локализации В.М. Петечук [9] получил описание автоморфизмов GL_n, $n \geqslant 4$, над произвольным коммутативным кольцом. Изучались также группы автоморфизмов свободных модулей бесконечного ранга. В работе [20] Ли Фуанем был описан вид автоморфизмов стабильных линейных групп над произвольными коммутативными кольцами.

Макквин и Макдональд в [22] получили описание автоморфизмов групп Sp_n размерности $\geqslant 6$ над коммутативным локальным кольцом, содержащим $\frac{1}{2}$. Продолжая работу в этом направлении, в 1980 году В.М Петечуком [10] были исследованы автоморфизмы симплектических групп над произвольным коммутативным локальным кольцом. А затем, в 1983 году, применив метод локализации, В.М Петечук в [11] обобщил результаты работ [22] и [10] на случай $\mathrm{Sp}_n(R), n \geqslant 6$ над произвольным коммутативным кольцом R.

И.З. Голубчиком и А.В Михалёвым было дано описание изоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n(R)$ в случае ассоциативного кольца R с $\frac{1}{2}$ (без предположения о коммутативности) при $n \geqslant 3$ в работе [3], и независимо в то же время подобные результаты (другими методами) были получены Е.И. Зельмановым в работе [5]. В этих работах доказана следующая

Теорема 1. *Пусть R и S — ассоциативные кольца, содержащие $\frac{1}{2}$, $n, m \geqslant 3$ и $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп. Пусть также $\mathrm{GE}_n(R) = \langle E + re_{ij}, \mathrm{diag}\,[a_1, a_2, \dots] \mid i \neq j, r \in R, a_k \in R^* \rangle$. Тогда существуют центральные идемпотенты e и f колец $\mathrm{Mat}_n(R)$ и $\mathrm{Mat}_m(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : e\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_m(S),$$

кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-e)\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow (1-f)\mathrm{Mat}_m(S)$$

и групповой гомоморфизм

$$\chi : \mathrm{GE}_n(R) \longrightarrow Z(\mathrm{GL}_m(S)),$$

такие, что

$$\varphi(A) = \chi(A)(\theta_1(eA) + \theta_2((1-e)A^{-1}))$$

для всех $A \in \mathrm{GE}_n(R)$.

Далее, в 1997 году в работе [2] И.З. Голубчиком описание изоморфизмов $\mathrm{GL}_n(R)$ было продолжено на случай произвольного ассоциативного кольца при $n \geqslant 4$.

В 1983 году И.З. Голубчиком и А.В. Михалёвым в работе [4] были исследованы изоморфизмы унитарных групп над произвольными ассоциативными кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$, с некоторыми ограничениями на размерность группы и ранг формы. Пусть на кольце $\mathrm{Mat}_n(R)$ задана невырожденная форма

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & & & \\ & \ddots & q_t & \\ & & & \overline{Q} \end{pmatrix}, q_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

(на пустых местах в матрице предполагаются нулевые элементы).

Пусть на кольце R задана инволюция τ (антиавтоморфизм порядка 2). Тогда на кольце $\mathrm{Mat}_n(R)$ можно определить инволюция по правилу $A^\tau = Q^{-1}(a_{ji}^\tau)Q$. Тогда $\mathrm{U}_n(R,\tau,Q) = \{A \in GL_n(R) \mid A^\tau A = E\}$. Определим унитарную элементарную подгруппу следующим равенством

$$\mathrm{EU}_n(R) = \langle E + e_{11}A(E-e_{11}) - (e_{11}A(E-e_{11}))^\tau - \\ - \frac{1}{2}(e_{11}A(E-e_{11}))(e_{11}A(E-e_{11}))^\tau, E + (E-e_{11})Ae_{11} - ((E-e_{11})Ae_{11})^\tau - \\ - \frac{1}{2}((E-e_{11})Ae_{11})^\tau((E-e_{11})Ae_{11}) \mid A \in \mathrm{Mat}_n(R)\rangle$$

Результат, полученный в [4], может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $\frac{1}{2}$, τ — инволюция на R, ε — инволюция на S. Пусть $\mathrm{U}_n(R,\tau,Q)$, $t \geqslant 2$, $\mathrm{U}_m(S,\varepsilon,Q_1)$ — соответствующие унитарные группы, $n,m \geqslant 5$, $\varphi : \mathrm{U}_n(R,\tau,Q) \to \mathrm{U}_m(S,\varepsilon,Q)$ — изоморфизм унитарных групп. Пусть также существует обратимый элемент $\beta \in Z(R)$, для которого $\beta\beta^\tau - 1$ обратим. Тогда $\mathrm{Mat}_m(S) = S_1 \oplus S_2$ и существует изоморфизм колец*

$$\mathrm{Mat}_n(R) \to S_1,$$

такой, что

$$\varphi(A) = \theta(A) + E - \theta(E) \text{ для всех } A \in \mathrm{EU}_n(R).$$

Если $-E \in \mathrm{EU}_n(R)$, *тогда* $\theta(E) = E$, *то есть* $\varphi(A) = \theta(A)$ *для всех* $A \in \mathrm{EU}_n(R)$.

Если $n = 2k$ и гиперболический ранг формы Q максимален (то есть равен k), то автоморфизмы группы $\mathrm{U}_n(R, \tau, Q)$, $k \geqslant 3$ были описаны в 1985 году другими методами Е.И Зельмановым, [5].

Таким образом, данная работа продолжает начатое в конце XX в. изучение изоморфизмов и автоморфизмов линейных групп над некоммутативными кольцами.

Целью данной работы является описание изоморфизмов классических линейных групп, а также стабильных линейных групп над различными классами ассоциативных колец.

Основными в представленной работе являются следующие результаты:

- модифицированное доказательство теоремы И.З. Голубчика об изоморфизме между полными линейными группами над ассоциативными кольцами;
- продолжение теоремы И.З. Голубчика об изоморфизме между полными линейными группами на случай линейных групп над ассоциативными градуированными кольцами;
- описание действия изоморфизмов между стабильными линейными группами над кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$, на стабильной элементарной подгруппе;
- описание действия изоморфизмов между стабильными унитарными группами над кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$, на стабильной унитарной элементарной подгруппе.

В диссертации используются методы классической теории колец и модулей над кольцами, а также специальные методы, разработанные для описания действия изоморфизмов между линейными группами, в том числе метод инволюций.

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты вносят вклад в решение задачи описания изоморфизмов линейных групп над кольцами.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

— VII международная алгебраическая конференция на Украине (Харьков, 2009);

— международный алгебраический симпозиум, посвященный 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А.В. Михалёва (Москва, 2010);

а также на следующих семинарах кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ:

— научно-исследовательский семинар по алгебре;

— семинар "Алгебра и теория моделей";

— семинар "Теория групп".

Результаты диссертации опубликованы в работах [32] — [36].

Работа состоит из четырех глав. Глава 1 имеет вспомогательный характер, в ней вводятся необходимые для работы базовые понятия и обозначения. В разделе 1.1 мы вводим обозначения для используемых матричных колец, определяем понятия системы матричных единиц и элементарной подгруппы. Мы называем $\mathrm{Mat}_{\infty}(R)$ множество матриц со счетным числом строк и столбцов, у которых вне главной диагонали есть лишь конечное число ненулевых элементов, а также существует такой номер n, что для любого $i \geqslant n$ элементы матрицы $r_{ii} = a$, $a \in R$. Вводится следующее определение.

Определение. Если $A \in \mathrm{GL}_n(R)$, то можно отождествить A с элементом из $\mathrm{Mat}_{\infty}(R)$ по следующему правилу: матрицу A запишем в левый верхний угол, начиная с позиции (n, n), на диагонали запишем 1, а на всех остальных местах запишем 0. Положим $\mathrm{GL}(R) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{GL}_n(R)$ $(\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_{\infty}(R))$. Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_{\infty}(R)$. Назовем ее *стабильной линейной группой.*

Аналогичным образом определяется *стабильная элементарная подгруппа.*

В разделе 1.2 даются необходимые сведения об унитарных группах. Мы обозначаем через $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$ кольцо $\mathrm{Mat}_2(\mathrm{Mat}_{\infty}(R))$, через E_{∞} — единичную матрицу счетного размера. Если $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ V & W \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathrm{U}_{2n}(R)$,

$X, Y, V, W \in \mathrm{Mat}_n(R)$, то ее можно отождествить с элементом из $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$ по правилу

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ V & W \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & E_\infty \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & E_\infty \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Вводится следующее определение.

Определение. Положим $\mathrm{U}(R) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{U}_{2n}(R)$ $(\mathrm{U}_{2n}(R) \subseteq \mathrm{Mat}_{2,\infty}(R))$. Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$. Назовем ее *стабильной унитарной группой.*

Затем стандартным способом определяется *стабильная унитарная элементарная подгруппа.*

Раздел 1.3 посвящен необходимым сведениям из теории градуированных колец и модулей. Даются определения градуированного кольца, градуированного модуля, градуированного морфизма. Вводится понятие градуированного кольца эндоморфизмов градуированного модуля и понятие хорошей градуировки на кольце матриц.

В главе 2 дается модифицированное автором доказательство следующей теоремы И.З Голубчика [2] об изоморфизме между линейными группами над ассоциативными кольцами.

Теорема (теорема 3)**.** *Пусть R и S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$ и $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты e и f колец $\mathrm{Mat}_n(R)$ и $\mathrm{Mat}_m(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : e\mathrm{Mat}_n(R) \to f\mathrm{Mat}_m(S)$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-e)\mathrm{Mat}_n(R) \to (1-f)\mathrm{Mat}_m(S),$$

такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2((1-e)A^{-1})$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

В разделе 2.1 вводится определения кольца частных и канонического гомоморфизма и доказываются вспомогательные утверждения. Раздел 2.2 посвящен доказательству основного результата. Также в этом разделе автором сформулирована и доказана теорема, описывающая действие изоморфизма линейных групп на подгруппе $\mathrm{GE}_n(R)$. При доказательстве используются методы работы [3]. В разделе 2.3 приводится подробное доказательство вспомогательных технически сложных предложений, которые использовались при доказательстве основного результата. Раздел 2.4 посвящен изучению изоморфизма линейных групп над асооциативными градуированными кольцами. Автором вводится следующее определение

Определение (определение 10)**.** Пусть $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$, $S = \bigoplus\limits_{g\in G} S_g$ — ассоциативные градуированные кольца с 1, $\mathrm{Mat}_n(R)$, $\mathrm{Mat}_m(S)$ - градуированные кольца матриц с хорошей градуировкой. Изоморфизм групп $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ назовем *изоморфизмом, согласованным с градуировкой*, если

$$\varphi(\mathrm{GL}_n(R) \cap \mathrm{Mat}_n(R)_e) \subseteq \mathrm{GL}_m(S) \cap \mathrm{Mat}_m(S)_e$$

и выполнено свойство:

$$\text{если } A - E \in \mathrm{Mat}_n(R)_g, \text{ то } \varphi(A) - E \in \mathrm{Mat}_m(S)_g.$$

Доказана теорема

Теорема (теорема 5)**.** *Пусть G — группа с нейтральным элементом e, $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$, $S = \bigoplus\limits_{g\in G} S_g$ — ассоциативные градуированные кольца с единицей, $\mathrm{Mat}_n(R)$, $\mathrm{Mat}_m(S)$ — градуированные кольца матриц с хорошей градуировкой, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$, и $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп, согласованный с градуировкой. Пусть изоморфизм φ^{-1} тоже согласован с градуировкой. Тогда существуют центральные идемпотенты q и f колец $\mathrm{Mat}_n(R)$ и $\mathrm{Mat}_m(S)$ соответственно, $q \in \mathrm{Mat}_n(R)_e, f \in \mathrm{Mat}_m(S)_e$, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : q\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_m(S)$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-q)\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow (1-f)\mathrm{Mat}_m(S),$$

сохраняющие градуировку, такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(qA) + \theta_2((1-q)A^{-1})$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Глава 3 посвящена описанию изоморфизма между стабильными линейными группами над ассоциативными кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$. Основной результат этой главы продолжает описание изоморфизма линейных групп, полученный И.З. Голубчиком и А.В. Михалёвым, [3]. Доказана следующая

Теорема (теорема 6)**.** *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $\frac{1}{2}$, $\varphi : \mathrm{GL}\,(R) \to \mathrm{GL}\,(S)$ — изоморфизм стабильных групп. Тогда существуют центральные идемпотенты h и e колец $\mathrm{Mat}\,(R)$ и $\mathrm{Mat}\,(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : h\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to e\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-h)\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to (1-e)\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle,$$

такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(hA) + \theta_2((1-h)A^{-1})$$

для всех $A \in \mathrm{E}\,(R)$.

Доказательство теоремы ведется с использованием модифицированного метода инволюций. В разделе 3.1 приводятся необходимые для дальнейшего доказательства вспомогательные утверждения, а также строится система матричных единиц $\{f_{ij}, i, j \in \mathbb{N}\}$ кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$, обладающая свойством $\varphi(E - 2e_{ii}) = E - 2f_{ii}, i \in \mathbb{N}$. Далее в разделе 3.2 строится изоморфизм между кольцами $\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle$ и $\langle \mathrm{E}\,(S_1)\rangle, S_1 = f_{11}\mathrm{Mat}_\infty(S)f_{11}$, что позволяет нам в дальнейшем записывать элементы $\mathrm{GL}\,(S)$ удобным способом. Затем в разделе 3.3 мы описываем образы элементов из $\mathrm{E}\,(R)$ при изоморфизме φ и строим кольцевые отображения θ_1 и θ_2, обладающие необходимыми свойствами. Это завершает доказательство теоремы.

В главе 4 описывается действие изоморфизма между стабильными унитарными группами над ассоциативными кольцами, содержащими $\frac{1}{2}$, на стабильной элементарной подгруппе. Результат этой главы продолжает описание изоморфизма унитарных групп, полученное И.З. Голубчиком и А.В. Михалёвым, [4]. Основным результатом является следующая

Теорема (теорема 8)**.** *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $\frac{1}{2}$, τ — инволюция (антиавтоморфизм порядка два) на R, ε — инволюция на S, $\varphi : \mathrm{U}\,(R) \to \mathrm{U}\,(S)$ — изоморфизм стабильных унитарных групп. Пусть также существует обратимый элемент $\beta \in Z(R)$, такой, что $\beta\beta^\tau - 1$ обратим. Тогда существует кольцевой изоморфизм*

$$\theta : \langle \mathrm{U}\,(R)\rangle \to \langle \mathrm{U}\,(S)\rangle,$$

такой, что

$$\varphi(A) = \theta(A) \text{ для всех } A \in \mathrm{EU}\,(R).$$

При доказательстве теоремы используется модифицированный метод инволюций. Раздел 4.1 посвящен введению необходимых для доказательства дополнительных обозначений и соглашений. В разделе 4.2 даются необходимые вспомогательные результаты и производятся предварительные вычисления. Также вводится система матричных единиц $\{z_{ij}, i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'\}$, обладающая свойством $\varphi(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})) = E - 2(z_{ii} + z_{i'i'})$. Затем в разделе 4.3 строится изоморфизм между кольцами $\langle \mathrm{U}\,(S)\rangle$ и $\langle \mathrm{U}\,(S_1)\rangle$, $S_1 = z_{11}\mathrm{Mat}\,_{2,\infty}(S)z_{11}$, что позволяем нам далее записывать элементы из $\mathrm{U}\,(S)$ в удобном виде. В разделе 4.4 мы описываем образы элементов из $\mathrm{EU}\,(R)$ и строим кольцевой изоморфизм θ, удовлетворяющий условию теоремы. Это завершает рассмотрение в главе 4.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным научным руководителям Александру Васильевичу Михалёву и Елене Игоревне Буниной за постановку задач, руководство работой и поддержку.

Глава 1

Основные понятия

1.1 Основные понятия теории линейных групп

Все кольца в работе предполагаются ассоциативными с нейтральным элементом 1. Основные сведения о стабильных группах могут быть найдены в книге [15] и статье [1]. Через $\mathrm{Mat}_n(R)$ будем обозначать кольцо матриц размера $n \times n$ над кольцом R, через $\mathrm{GL}_n(R)$ будем обозначать группу обратимых элементов этого кольца. Определения, касающиеся колец матриц бесконечной размерности и стабильных линейных групп, могут быть найдены в работах [15] и [13].

Подгруппу, порожденную элементами $E+re_{ij}$, $r \in R$, будем называть *элементарной подгруппой* и обозначать через $\mathrm{E}_n(R)$. Через $\mathrm{D}_n(R)$ будем обозначать подгруппу $\mathrm{GL}_n(R)$, порожденную диагональными матрицами, через $\mathrm{GE}_n(R)$ будем обозначать группу, порожденную группами $\mathrm{E}_n(R)$ и $\mathrm{D}_n(R)$.

Обозначим через $\mathrm{Mat}\,(R)$ матрицы со счетным числом строк и столбцов, такие, что в каждом столбце содержится лишь конечное число ненулевых элементов (кольцо эндоморфизмов свободного правого R-модуля V счетного ранга при фиксации базиса).

Назовем $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ множество матриц со счетным числом строк и столбцов, у которых вне главной диагонали есть лишь конечное число ненулевых элементов, а также существует такой номер n, что для любого $i \geqslant n$ элементы матрицы $r_{ii} = a$, $a \in R$. Ясно, что $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ — это кольцо.

Будем обозначать через $\mathrm{FCRMat}\,(R)$ подкольцо кольца $\mathrm{Mat}\,(R)$, состоящее из матриц, имеющих конечное число ненулевых элементов в каждой строке и в каждом столбце. Через $\mathrm{FMat}\,(R)$ будем обозначать подкольцо кольца $\mathrm{Mat}\,(R)$, состоящее из матриц, имеющих конечное число ненулевых элементов.

Подмножество $\{f_{ij}\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, кольца $\mathrm{Mat}_n(R)$ (кольца $\mathrm{Mat}(R)$) называется *системой матричных единиц*, если $f_{ij}f_{st} = \delta_{js}f_{it}$ (δ_{js} — символ Кронекера). Простой пример системы матричных единиц можно получить, если положить элемент f_{ij} равным матрице, у которой стоит 1 на месте (i, j) и 0 на всех остальных местах. В дальнейшем такую систему матричных единиц мы будем называть *стандартной*.

Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(R)$. Мы можем отождествить A с элементом из $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ по следующему правилу: матрицу A запишем в левый верхний угол, начиная с позиции (n, n), на диагонали запишем 1, а на всех остальных местах запишем 0.

Сохраним обозначение $\mathrm{GL}_n(R)$ для получившихся подмножеств $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Ясно, что $\mathrm{GL}_n(R)$ — подгруппы группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$, а также, что для $m \geqslant n$ мы имеем, что $\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{GL}_m(R)$.

Определение 1. Положим $\mathrm{GL}(R) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{GL}_n(R)$ ($\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R)$). Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Назовем ее *стабильной линейной группой.*

Аналогично группам $\mathrm{GL}_n(R)$ в $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ можно вложить подгруппы элементарных матриц $\mathrm{E}_n(R)$.

Определение 2. Положим $\mathrm{E}(R) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{E}_n(R)$ ($\mathrm{E}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R)$). Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Назовем ее *стабильной элементарной группой.*

Операцию транспонирования матриц будем обозначать через t. Отметим, что операция транспонирования определена не только для элементов кольца $\mathrm{Mat}_n(R)$, но и для элементов колец $\mathrm{Mat}_\infty(R)$, $\mathrm{FMat}(R)$ и $\mathrm{FCRMat}(R)$.

1.2 Предварительные сведения об унитарных группах

Основные определения, касающиеся унитарных групп, могут быть найдены в работах [15] и [6].

Инволюцией на кольце R называется антиавтоморфизм порядка 2. Пусть

R — кольцо с инволюцией τ и

$$Q_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Инволюция τ индуцирует инволюцию на кольце $\mathrm{Mat}_{2n}(R)$ по правилу

$$(a_{ij}) \mapsto Q_n^{-1}(x_{ij})Q_n, x_{ij} = a_{ji}^{\tau}.$$

Будем обозначать это отображения также через τ.

Унитарной группой $\mathrm{U}_{2n}(R)$ над кольцом R с инволюцией τ называется группа матриц $A \in \mathrm{Mat}_{2n}(R)$ таких, что $A^{\tau}A = E_{2n}$.

Обозначим через $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$ кольцо $\mathrm{Mat}_2(\mathrm{Mat}_{\infty}(R))$, через E_{∞} — единичную матрицу счетного размера. Пусть $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ V & W \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathrm{U}_{2n}(R)$, $X, Y, V, W \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Отождествим ее с элементом из $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$ по правилу

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ V & W \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & E_{\infty} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & E_{\infty} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Сохраним обозначение $\mathrm{U}_{2n}(R)$ для получившихся подмножеств $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$. Ясно, что $\mathrm{U}_{2n}(R)$ — подгруппы группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$, а также, что для $m \geqslant n$ мы имеем $\mathrm{U}_{2n}(R) \subseteq \mathrm{U}_{2m}(R)$.

Определение 3. Положим $\mathrm{U}(R) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{U}_{2n}(R)$ ($\mathrm{U}_{2n}(R) \subseteq \mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$). Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$. Назовем ее *стабильной унитарной группой.*

На кольце $\mathrm{Mat}_{2,\infty}$ определим инволюцию по правилу

$$\begin{pmatrix} (x_{ij}) & (y_{ij}) \\ (v_{ij}) & (w_{ij}) \end{pmatrix} \mapsto Q^{-1} \begin{pmatrix} (x_{ji}^{\tau}) & (v_{ji}^{\tau}) \\ (y_{ji}^{\tau}) & (w_{ji}^{\tau}) \end{pmatrix} Q, Q = \begin{pmatrix} 0 & E_{\infty} \\ -E_{\infty} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Это отображение будем обозначать также через τ. Несложно видеть, что для любого элемента $A \in \mathrm{U}(R)$ мы получаем

$$A^{\tau}A = E.$$

Определение 4. Пусть $\{E_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ — стандартная система матричных единиц кольца $\mathrm{Mat}\,(R)$. Подгруппу в группе $\mathrm{U}\,(R)$, порожденную матрицами

$$w_{ij}^r = \begin{pmatrix} E_\infty + rE_{ij} & 0 \\ 0 & E_\infty - r^\tau E_{ji} \end{pmatrix}, v_{ij}^r = \begin{pmatrix} E_\infty & rE_{ij} + r^\tau E_{ji} \\ 0 & E_\infty \end{pmatrix},$$

$$t_{ij}^r = \begin{pmatrix} E_\infty & 0 \\ rE_{ij} + r^\tau E_{ji} & E_\infty \end{pmatrix}, p_{ii}^r = \begin{pmatrix} E_\infty & rE_{ii} \\ 0 & E_\infty \end{pmatrix}, r^\tau = r, q_{ii}^r = \begin{pmatrix} E_\infty & 0 \\ rE_{ii} & E_\infty \end{pmatrix}, r^\tau = r,$$

будем обозначать через $\mathrm{EU}\,(R)$ и называть *стабильной элементарной подгруппой.*

1.3 Предварительные сведения о градуированных кольцах и модулях

Основные определения, касающиеся градуированных колец и градуированных колец эндоморфизмов, могут быть найдены в работах [23] и [1]. Предполагается, что фиксирована некоторая группа G.

Определение 5. Кольцо R называется *G-градуированным* (или *градуированным по группе G*), если $R = \bigoplus\limits_{g \in G} R_g$, где $\{R_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца R и $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Если при этом $R_s R_h = R_{sh}$ для всех $s, h \in G$, то кольцо называется *строго градуированным.*

Пример 1.1. Примером градуированного кольца является кольцо многочленов $k[x]$. На нем можно ввести градуировку группой $\mathbb{Z}$ следующим образом:

$$k[x]_n = \langle x^n \rangle_k, n \geqslant 0.$$

Пример 1.2. Еще один пример градуированного кольца — это групповое кольцо RG. Для него можно ввести градуировку группой G такую, что однородные компоненты имеют вид

$$(RG)_h = \langle h \rangle_R.$$

Два G-градуированных кольца R и S называются gr-*изоморфными*, если существует такой изоморфизм колец $f : R \to S$, что $f(R_g) \cong S_g$ для всех $g \in G$. Изоморфизм f в данном случае называется gr-изоморфизмом, градуированным изоморфизмом или изоморфизмом, сохраняющим градуировку.

Заметим, что изоморфизм градуированнных колец не обязан быть gr-изоморфизмом.

Пример 1.3. Рассмотрим кольцо многочленов $k[x]$ с градуировкой, описанной в примере 1. Рассмотрим отображение $\alpha : k[x] \longrightarrow k[x]$, определенное по правилу $\alpha(x^j) = (1+x)^j$. Ясно, что α — изоморфизм колец, но также понятно, что оно не является gr-изоморфизмом колец.

Определение 6. Правый R-модуль M называется *G-градуированным*, если $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$, где $\{M_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп в M таких, что $M_h R_g \subseteq M_{hg}$ для всех $h, g \in G$.

Определение 7. R-линейное отображение $f : M \to N$ правых G-градуированных R-модулей называется *градуированным морфизмом степени* g, если $f(M_h) \subseteq N_{gh}$ для всех $h \in G$. Градуированные морфизмы степени g образуют аддитивную подгруппу $\mathrm{HOM}_R(M,N)_g$ группы $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Определение 8. Положим $\mathrm{END}_R(M) := \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_R(M,M)_g$. Это градуированное кольцо называется *градуированным кольцом эндоморфизмов* градуированного R-модуля M.

Градуированный правый R-модуль M называется gr-*свободным*, если он обладает базисом, состоящим из однородных элементов.

Известно (см., например, [23]), что если $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ — градуированное кольцо, то градуированное кольцо эндоморфизмов $\mathrm{END}_R(M)$ конечно порожденного gr-свободного правого R-модуля M с базисом, состоящим из однородных элементов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ с $v_i \in M_{g_i} (i = 1, \ldots, n)$, изоморфно градуированному кольцу матриц

$$M_n(R)(g_1, \ldots, g_n) = \bigoplus_{h\in G} M_n(R)_h(g_1, \ldots, g_n),$$

где

$$M_n(R)_h(g_1, \ldots, g_n) = \begin{pmatrix} R_{g_1^{-1}hg_1} & R_{g_1^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_1^{-1}hg_n} \\ R_{g_2^{-1}hg_1} & R_{g_2^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_2^{-1}hg_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{g_n^{-1}hg_1} & R_{g_n^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_n^{-1}hg_n} \end{pmatrix}.$$

Назовем G-градуировку на кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(R)$ *хорошей*,если существует такой конечно порождённый gr-свободный правый R-модуль M, что

$$\mathrm{Mat}_n(R) \cong \mathrm{END}_R(V)$$

(как градуированные кольца).

Глава 2

Изоморфизмы общих линейных групп над ассоциативными кольцами

Данная глава посвящена описанию изоморфизмов общих линейных групп над ассоциативными кольцами. В разделах 2.1–2.3 приводится дополненное доказательство следующей теоремы, доказанной И.З. Голубчиком в его работе [2]:

Теорема 3. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$, и $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты e и f колец $\mathrm{Mat}_n(R)$ и $\mathrm{Mat}_m(S)$, соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : e\mathrm{Mat}_n(R) \to f\mathrm{Mat}_m(S)$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-e)\mathrm{Mat}_n(R) \to (1-f)\mathrm{Mat}_m(S),$$

такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2((1-e)A^{-1})$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

В разделе 2.4 будет доказано продолжение этой теоремы на случай общих линейных групп над ассоциативными градуированными кольцами.

2.1 Вспомогательные определения и утверждения

Пусть A — подмножество кольца R. Тогда A называется *мультипликативным*, если $ab \in A$ для всех $a \in A$, $b \in A$.

Определение 9. Пусть $\psi : R \longrightarrow S$ — гомоморфизм колец и A — мультипликативное подмножество кольца R. Тогда S называется *правым кольцом частных кольца R относительно A*, если выполнены следующие условия:

1. если $\psi(r) = 0$, то найдется $a \in A$, такой, что $ra = 0$,
2. $\psi(A)$ состоит из обратимых элементов кольца S,
3. кольцо S состоит из элементов вида $\psi(r)\psi(a)^{-1}$, где $r \in R$, $a \in A$.

   Отображение ψ в данном случае называется *каноническим гомомрфизмом.*

Пусть также $[A, B] = A^{-1}B^{-1}AB, [A, B, C] = [[A, B], C]$.

Лемма 2.1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $\{f_{ij} \mid i \leqslant i, j \leqslant n\}$ — полная система матричных единиц, $\overline{R} = \{\sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1} r f_{1i} \mid r \in R\}$. Тогда $R \cong \mathrm{Mat}\,_n(\overline{R})$.*

Доказательство. Пусть $r \in R$. Тогда

$$r = (\sum_{i=1}^{n} f_{ii}) r (\sum_{j=1}^{n} f_{jj}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ii} r f_{jj} = \sum_{i,j=1}^{n} f_{i1} f_{1i} r f_{j1} f_{1j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} f_{k1} f_{1i} r f_{j1} f_{1k}) f_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_{ij},\ a_{ij} \in \overline{R}.$$

Определим отображение $\alpha : \mathrm{Mat}\,_n(\overline{R}) \to R$. Положим $\alpha(a_{ij}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}$. Очевидно, что α — гомоморфизм колец, потому что $\overline{R}$ коммутирует с f_{ij}. Отображение α сюръективно, потому что, как показано выше, для всех $r \in R$ имеет место представление $r = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}, a_{ij} \in \overline{R}$. Очевидно также, что α инъективно. Значит, α — изоморфизм. Лемма 2.1 доказана.

Предложение 2.1. *Пусть S — ассоциативное кольцо с 1, $n \geqslant 4$,*

$$\{a_{ij} \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\} \subseteq S$$

и

$$a_{ij}a_{ik} = 0,\ a_{ji}a_{ki} = 0,\ a_{ij}a_{st} = 0, \tag{2.1}$$

$$a_{ij} = a_{is}a_{sj} - a_{sj}a_{is} \tag{2.2}$$

для всех различных i, j, s, t *от* 1 *до* n *и* $k \neq j$. *Тогда существует система матричных единиц* $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ *кольца* S *и идемпотент* e *кольца* $\{\sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1}rf_{1i}|r \in S\}$, *такие, что* $a_{ij} = ef_{ij} - (1-e)f_{ji}$ *для всех* i, j *от* 1 *до* n, $i \neq j$.

Доказательство. Будем строить g_{ij}, h_{ij} $1 \leqslant i, j \leqslant n$ так, что

$$g_{ij}h_{st} = h_{st}g_{ij} = 0,\ g_{ij}g_{st} = \delta_{js}g_{it},\ h_{ij}h_{st} = \delta_{js}h_{it} \tag{2.3}$$

для всех i, j, s, t от 1 до n.

Сначала покажем, что из (2.1) и (2.2) можно получить

$$a_{ik}a_{ki}a_{ij} = a_{ik}a_{kj},\ a_{ik}a_{ki}a_{im}a_{mk} = a_{im}a_{mk} \tag{2.4}$$

для всех различных i, k, j, m от 1 до n.

Действительно, имеют место равенства $a_{ik}a_{ki}a_{ij} = a_{ik}(a_{kj}+a_{ij}a_{ki}) = a_{ik}a_{kj}$, $a_{ik}a_{ki}a_{im}a_{mk} = a_{ik}(a_{km}+a_{im}a_{ki})a_{mk} = a_{ik}a_{km}a_{mk} = (a_{im}+a_{km}a_{ik})a_{mk} = a_{im}a_{mk}$.

Из (2.4) $a_{im}a_{mj} = a_{ik}a_{kj}$ для $i \neq j$, так как выполнены равенства $a_{ik}a_{kj} \overset{(2.4)}{=} a_{ik}a_{ki}a_{ij} \overset{(2.2)}{=} a_{ik}a_{ki}(a_{im}a_{mj} - a_{mj}a_{im}) \overset{(2.1)}{=} a_{ik}a_{ki}a_{im}a_{mj} \overset{(2.4)}{=} a_{im}a_{mj}$.

Положим $g_{ij} = a_{ik}a_{kj},\ h_{ij} = a_{ki}a_{jk},\ g_{ii} = g_{ij}g_{ji},\ h_{ii} = h_{ij}h_{ji},\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Элементы $g_{ij},\ h_{ij}$ корректно определены в силу последнего доказанного равенства и соотношений (2.4).

Прямым вычислением с использованием равенств (2.1), (2.2), (2.4) получаем, что равенства (2.3) выполнены для всех i, j, s, t от 1 до n.

Положим

$$f_{ij} = g_{ij} + h_{ij}. \tag{2.5}$$

Тогда $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ — система матричных единиц кольца S. Положим $e = \sum\limits_{i=1}^{n} g_{ii}$. Тогда $e^2 = e$ и $e = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1}g_{11}f_{1i}$, т. е. $e \in \{\sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1}rf_{1i} \mid r \in S\}$.

Кроме того, получаем $ef_{ij}-(1-e)f_{ji} = ef_{ij}+ef_{ji}-f_{ji} = g_{ij}+g_{ji}-g_{ji}-h_{ji} = g_{ij} - h_{ji} = a_{ij}$. Предложение доказано.

Предложение 2.2. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 1, \varphi : \mathrm{E}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — гомоморфизм групп и*

$$(\varphi(E + re_{ij}) - E)(\varphi(E + se_{kp}) - E) = 0 \tag{2.6}$$

для всех $r, s \in R$ и всех i, j, k, p таких, что $i \neq j, j \neq k, k \neq p, p \neq i$.

Тогда существуют идемпотент $f \in \mathrm{Mat}_m(S)$, кольцевой гомоморфизм

$$\theta_1 : \mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_m(S)f$$

и кольцевой антигомоморфизм

$$\theta_2 : \mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow (E - f)\mathrm{Mat}_m(S)(E - f),$$

такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) + E - \theta_1(E) - \theta_2(E)$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Доказательство. Положим $\varphi(E+re_{ij}) = E+x_{ij}(r)$, $r \in R$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Из равенства $E + rse_{ij} = [E + re_{ik}, E + se_{kj}]$, $i \neq j$, $k \neq i$, $j \neq k$ и условия (2.6) получаем, что

$$x_{ij}(rs) = x_{ik}(r)x_{kj}(s) - x_{kj}(s)x_{ik}(r), \tag{2.7}$$

где $i \neq j$, $k \neq i$, $j \neq k$.

Соотношения (2.7) выводятся следующим образом. Выполнены равенства:

$$\begin{gathered}(E + se_{kj})(E + re_{ik})(E + rse_{ij}) = (E + re_{ik})(E + se_{kj}),\\ \varphi(E + se_{kj})\varphi(E + re_{ik})\varphi(E + rse_{ij}) = \varphi(E + re_{ik})\varphi(E + se_{kj}),\\ (E + x_{kj}(s)(E + x_{ik}(r))(E + x_{ij}(rs)) = (E + x_{ik}(r))(E + x_{kj}(s)),\\ (E + x_{kj}(s) + x_{ik}(r) + x_{kj}(s)x_{ik}(r))(E + x_{ij}(rs)) = E + x_{ik}(r) + x_{kj}(s) + x_{ik}(r)x_{kj}(s).\end{gathered}$$

Из условия (2.6) получаем, что $x_{ij}(r)x_{kp}(s) = 0$ при $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq p$, $p \neq i$. Значит, $E + x_{kj}(s) + x_{ik}(r) + x_{kj}(s)x_{ik}(r) + x_{ij}(rs) = E + x_{ik}(r) + x_{kj}(s) + x_{ik}(r)x_{kj}(s)$, откуда следует равенство (2.7).

Положим $a_{ij} = x_{ij}(1)$. Из (2.6), (2.7) и предложения 2.2 получаем, что в S существуют f_{ij} — система матричных единиц и идемпотент f, такие, что

$$x_{ij}(1) = ff_{ij} - (E - f)f_{ji}. \tag{2.8}$$

В силу равенств (2.6) и (2.7) получаем

$$\begin{gathered}
x_{ij}(r) = x_{ik}(r)x_{kj}(1) - x_{kj}(1)x_{ik}(r) = \\
= x_{ik}(r)(x_{km}(1)x_{mj}(1) - x_{mj}(1)x_{km}(1)) - x_{kj}(1)(x_{im}(1)x_{mk}(r) - x_{mk}(r)x_{im}(1)) = \\
= x_{ik}(r)x_{km}(1)x_{mj}(1) + x_{kj}x_{mk}(r)x_{im}(1) = (x_{im}(1)x_{mk}(r) - x_{mk}(r)x_{im}(1))x_{km}x_{mj} + \\
+ (x_{km}(1)x_{mj}(1) - x_{mj}(1)x_{km}(1))x_{mk}(r)x_{im}(1) = x_{im}(1)x_{mk}(r)x_{km}(1)x_{mj}(1) - \\
- x_{mj}(1)x_{km}(1)x_{mk}(r)x_{im}(1) = (x_{ik}(1)x_{km}(1) - x_{km}(1)x_{ik}(1))x_{mk}(r)x_{km}(1)x_{mj}(1) - \\
- x_{mj}(1)x_{km}(1)x_{mk}(r)(x_{ik}(1)x_{km}(1) - x_{km}(1)x_{ik}(1)) = \\
= x_{ik}(1)x_{km}(1)x_{mk}(r)x_{km}(1)x_{mj}(1) + x_{mj}(1)x_{km}(1)x_{mk}(r)x_{km}(1)x_{ik}(1) = \\
= g_{im}x_{mk}(r)g_{kj} + h_{jk}x_{mk}(r)h_{mi}
\end{gathered}$$

(i, j, k, m различны) в обозначениях предыдущей леммы. Значит, имеет место

$$x_{ij}(r) = (\sum_{t=1}^{n} g_{t1}g_{1m}x_{mk}(r)g_{k1}g_{1t})f_{ij} + (\sum_{t=1}^{n} h_{t1}h_{1k}x_{mk}(r)h_{m1}h_{1t})f_{ji}.$$

Из равенств (2.6) и (2.7) следует, что коэффициенты перед f_{ij} и f_{ji} в последней сумме не зависят от выбора m и k. Тогда выполнены соотношения

$$x_{ij}(r) = b(r)f_{ij} - c(r)f_{ji}, b(r) = fb(r)f,\ c(r) = (E-f)c(r)(E-f),$$
$$c(r) \in \sum_{t=1}^{n} h_{t1}\mathrm{Mat}_{\,n}(S)\sum_{t=1}^{n} h_{1t}, \quad (2.9)$$

Из равенства (2.7) получаем, что $b : R \longrightarrow f\mathrm{Mat}\,(S)_m f$ — гомоморфизм колец, $c : R \longrightarrow (E-f)\mathrm{Mat}\,(S)_m(E-f)$ — антигомоморфизм колец.

Положим

$$\theta_1(\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}e_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} b(r_{ij})f_{ij}, \quad (2.10)$$

$$\theta_2(\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}e_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} c(r_{ji})f_{ij}. \quad (2.11)$$

Тогда $\theta_1 : \mathrm{Mat}_{\,n}(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_{\,m}(S)f$ — гомоморфизм колец, $\theta_2 : \mathrm{Mat}_{\,n}(R) \longrightarrow (E-f)\mathrm{Mat}_{\,m}(S)(E-f)$ — антигомоморфизм колец.

Далее,

$$\varphi(E+r_{ij}) = E + x_{ij}(r) = E + b(r)f_{ij} - c(r)f_{ji} = E + \theta_1(re_{ij}) - \theta_2(re_{ij}) =$$
$$= E + \theta_1(re_{ij}) + \theta_2(-re_{ij}) =$$
$$= \theta_1(E+re_{ij}) + \theta_2(E-re_{ij}) + E - \theta_1(E) - \theta_2(E),$$
$$\varphi(AB) = (\theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) +$$
$$+ E - \theta_1(E) - \theta_2(E)(\theta_1(B) + \theta_2(B^{-1}) + E - \theta_1(E) - \theta_2(E)) =$$
$$= \theta_1(AB) + \theta_2(B^{-1}A^{-1}) + E - \theta_1(E) - \theta_2(E).$$

Значит,

$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) + E - \theta_1(E) - \theta_2(E) \ \forall\ A \in \mathrm{E}_n(R).$$

Предложение доказано.

Имеют место следующие утверждения, которые мы докажем в разделе 2:

Предложение 2.3. *Пусть R, S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4, m \geqslant 2$, $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп, $\Lambda = \{3^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $S^1 = \mathrm{Mat}_m(S)\Lambda^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы Λ, $\tau : \mathrm{Mat}_m(S) \longrightarrow S^1$ — канонический гомоморфизм. Тогда*

$$(\tau\varphi(E+re_{ij}) - E)(\tau\varphi(E+se_{pq}) - E) = 0$$

для всех i, p от 1 до 2, j, q от 3 до 4, $r, s \in R$.

Предложение 2.4. *Пусть R, S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4, m \geqslant 2, \varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп, $T = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $S^2 = \mathrm{Mat}_m(S)T^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы Λ, $\pi : \mathrm{Mat}_m(S) \longrightarrow S^2$ — канонический гомоморфизм. Тогда*

$$(\pi\varphi(E+re_{ij}) - E)(\pi\varphi(E+se_{pq}) - E) = 0$$

для всех i, p от 1 до 2, j, q от 3 до 4, $r, s \in R$.

2.2 Доказательство основной теоремы (теоремы 3).

Из предложений 2.3 и 2.4

$$(\varphi(E+re_{ij}) - E)(\varphi(E+se_{pq}) - E) \in \ker\tau \cap \ker\pi.$$

Если $x \in \ker\tau \cap \ker\pi$, то $2^{k_1}x = 3^{k_2}x = 0$ для некоторых k_1 и $k_2 \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $x = 0$ (т. к. 2^{k_1} и 3^{k_2} взаимно просты). Значит,

$$(\varphi(E + re_{ij}) - E)(\varphi(E + se_{pq}) - E) = 0 \qquad (2.12)$$

для всех i, p от 1 до 2, j, q от 3 до 4, $r, s \in R$.

Сопрягая равенство (2.12) матрицами соответствующих транспозиций, получаем, что оно выполнено для всех i, j, p, q от 1 до n таких, что $i \neq j, j \neq p, p \neq q, q \neq i$. Тогда по предложению 3 существует идемпотент f кольца $\mathrm{Mat}_m(S)$, кольцевой гомоморфизм $\theta_1 : \mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_m(S)f$, и кольцевой антигомоморфизм $\theta_2 : \mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow (E - f)\mathrm{Mat}_m(S)(E - f)$ такие что $\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) + E - \theta_1(E) - \theta_2(E) \ \ \forall A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Легко видеть, что

$$f_{ij} = \theta_1(e_{ij}) + \theta_2(e_{ji}),\ \text{где } 1 \leqslant i, j \leqslant n, h_1 = \theta_1(E), h_2 = \theta_2(E), h = h_1 + h_2.$$

Покажем, что h — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}_m(S)$. Действительно, $\varphi(E+e_{ij}) = \theta_1(E+e_{ij})+\theta_2(E-e_{ij})+E-\theta_1(E)-\theta_2(E) = \theta_1(e_{ij})-\theta_1(e_{ij})+E = E + \theta_1(E)\theta_1(e_{ij}) - \theta_2(E)\theta_2(e_{ij}) = E + \theta_1(E)(\theta_1(e_{ij}) - \theta_2(e_{ji})) - \theta_2(E)(\theta_1(e_{ji}) - \theta_2(e_{ij})) = E + h_1 f_{ij} - h_2 f_{ji}$. Таким образом,

$$\varphi(E + e_{ij}) = E + h_1 f_{ij} - h_2 f_{ji}. \qquad (2.13)$$

Из представления (2.13) для $\varphi(E+e_{12}), \varphi(E+e_{ij}), 2 \leqslant i \neq j \leqslant n$ получаем, что $\forall r \in \mathrm{Mat}_m(S)$ элемент $E+h_1 f_{11} r(E-h)$ коммутирует с $\varphi(E+e_{12}), \varphi(E+e_{ij}), 2 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Но централизатор множества $\{E + e_{12}, E + e_{ij} | 2 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$ коммутирует с $E + e_{21}$ (устанавливается прямым подсчетом). Значит, из (2.13) следует $(h_1 f_{21} - h_2 f_{12})(h_1 f_{11} r(E - h)) = (h_1 f_{11} r(E - h))(h_1 f_{21} - h_2 f_{12})$. Отсюда $h_1 f_{21} r(E - h) = 0$. Умножая это равенство слева на f_{12}, получаем, что

$$h_1 f_{11} r(E - h) = 0.$$

Аналогично элемент $E+h_2 f_{11} r(E-h)$ коммутирует с $\varphi(E+e_{21}), \varphi(E+e_{ij}), 2 \leqslant i \neq j \leqslant n$, и

$$h_2 f_{11} r(E - h) = 0.$$

Так как $(h_1+h_2)f_{11} = f_{11}$, то $f_{11} r(E-h) = 0$. Таким же образом получаем $f_{ii} r(E-h) = 0$ для всех i от 1 до n. При этом $h = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}$, откуда $hr(E-h) = 0$. Аналогично получаем, что $(E - h)rh = 0$. Значит,

$$h \text{ — центральный идемпотент в } \mathrm{Mat}_m(S). \qquad (2.14)$$

Из (2.14)
$$E-\theta_1(E)-\theta_2(E)=tE,\ t^2=t,\ t\in Z(S). \tag{2.15}$$

Для всех $A\in \mathrm{E}_n(R)$ выполнены равенства $\varphi(A)=\theta_1(A)+\theta_2(A^{-1})+E-h=h(\theta_1(A)+\theta_2(A^{-1}))+E+h\Rightarrow \varphi(\mathrm{E}_n(R))\subseteq h\mathrm{Mat}_m(S)+E-h$.

По определению
$$\mathrm{E}_m(tS)=\langle E+tse_{ij}\rangle\,,\quad s\in S.$$

Тогда
$$\mathrm{E}_m(tS)=\langle E+(E-h)se_{ij}\rangle\,,\quad s\in S,$$

поэтому $\mathrm{E}_m(tS)$ коммутирует с $\varphi(\mathrm{E}_n(R))$. Следовательно, $\varphi^{-1}(\mathrm{E}_m(tS))$ коммутирует с $\mathrm{E}_n(R)$. Значит, $\varphi^{-1}(\mathrm{E}_m(tS))\subseteq Z(\mathrm{GL}_n(R))$, откуда $\mathrm{E}_m(tS)\subseteq Z(\mathrm{GL}_m(S))$. Из равенства
$$\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$$

получаем $t^2=0$. Следовательно, из (2.15) $t=0$ и
$$\theta_1(E)+\theta_2(E)=E,\ \varphi(A)=\theta_1(A)+\theta_2(A^{-1})\ \forall A\in \mathrm{E}_n(R). \tag{2.16}$$

Тогда получаем, что $\{f_{ij}\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}$ — полная система матричных единиц кольца $\mathrm{Mat}_m(S)$.

Пусть $\overline{S}=\{\sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1}rf_{1i}\mid r\in \mathrm{Mat}_m(S)\}$. Аналогично (2.16) получаем для обратного отображения $\varphi^{-1}:\mathrm{GL}_n(\overline{S})\longrightarrow \mathrm{GL}_n(R)$, где $\mathrm{Mat}_n(\overline{S})\cong \mathrm{Mat}_m(S)$ (по лемме 2.1), что существует идемпотент e кольца $\mathrm{Mat}_n(R)$, кольцевой гомоморфизм $\theta_3:\mathrm{Mat}_n(\overline{S})\longrightarrow e\mathrm{Mat}_n(R)e$ и кольцевой антигомоморфизм $\theta_4:\mathrm{Mat}_n(\overline{S})\longrightarrow (E-e)\mathrm{Mat}_n(R)(E-e)$, такие, что
$$\theta_3(E)+\theta_4(E)=E,\ \varphi^{-1}(B)=\theta_3(B)+\theta_4(B^{-1})\ \forall B\in \mathrm{E}_n(\overline{S}). \tag{2.17}$$

Покажем, что $\theta_4\theta_1=\theta_3\theta_2=0$. Действительно, из (2.16), (2.17), учитывая, что $\varphi(E+e_{ij})=\theta_1(E+e_{ij})+\theta_2(E-e_{ij})\in \mathrm{E}_n(\overline{S})$, получаем
$$e_{ij}=(\theta_3\theta_1+\theta_4\theta_2)(e_{ij})-(\theta_3\theta_2+\theta_4\theta_1)(e_{ij}),e_{ji}=(\theta_3\theta_1+\theta_4\theta_2)(e_{ji})-(\theta_3\theta_2+\theta_4\theta_1)(e_{ji})$$

при $i\neq j$.

Из этих равенств следует, что

$$e_{ii} = (\theta_3\theta_1 + \theta_4\theta_2)(e_{ii}) + (\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1)(e_{jj}).$$

Аналогично выполнено равенство

$$e_{kk} = (\theta_3\theta_1 + \theta_4\theta_2)(e_{kk}) + (\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1)(e_{jj}),$$

где $k \neq i,\ k \neq j$. Перемножая два последних равенства, получаем, что $0 = (\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1)(e_{jj})$. Такое равенство можно получить для любого j, значит, $\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1 = 0$ и, следовательно,

$$\theta_3\theta_2 = \theta_4\theta_1 = 0. \tag{2.18}$$

По (2.10), (2.11), (2.16) и (2.18) имеем

$$0 = \theta_3\theta_2(E) = \theta_3(E - f),\ 0 = \theta_4\theta_1(E) = \theta_4(f). \tag{2.19}$$

Покажем, что e и f — центральные идемпотенты в $\mathrm{Mat}_n(R)$ и $\mathrm{Mat}_m(S)$ соответственно. Пусть $A \in E_n(R)$, тогда $A = \varphi^{-1}(\varphi(A)) = \varphi^{-1}(B) = \theta_3(B) + \theta_4(B^{-1})$, где $B = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) \in \mathrm{E}_n(\overline{S})$. Следовательно, $eA = Ae$, то есть e коммутирует с $\mathrm{E}_n(R)$. Значит, e — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}_n(R)$.

По (2.8), (2.17), (2.19) имеем

$$\begin{aligned} E + e_{ij} = \varphi^{-1}(E + ff_{ij} - (E-f)f_{ji}) = \theta_3(E + ff_{ij} - (E-f)f_{ji}) + \\ + \theta_4(E - ff_{ij} + (E-f)f_{ji}) = E + \theta_3(ff_{ij}) + \theta_4((E-f)f_{ji}) \text{ при } i \neq j. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\theta_3(ff_{ij}) = ee_{ij}$, $\theta_4((E-f)f_{ji}) = (E-e)e_{ij}$. Тогда получаем, учитывая (2.19),

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(E + f_{ij}) = \varphi^{-1}(E + ff_{ij} + (E-f)f_{ij}) = \\ = \theta_3(E + ff_{ij}) + \theta_4(E - (E-f)f_{ij}) = E + ee_{ij} - (1-e)e_{ji} \text{ при } i \neq j. \end{aligned}$$

Следовательно, система матричных единиц кольца $\mathrm{Mat}_n(R)$, построенная по формулам (2.3) и (2.5), где $a_{ij} = \varphi^{-1}(E + f_{ij})$, совпадает со стандартной системой матричных единиц данного кольца. Это означает, что

$$\varphi^{-1}(B) = \theta_3(B) + \theta_4(B^{-1}) \in \mathrm{E}_n(R) \text{ при } B \in \mathrm{E}_n(\overline{S}). \tag{2.20}$$

Тогда $B = \varphi(\varphi^{-1}(B)) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1})$, где $B \in \mathrm{E}_n(\overline{S}), A = \theta_3(B) + \theta_4(B^{-1}) \in \mathrm{E}_n(R)$. Следовательно, $fB = Bf$, то есть f коммутирует с $\mathrm{E}_n(\overline{S})$. Значит, f — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}_m(S)$.

Учитывая (2.20), аналогично соотношениям $\theta_4\theta_1 = \theta_3\theta_2 = 0$ несложно вывести равенства $\theta_1\theta_4 = \theta_2\theta_3 = 0$. Отсюда в свою очередь следует, что

$$\theta_1(E-e) = \theta_2(e) = 0. \tag{2.21}$$

В силу (2.16), (2.20) и (2.21) имеем

$$\varphi^{-1}(\varphi(E+ere_{ij})) = \varphi^{-1}(E+\theta_1(ere_{ij})) = \\ = \theta_3(E+\theta_1(ere_{ij})) + \theta_4(E) = E + \theta_3\theta_1(ere_{ij}),\ r\in R, i\neq j,$$

следовательно, $\theta_3\theta_1(ere_{ij}) = ere_{ij}$. Аналогично в силу (2.17), (2.20) и (2.21)

$$\varphi(\varphi^{-1}(E+fsf_{ij})) = \varphi(E+\theta_3(fsf_{ij})) = \\ = \theta_1(E+\theta_3(fse_{ij})) + \theta_2(E) = E + \theta_1\theta_3(fsf_{ij}),\ s\in \overline{S}, i\neq j$$

следовательно, $\theta_1\theta_3(fsf_{ij}) = fsf_{ij}$. Значит, $\theta_1 : e\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_m(S)$ — биективное отображение, то есть изоморфизм колец. Аналогично $\theta_2 : (1-e)\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow (1-f)\mathrm{Mat}_m(S)$ является биективным отображением, то есть антиизоморфизмом колец. А в силу (2.16) имеем $\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2((1-e)A^{-1})$ для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$. Теорема доказана.

Также имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$ и $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты e и f колец $\mathrm{Mat}_n(R)$ и $\mathrm{Mat}_m(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : e\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_m(S),$$

кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-e)\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow (1-f)\mathrm{Mat}_m(S)$$

и групповой гомоморфизм

$$\chi : \mathrm{GE}_n(R) \longrightarrow Z(\mathrm{GL}_m(S)),$$

такие, что

$$\varphi(A) = \chi(A)(\theta_1(eA) + \theta_2((1-e)A^{-1}))$$

для всех $A \in \mathrm{GE}_n(R)$.

Доказательство. Уже доказано, что существуют требуемые θ_1, θ_2, такие, что $\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2((1-e)A^{-1})$ для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Положим
$$\varphi_1(B) = \varphi^{-1}(\theta_1(eB) + \theta_2((1-e)B^{-1})$$
для всех $B \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тогда $\varphi_1(A) = A$ для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Пусть $B \in \mathrm{GE}_n(R)$, $A \in \mathrm{E}_n(R)$. Тогда $BAB^{-1} \in \mathrm{E}_n(R)$. Следовательно,

$$BAB^{-1} = \varphi_1(BAB^{-1}) = \varphi_1(B)A\varphi_1(B)^{-1}.$$

Значит, $B^{-1}\varphi_1(B)$ лежит в централизаторе подгруппы $\mathrm{E}_n(R)$ в $\mathrm{GL}_n(R)$, то есть $B^{-1}\varphi_1(B) \in Z(\mathrm{GL}_n(R))$. Тогда $\omega = \varphi(B^{-1}\varphi_1(B)) \in Z(\mathrm{GL}_m(S))$ и

$$\varphi(B)\omega = \varphi\varphi_1(B) = \varphi(\varphi^{-1}(\theta_1(eB)+\theta_2((1-e)B^{-1}))) = (\theta_1(eB)+\theta_2((1-e)B^{-1}),$$

откуда
$$\varphi(B) = \omega^{-1}(\theta_1(eB) + \theta_2((1-e)B^{-1})).$$
Из последнего равенства легко вывести, что отображение, при котором $B \mapsto \omega^{-1}$, является гомоморфизмом групп. Теорема доказана.

2.3 Доказательство вспомогательных предложений 3 и 4.

Лемма 2.2. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, M — не содержащая 0 коммутативная мультипликативная система, $M \subseteq Z(R)$, $R^1 = RM^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы M, $\beta : R \longrightarrow R^1$ — канонический гомоморфизм. Пусть $a \in R^1$, $a^2 = 0$. Тогда существует $h \in M$, такой, что найдется $b \in R^*$ со свойством $\beta(b) = 1 + \beta(h)a$. Причем такой элемент будет существовать для всех $1 + \beta(hh_1)a$, $h_1 \in M$.*

Доказательство. По свойству канонического гомоморфизма

$$a = \beta(s)^{-1}\beta(c), \quad s \in M.$$

По условию
$$a^2 = 0 \Rightarrow \beta(c)^2 = 0 \Rightarrow \exists l \in M : lc^2 = 0.$$
Возьмем $b = lc + 1$, тогда

$$\beta(b) = 1 + \beta(l)\beta(c) = 1 + \beta(ls)a.$$

Элемент b обратим, так как $(lc)^2 = 0$. Если взять $b = lch_1 + 1$, то b останется обратимым и $\beta(b) = 1 + \beta(lsh_1)a$.

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, M — не содержащая 0 коммутативная мультипликативная система, $M \subseteq Z(R)$, $R^1 = RM^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы M, $\beta : R \longrightarrow R^1$ — канонический гомоморфизм. Пусть $a, b \in R^1, a = \beta(d),\ ab = ba$. Тогда существует $h \in M$, такой, что у элемента $\beta(h)b$ при отображении β найдется прообраз t со свойством $td = dt$, причем такой t будет существовать для всех $\beta(hh_1)b,\ h_1 \in M$.*

Доказательство. Пусть $b = \beta(s)^{-1}\beta(c),\ s \in M$, тогда $a\beta(c) = \beta(c)a$. Пусть $cd - dc = p$, тогда $\beta(p) = 0 \Rightarrow \exists l \in M : lp = 0$. Рассмотрим элемент lc. Выполнены равенства $lcd = dlc$, $\beta(lc) = \beta(l)\beta(s)b = \beta(ls)b$. Если взять $t = lh_1c,\ h_1 \in M$, то получим, что $lh_1cd = dlh_1c$ и $\beta(lh_1c) = \beta(lsh_1)b$. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, M — не содержащая 0 коммутативная мультипликативная система, $M \subseteq Z(R)$, $R^1 = RM^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы M, $\beta : R \longrightarrow R^1$ — канонический гомоморфизм. Пусть $a, b_1, b_2 \in R^1,\ a^2 = 0,\ b_1 = \beta(d_1),\ b_2 = \beta(d_2),\ ab_1 = b_1a,\ ab_2 = b_2a$. Тогда существует $h \in M$, такой, что найдется $t \in R^*$ со свойствами $td_1 = d_1t,\ td_2 = d_2t,\ \beta(t) = \beta(h)a + 1$, причем такой t будет существовать для всех $\beta(hw)a + 1,\ w \in M$.*

Доказательство. Так как $ab_1 = b_1a,\ ab_2 = b_2a$, то по лемме 3 получаем, что найдется $q_1 \in R : dq_1 = q_1d,\ \beta(q_1) = \beta(h_1)a$, также существует $q_2 \in R$, такой, что $dq_2 = q_2d,\ \beta(q_2) = \beta(h_2)a$. По лемме 2.3 у элемента $\beta(h_1h_2)a$ также существуют прообразы $q_1',\ q_2'$, такие, что $q_1'd_1 = d_1q_1',\ q_2'd_2 = d_2q_2'$. Тогда $\beta(q_1' - q_2') = 0$. Значит, найдется $l \in M : lq_1' = lq_2' = q$ (по свойству канонического гомоморфизма). Тогда q коммутирует с d_1 и с d_2, $\beta(q) = \beta(lq_1') = \beta(lh_1h_2)a$. По условию $a^2 = 0$, значит, $\beta(q^2) = 0$, следовательно, найдется $h_3 \in M$, такой, что $h_3q^2 = 0$ (по свойству канонического гомоморфизма). Тогда элемент $1 + h_3q$ обратим. Положим $t = 1 + h_3q$, тогда t коммутирует с d_1 и с d_2, $t \in R^*$, и $\beta(t) = \beta(1 + h_3q) = 1 + \beta(h_3)\beta(q) = 1 + \beta(lh_2h_1h_3)a$. Для $\beta(hw)a + 1,\ w \in M$ положим $t = 1 + wh_3q$. Лемма 2.4 доказана.

Предложение 2.5. *Пусть R, S — ассоциативные кольца с 1, $\{e_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 4\}$ — стандартная система матричных единиц $\mathrm{Mat}_4(R)$, T — подкольцо S, Z — централизатор T в S, $z = \langle 1_R \rangle$,*

$$G_1 = \{a \in \mathrm{E}_4(z) \mid a \in E + (e_{11} + e_{22})\mathrm{Mat}_4(R)(e_{11} + e_{22})\},$$
$$G_2 = \{E + r(e_{13} + e_{24}) \mid r \in R\}, G = \langle G_1, G_2 \rangle.$$

Пусть $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}_2(S)$ — гомоморфизм групп, причем

$$\varphi(G_2) \subseteq \mathrm{GL}_2(T), \varphi(G_1) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in Z \right\}$$

и существует $a \in G_1$, такой, что $\varphi(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon$ и $(\varepsilon\delta^{-1})^2 - 1$ не является делителем 0 в S. Тогда

$$(\varphi(E + re_{ij}) - E)(\varphi(E + se_{km}) - E) = 0 \qquad (2.22)$$

для всех i, k от 1 до 2, j, m от 3 до 4 и $r, s \in R$.

Доказательство. Если $g \in G_2, h \in G_1$, то

$$hgh^{-1} \in E + (e_{11} + e_{22})\mathrm{Mat}_4(R)(e_{33} + e_{44}),$$

так как
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ar \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\varphi(E + r(e_{13} + e_{24})) = A_r = \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix}, \quad \varphi(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

a — элемент из условия. Тогда A_r перестановочна с A_s, так как

$$\begin{aligned}(E + r(e_{13} + e_{24}))&(E + s(e_{13} + e_{24})) = \\ &= (E + s(e_{13} + e_{24}))(E + r(e_{13} + e_{24})) = E + (r + s)(e_{13} + e_{24}).\end{aligned}$$

Матрица A_r перестановочна с

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} A_s \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix},$$

так как в прообразе этот элемент имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ar \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и выполнены равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Ar \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ar+s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ar \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $a_r a_s + b_r c_s = a_s a_r + b_s c_r$ (так как A_r и A_s перестановочны), $a_r a_s + \delta\varepsilon^{-1} b_r c_s = a_s a_r + \varepsilon\delta^{-1} b_s c_r$ (так как A_r и $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} A_s \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}$ перестановочны, и ε, δ перестановочны с T). Вычтем одно равенство из другого, получим:

$$(\delta\varepsilon^{-1} - 1) b_r c_s = (\varepsilon\delta^{-1} - 1) b_s c_r,$$
$$(1 - \varepsilon\delta^{-1}) b_r c_s = \varepsilon\delta^{-1}(\varepsilon\delta^{-1} - 1) b_s c_r.$$

Также выполнено $\varepsilon\delta^{-1}(1 - \varepsilon\delta^{-1})(b_s c_r + \delta\varepsilon^{-1} b_r c_s) = 0$, следовательно, $b_s c_r = -\delta\varepsilon^{-1} b_r c_s$ (т. к. $1 - \varepsilon\delta^{-1}$ не является делителем нуля в S).

Элемент A_r коммутирует с $\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} A_s \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, откуда $-\delta^{-1}\varepsilon b_r c_s = b_s c_r$ (аналогично предыдущему).

Значит, $\delta\varepsilon^{-1} b_r c_s = \delta^{-1}\varepsilon b_r c_s$, и т. к. $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon$, то $\varepsilon\delta^{-1} b_r c_s = \delta\varepsilon^{-1} b_r c_s \Rightarrow ((\varepsilon\delta^{-1})^2 - 1) b_r c_s = 0 \Rightarrow b_r c_s = 0$, т. к. $(\varepsilon\delta^{-1})^2 - 1$ не является делителем нуля в S.

Из условия перестановочности A_r с A_s и $\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} A_s \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ получаем:

$$c_s b_r + d - s d_r = c_r b_s + d_r d_s$$
$$\delta\varepsilon^{-1} c_s b_r + d_s d_r = \varepsilon\delta^{-1} c_r b_s + d_r d_s.$$

Также выполнены импликации

$$(\delta\varepsilon^{-1} - 1) c_s b_r = (\varepsilon\delta^{-1} - 1) c_r b_s \Longrightarrow c_s b_r = -\varepsilon\delta^{-1} c_r b_s \Longrightarrow c_r b_s = -\varepsilon^{-1}\delta c_s b_r,$$
$$c_s b_r = -\varepsilon^{-1}\delta c_r b_s \Longrightarrow c_r b_s = -\varepsilon\delta^{-1} c_s b_r,$$
$$\varepsilon^{-1}\delta c_s b_r = \varepsilon\delta^{-1} c_s b_r \Longrightarrow (1 - (\varepsilon\delta^{-1})^2) c_s b_r = 0 \Longrightarrow c_s b_r = 0.$$

Таким образом, выполнено

$$b_r c_s = c_s b_r = 0 \tag{2.23}$$

для всех $r, s \in R$.

Если $h \in G_1$, то $\varphi(h) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ и

$$[A_r, \varphi(h)] = \begin{pmatrix} a_{-r} & b_{-r} \\ c_{-r} & d_{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{-r} & b_{-r} \\ c_{-r} & d_{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & \lambda^{-1}\mu b_r \\ \mu^{-1}\lambda c_r & d_r \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{-r} & b_{-r} \\ c_{-r} & d_{-r} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (\lambda^{-1}\mu - 1)b_r \\ \mu^{-1}\lambda - 1)c_r & 0 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (\lambda^{-1}\mu - 1)b_r \\ \mu^{-1}\lambda - 1)c_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda^{-1}\mu - 1)b_r \\ \mu^{-1}\lambda - 1)c_r & 1 \end{pmatrix}$$

в силу (2.23), того что λ, μ коммутируют с T и $(A_r)^{-1} = A_{-r}$.

Пусть

$$G_3 = \left\langle h\,[d, h_1]\,h^{-1} \mid h, h_1 \in G_1, d \in G_2 \right\rangle.$$

Так как $A_{-r}A_r = E$, то

$$a_{-r}b_r = -b_{-r}d_r, c_{-r}a_r = -d_{-r}c_r. \tag{2.24}$$

В силу выражения, полученного для $[A_r, \varphi(h)]$, имеем

$$\varphi(h[d, h_1]h^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha a_{-r}b_r \\ \beta d_{-r}c_r & 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in Z,$$
$$\varphi(\overline{h}[\overline{d}, \overline{h_1}]\overline{h}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha} a_{-r}b_r \\ \overline{\beta} d_{-r}c_r & 1 \end{pmatrix}, \overline{\alpha}, \overline{\beta} \in Z,$$

где $h, h_1, \overline{h}, \overline{h} \in G_1, d, \overline{d} \in G_2$. Тогда в силу (2.23) и (2.24) получаем

$$\varphi(h[d, h_1]h^{-1}), \varphi(\overline{h}[\overline{d}, \overline{h_1}]\overline{h}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ ** & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, для любого $g \in G_3$ выполнено $\varphi(g) = \begin{pmatrix} 1 & x_g \\ y_g & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$x_{g_1}y_{g_2} = y_{g_2}x_{g_1} = 0 \ \forall g_1, g_2 \in G_3. \tag{2.25}$$

Так как G_3 содержит все элементы вида $E + re_{ij}, r \in R, 1 \leqslant i \leqslant 2, 3 \leqslant j \leqslant 4$, то из (2.25) получаем (2.22). Предложение доказано.

Предложение 2.6. *Пусть S — ассоциативное кольцо с 1, $\frac{1}{3} \in S$, $\exists\, a, b \in S$, такие, что*
$$a^2 + a + 1 = 0, b^2 = 1, bab = a^2.$$
Тогда существует полная система матричных единиц $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ кольца S, такая, что $b = f_{12} + f_{21}, a = -f_{11} - f_{21} + f_{12}$.

Доказательство. Положим $f_{11} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}ba$, $f_{22} = 1 - f_{11}$, $f_{12} = f_{11}b$, $f_{21} = bf_{11}$. Предложение доказано.

Доказательство предложения 2.3. Положим

$$\begin{aligned}
&a_1 = \tau\varphi(E - 2e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21}),\ a_2 = \tau\varphi(E - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43}),\\
&b_1 = \tau\varphi(E - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21}),\ b_2 = \tau\varphi(E - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}),\\
&c_1 = \tau\varphi(E - 2e_{11} - 2e_{22}),\ c_2 = \tau\varphi(E - 2e_{33} - 2e_{44}).
\end{aligned}$$

Тогда

$$a_1a_2 = a_2a_1,\ a_1b_2 = b_2a_1,\ a_2b_1 = b_1a_2,\ b_1b_2 = b_2b_1, \tag{2.26}$$
$$c_ia_j = a_jc_i,\ c_ib_j = b_jc_i, \tag{2.27}$$
$$a_i^3 = 1,\ b_i^2 = 1,\ b_ia_ib_i = a_i^2, \tag{2.28}$$

где $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.

Положим $e_i = E - \frac{1}{3}(E + a_i + a_i^2)$. Из (2.26) — (2.28) следует, что

$$e_i^2 = e_i,\ e_ie_j = e_je_i,\ e_i \text{ коммутирует с } a_j,\ b_j,\ c_j, \tag{2.29}$$

где $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.

Из (2.28), (2.29) по предложению 2.1 существует полная система матричных единиц $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ в $e_1S^1e_1$, существует полная система матричных единиц $\{f_{st} \mid 3 \leqslant s, t \leqslant 3\}$ в $e_2S^1e_2$ и выполнены свойства:

$$f_{11} + f_{22} = e_1,\ f_{33} + f_{44} = e_2,\ f_{ij}f_{st} = f_{st}f_{ij} \tag{2.30}$$

(из (2.26), (2.27) и определения $f_{ij},\ f_{st}$),

$$a_1 = -f_{11} - f_{21} + f_{12} + E - e_1,\ b_1e_1 = f_{12} + f_{21} \tag{2.31}$$

(из предложения 2.6 и того, что $a_1 = e_1a_1 + E - e_1$),

$$a_2 = -f_{33} - f_{43} + f_{34} + E - e_2,\ b_1e_1 = f_{34} + f_{43} \tag{2.32}$$

(из предложения 2.6 и того, что $a_2 = e_2 a_2 + E - e_2$),

$$c_k f_{ij} = f_{ij} c_k$$

(из (2.26), (2.27), (2.29) и определения f_{ij}), где $1 \leqslant k \leqslant 2$, $(i, j, s, t) \in \{1, 2\}^4 \cup \{3, 4\}^4$.

Пункт 1. Докажем, что

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0. \tag{2.33}$$

Положим $g_{ij} = f_{ij} f_{33}$, $g_{ij+2} = f_{ij} f_{34}$, $g_{ij} = f_{i+2j} f_{43}$, $g_{i+2j+2} = f_{ij} f_{44}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.

Из (2.30) $\{g_{st} \mid 3 \leqslant s, t \leqslant 3\}$ — полная система матричных единиц кольца $e_1 e_2 S^1 e_1 e_2$.

Элементы $e_1 e_2 S^1 e_1 e_2$ будем отождествлять с их образами при изоморфизме α из леммы 2.1.

Из (2.31), (2.32) получаем

$$e_1 e_2 a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, e_1 e_2 a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

потому что $e_1 e_2 a_1 = (f_{33} + f_{44})(-f_{11} - f_{21} + f_{12}) = -g_{11} - g_{21} + g_{12} - g_{22} - g_{43} + g_{34}$, $e_1 e_2 a_2 = (f_{11} + f_{22})(-f_{33} - f_{43} + f_{34}) = -g_{11} - g_{22} - g_{31} + g_{13} - g_{42} + g_{24}$,

$$e_1 e_2 b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_1 e_2 b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(получается аналогичными вычислениями),

$$e_1 e_2 c_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, e_1 e_2 c_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

(т. к. $e_1 e_2 c_1, e_1 e_2 c_2$ коммутируют с g_{ij}, $e_1 e_2 b_1$ и с $e_1 e_2 b_2$).

Далее, если h коммутирует с $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, то

$$\left[h, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right] = E$$

(из перестановочности с данной матрицей, воспользовавшись тем, что $\frac{1}{3} \in S^1$, получим, что $h = \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$, для нее очевидно выполнено утверждение про коммутатор).

Тогда если $d \in \mathrm{GL}_m(S)$ коммутирует с $\varphi(E - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43})$, то

$$[d, \varphi(E - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21}), \varphi(E - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43})] = E.$$

Применяя τ к последнему равенству, получаем

$$[\tau(d), b_1, b_2] = E.$$

Рассмотрим матрицу

$$E + \begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 = 0.$$

Значит, по лемме 2.2 существует k со следующим свойством: найдется $d \in \mathrm{GL}_m(S)$, такое, что

$$\tau(d) = E + 3^k \begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда получаем, что

$$e_1e_2\tau(d) = e_1e_2\tau(d)e_1e_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3^k & 0 & 3^k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3^k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, a_2 коммутирует с $\tau(d)$ (в силу равенств $\tau(d) = E + 3^k(-g_{12} + g_{14} - g_{32}) = 1+3^k f_{12}(-f_{33}+f_{34}-f_{43}), a_2 = -f_{33}-f_{43}+f_{34}+E-e_2)$, значит, по лемме 3 найдется l с тем свойством, что $3^l d$ коммутирует с $\varphi(E-2e_{33}-e_{44}+e_{34}-e_{43})$. Поэтому $[3^l\tau(d), b_1, b_2] = [\tau(d), b_1, b_2] = E$ и $e_1e_2[\tau(d), b_1, b_2] = e_1e_2$.

Т. к. $\tau(d), b_1, b_2$ коммутируют с e_1e_2 и $(e_1e_2)^2 = e_1e_2$, то из последнего равенства получаем

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -3^k & 0 & 3^k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3^k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим 3^k через λ. Выполнено равенство

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2 & \lambda & \lambda^2+1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2 & \lambda & \lambda^2+1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2 & \lambda & \lambda^2+1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы на месте (1,4), видим, что $\lambda g_{14} = 0$. Следовательно, $g_{14} = 0$, т. к. $\lambda^{-1} = (3^k)^{-1} \in S^1$. Тогда $g_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$, значит, $e_1e_2 = \sum\limits_{i=1}^{4} g_{ii} = 0$. Пункт 1 завершен.

Положим

$$c_3 = \tau\varphi(E - e_{11} - e_{22} - e_{33} - e_{44} + e_{13} + e_{24} + e_{31} + e_{42}).$$

Тогда
$$c_3^2 = c_3, c_3a_1c_3 = a_2, c_3b_1c_3 = b_2, c_3c_1c_3 = c_2.$$
Положим $f_{33} = c_3f_{11}c_3, f_{44} = c_3f_{22}c_3$. Из (2.33) $f_{11}, f_{22}, f_{33}, f_{44}$ — ортогональные идемпотенты. Значит, система $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant 4\}$, где $f_{i,j+2} = f_{ij}c_3, f_{i+2,j} = c_3f_{ij}$, $1 \leqslant i,j \leqslant 2$, — это полная система матричных единиц кольца $(e_1+e_2)S^1(e_1+e_2)$, причем
$$c_3 = f_{13} + f_{24} + f_{31} + f_{42} + (E - e_1 - e_2)c_3(E - e_1 - e_2). \tag{2.34}$$
Пункт 2. Пусть $\overline{Z} =< 1_R >$ и
$$G_1 = \{a \in \mathrm{E}_n(\overline{Z}) \mid a \in E + (e_{11}+e_{22})\mathrm{Mat}_n(R)(e_{11}+e_{22})\}. \tag{2.35}$$
Покажем, что $\tau\varphi(G_1)$ коммутирует с e_1 и e_2.

Группа G_1 коммутирует с $E-2e_{33}-e_{44}+e_{34}-e_{43}$, значит, a_2 перестановочен с $\tau\varphi(G_1)$ (по определению a_2). Тогда по определению e_2 получаем, что $\tau\varphi(G_1)$ коммутирует с e_2.

Пусть
$$h = E - e_{11} - e_{22} - e_{33} - e_{44} + e_{13} + e_{24} + e_{31} + e_{42}$$
и
$$G_3 = \{ahah \mid a \in G_1\}.$$
Тогда централизатор G_3 в $\mathrm{GL}_n(R)$ совпадает с централизатором множества $\{E - 2e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21} - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43}, E - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21} - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}\}$ (прямым подсчетом получаем, что централизатор имеет вид $a(e_{11}+e_{22}) + b(e_{13}+e_{24}) + c(e_{31}+e_{42}) + t(e_{33}+e_{44})$). Таким образом, если $d \in \mathrm{GL}_m(S)$ и $\tau(d)$ коммутирует с a_1a_2, b_1b_2, то $\tau(d)$ коммутирует с $\tau\varphi(G_3)$ (по лемме 3 найдется l со свойством, что 3^ld коммутирует с $\varphi(E-2e_{11}-e_{22}+ +e_{12}-e_{21}-2e_{33}-e_{44}+e_{34}-e_{43}), \varphi(E-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21}-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43})$, значит, сам d также с ними коммутирует). Следовательно, для $d_1 = E + 3^k(f_{13}+f_{24}), d_2 = E + 3^k(f_{31}+f_{42})$ получаем, что d_1 и d_2 коммутируют с $\tau\varphi(G_3)$ ($(f_{13}+f_{24})^2 = (f_{31}+f_{42})^2 = 0$; значит, по лемме 2.2 найдется k, такой, что $d_1, d_2 \in \tau(\mathrm{GL}_m(S))$).

Поэтому $\tau\varphi(G_3)$ коммутирует с d_1d_2 и, следовательно, с $(f_{31}+f_{42})(f_{13}+f_{24}) = f_{33}+f_{44} = e_2$. Тогда для $a \in G_1$ $\tau\varphi(a)c_3\tau\varphi(a)c_3$ коммутирует с e_2, т. к. $\tau\varphi(h) = c_3$. Из определения e_1, e_2 и равенств $c_3a_2c_3 = a_1, c_3^2 = 1$ следует, что

$c_3e_2c_3 = e_1$. Далее, выполнены равенства

$$\tau\varphi(a)c_3\tau\varphi(a)c_3e_2 = e_2\tau\varphi(a)c_3\tau\varphi(a)c_3,$$
$$\tau\varphi(a)c_3\tau\varphi(a)e_1 = \tau\varphi(a)e_2c_3\tau\varphi(a),$$
$$c_3\tau\varphi(a)e_1 = e_2c_3\tau\varphi(a).$$

Следовательно, $\tau\varphi(a)e_1 = e_1\tau\varphi(a)$. Пункт 2 завершен.

Пункт 3. Покажем, что $e_2\tau\varphi(G_1)$ лежит в центре кольца $e_2S^1e_2$, где G_1 из (2.35).

Рассмотрим матрицы

$$E - 2e_{11} - e_{22} - e_{21} + e_{21}$$

и

$$E - 2e_{11} - e_{12} + e_{21} = (E - e_{12})(E - 2e_{11} - e_{22} - e_{21} + e_{21})^{-1}(E + e_{12}).$$

Прямым подсчетом получаем, что если A коммутирует с этими матрицами, то A коммутирует с $e_{11} + e_{22}$ и, значит, имеет вид

$$(e_{11} + e_{22})A(e_{11} + e_{22}) + (E - e_{11} - e_{22})A(E - e_{11} - e_{22}).$$

Тогда элементы

$$[A, E - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43}], \quad [A, E - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}]$$

коммутируют с G_1.

Рассмотрим матрицу

$$d_r = E + 3^k f_{33}rf_{44}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r \in S^1.$$

Элемент $f_{33}rf_{44}$ коммутирует с a_1 в силу (2.31) и с

$$\tau\varphi(E - 2e_{11} - e_{12} + e_{21})$$

в силу (2.31) и пункта 2. Также выполнено равенство $(f_{33}rf_{44})^2 = 0$, значит, по лемме 2.4 найдется k, такой, что существует обратимый прообраз $E+3^k f_{33}rf_{44}$ при отображении τ, который коммутирует с

$$\varphi(E - 2e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21})$$

и с

$$\varphi(E - 2e_{11} - e_{12} + e_{21}).$$

Пусть

$$E + 3^k f_{33} r f_{44} = \tau(q_r),$$

где q_r коммутирует с

$$\varphi(E - 2e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21}), \quad \varphi(E - 2e_{11} - e_{12} + e_{21})$$

и $q_r \in \mathrm{GL}_m(S)$. Тогда

$$[\varphi^{-1}(q_r), E - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43}], \quad [\varphi^{-1}(q_r), E - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}]$$

коммутируют с G_1 и, значит, $[d_r, a_2]$, $[d_r, b_2]$ коммутируют с $\tau\varphi(G_1)$, а $[E + f_{33} r f_{44}, a_2]$, $[E + f_{33} r f_{44}, b_2]$ коммутируют с $\tau\varphi(G_1)$. Кроме того, a_2, b_2 коммутируют с $\tau\varphi(G_1)$, т. к. их прообразы коммутируют. Следовательно,

$$M_r = \{[E + f_{33} r f_{44}, a_2],\ [E + f_{33} r f_{44}, b_2],\ a_2,\ b_2\}$$

коммутирует с $\tau\varphi(G_1)$.

Кольцо, порожденное элементами

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

содержит $\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $C_{e_2 S^1 e_2}(\bigcup\limits_{r \in S^1} M_r) \subseteq Z(e_2 S^1 e_2)$. Выше доказано, что $\tau\varphi(G_1)$ коммутирует с $\bigcup\limits_{r \in S^1} M_r$. Тогда $e_2 \tau\varphi(G_1)$ тоже коммутирует с $\bigcup\limits_{r \in S^1} M_r$, следовательно, $e_2 \tau\varphi(G_1) \subseteq Z(e_2 S^1 e_2)$, что и требовалось. Пункт 3 завершен.

Пункт 4. Пусть

$$G_4 = \{E + (e_{11} + e_{22}) r (e_{33} + e_{44}) \mid r \in \mathrm{Mat}_n(R)\}.$$

Покажем, что

$$\tau\varphi(G_4) \subseteq (e_1 + e_2) S^1 (e_1 + e_2) + E - e_1 - e_2.$$

Элемент $\tau\varphi(E + \lambda(e_{13} + e_{24}))$, $\lambda \in R$, коммутирует с $a_1 a_2$ (потому что $(E - 2e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21})(E - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43})$ и $E + \lambda(e_{13} + e_{24})$

коммутируют). Далее, из (2.31), (2.32), (2.33) следует, что $a_1 + a_2 = a_1a_2 + E, a_1^2 + a_2^2 = (a_1a_2)^2 + E$. Тогда из определения e_1 и e_2 получаем равенство $e_1 + e_2 = \frac{1}{3}(-(a_1a_2)^2 - a_1a_2 + 2E)$. Значит, $\tau\varphi(E + \lambda(e_{13} + e_{24}))$ коммутирует с $e_1 + e_2$.

Если $d = \tau\varphi(E+\lambda(e_{13}+e_{24}))$ и $g \in \tau\varphi(G_1)$, то gdg^{-1} коммутирует с e_1+e_2 (так как в пункте 2 мы показали, что 2 $\tau\varphi(G_1)$ коммутирует с e_1 и с e_2). Если элемент коммутирует с e_1+e_2, то он принадлежит $(e_1+e_2)S^1(e_1+e_2)+(E-e_1-e_2)S^1(E-e_1-e_2)$. Значит, получаем, что

$$g_1 \in (e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2) + (E - e_1 - e_2)S^1(E - e_1 - e_2),$$

для $g_1 \in \tau\varphi(G_1)$ и

$$gdg^{-1} \in (e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2) + (E - e_1 - e_2)S^1(E - e_1 - e_2).$$

Из (2.31)

$$a_1 \in (e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2) + E - e_1 - e_2.$$

Значит, получаем, что

$$\begin{gathered}[gdg^{-1}, a_1] \in (e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2) + E - e_1 - e_2,\\ g_1[gdg^{-1}, a_1]g_1^{-1} \in (e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2) + E - e_1 - e_2,\end{gathered}$$

где $g_1 \in G_1$.

Элемент $[gdg^{-1}, a_1]$ при отображении $\tau\varphi$ имеет в прообразе матрицу

$$\left[\begin{pmatrix} C & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}^{-1}, \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \lambda(1-A)C\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} C & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G_1.$$

Элемент $g_1[gdg^{-1}, a_1]g_1^{-1}$ при отображении $\tau\varphi$ имеет в прообразе матрицу

$$\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} C & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}^{-1}, \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda D(1-A)C\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} C & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G_1$ (здесь $A = \begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$).

Целочисленными элементарными преобразованиями строк и столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

и сложением возникающих матриц можно получить

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Значит, все G_4 порождается матрицами, образами которых при отображении $\tau\varphi$ являются $[gdg^{-1}, a_1]$ и $g_1[gdg^{-1}, a_1]g_1^{-1}$.

Все G_4 порождается матрицами, образы которых принадлежат $(e_1+e_2)S^1(e_1+e_2)+E-e_1-e_2$, поэтому, $\tau\varphi(G_4) \in (e_1+e_2)S^1(e_1+e_2)+E-e_1-e_2$. Пункт 4 завершен.

Теперь положим $h_{11}=e_1,\ h_{22}=e_2,\ h_{12}=f_{13}+f_{24},\ h_{21}=f_{31}+f_{42},\ \overline{S} = \{\sum\limits_{i=1}^{2} h_{i1}rh_{1i} \mid r \in S^1\}$. Тогда $(e_1+e_2)S^1(e_1+e_2) \cong \mathrm{Mat}\,_2(\overline{S})$.

Значит, для $r \in R$ по пункту 4 получаем $\tau\varphi(E+r(e_{13}+e_{24})) = \begin{pmatrix}a_r & b_r\\ c_r & d_r\end{pmatrix} + E-e_1-e_2$. Из пункта 2 следует, что для $g \in \tau\varphi(G_1)$ $g = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix} + (E-e_1-e_2)g(E-e_1-e_2)$. Из пункта 3 вытекает, что $e_2\mu\alpha = e_2\alpha\mu$ для всех $\alpha \in \overline{S}$, а отсюда, домножая равенство на соответствующие матричные единицы, получаем $e_1\mu\alpha = e_1\alpha\mu$ для всех $\alpha \in \overline{S}$. Из этих равенств следует, что μ лежит в центре $\overline{S}$.

Выполнены равенства

$$c_3gc_3g = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix} + (E-e_1-e_2)c_3gc_3g(E-e_1-e_2) =$$
$$= \begin{pmatrix}\lambda\mu & 0\\ 0 & \lambda\mu\end{pmatrix} + (E-e_1-e_2)c_3gc_3g(E-e_1-e_2),$$

где c_3 из (2.34). Элемент c_3gc_3g коммутирует с $\tau\varphi(E+r(e_{13}+e_{24}))$, и, значит, $\lambda\mu$ коммутирует с a_r, b_r, c_r, d_r, следовательно, λ коммутирует с a_r, b_r, c_r, d_r.

Еще $a_1 \in \tau\varphi(G_1),\ a_1 = \begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + E-e_1-e_2, \varepsilon = -f_{11}+f_{12}-f_{21}$ и $\varepsilon^2 - 1_{\overline{S}} = -f_{11}-f_{12}+f_{21}-2f_{22}$ не является делителем нуля в $\overline{S}$ т. к. это обратимый элемент (из-за того, что $\frac{1}{3} \in S^1$).

Пусть $G =< G_1, G_4 >,\ \overline{\varphi} = (e_1+e_2)\tau\varphi$. Тогда $\overline{\varphi} : G \longrightarrow \mathrm{GL}\,_2(\overline{S})$ — гомоморфизм групп, т. к. $(e_1+e_2)^2 = e_1+e_2$ и $\tau\varphi(G_1),\ \tau\varphi(G_4)$ коммутируют с e_1+e_2. Значит, по предложению 5 имеем $(e_1+e_2)(\tau\varphi(E+re_{ij})-E)(\tau\varphi(E+$

$se_{pq})-E)=0$, но т. к. $\tau\varphi(E+re_{ij})-E,\ \tau\varphi(E+se_{pq})-E\in(e_1+e_2)S^1(e_1+e_2)$ (из пункта 4), то $(e_1+e_2)(\tau\varphi(E+re_{ij})-E)(\tau\varphi(E+se_{pq})-E)=(\tau\varphi(E+re_{ij})-E)(\tau\varphi(E+se_{pq})-E)=0$. Предложение доказано.

Предложение 2.7. *Пусть S — ассоциативное кольцо с 1 и $\frac{1}{2}$, $a,b,c\in S$ и*

$$a^2=b^2=c^2=1,\ ab=ba,\ cac=b.$$

Тогда существует система матричных единиц $\{f_{ij}\mid 1\leqslant i,j\leqslant 2\}$ кольца S, такая, что

$$ab=1-2(f_{11}+f_{22}),\ b=1-2f_{22}+b_1,\ c=f_{12}+f_{21}+c_1,$$

где $b_1,c_1\in(1-f_{11}-f_{22})S(1-f_{11}-f_{22})$.

Доказательство. Пусть $f_{13}=\frac{1}{2}(1-a), f_{23}=\frac{1}{2}(1-b)$. Положим $f_{11}=f_{13}-f_{13}f_{23}, f_{22}=f_{23}-f_{13}f_{23}, f_{12}=f_{11}c, f_{21}=cf_{11}$. Прямым подсчетом можно проверить, что построенные матричные единицы удовлетворяю условию. Предложение доказано.

Предложение 2.8. *Пусть S — ассоциативное кольцо с 1 и $\frac{1}{2}, k(r)\in\mathbb{Z}$ для всех $r\in S$ и H — подгруппа в $\mathrm{GL}_2(S)$, порожденная элементами $e_{12}+e_{21},[E+2^{k(r)}re_{12},e_{12}+e_{21}]$ для всех $r\in S$. Тогда централизатор группы H в кольце матриц $\mathrm{Mat}_2(S)$ совпадает с центром кольца $\mathrm{Mat}_2(S)$.*

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ лежит в централизаторе группы H. Тогда

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

откуда $a=d,b=c$. Далее,

$$[E+2^{k(r)}re_{12}]=\begin{pmatrix}1&-2^{k(r)}r\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2^{k(r)}r&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2^{2k(r)}r^2&-2^{k(r)}r\\2^{k(r)}r&1\end{pmatrix},$$

значит,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2^{2k(r)}r^2&-2^{k(r)}r\\2^{k(r)}r&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2^{2k(r)}r^2&-2^{k(r)}r\\2^{k(r)}r&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы на месте $(1,2)$, получаем, что

$$-a2^{k(r)}r+b=(1-2^{2k(r)}r^2)b-2^{k(r)}ra. \tag{2.36}$$

Из (2.36) при $r = 1$ следует, что $2^{2k(1)}b = 0$ и $b = 0$. Тогда $2^{k(r)}(ar) = 2^{k(r)}(ra)$ и $ar = ra$. Значит, a лежит в центре S и $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, то есть $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ лежит в центре $\mathrm{Mat}_2(S)$. Предложение доказано.

Предложение 2.9. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $n \geqslant 4$, $a \in \mathrm{GL}_n(R)$, $C_G(a)$ — централизатор a в $\mathrm{GL}_n(R)$. Тогда группа $\langle [C_G((E + e_{12})(E + e_{13})), E + e_{13}] \rangle$ коммутативна.*

Доказательство. Пусть $h \in C_G(E + e_{12} + e_{13})$. Тогда

$$h^{-1}(e_{12} + e_{13}) = (e_{12} + e_{13})h^{-1}$$

и

$$h^{-1}e_{13} = (e_{12} + e_{13})h^{-1}e_{33} = \alpha e_{13}, \quad \alpha \in R.$$

Значит, $h^{-1}e_{13}h = e_{13}\alpha h$.

К тому же $(e_{12}+e_{13})h = h(e_{12}+e_{13})$ и $e_{13}h(e_{12}+e_{31})e_{31} = e_{13}(e_{12}+e_{13})he_{31}$, то есть $e_{13}he_{11} = 0$. Значит,

$$\begin{aligned}[][h, E + e_{13}] = h^{-1}(E - e_{13})h(E + e_{13}) = (E - h^{-1}e_{13}h)(E + e_{13}) = \\ = E - h^{-1}e_{13}he_{13} - h^{-1}e_{13}h + e_{13} = E + e_{13}(E - \alpha h)\end{aligned}$$

и

$$[h, E + e_{13}] \in E + e_{11}\mathrm{Mat}_n(R)(E - e_{11}).$$

Матрицы из $E + e_{11}\mathrm{Mat}_n(R)(E - e_{11})$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы перемножаются по правилу

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13}\dots & b_{1,n-1} & b_{1n} & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\dots & a_{1,n-1}+b_{1,n-1} & a_{1n}+b_{1n} & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому группа $E + e_{11}\mathrm{Mat}\,_n(R)(E - e_{11})$ коммутативна, а, следовательно, группа $\langle [C_G((E+e_{12})(E+e_{13})), E+e_{13}]\rangle$ также коммутативна. Предложение доказано.

Доказательство предложения 2.4. В предложении 2.7 положим $a = \pi\varphi(E-2e_{11}-2e_{33}),\ b = \pi\varphi(E-2e_{22}-2e_{33}),\ c = \pi\varphi(E-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21})$. Тогда в S^2 существует система матричных единиц $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$, такая, что

$$\pi\varphi(E-2(e_{11}+e_{22})) = E-2(f_{11}+f_{22}), \tag{2.37}$$
$$\pi\varphi(E-2(e_{22}+e_{33})) = E-2f_{22}+b_1, \tag{2.38}$$
$$\pi\varphi(E-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21}) = f_{12}+f_{21}+c_1,$$

где $b_1, c_1 \in (E-f_{11}-f_{22})S^2(E-f_{11}-f_{22})$.

В предложении 2.7 положим $a = \pi\varphi(E-2e_{11}-2e_{33}),\ b = \pi\varphi(E-2e_{11}-2e_{44}),\ c = \pi\varphi(E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43})$. Тогда в S^2 существует система матричных единиц $\{f_{st} \mid 3 \leqslant s, t \leqslant 4\}$, такая, что

$$\pi\varphi(E-2(e_{33}+e_{44})) = E-2(f_{33}+f_{44}), \tag{2.39}$$
$$\pi\varphi(E-2(e_{11}+e_{44})) = E-2f_{44}+b_2, \tag{2.40}$$
$$\pi\varphi(E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}) = f_{34}+f_{43}+c_2,$$

где $b_2, c_2 \in (E-f_{33}-f_{44})S^2(E-f_{33}-f_{44})$.

Пункт 1. Покажем, что

$$(f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44}) = 0.$$

Пусть
$$f = (f_{11} + f_{22})(f_{33} + f_{44}).$$
Имеем
$$4f_{22} = ((E - 2f_{22} + b_1) - E)((E - 2(f_{11} + f_{22})) - E)$$
(так как $b_1 \in (E - f_{11} - f_{22})S^2(E - f_{11} - f_{22})$),
$$4f_{11} = -2((E-2(f_{11}+f_{22}))-E)-4f_{22}, \quad f_{12} = (f_{12}+f_{21}+c_1)f_{22}, \quad f_{21} = f_{22}(f_{12}+f_{21}+c_1)$$
(так как $c_1 \in (E - f_{11} - f_{22})S^2(E - f_{11} - f_{22})$). Кроме того, элементы $\pi\varphi(E - 2(e_{11}+e_{22}))$, $\pi\varphi(E-2(e_{22}+e_{33}))$, $\pi\varphi(E-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21})$ коммутируют с элементами $\pi\varphi(E-2(e_{11}+e_{22}))$, $\pi\varphi(E-2(e_{33}+e_{44}))$. Значит, элемент $f_{11}+f_{22}$ коммутирует с $f_{33}+f_{44}$, элемент $E-2f_{22}+b_1$ коммутирует с $f_{33}+f_{44}$ и $f_{11}+f_{22}$, элемент $f_{12} + f_{21} + c_1$ коммутирует с $f_{33} + f_{44}$ и $f_{11} + f_{22}$.

Тогда получаем:
$$\begin{aligned} ff_{22} = (f_{11} + f_{22})(f_{33} + f_{44})\frac{1}{4}((E - 2f_{22} + b_1) - E)(E - 2(f_{11} + f_{22}) - E) = \\ = \frac{1}{4}((E - 2f_{22} + b_1) - E)(E - 2(f_{11} + f_{22}) - E)f = f_{22}f, \end{aligned}$$
$$ff_{11} = (f_{11} + f_{22})(f_{33} + f_{44})\frac{1}{4}(-2(E - 2(f_{11} + f_{22}) - E) - 4f_{22}) = f_{11}f,$$
$$\begin{aligned} ff_{12} &= (f_{11} + f_{22})(f_{33} + f_{44})(f_{12} + f_{21} + c_1)f_{22} = \\ &= (f_{12} + f_{21} + c_1)(f_{11} + f_{22})(f_{33} + f_{44})f_{22} = (f_{12} + f_{21} + c_1)f_{22}f = f_{12}f, \end{aligned}$$
$$ff_{21} = (f_{11} + f_{22})(f_{33} + f_{44})f_{22}(f_{12} + f_{21} + c_1) = f_{21}f.$$
Значит,
$$ff_{ij} = f_{ij}f \tag{2.41}$$
для всех i, j от 1 до 2.

Положим $g_{ij} = ff_{ij}$, где i, j от 1 до 2. Тогда из (2.41) система $\{g_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ является полной системой матричных единиц кольца fS^2f. При этом выполнены равенства:

$$f\pi\varphi(E-2(e_{33}+e_{22})) = f(E-2f_{22}+b_1) = f(E-2f_{22}) = \tag{2.42}$$
$$= f(f_{11}+f_{22})(E-2f_{22}) = f(f_{11}-f_{22}) = g_{11}-g_{22},$$
$$f\pi\varphi(E-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21}) = f(f_{12}+f_{21}+c_1) = \tag{2.43}$$
$$= f(f_{21}+f_{21}) = g_{12}+g_{21},$$
$$f\pi\varphi(E-2(e_{11}+e_{22})) = f(E-2(f_{11}+f_{22})) = f-2f = -f,$$
$$f\pi\varphi(E-2(e_{33}+e_{44})) = f(E-2(f_{33}+f_{44})) = f-2f = -f. \tag{2.44}$$

Элементы $\sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}g_{ij}$ будем записывать в виде матриц (a_{ij}).

Выполнены равенства

$$\pi\varphi(E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43})f = (f_{34}+f_{43}+c_2)f = (f_{34}+f_{43}+c_2)(f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44}) =$$
$$= (f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44})(f_{34}+f_{43}+c_2) = f\pi\varphi(E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}).$$

Элемент $\pi\varphi(E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43})$ коммутирует с $\pi\varphi(E-2(e_{11}+e_{22}))$. Следовательно, $f_{34}+f_{43}+c_2$ коммутирует с $f_{11}+f_{22}$. Тогда

$$f\pi\varphi(E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}) \in fS^2f.$$

Пусть $f\pi\varphi(E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Выполнено соотношение

$$[E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}, E-2(e_{22}+e_{33})] = E-2(e_{33}+e_{44}).$$

Значит, из (2.42), (2.44)

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $2a = 2d = 0$, откуда $a = d = 0$.

Кроме того, имеем $[E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}, E-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21}] = 1$, значит, из (2.43) $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow b = c$.

Таким образом,

$$f\pi\varphi(E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43})=\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix},\text{ причем } b^2=f.$$

Пусть $A\in\mathrm{GL}_n(R)$ и A коммутирует с $E-2(e_{11}+e_{22})$. Тогда $[A,E-2(e_{22}+e_{33})]$ коммутирует с $e_{11}+e_{22}$ (так как A коммутирует с $e_{11}+e_{22}$, и $E-2(e_{22}+e_{33})$ коммутирует с $e_{11}+e_{22}$), значит, $[A,E-2(e_{22}+e_{33}),E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}]\in E+(E-e_{11}-e_{22})\mathrm{Mat}_n(R)(E-e_{11}-e_{22})$ и

$$[[A,E-2(e_{22}+e_{33}),E-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}],E-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21}]=E. \quad (2.45)$$

По лемме 2.4 существует $B\in\mathrm{GL}_m(S)$, такой, что B коммутирует с $\varphi(E-2(e_{11}+e_{22}))$ и $\pi(B)=E+2^kg_{12}$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$, так как $(g_{12})^2=0$.

Из (2.45) получаем, что:

$$f\left[\left[\left[\begin{pmatrix}1&2^k\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right],\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}\right],\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]=f. \quad (2.46)$$

Также выполнены равенства:

$$\left[\begin{pmatrix}1&2^k\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&-2^{k+1}\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&-2^{k+1}\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&2^{k+1}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2^{k+1}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2^{2k+2}&2^{k+1}\\-2^{k+1}&1\end{pmatrix}.$$

Значит, из (2.46) получаем, что

$$\begin{pmatrix}1-2^{2k+2}&2^{k+1}\\-2^{k+1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2^{2k+2}&2^{k+1}\\-2^{k+1}&1\end{pmatrix},$$

откуда $(1-2^{2k+2})f=f$, следовательно $2^{2k+2}f=0$, то есть $f=0$, так как $\frac{1}{2}\in S^2$. Пункт 1 завершен.

Положим

$$c=\pi\varphi(E-e_{33}-e_{44}+e_{31}+e_{42}-e_{11}-e_{22}+e_{13}+e_{24}).$$

Тогда $c^2=E$ и из (2.37), (2.38), (2.39), (2.40) мы получаем $c(E-2(f_{11}+f_{22}))c=E-2(f_{33}+f_{44})$, откуда $c(f_{11}+f_{22})c=f_{33}+f_{44}$.

Из определения матричных единиц в предложении 2.7 видно, что $cf_{11}c=f_{33}, cf_{22}c=f_{44}$. Из пункта 1 следует равенство $f_{ii}f_{jj}=0, i\neq j$. Значит, систему $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\} \cup \{f_{st} \mid 3 \leqslant s, t \leqslant 4\}$ можно дополнить до системы матричных единиц $\{f_{pq} \mid 1 \leqslant p, q \leqslant 4\}$ кольца S^2, причем

$$c = f_{13} + f_{24} + f_{31} + f_{42} + c_1,$$

где $c_1 \in (E - f_{11} - f_{22} - f_{33} - f_{44})S^2(E - f_{11} - f_{22} - f_{33} - f_{44})$.

Пункт 2. Положим $f = f_{11} + f_{22} + f_{33} + f_{44}$. Покажем, что $\pi\varphi(E + re_{ij}) \in E + fS^2 f$ для всех различных i, j от 1 до 4, $r \in R$.

Выполнено равенство $[E + re_{ij}, E - 2(e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44})] = E$, следовательно,

$$\begin{aligned}\pi\varphi(E + re_{ij})(E - 2(f_{11} + f_{22}))(E - 2(f_{33} + f_{44})) = \\ = (E - 2(f_{11} + f_{22}))(E - 2(f_{33} + f_{44}))\pi\varphi(E + re_{ij})\end{aligned}$$

(из (2.37), (2.39)). Значит, $\pi\varphi(E + re_{ij})(E - 2f) = (E - 2f)\pi\varphi(E + re_{ij})$ и $f\pi\varphi(E + re_{ij}) = \pi\varphi(E + re_{ij})f$. Тогда получаем, что

$$\pi\varphi(E + re_{ij}) = a_{ij}(r) + b_{ij}(r), \tag{2.47}$$

где $a_{ij}(r) \in fS^2 f, b_{ij}(r) \in (E - f)S^2(E - f)$.

Далее, выполнены равенства

$$E + 2re_{13} = [E - re_{13}, E - 2(e_{11} + e_{22})],$$
$$\pi\varphi(E - 2(e_{11} + e_{22})) = E - 2(f_{11} + f_{22}) \in E + fS^2 f.$$

Значит,

$$\pi\varphi(E + 2re_{13}) = [\pi\varphi(E - re_{13}), \pi\varphi(E - 2(e_{11} + e_{22}))],$$

откуда

$$\pi\varphi(E + 2re_{13}) \in E + fS^2 f. \tag{2.48}$$

Нормальная подгруппа в $\mathrm{E}_4(R)$, порожденная элементами $E + 2re_{13}$, содержит все элементы вида $E + 2re_{ij}$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant 4$ (доказывается с помощью равенства $E + rse_{ij} = [E + re_{ik}, E + se_{kj}]$).

Легко проверить, что $a_{ij}(r)^2 + b_{ij}(r)^2 = \pi\varphi(E + re_{ij})^2 = \pi\varphi(E + 2re_{ij}) = a_{ij}(2r) + b_{ij}(2r)$, следовательно, $b_{ij}(2r) = b_{ij}(r)^2$.

Из (2.47), (2.48) получаем $\pi\varphi(E + 2re_{ij}) \in E + fS^2 f, 1 \leqslant i \neq j \leqslant 4$, откуда

$$b_{ij}(r)^2 = b_{ij}(2r) = E - f. \tag{2.49}$$

Аналогично (2.47) выводится $\pi\varphi(E - e_{22} - e_{33} + e_{23} + e_{32}) = \overline{d} + \overline{c}$, где $\overline{d} \in fS^2f, \overline{c} \in (E-f)S^2(E-f)$. Положим $\overline{a} = b_{12}(1), \overline{b} = b_{13}(1)$.

Выполнено равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из него следует, что $(\overline{d} + \overline{c})b_{12}(1)(\overline{d} + \overline{c}) = b_{13}(1)$, откуда $(\overline{d} + \overline{c})\overline{a}(\overline{d} + \overline{c}) = \overline{b}$. Значит, $\overline{cac} = \overline{b}$.

Из равенства (2.49)

$$\overline{b}^2 = E - f, \overline{a}^2 = E - f, \overline{c}^2 = E - f.$$

Выполнены условия предложения 2.7, значит, существует такая система матричных единиц $\{\overline{f_{ij}} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant 2\}$ кольца $(E-f)S^2(E-f)$, что для $\overline{f} = E - f - \overline{f_{11}} - \overline{f_{22}}$

$$\overline{a}\overline{b} = E - f - 2(\overline{f_{11}} + \overline{f_{22}}),\ \overline{b} = E - f - 2\overline{f_{22}} + b_1,\ b_1 \in \overline{f}S^2\overline{f}.$$

Существуют $k > 0$ и элементы g и h из $\mathrm{GL}_m(S)$, коммутирующие с $\varphi((E+e_{12})(E+e_{13}))$ и обладающие свойствами $\pi(g) = E+2^k\overline{f_{21}},\ \pi(h) = E+2^k\overline{f_{21}}$ (по лемме 2.4). Тогда по предложению 2.9 элементы $[E+2^k\overline{f_{12}}, \pi\varphi(E+e_{13})],\ [E+2^k\overline{f_{21}}, \pi\varphi(E+e_{13})]$ перестановочны.

Выполнены равенства:

$$[E+2^k\overline{f_{12}}, \pi\varphi(E+e_{13})] = (E+2^k\overline{f_{12}})^{-1}\overline{b}'(E+2^k\overline{f_{12}})\overline{b} + (E+2^k\overline{f_{12}})^{-1}\overline{a}'(E+2^k\overline{f_{12}})\overline{a},$$
$$[E+2^k\overline{f_{21}}, \pi\varphi(E+e_{13})] = (E+2^k\overline{f_{21}})^{-1}\overline{b}'(E+2^k\overline{f_{21}})\overline{b} + (E+2^k\overline{f_{21}})^{-1}\overline{a}'(E+2^k\overline{f_{21}})\overline{a},$$

где $\overline{b}'$— обратный элемент к $\overline{b}$ в кольце $(E-f)S^2(E-f)$, $\overline{a}'$ — обратный элемент к $\overline{a}$ в кольце fS^2f (так как f коммутирует с $E+2^k\overline{f_{12}}$ и с $E+2^k\overline{f_{21}}$).

Значит, коммутируют $(E+2^k\overline{f_{12}})^{-1}\overline{b}'(E+2^k\overline{f_{12}})\overline{b}$ и $(E+2^k\overline{f_{21}})^{-1}\overline{b}'(E+2^k\overline{f_{21}})\overline{b}$. Тогда, так как $\overline{f_{11}} + \overline{f_{22}}$ коммутирует с элементами $E+2^k\overline{f_{12}},\ E+2^k\overline{f_{21}},\ \overline{b}$, получаем, что $[\overline{f_{11}}+\overline{f_{22}}+2^k\overline{f_{12}}, \overline{f_{11}}+\overline{f_{22}}-2\overline{f_{22}}]$ и $[\overline{f_{11}}+\overline{f_{22}}+2^k\overline{f_{12}}, \overline{f_{11}}+\overline{f_{22}}-2\overline{f_{22}}]$ перестановочны (коммутаторы написаны для мультипликативной группы кольца $(\overline{f_{11}}+\overline{f_{22}})S^2(\overline{f_{11}}+\overline{f_{22}})$).

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2^{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^{k+1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2^{k+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2^{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы на месте $(1,1)$, видим, что

$$(1+2^{2k+2})\overline{f_{11}} = \overline{f_{11}},$$

откуда

$$(1+2^{2k+2})(\overline{f_{11}}+\overline{f_{22}}) = \overline{f_{11}}+\overline{f_{22}},$$

поэтому $\overline{f_{11}}+\overline{f_{22}}=0$.

Тогда $\overline{a}\overline{b} = E$. Также имеем $\pi\varphi((E+e_{12})(E+e_{13})) = a_{12}(1)a_{13}(1) + b_{12}(1)b_{13}(1) = a_{12}(1)a_{13}(1)+E$, откуда видно, что

$$\pi\varphi((E+e_{12})(E+e_{13})) \in E + fS^2f. \tag{2.50}$$

Нормальная подгруппа в группе $\mathrm{E}_4(R)$, порожденная $(E+e_{12})(E+e_{13})$, содержит все элементы вида $E+re_{ij}$, $r\in R$, $1\leqslant i\neq j\leqslant 4$ (выполнено равенство $[(E+e_{12})(E+e_{13}), E+se_{32}] = E+se_{12}$, далее все получается с помощью соотношения $E+rse_{ij} = [E+re_{ik}, E+se_{kj}]$).

Значит, из (2.47) и (2.50) следует, что

$$\pi\varphi(E+re_{ij}) \in E+fS^2f.$$

Пункт 2 завершен.

Пусть $\overline{Z}$ — подкольцо в R, порожденное 1 и

$$G_1 = \{a\in \mathrm{E}_n(\overline{Z}) \mid a\in (e_{11}+e_{22})\mathrm{Mat}_n(R)(e_{11}+e_{22})+E\}.$$

Тогда G_1 коммутирует с $E-2(e_{11}+e_{22}), E-2(e_{33}+e_{44})$, и из (2.37), (2.38), (2.39) и (2.40) мы выводим, что $\pi\varphi(G_1)$ коммутирует с $f_{11}+f_{22}$ и $f_{33}+f_{44}$.

Пункт 3. Покажем, что $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$ лежит в центре кольца $(f_{33}+f_{44})S^2(f_{33}+f_{44})$.

Если $b\in \mathrm{GL}_n(R)$ и коммутирует с $E-2(e_{11}+e_{22})$, то b коммутирует с $e_{11}+e_{22}$, значит, $[b, E-2(e_{11}+e_{44}), E-e_{33}-e_{44}+e_{43}+e_{34}]$ коммутирует с G_1. Также с G_1 коммутирует $E-e_{33}-e_{44}+e_{43}+e_{34}$. Тогда $[\pi\varphi(b), E-2f_{44}+b_2, f_{34}+f_{43}+c_2]$ коммутирует с $\pi\varphi(G_1)$ (в силу равенств (2.39) и (2.40)). Подберем элемент b таким, чтобы он был не только перестановочен с указанными матрицами, но еще обладал свойством

$$\pi\varphi(b) = E+2^{k(r)}f_{33}rf_{44}$$

(это возможно по лемме 2.4, так как $(f_{33}rf_{44})^2=0$). Умножив элемент $[\pi\varphi(b), E-2f_{44}+b_2, f_{34}+f_{43}+c_2]$ на $f_{33}+f_{44}$, получим, что $[f_{33}+f_{44}+2^{k(r)}f_{33}rf_{44}, f_{33}+$

$f_{44}-2f_{44}, f_{34}+f_{43}]$ коммутирует с $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$ (коммутатор записан для мультипликативной группы кольца $(f_{33}+f_{44})S^2(f_{33}+f_{44})$).

Аналогично устанавливаем, что $f_{34}+f_{43}$ коммутирует с $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$.

Выполнено равенство

$$[f_{33}+f_{44}+2^{k(r)}f_{33}rf_{44}, f_{33}+f_{44}-2f_{44}] = f_{33}+f_{44}-2^{k(r)+1}f_{33}+f_{44}.$$

Значит, $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$ лежит в централизаторе группы $\langle[f_{33}+f_{44}-2^{k(r)+1}f_{33}+f_{44}, f_{33}+f_{44}], f_{34}+f_{43}\rangle$ (централизатор в кольце $(f_{33}+f_{44})S^2(f_{33}+f_{44})$). Тогда по предложению 2.8 $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$ лежит в центре кольца $(f_{33}+f_{44})S^2(f_{33}+f_{44})$. Пункт 3 завершен.

Положим $h_{11}=f_{11}+f_{22},\ h_{22}=f_{33}+f_{44},\ h_{12}=f_{13}+f_{24},\ h_{21}=f_{31}+f_{42},\ \overline{S}=\{\sum\limits_{i,j=1}^{2} h_{i1}rh_{1i}\mid r\in S^2\}$. Тогда $(h_{11}+h_{22})S^2(h_{11}+h_{22})\cong \mathrm{Mat}\,_2(\overline{S})$.

Из пункта 2 $\pi\varphi(E+r(e_{31}+e_{24}))\in E+fS^2f=E+(h_{11}+h_{22})S^2(h_{11}+h_{22})$. Значит,

$$\pi\varphi(E+r(e_{31}+e_{24})) = E-h_{11}-h_{22}+\begin{pmatrix} a_r & b_r\\ c_r & d_r\end{pmatrix}.$$

Из пункта 2 $g\in\pi\varphi(G_1)\subseteq E+fS^2f$, т. е.

$$g = E-h_{11}-h_{22}+\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Элемент g коммутирует с h_{11} и с h_{22}, поэтому

$$g = E-h_{11}-h_{22}+\begin{pmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}.$$

Выполнены соотношения $h_{22}g=\mu h_{22},\ h_{22}S^2h_{22}=\overline{S}h_{22}$.

Пусть $a\in\overline{S}$, тогда $\mu h_{22}ah_{22}=ah_{22}\mu h_{22}$ ($h_{22}g$ лежит в центре кольца $h_{22}S^2h_{22}$ по пункту 3), $\mu ah_{22}=a\mu h_{22}$ и $\mu ah_{11}=a\mu h_{11}$. Таким образом, $\mu a = a\mu$, следовательно, $\mu\in Z(\overline{S})$.

Элемент $cgcg$ коммутирует с $\pi\varphi(E+r(e_{13}+e_{24}))$ (так как их прообразы коммутируют). Легко видеть, что

$$cgcg = (h_{11}+h_{22})cgcg(h_{11}+h_{22}) + (E-h_{11}-h_{22})cgcg(E-h_{11}-h_{22}) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + (E-h_{11}-h_{22})cgcg(E-h_{11}-h_{22}) =$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix} + (E-h_{11}-h_{22})cgcg(E-h_{11}-h_{22}).$$

Значит, $\lambda\mu$ коммутирует с $a_r,\ b_r,\ c_r,\ d_r$, следовательно, λ коммутирует с $a_r,\ b_r,\ c_r,\ d_r$, так как существует обратный элемент к μ в кольце $\overline{S}$.

Положим $a_1 = \pi\varphi(E-e_{11}-e_{22}+e_{12}-e_{21})$. Тогда $a_1 \in \pi\varphi(G_1)$, потому что $E-e_{11}-e_{22}+e_{12}-e_{21} = (E+e_{12})(E-e_{21})(E+e_{12})$.

Так как $\pi\varphi(G_1)$ коммутирует с $h_{11}+h_{22}$, то, аналогично представлению g, получим выражение

$$a_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} + E - h_{11} - h_{22},$$

причем $\delta \in Z(\overline{S})$.

Выполнены равенства: $a_1^2 = \pi\varphi(E-2(e_{11}+e_{22})) = E-2(f_{11}+f_{22}) = E-2h_{11}$. Значит, $\varepsilon^2=-1,\ \delta^2=1$. Тогда $(\varepsilon\delta^{-1})^2-1 = \varepsilon^2(\delta^{-1})^2-1 = -2$ — неделитель нуля в $\overline{S}$.

Пусть $\overline{\varphi} = (h_{11}+h_{22})\pi\varphi$. Тогда $\overline{\varphi} : \mathrm{E}_4(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{S})$ — гомоморфизм групп, так как $h_{11}+h_{22}=f$ комутирует с $\pi\varphi(\mathrm{E}_4(R))$. Тогда из предложения 2.5 мы получаем требуемое утверждение. Предложение доказано.

Таким образом, мы установили справедливость предложений 2.3 и 2.4. Тем самым, учитывая рассуждения в разделе 2.2, полностью доказана теорема 3.

2.4 Обобщение основной теоремы на случай градуированного кольца R

Автором введено следующее определение:

Определение 10. Пусть $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$, $S = \bigoplus\limits_{g\in G} S_g$ — ассоциативные градуированные кольца с 1, $\mathrm{Mat}_n(R)$, $\mathrm{Mat}_m(S)$ - градуированные кольца матриц с хорошей градуировкой. Изоморфизм групп $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$

назовем *изоморфизмом, согласованным с градуировкой*, если $\varphi(\mathrm{GL}_n(R) \cap \mathrm{Mat}_n(R)_e) \subseteq \mathrm{GL}_m(S)_e$ и выполнено свойство:

$$\text{если } A - E \in \mathrm{Mat}_n(R)_g, \text{ то } \varphi(A) - E \in \mathrm{Mat}_m(S)_g.$$

Докажем следующее продолжение теоремы И.З. Голубчика (теоремы 3) на градуированный случай:

Теорема 5. *Пусть G — группа с нейтральным элементом e, $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$, $S = \bigoplus\limits_{g\in G} S_g$ — ассоциативные градуированные кольца с единицей, $\mathrm{Mat}_n(R)$, $\mathrm{Mat}_m(S)$ — градуированные кольца матриц с хорошей градуировкой, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$, и $\varphi : \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп, согласованный с градуировкой. Пусть изоморфизм φ^{-1} тоже согласован с градуировкой. Тогда существуют центральные идемпотенты q и f колец $\mathrm{Mat}_n(R)$ и $\mathrm{Mat}_m(S)$ соответственно, $q \in \mathrm{Mat}_n(R)_e, f \in \mathrm{Mat}_m(S)_e$, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : q\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_m(S)$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1-q)\mathrm{Mat}_n(R) \longrightarrow (1-f)\mathrm{Mat}_m(S),$$

сохраняющие градуировку, такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2((1-e)A^{-1})$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Из анализа доказательства теоремы 3 видно, что для доказательства теоремы 5 достаточно того, чтобы было выполнено следующее предложение:

Предложение 2.10. *Пусть R и S — ассоциативные G-градуированные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 1$, $\varphi : \mathrm{E}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_m(S)$ — гомоморфизм групп, согласованный с градуировкой, и*

$$(\varphi(E + re_{ij}) - E)(\varphi(E + se_{kp}) - E) = 0$$

для всех $r, s \in R$ и всех i, j, k, p таких, что $i \neq j, j \neq k, k \neq p, p \neq i$.

Тогда существует идемпотент $f \in \mathrm{Mat}\,_m(S)_e$*, кольцевой гомоморфизм* $\theta_1 : \mathrm{Mat}\,_n(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}\,_m(S)f$ *и кольцевой антигомоморфизм* $\theta_2 : \mathrm{Mat}\,_n(R) \longrightarrow (E-f)\mathrm{Mat}\,_m(S)(E-f)$*, сохраняющие градуировку, такие, что*

$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) + E - \theta_1(E) - \theta_2(E)$$

для всех $A \in \mathrm{E}\,_n(R)$.

Доказательство. Доказательство этого предложения практически полностью повторяет доказательство предложения 2.2. Поэтому не будем повторять подробных вычислений, которые приведены в доказательстве предложения 2.2.

Положим $\varphi(E + re_{ij}) = E + x_{ij}(r),\ r \in R,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Из равенства $E + rse_{ij} = [E + re_{ik}, E + se_{kj}],\ i \neq j,\ k \neq i,\ j \neq k$ и условия (2.6) получаем, что:

$$x_{ij}(rs) = x_{ik}(r)x_{kj}(s) - x_{kj}(s)x_{ik}(r),$$

где $i \neq j,\ k \neq i,\ j \neq k$.

Если элемент r однороден, то элемент re_{ij} также однороден. Пусть $re_{ij} \in \mathrm{Mat}\,_n(R)_g$, тогда, в силу того что φ согласован с градуировкой, $x_{ij}(r) \in \mathrm{Mat}\,_m(S)_g$.

Положим $a_{ij} = x_{ij}(1)$. Из (2.6), (2.7) и предложения 2.1 следует, что в $\mathrm{Mat}\,_m(S)$ существует f_{ij} — система матричных единиц и идемпотент f, причем:

$$x_{ij}(1) = ff_{ij} - (E - f)f_{ji}. \tag{2.51}$$

Напомним, что матричные единицы f_{ij} в предложении 2.1 строятся следующим образом:

$$g_{ij} = a_{ik}a_{kj},\ h_{ij} = a_{ki}a_{jk},\ g_{ii} = g_{ij}g_{ji},\ h_{ii} = h_{ij}h_{ji},\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, f_{ij} = g_{ij} + h_{ij}.$$

Так как φ сохраняет градуировку, то $a_{ij} \in \mathrm{Mat}\,_m(S)$ однороден и лежит в той же компоненте, в которой лежит $e_{ij} \in \mathrm{Mat}\,_n(R), i \neq j$. Тогда легко видно из определения, что то же самое выполнено для g_{ij} при $i \neq j$, а $g_{ii} \in \mathrm{Mat}\,_m(S)_e$. В силу равенства (2.51) мы получаем, что $h_{ji} = g_{ij} - x_{ij}(1)$. Следовательно, $h_{ji} \in \mathrm{Mat}\,_m(S)$ при $j \neq i$ лежит в той же компоненте, в которой лежит матрица $e_{ij} \in \mathrm{Mat}\,_n(R)$, а $h_{ii} \in \mathrm{Mat}\,_m(S)_e$.

Идемпотент $f = \sum\limits_{i=1}^{n} g_{ii}$ (см. предложение 2.1). Из его определения ясно, что $f \in \mathrm{Mat}\,_m(S)_e$.

Выполнены равенства

$$x_{ij}(r) = b(r)f_{ij} - c(r)f_{ji}, b(r) = fb(r)f,\ c(r) = (E-f)c(r)(E-f),$$
$$c(r) \in \sum_{t=1}^{n} h_{t1}\mathrm{Mat}_{\,n}(S)\sum_{t=1}^{n} h_{1t}. \quad (2.52)$$

Пусть $r \in R_g$. Покажем, что тогда $b(r) \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_g$. Элемент $x_{ij}(r)$ обладает свойством: $x_{ij}(r) = b(r)g_{ij} - c(r)h_{ji}$ по определению f и в силу равенств (2.52). Умножим получившееся равенство на g_{ji}. Получим, что

$$x_{ij}(r)g_{ji} = b(r)g_{ii}.$$

Пусть $e_{ij} \in \mathrm{Mat}_{\,n}(R)_h$, тогда $e_{ji} \in \mathrm{Mat}_{\,n}(R)_{h^{-1}}$, так как $e_{ij}e_{ji} = e_{ii} \in \mathrm{Mat}_{\,n}(R)_e$. Следовательно, $x_{ij}(r) \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_{gh}$, так как φ согласован с градуировкой. Значит, $x_{ij}(r)g_{ji} \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_g$. Отсюда

$$b(r) = b(r)\sum_{i=0}^{n} g_{ii} = \sum_{i=0}^{n} b(r)g_{ii} \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_g.$$

Пусть $r \in R_g$. Покажем, что тогда $c(r) \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_g$. Пусть $e_{ij} \in \mathrm{Mat}_{\,n}(R)_h$. В силу (2.52) и определения f получаем $c(r)h_{ji} = b(r)g_{ij} - x_{ij}(r)$. Умножим это равенство на h_{ij}. Получим, что

$$c(r)h_{ii} = x_{ij}h_{ij}.$$

Имеем $x_{ij}(r) \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_{gh}$, так как φ согласован с градуировкой. Так как $h_{ij} \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_{h^{-1}}$, то $x_{ij}h_{ij} \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_g$. Значит, $c(r)h_{ii} \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_g$. Следовательно,

$$c(r) = c(r)\sum_{i=0}^{n} h_{ii} = \sum_{i=0}^{n} c(r)h_{ii} \in \mathrm{Mat}_{\,m}(S)_g.$$

Положим

$$\theta_1(\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}e_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} b(r_{ij})f_{ij},\ \theta_2(\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}e_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} c(r_{ji})f_{ij}.$$

Тогда $\theta_1 : \mathrm{Mat}_{\,n}(R) \longrightarrow f\mathrm{Mat}_{\,m}(S)f$ — гомоморфизм колец, $\theta_2 : \mathrm{Mat}_{\,n}(R) \longrightarrow (E-f)\mathrm{Mat}_{\,m}(S)(E-f)$ — антигомоморфизм колец, и выполнено равенство $\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) + E - \theta_1(E) - \theta_2(E)$ для всех $A \in \mathrm{E}_{\,n}(R)$.

Осталось показать, что θ_1 и θ_2 сохраняют градуировку. В силу линейности отображений достаточно проверить, что если $e_{ij} \in \mathrm{Mat}_n(R)_h$, $r \in R_g$, то $\theta_1(re_{ij}) \in \mathrm{Mat}_m(S)_{gh}$, $\theta_2(re_{ij}) \in \mathrm{Mat}_m(S)_{gh}$. Используя доказанные выше свойства отображений b и c, легко видеть, что $\theta_1(re_{ij}) = b(r)f_{ij} = b(r)g_{ij} \in \mathrm{Mat}_m(S)_{gh}$, $\theta_2(re_{ij}) = c(r)f_{ji} = c(r)h_{ji} \in \mathrm{Mat}_m(S)_{gh}$. Предложение доказано.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам требуется показать, что идемпотент q также принадлежит $\mathrm{Mat}_n(R)_e$. Мы имеем

$$\varphi(E + qe_{ij}) = \theta_1(E + qe_{ij}) + \theta_2(E - qe_{ij}) = E + \theta_1(qe_{ij}) = E + g_{ij}$$

(элементы g_{ij} определены в предложении 2.2). В предложении 2.10 было доказано, что элемент $g_{ij} \in \mathrm{Mat}_m(S)$ лежит в той же компоненте, в которой лежит $e_{ij} \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Следовательно, так как отображение φ^{-1} согласовано с градуировкой, то элемент qe_{ij} содержится в той же компоненте, в которой содержится e_{ij}. Тогда матрица $qe_{ii} = qe_{ij}e_{ji}$ лежит в $\mathrm{Mat}_n(R)_e$. Значит, $q = \sum\limits_{i=1}^{n} e_{ii}q \in \mathrm{Mat}_n(R)_e$. Теорема доказана.

Замечание. Так как построенные в теореме идемпотенты q и f удовлетворяют условию $e \in \mathrm{Mat}_n(R)_e$, $f \in \mathrm{Mat}_m(S)_e$, то градуировка колец R и S естественным образом переносится на кольца qR и fS соответственно. Очевидно, что градуировка колец матриц $\mathrm{Mat}(R)$ и $\mathrm{Mat}(S)$ также естественно переносится на кольца $\mathrm{Mat}(qR)$ и $\mathrm{Mat}(fS)$ соответственно. Мы показали, что кольца $\mathrm{Mat}(qR)$ и $\mathrm{Mat}(fS)$ gr-изоморфны. Следовательно, выполнены условия теоремы 4 из работы [1]. То есть мы получаем, что кольца qR и fS gr-Морита-эквиалентны.

Глава 3

Изоморфизмы стабильных линейных групп

В данной главе мы опишем действие изоморфизма между стабильными линейными группами на стабильной элементарной подгруппе.

Пусть $\{e_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ — стандартная система матричных единиц кольца $\mathrm{Mat}\,(R)$. Пусть I — идеал кольца R; обозначим через $E(R, I)$ подгруппу группы $\mathrm{GL}\,(R)$, порожденную матрицами $E + \lambda e_{ij}$, где $\lambda \in I$, $i \neq j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{GL}\,(R, I)$ — ядро канонического гомоморфизма $\varphi_I : \mathrm{GL}\,(R) \to \mathrm{GL}\,(R/I)$.

Через $\langle A \rangle$ будем обозначать кольцо, полученное путем сложения и умножения элементов A, а также взятия их обратных элементов в случае, когда такие элементы существуют. Пусть, кроме того, $[A, B] \equiv A^{-1}B^{-1}AB$.

Целью данной главы диссертации является доказательство следующей теоремы:

Теорема 6. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $\frac{1}{2}$, $\varphi : \mathrm{GL}\,(R) \to \mathrm{GL}\,(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты h и e колец $\mathrm{Mat}\,(R)$ и $\mathrm{Mat}\,(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 : h\langle \mathrm{GL}\,(R) \rangle \to e\langle \mathrm{GL}\,(S) \rangle$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 : (1 - h)\langle \mathrm{GL}\,(R) \rangle \to (1 - e)\langle \mathrm{GL}\,(S) \rangle,$$

такие, что

$$\varphi(A) = \theta_1(hA) + \theta_2((1 - h)A^{-1})$$

для всех $A \in \mathrm{E}\,(R)$.

3.1 Вспомогательные результаты

Лемма 3.1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с $\frac{1}{2}$, M и N — нормальные подгруппы в $\mathrm{GL}\,(R)$, такие, что $M \cap N = \{1\}$ и $MN = \mathrm{GL}\,(R)$. Тогда найдутся $I, J \lhd R$, такие, что $R = I \oplus J$ и $M = \mathrm{GL}\,(R, I), N = \mathrm{GL}\,(R, J)$.*

Доказательство. Воспользуемся следующей теоремой о структуре нормальных подгрупп стабильной группы (см [15]):

Теорема 7. *Пусть H — подгруппа $\mathrm{GL}\,(R)$, нормализуемая $\mathrm{E}\,(R)$. Тогда существует однозначно определенный $I \lhd R$, для которого*

$$\mathrm{E}\,(R, I) \subseteq H \subseteq \mathrm{GL}\,(R, I).$$

Более того, всякая подгруппа, удовлетворяющая данному условию, является нормальной в $\mathrm{GL}\,(R)$.

Подгруппы M и N являются нормальными в $\mathrm{GL}\,(R)$, следовательно, удовлетворяют условию теоремы. Значит, существуют такие $I, J \lhd R$, что $\mathrm{E}\,(R, I) \subseteq M \subseteq \mathrm{GL}\,(R, I)$ и $\mathrm{E}\,(R, J) \subseteq N \subseteq \mathrm{GL}\,(R, J)$. Так как $M \cap N = \{1\}$, то $\mathrm{E}\,(R, I) \cap \mathrm{E}\,(R, J) = \{1\}$, откуда $I \cap J = \{0\}$. Также $\mathrm{GL}\,(R) = MN$, следовательно, $\mathrm{GL}\,(R) = \mathrm{GL}\,(R, I)\mathrm{GL}\,(R, J)$. А это означает, что $R = I \oplus J$. Так как $I \cap J = \{0\}$, то $\mathrm{GL}\,(R, I) \cap \mathrm{GL}\,(R, J) = \{1\}$. Сравнивая последнее с тем, что $M \subseteq \mathrm{GL}\,(R, I)$, $N \subseteq \mathrm{GL}\,(R, J)$, получаем $M = \mathrm{GL}\,(R, I)$, $N = \mathrm{GL}\,(R, J)$. Лемма доказана.

Предложение 3.1. *Пусть R, S — ассоциативные кольца с $\frac{1}{2}$, $\varphi : \mathrm{GL}\,(R) \to \mathrm{GL}\,(S)$ — изоморфизм групп, $\{e_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ — стандартная система матричных единиц. Тогда существует такая система матричных единиц $\{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$, что*

$$\varphi(E - 2e_{ii}) = E - 2f_{ii}.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(E - 2e_{ii}) = E - 2f_{ii},$$

тогда $f_{ii}^2 = f_{ii}$. Положим $E - 2e = \varphi^{-1}(E - 2f_{11}f_{22})$, тогда $e^2 = e$. Так как $E - 2f_{ii}$ коммутирует с $E - 2f_{11}f_{22}$, то $E - 2e$ коммутирует с $E - 2e_{ii}$. Следовательно, $E - 2e$ является диагональной матрицей. Если $[a, E - 2e_{ii}] =$

E, то $[\varphi(a), E-2f_{ii}] = E, i = 1,2$, то есть a коммутирует с $E-2e$. Таким образом,

$$[E-2e, s_{ij}] = E, i, j \geqslant 3, \tag{3.1}$$

и

$$E-2e \text{ коммутирует со всеми} \\ \text{обратимыми диагональными матрицами из } \mathrm{GL}\,(R). \tag{3.2}$$

Теперь пусть a обладает свойством

$$a(E-2e_{11})a^{-1} = E-2e_{22}, a(E-2e_{22})a^{-1} = E-2e_{11}.$$

Тогда

$$a(E-2e)a^{-1} = \varphi^{-1}(\varphi(a)(E-2f_{11}f_{22})\varphi(a)^{-1}) = \\ = \varphi^{-1}(E-2f_{11}f_{22}) = E-2e.$$

Следовательно,

$$[E-2e, s_{12}] = E. \tag{3.3}$$

Значит, по (3.1), (3.3) и по определению группы $\mathrm{GL}\,(R)$ мы получаем, что

$$E-2e = \mathrm{diag}\,[\varepsilon, \varepsilon, 1, 1, \dots], \varepsilon^2 = 1. \tag{3.4}$$

Положим $\varepsilon = E-2e_1$. Тогда $e_1^2 = e_1$ и по (3.2) элемент e_1 коммутирует со всеми обратимыми элементами кольца R. Значит, e_1 — центральный идемпотент.

Положим $M = \varphi(\mathrm{GL}\,(R, e_1R)), N = \varphi(\mathrm{GL}\,(R, (1-e_1)R))$. Так как $\mathrm{GL}\,(R) = \mathrm{GL}\,(R, e_1R)\mathrm{GL}\,(R, (1-e_1)R)$, то по лемме 3.1 найдутся такие $I, J \triangleleft S$, что $S = I \oplus J, M = \mathrm{GL}\,(S, I), N = \mathrm{GL}\,(S, J)$. Тогда мы можем положить $\mathrm{Mat}\,(I) = (1-q)\mathrm{Mat}\,(S), \mathrm{Mat}\,(J) = q\mathrm{Mat}\,(S)$, где q — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$.

Из (3.4) получаем, что $E-2e$ коммутирует с $\mathrm{GL}\,(R, (1-e_1)R)$. Следовательно, $E-2f_{11}f_{22}$ коммутирует с $\mathrm{Mat}\,(J)$. Также $(E-2e)(E-2e_{11})(E-2e_{22})$ коммутирует с $\mathrm{GL}\,(R, e_1R)$. Значит, $(E-2f_{11}f_{22})(E-2f_{11})(E-2f_{22})$ коммутирует с $\mathrm{Mat}\,(I)$. Положим $E-2f_{11}f_{22} = a+b$, где $a \in Mat(I), b \in \mathrm{Mat}\,(J)$. Тогда в силу предыдущего замечания получаем, что $a(E-2f_{11})(E-2f_{22})$ — центральный элемент $\mathrm{Mat}\,(I)$, а b — центральный элемент $\mathrm{Mat}\,(J)$. Также

$(E-2f_{11}f_{22})^2=E$, следовательно, $a^2=b^2=1$. То есть $a(E-2f_{11})(E-2f_{22})$ и b являются инволюциями колец $\mathrm{Mat}\,(I)$ и $\mathrm{Mat}\,(J)$ соответственно. Это в свою очередь означает, что

$$b=q-2q_1, a(E-2f_{11})(E-2f_{22})=E-q-2q_2,$$

где q_1 и q_2 — центральные идемпотенты в соответствующих кольцах.

Покажем, что $q_1=0$, а $q_2=E-q$. Имеем

$$E-2f_{11}f_{22}=a+b=(E-q-2q_2)(E-2f_{11})(E-2f_{22})+(q-2q_1). \quad (3.5)$$

Умножим равенство (3.5) слева на q_1. Получим, что $q_1(E-2f_{11}f_{22})=-q_1$, то есть

$$q_1f_{11}f_{22}=q_1.$$

Умножим последнее равенство справа на f_{11}. Получим, что $q_1f_{11}f_{22}=q_1f_{11}$, значит,

$$q_1=q_1f_{11}.$$

Аналогично выводим

$$q_1=q_1f_{22}.$$

Отсюда следует, что $q_1(E-2f_{11})(E-2f_{22})=q_1$, значит,

$$q_1\varphi(E-2e_{11}-2e_{22})=q_1. \quad (3.6)$$

Нормальная подгруппа группы $\mathrm{GL}\,(R)$, порожденная матрицей $E-2e_{11}-2e_{22}$, содержит подгруппу $\mathrm{E}\,(R)$. Учитывая равенство (3.6), получаем, что

$$\varphi(\mathrm{E}\,(R))\subseteq \mathrm{GL}\,(S,(1-q_1)S)). \quad (3.7)$$

Так как q_1 — центральный идемпотент кольца $q\mathrm{Mat}\,(S)$, то q_1 также центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$. Тогда по лемме 3.1

$$\varphi^{-1}(\mathrm{GL}\,(S,q_1S))=\mathrm{GL}\,(R,I_1), I_1\lhd R.$$

Но, пользуясь (3.7), мы получаем, что $\varphi^{-1}(\mathrm{GL}\,(S,q_1S))\cap \mathrm{E}\,(R)=\{1\}$. Следовательно, $I_1=0$ и $q_1S=0$, откуда $q_1=0$.

Умножив равенство (3.5) на $q_3=E-q_1-q_2$, получаем

$$(E-2f_{11}f_{22})q_3=(E-2f_{11})(E-2f_{22})q_3. \quad (3.8)$$

Отсюда $(E - f_{11})f_{22}q_3 = 0$ и $f_{22}q_3 = f_{11}f_{22}q_3$. Аналогично $f_{11}q_3 = f_{11}f_{22}q_3$. Тогда из (3.8) $f_{11}q_3 = f_{22}q_3 = f_{11}f_{22}q_3 = 0$. Значит, $q_3(E-2f_{11})(E-2f_{22}) = q_3$, следовательно,

$$q_3\varphi^{-1}(E - 2e_{11} - 2e_{22}) = q_3.$$

А это в свою очередь означает (аналогично предыдущему), что $q_3 = 0$, то есть $q_2 = E - q$.

Итак, мы получили, учитывая (3.5), что $E-2f_{11}f_{22} = a+b = -(E-q)(E-2f_{22})(E-2f_{22}) + q$. Матрицы $E - 2f_{11}f_{22}$ и $(E - 2f_{22})(E - 2f_{22})$ являются элементами стабильной группы $\mathrm{GL}\,(S)$, значит, $2q - E = E$, откуда $q = E$. То есть видим, что $f_{11}f_{22} = 0$. Сопрягая последнее равенство образами соответствующих матриц s_{ij}, получаем

$$f_{ii}f_{jj} = 0 \text{ для } i \neq j. \tag{3.9}$$

Следовательно, $\{f_{ii} \mid i \geqslant 1\}$ — система сопряженных между собой ортогональных идемпотентов. Тогда ее можно дополнить до системы матричных единиц $\{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$. Предложение доказано.

Отметим два свойства построенной системы матричных единиц.

Свойство 3.1. *Для любого $A \in \mathrm{GL}\,(S)$ найдется n (зависящее от A), такое, что A коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k} f_{ii}$ и $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k} e_{ii}$ при всех $k \geqslant n$.*

Доказательство. Обозначим матрицу $\mathrm{diag}\,[-1, -1, \dots -1, 1, \dots]$, где -1 встречается на диагонали ровно k раз, через $-1_{1\dots k}$. Найдется такое n, что для всех $k \geqslant n$ элемент A коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k} e_{ii}$. Следовательно, A коммутирует с $\varphi(-1_{1\dots k})$ при $k \geqslant n$. Имеем

$$\varphi(-1_{1\dots k}) = \varphi(\prod_{i=1}^{k}(E - 2e_{ii})) = \prod_{i=1}^{k}(E - 2f_{ii}) = E - 2(\sum_{i=1}^{k} f_{ii}),$$

следовательно, A коммутирует с $f_{11} + \ldots + f_{kk}$ при всех $k \geqslant n$.

Свойство 3.2. *Для любого $A \in \mathrm{GL}\,(S)$ найдется n (зависящее от A), такое, что A коммутирует со всеми f_{ii} и $\varphi^{-1}(A)e_{ii} = e_{ii}\varphi^{-1}(A) = e_{ii}$ при $i \geqslant n$.*

Доказательство аналогично доказательству свойства 3.1.

3.2 Построение изоморфизма между кольцами $\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle$ и $\langle \mathrm{E}\,(S_1)\rangle$, где $S_1 = f_{11}\mathrm{Mat}_{\infty}(S)f_{11}$

Нам потребуется следующая вспомогательная лемма

Лемма 3.2. *Пусть $\{f_{ij} \mid i,j \geqslant 1\}$ — система матричных единиц из предложения* 3.1. *Тогда если $A \in \mathrm{GL}\,(S)$ коммутирует со всеми f_{ij}, то $A = E$.*

Доказательство. Так как A коммутирует с $E - 2f_{ii}, i \geqslant 1$, то $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $E - 2e_{ii}$. Следовательно, $\varphi^{-1}(A) = \mathrm{diag}\,[a_1, a_2, \dots]$.

Рассмотрим элементы $s'_{ij} = E - f_{ii} - f_{jj} + f_{ij} + f_{ji}$. Из определения f_{ij} легко видеть, что $f_{ij} \in \mathrm{FMat}\,(S)$. Значит, $s'_{ij} \in \mathrm{GL}\,(S)$. Опишем $\varphi^{-1}(s'_{12})$. Так как s'_{12} коммутирует с f_{ii} при $i \geqslant 3$, то

$$\varphi^{-1}(s'_{12}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \dots \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Также $s'_{12}(E - 2f_{11}) = (E - 2f_{22})s'_{12}$. Значит,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

откуда $b_{11} = b_{22} = 0$. А так как ${s'_{12}}^2 = 1$, то $b_i^2 = 1, b_{12} = b_{21}^{-1}$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что

$$\varphi^{-1}(s_{ij}) = \mathrm{diag}\,[b_1^{i,j}, b_2^{i,j}, \dots] - b_i^{i,j}e_{ii} - b_j^{i,j}e_{jj} + b_{ij}e_{ij} + b_{ij}^{-1}e_{ji}.$$

Легко видеть, что если диагональная матрица коммутирует со всеми матрицами $\varphi^{-1}(s'_{i,i+1})$, то элементы на ее диагонали сопряжены. Следовательно, элементы $a_i, i \geqslant 1$, на диагонали $\varphi^{-1}(A)$ сопряжены. Но так как $\varphi^{-1}(A) \in \mathrm{GL}\,(R)$, то существует n, такое, что $a_i = 1$ при $i \geqslant n$. Значит, A является единичной матрицей. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $\{f_{ij} \mid i,j \geqslant 1\}$ — система матричных единиц из предложения* 3.1. *Пусть $S_1 = f_{11}\mathrm{Mat}_{\infty}(S)f_{11} = f_{11}\mathrm{Mat}\,(S)f_{11}$. Если a — центральный элемент кольца S, то можно определить отображение $\alpha : \langle \mathrm{E}\,(S), a \cdot 1\rangle \to \mathrm{Mat}\,(S_1)$ со следующими свойствами:*

1. *α — инъективный кольцевой гомоморфизм;*

2. *$\alpha(\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle) = \langle \mathrm{E}\,(S_1)\rangle$, $\alpha(\mathrm{GL}\,(S)) = \mathrm{GL}\,(S_1)$, $\alpha(\mathrm{FMat}\,(S)) = \mathrm{FMat}\,(S_1)$;*

3. *если e' — центральный идемпотент кольца S_1, то найдется e — центральный идемпотент кольца S, такой, что $\alpha(e\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle) = e'\langle \mathrm{E}\,(S_1)\rangle$ (элемент e выступает в качестве центрального элемента a при определении отображения α);*

Доказательство. Так как $a \in Z(S)$, то $a \cdot 1$ коммутирует со всеми $f_{ii}, i \geqslant 1$. Следовательно, по свойству 3.2 системы $\{f_{ij}\}$ для любого $A \in \langle \mathrm{E}\,(S), a\cdot 1\rangle$ существует n_1, такое, что A коммутирует со всеми f_{ii} при $i \geqslant n_1$. В силу свойства 3.1 системы $\{f_{ij}\}$ для любого $A \in \langle \mathrm{E}\,(S), a \cdot 1\rangle$ существует n_2, такое, что A коммутирует со всеми $\sum\limits_{i=1}^{k} f_{ii}$ при $k \geqslant n_2$.

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольный элемент из $\langle \mathrm{E}\,(S), a \cdot 1\rangle$. Определим отображение α по правилу $\alpha(A) = (f_{1i}Af_{j1})$. В силу доказанных выше свойств получаем, что $(f_{1i}Af_{j1}) \in \mathrm{Mat}\,(S_1)$ и что построенное отображение α является гомоморфизмом колец. Покажем инъективность α. Пусть $\alpha(A) = 0$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}A\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii} = 0$ для любого n. Значит, в силу доказанного выше для любых $p, l \geqslant 1$ найдется k, такое, что $\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}e_{1p}Ae_{l2}\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii} = 0$ для всех $n \geqslant k$. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}(E + a_{pl}e_{12})\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}, n \geqslant k$. Тогда в силу свойства 3.1 системы $\{f_{ij}\}$ найдется $k' \geqslant k$, такое, что $E+a_{pl}e_{12} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}(E+a_{pl}e_{12})\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}+$ $(E-\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii})(E+a_{pl}e_{12})(E-\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}+(E-\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii})(E+a_{pl}e_{12})(E-\sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii})$ при всех $n \geqslant k'$. Значит, $E + a_{pl}e_{12}$ коммутирует со всеми $f_{ij}, i, j \geqslant 1$, тогда по лемме 3.2 получаем, что $E + a_{pl}e_{12} = 1$ и $a_{pl} = 0$. Следовательно, α — инъективное отображение.

Пусть $B \in \mathrm{GL}\,(S)$, покажем, что $\alpha(B) \in \mathrm{GL}\,(S_1)$. Так как $\varphi^{-1}(B) \in \mathrm{GL}\,(R)$, то

$$\varphi^{-1}(B) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, B_1 \in \mathrm{Mat}_{\,k-1}(R) \tag{3.10}$$

для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Значит, B коммутирует с f_{jj} при $j \geqslant k$, следовательно,

$$\alpha(B) = \begin{pmatrix} B' & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, B' \in \mathrm{Mat}_{k-1}(S_1).$$

Аналогично доказательству леммы 3.2 можно показать, что B коммутирует со всеми $E - f_{ll} - f_{pp} + f_{lp} + f_{pl}$ при $l, p \geqslant k$. Следовательно,

$$\alpha(B) = \begin{pmatrix} B' & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, B' \in \mathrm{Mat}_{k-1}(S_1).$$

Покажем, что b — центральный элемент кольца S_1. Рассмотрим матрицу $C = E + f_{i1} c f_{1,i+1}, c \in f_{11} \mathrm{Mat}_{\infty}(S) f_{11}, i \geqslant k$. Легко видеть, что C коммутирует с $E - 2f_{jj}, E - f_{j-1,j-1} - f_{j,j} + f_{j-1,j} + f_{j,j-1}$ при $1 \leqslant j < i$ и $j > i+1$, а также с $E - f_{i-1,i-1} - f_{i+2,i+2} + f_{i-1,i+2} + f_{i+2,i-1}$. Следовательно, аналогично лемме 3.2 получаем

$$\varphi^{-1}(C) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& x & y && \\ &&& z & w && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& \ddots \end{pmatrix}$$

(элемент x находится на месте (i, i),

на пустых местах в матрице предполагаются нулевые элементы).

Учитывая (3.10) получаем, что $\varphi^{-1}(C)$ коммутирует с $\varphi^{-1}(B)$. Значит, C коммутирует с B, следовательно, b коммутирует с c. То есть $b \in Z(S_1)$. А это в свою очередь означает, что $\mathrm{diag}\,[b, b, \dots]$ является центральным элементом $\mathrm{Mat}\,(S_1)$.

Имеем

$$\operatorname{diag}[b,b,\dots] = \begin{pmatrix} B'' & 0 & \dots \\ 0 & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{diag}[b,\dots,b]-B'' & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Причем $\begin{pmatrix} B'' & 0 & \dots \\ 0 & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}\,(S_1)$, а $\begin{pmatrix} \operatorname{diag}[b,\dots,b]-B'' & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{FMat}\,(S_1)$. Следовательно, $\operatorname{diag}[b,b,\dots] \in \mathrm{GL}\,(S_1)$. Но так как $\operatorname{diag}[b,b,\dots] \in Z(\mathrm{Mat}\,(S_1))$, а $Z(\mathrm{GL}\,(S_1)) = \{E\}$, то $\operatorname{diag}[b,b,\dots] = E$. Значит, $b = 1$ и матрица $\alpha(B) \in \mathrm{GL}\,(S_1)$.

Очевидно, что $\mathrm{FMat}\,(S_1) \subseteq \alpha(\mathrm{FMat}\,(S))$. А так как $\alpha(\mathrm{GL}\,(S)) \subseteq \mathrm{GL}\,(S_1)$, то $\alpha(\mathrm{FMat}\,(S)) \subseteq \mathrm{FMat}\,(S_1)$. Следовательно, $\mathrm{FMat}\,(S_1) = \alpha(\mathrm{FMat}\,(S))$. Пусть $D \in \mathrm{GL}\,(S_1)$. Тогда $D-1 \in \mathrm{FMat}\,(S_1)$. Имеем $D = D-E+E = \alpha(D')+\alpha(1) = \alpha(D'+1)$, где $D' \in \mathrm{FMat}\,(S)$. Также имеем $D^{-1} = D^{-1}-E+E = \alpha(D'')+\alpha(1) = \alpha(D''+1)$. Значит, $1 = DD^{-1} = D^{-1}D = \alpha((D'+1)(D''+1)) = \alpha((D''+1)(D'+1))$. Учитывая инъективность α, получаем, что $D'+1$ — обратимый элемент, следовательно, $D'+1 \in \mathrm{GL}\,(S)$. Учитывая включение $\alpha(\mathrm{GL}\,(S)) \subseteq \mathrm{GL}\,(S_1)$, получаем, что $\alpha(\mathrm{GL}\,(S)) = \mathrm{GL}\,(S_1)$. Отсюда следует, что $\alpha(\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle) = \langle \mathrm{E}\,(S_1)\rangle$.

Пусть e' — центральный идемпотент S_1. Тогда

$$\mathrm{GL}\,(S_1) = \mathrm{GL}\,(S_1, e'S_1) \times \mathrm{GL}\,(S_1,(1-e')S_1).$$

Следовательно, $\alpha^{-1}(\mathrm{GL}\,(S_1)) = \alpha^{-1}(\mathrm{GL}\,(S_1,e'S_1)) \times \alpha^{-1}(\mathrm{GL}\,(S_1,(1-e')S_1))$. Значит, по лемме 3.1 существует e — центральный идемпотент кольца S, такой, что

$$\begin{aligned} &\alpha^{-1}(\mathrm{GL}\,(S_1,e'S_1)) = \mathrm{GL}\,(S,eS), \\ &\alpha^{-1}(\mathrm{GL}\,(S_1,(1-e')S_1)) = \mathrm{GL}\,(S,(1-e)S), \\ &S = eS \bigoplus (1-e)S. \end{aligned}$$

Получаем, что $\alpha : \langle e\cdot E, \mathrm{E}\,(S)\rangle \to \mathrm{Mat}\,(S_1)$ — кольцевой мономорфизм, $\alpha(e\cdot E)$ — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}\,(S_1)$. Легко видеть, что $\alpha(\mathrm{FMat}\,(eS)) = \mathrm{FMat}\,(e_1S)$, $\alpha(\mathrm{FMat}\,((1-e)S)) = \mathrm{FMat}\,((1-e_1)S)$. Так как $eA_1 = A_1, eA_2 = 0$ для всех $A_1 \in \mathrm{FMat}\,(eS)$, $A_2 \in \mathrm{FMat}\,((1-e)S)$, то $\alpha(e\cdot 1)B_1 = B_1, \alpha(e\cdot 1)B_2 =$

0 для всех $B_1 \in \mathrm{FMat}\,(e'S_1), B_2 \in \mathrm{FMat}\,((1-e')S_1)$. Следовательно, $\alpha(e\cdot E) = e'\cdot E$. Значит, $\alpha(e\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle) = e'\langle \mathrm{E}\,(S_1)\rangle$. Лемма доказана.

Далее под матричной записью элементов из $\langle \mathrm{E}\,(S)\rangle$ мы будем подразумевать запись их образов при отображении α. Ясно, что элемент $\alpha(f_{ii}af_{jj}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & a_{ij} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$, где $a_{ij} = f_{1i}af_{j1}$. Для наглядности элементы $f_{ii}af_{jj}$ будем записывать как $a_{ij}f_{ij}$.

3.3 Доказательство основной теоремы

Теперь мы можем доказать основной результат данной главы: теорему 6. Доказательство будет состоять из пяти шагов.

Пункт 1. Пусть $\{f_{ij}\}$ — система матричных единиц из предложения 3.1. Пусть $\{e'_{ii}\}$ — такая система матричных единиц $\{e'_{ij}\}$ кольца $\mathrm{Mat}\,(R)$, что $e_{ii} = e'_{ii}$ для $i \geqslant 3$. Покажем, что

$$\varphi(E - 2e'_{ii}) = E + x, x \in (f_{11} + f_{22})\mathrm{Mat}\,(S)(f_{11} + f_{22}), i = 1, 2.$$

Доказательство. Несложно проверить, что для системы матричных единиц $\{e'_{ij}\}$ выполнено предложение 3.1. По предложению 3.1 имеем

$$\varphi(E - 2e'_{ii}) = E - 2f'_{ii}, \tag{3.11}$$

причем $f'_{ii} = f_{ii}$ при $i \geqslant 3$. Элементы $\varphi(E - 2e'_{ii})$, $i = 1, 2$, коммутируют с f_{jj}, $j \geqslant 3$. Тогда $\alpha(\varphi(E - 2e'_{ii}))$, $i = 1, 2$, коммутируют с $\alpha(f_{ii}), i \geqslant 3$, следовательно, $\alpha(\varphi(E - 2e'_{ii}))$, $i = 1, 2$, коммутируют с $\alpha(f_{11} + f_{22})$. Но тогда $\varphi(E - 2e'_{ii})$, $i = 1, 2$, также коммутируют с $f_{11} + f_{22}$, значит,

$$\begin{aligned} \varphi(E - 2e'_{ii}) = E + e_i + d_i, e_i \in (f_{11} + f_{22})\mathrm{Mat}\,(S)(f_{11} + f_{22}), \\ d_i \in (E - (f_{11} + f_{22}))\mathrm{Mat}\,(S)(E - (f_{11} + f_{22})). \end{aligned} \tag{3.12}$$

В силу (3.11) и (3.12) получаем, что

$$\begin{aligned} (\varphi(E - 2e'_{ii}) - E)(\varphi(E - 2e_{jj}) - E) = (e_i + d_i)2f_{jj} = 2d_if_{jj}, \\ (\varphi(E - 2e_{jj}) - E)(\varphi(E - 2e'_{ii}) - E) = 2f_{jj}(e_i + d_i) = 2f_{jj}d_i, j \geqslant 3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$d_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

С другой стороны

$$(\varphi(E - 2e'_{ii}) - E)(\varphi(E - 2e_{jj}) - E) = 2f'_{ii}2f'_{jj} = 0.$$

Значит, $d_i f_{jj} = f_{jj} d_i = 0$ для всех $j \geqslant 3$, $i = 1, 2$. Но тогда в силу (3.13) получаем, что $d_i = 0$. Пункт 1 доказан.

Пункт 2. Покажем, что в предложении 3.1 матричные единицы f_{ij} можно выбрать так, что

$$\varphi(s_{ij}) = E - f_{ii} - f_{jj} + f_{ij} + f_{ji}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Рассмотрим систему матричных единиц

$$\begin{aligned} e'_{11} &= \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22} - e_{12} - e_{21}), \\ e'_{22} &= \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22} + e_{12} + e_{21}), \\ e'_{ii} &= e_{ii}, i \geqslant 3. \end{aligned}$$

Тогда в силу пункта 1

$$\varphi(E - 2e'_{11}) = \varphi(s_{12}) = E + x, x \in (f_{11} + f_{22})\mathrm{Mat}\,(S)(f_{11} + f_{22}), \tag{3.15}$$

значит,

$$\varphi(s_{12}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Так как $s_{12}(E - 2e_{11}) = (E - 2e_{22})s_{12}$, то

$$\varphi(s_{12})(E - 2f_{11}) = (E - 2f_{22})\varphi(s_{12}),$$

следовательно,

$$a_{11} = a_{22} = 0.$$

А так как $s_{12}^2 = 1$, то
$$a_{21} = a_{12}^{-1},$$
значит, имеем
$$\varphi(s_{12}) = E - f_{11} - f_{22} + a_1 f_{12} + a_1^{-1} f_{21}.$$
Сопрягая равенство (3.15) образами матриц s_{1i} и s_{2j} и проводя аналогичные рассуждения, мы получим, что
$$\varphi(s_{ij}) = E - f_{ii} - f_{jj} + a_{ij} f_{ij} + a_{ij}^{-1} f_{ji}.$$
В частности, при $j = i + 1$ получаем
$$\varphi(s_{i,i+1}) = E - f_{ii} - f_{i+1,i+1} + a_i f_{i,i+1} + a_i^{-1} f_{i+1,i}.$$
Положим $C = \operatorname{diag}[c_1, c_2, \dots]$, где $c_1 = 1, c_{i+1} = a_1^{-1} \dots a_i^{-1}$, $f'_{ij} = \alpha^{-1}(C\alpha(f_{ij})C^{-1})$. Тогда легко видеть, что
$$f'_{i,i+1} = a_i f_{i,i+1}, f'_{ii} = f_{ii}.$$
Следовательно,
$$\varphi(s_{i,i+1}) = E - f'_{ii} - f'_{i+1,i+1} + f'_{i,i+1} + f'_{i+1,i},$$
откуда
$$\varphi(s_{ij}) = E - f'_{ii} - f'_{jj} + f'_{ij} + f'_{ji}, \tag{3.16}$$
так как любую транспозицию можно представить в виде произведения транспозиций вида $(i, i+1)$. Пункт 2 доказан.

Далее всюду в качестве матричных единиц $\{f_{ij}\}$ мы будем рассматривать матричные единицы, полученные в пункте 2.

Пункт 3. Докажем, что
$$\varphi(E + re_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & b_r & 0 & \dots \\ c_r & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Положим
$$e'_{ij} = (E + \frac{1}{2} re_{12}) e_{ij} (E - \frac{1}{2} re_{12}),$$

тогда $\{e'_{ij}\}$ — система матричных единиц, такая, что $e_{ii} = e'_{ii}$ при $i \geqslant 3$. Значит, в силу пункта 1 мы получаем, что

$$\varphi(E - 2e'_{11}) = \varphi(E - 2e_{11} + re_{12}) = E + x, x \in (f_{11} + f_{22})\mathrm{Mat}\,(S)(f_{11} + f_{22}).$$

Следовательно,

$$\varphi(E+re_{12}) = \varphi((E-2e'_{11})(E-2e_{11})) = (E+x)(E-2f_{11}) = \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 & \dots \\ c_r & d_r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Так как $s_{23}(E + re_{12})s_{23} = E + re_{13}$, то

$$\varphi(E + re_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 & 0 & \dots \\ c_r & d_r & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_r & 0 & b_r & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ c_r & 0 & d_r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Аналогично, так как $s_{12}(E + re_{13})s_{12} = E + re_{23}$, то

$$\varphi(E + re_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_r & b_r & 0 & \dots \\ 0 & c_r & d_r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Далее, имеем $(E + re_{12})(E + se_{13}) = (E + se_{13})(E + re_{12})$, следовательно,

$$\begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 \\ c_r & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s & 0 & b_s \\ 0 & 1 & 0 \\ c_s & 0 & d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_s & 0 & b_s \\ 0 & 1 & 0 \\ c_s & 0 & d_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 \\ c_r & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы на соответствующих местах, мы видим, что

$$b_r = a_s b_r, c_r = c_r a_s, c_r b_s = 0 \text{ для всех } r, s \in R. \tag{3.18}$$

Аналогично из $(E + re_{13})(E + se_{23}) = (E + se_{23})(E + re_{13})$ получаем

$$\begin{pmatrix} a_r & 0 & b_r \\ 0 & 1 & 0 \\ c_r & 0 & d_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_s & b_s \\ 0 & c_s & d_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_s & b_s \\ 0 & c_s & d_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & 0 & b_r \\ 0 & 1 & 0 \\ c_r & 0 & d_r \end{pmatrix},$$

откуда

$$b_r = b_r d_s, c_r = d_s c_r, b_s c_r = 0 \text{ для всех } r, s \in R. \tag{3.19}$$

Имеем $(E + re_{12})^{-1} = E - re_{12} = (E - 2e_{11})(E + re_{12})(E - 2e_{11})$, значит,

$$\varphi(E - re_{12}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 & \dots \\ c_r & d_r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_r & -b_r & 0 & \dots \\ -c_r & d_r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Из $(E + re_{12})(E - re_{12}) = E$ получаем, что

$$\begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & -b_r \\ -c_r & d_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть из (3.18) и (3.19) следует, что

$$a_r^2 = d_r^2 = 1. \tag{3.21}$$

Выполнено равенство

$$E + rse_{ij} = [E + re_{ik}, E + se_{kj}] \text{ для попарно не равных } i, j, k.$$

В частности, $E + re_{13} = [E + re_{12}, E + se_{23}]$ и $\varphi(E + e_{13}) = [\varphi(E + e_{12}), \varphi(E + se_{23})]$. Запишем последнее равенство подробнее, пользуясь соотношениями

(3.18), (3.19) и (3.21). Итак,

$$\begin{pmatrix} a_r & 0 & b_r \\ 0 & 1 & 0 \\ c_r & 0 & d_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r & -b_r & 0 \\ -c_r & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -b_1 \\ 0 & -c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 \\ c_r & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_r & -b_r a_1 & b_r b_1 \\ -c_r & d_r a_1 & d_r b_1 \\ 0 & -c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r a_1 & b_r b_1 \\ c_r & d_r a_1 & d_r b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - b_r a_1 c_r & b_r a_1 - b_r a_1 d_r a_1 & b_r b_1 - b_r a_1 d_r b_1 + b_r b_1 d_1 \\ -c_r + d_r a_1 c_r & d_r a_1 d_r a_1 & d_r a_1 d_r b_1 - d_r b_1 \\ -c_1 c_r & -c_1 d_r a_1 + d_1 c_1 & -c_1 d_r b_1 + 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Приравнивая элементы матриц на соответствующих местах, видим, что $a_r = 1 - b_r a_1 c_r$, $d_r = 1 - c_1 d_r b_1$. Значит, учитывая соотношения (3.18), (3.19), (3.21), получаем $1 = a_r^2 = a_r - b_r a_1 c_r a_r = a_r - b_r a_1 c_r$, откуда $a_r = 1 + b_r a_1 c_r$. Сравнивая с предыдущим равенством, видим, что $a_r = 1$. Аналогично $d_r = 1$. Пункт 3 доказан.

Пункт 4. Покажем, что

$$b_1^2 = b_1 \text{ и } b_r = b_1 b_r = b_r b_1. \quad (3.23)$$

Выполнено равенство $1 + e_{13} = [1 + e_{12}, 1 + e_{23}]$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & 0 \\ -c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_1 \\ 0 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & c_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & b_1^2 \\ -c_1 & 1 & -b_1 \\ 0 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 \\ c_1 & 1 & b_1 \\ 0 & c_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_1^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие элементы, получаем, что $b_1^2 = b_1, c_1^2 = -c_1$.

Поставим в равенство (3.22) $a_r = a_1 = 1, d_r = d_1 = 1$, тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_r \\ 0 & 1 & 0 \\ c_r & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_r b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_1 c_r & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

значит, $b_r = b_r b_1$. Аналогично из равенства $1+re_{13} = [1+e_{12}, 1+re_{23}]$ выводим $b_r = b_1 b_r$. Пункт 4 доказан.

Завершение доказательства теоремы.

Рассмотрим элемент $e' = \mathrm{diag}\,[b_1, b_1, \dots]$ и элементы $e_k = \mathrm{diag}\,[b_1, \dots, b_1, 0 \dots]$, где b_1 повторяется на диагонали k раз. Тогда элемент $E - 2e_k$ содержится в $\mathrm{GL}\,(S)$ и коммутирует с $E - 2f_{ii}, E - f_{tt} - f_{jj} + f_{tj} + f_{jt}$ при $i \geqslant 1$, $1 \leqslant t, j \leqslant k$ и $t, j > k$. Тогда $\varphi^{-1}(E - 2e_k)$ коммутирует с $E - 2e_{ii}$ и с s_{tj} при $i \geqslant 1$, $1 \leqslant t, j \leqslant k$ и $t, j > k$. Следовательно, $\varphi^{-1}(E - 2e_k)$ имеет вид $\mathrm{diag}\,[\alpha_k, \dots, \alpha_k, 1 \dots]$, где α_k повторяется на диагонали k раз. Выполнено равенство

$$
\varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha_k & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_k & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\right) =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1-2b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-2b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_r & 0 & 0 & \dots \\ c_r & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & b_r & 0 & 0 & \dots \\ c_r & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-2b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.
$$

Это означает, что $\varphi^{-1}(E - 2e_k) = \mathrm{diag}\,[\alpha_k, \dots, \alpha_k, 1 \dots]$ коммутирует с $E + re_{12}$ для любого $r \in R$ при $k \geqslant 2$. Следовательно, α_k — центральный элемент кольца R.

Покажем, что e' — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}\,(S_1)$, $S_1 = f_{11}\mathrm{Mat}\,(S) f_{11}$. Пусть $A \in \mathrm{GL}\,(S)$, тогда

$$
\alpha(A) = \begin{pmatrix} A' & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, A' \in \mathrm{GL}_{k_1}(f_{11}\mathrm{Mat}\,(S) f_{11}).
$$

По определению группы $\mathrm{GL}\,(R)$ матрица

$$\varphi^{-1}(A) = \begin{pmatrix} A'' & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, A'' \in \mathrm{GL}_{\,k_2}(R).$$

Положим $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, тогда $\varphi^{-1}(1 - 2e_{k_0})$ коммутирует с $\varphi^{-1}(A)$ и, следовательно, $1-2e_{k_0}$ коммутирует с $\alpha(A)$. Но последнее означает, что $E-2e'$ коммутирует с $\alpha(A)$, то есть e' — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}\,(S_1)$, а b_1 — центральный идемпотент кольца S_1.

Имеем

$$\mathrm{Mat}\,(S_1) = e'\mathrm{Mat}\,(S_1) \oplus (1 - e')\mathrm{Mat}\,(S_1).$$

Мы знаем, что

$$\varphi(1 + re_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & b_r & 0 & \dots \\ c_r & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Определим отображения $\theta_3 : R \to b_1S_1$ и $\theta_4 : R \to (1 - b_1)S_1$ по правилу $\theta_3(r) = b_r, \theta_4(r) = -c_r$ (здесь 1 — единичный элемент кольца S_1, равный f_{11}). Из равенства $1 + (r + s)e_{12} = (1 + re_{12})(1 + se_{12})$ ясно, что θ_3 и θ_4 сохраняют сложение. С помощью равенства $1 + rse_{13} = [1 + re_{12}, 1 + se_{23}]$ получаем (как раньше), что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{rs} \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{rs} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_rb_s \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_sc_r & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, θ_3 — гомоморфизм колец, а θ_4 — антигомоморфизм колец, причем в силу равенства (3.16)

$$\varphi(E + re_{ij}) = E + \theta_3(r)f_{ij} - \theta_4(r)f_{ji}. \tag{3.24}$$

Покажем, что $b_1 - c_1 = 1$. Рассмотрим матрицу $A = E + (1 - (b_1 - c_1))f_{12}$, легко видеть, что $\alpha^{-1}(A) \in \mathrm{GL}\,(S)$. В силу равенств (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) и (3.23) мы получаем, что A коммутирует с $\alpha\circ\varphi(\mathrm{E}\,(R))$. Следовательно, $A \in Z(\mathrm{GL}\,(S_1))$, откуда $1 - (b_1 - c_1) = 0$.

Определим $\theta_1' : \langle\mathrm{GL}\,(R)\rangle \to e'\langle\mathrm{GL}\,(S_1)\rangle$ и $\theta_2' : \langle\mathrm{GL}\,(R)\rangle \to (1 - e')\langle\mathrm{GL}\,(S_1)\rangle$ по правилу

$$(\theta_1'(A))_{ij} = \theta_3(a_{ij}), (\theta_2'(A))_{ij} = \theta_4(a_{ji}). \tag{3.25}$$

Тогда θ'_1 — гомоморфизм колец, θ'_2 — антигомоморфизм колец. Также в силу (3.24) и того, что $b_1 - c_1 = 1$, имеем $\alpha(\varphi(A)) = \theta'_1(A) + \theta'_2(A^{-1})$ для всех $A \in \mathrm{E}\,(R)$.

В силу леммы 3.3 найдется e — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}\,(S)$, такой, что
$$\alpha(e\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle) = e'\langle \mathrm{GL}\,(S_1)\rangle.$$
Ясно, что
$$\alpha((1-e)\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle) = (1-e')\langle \mathrm{GL}\,(S_1)\rangle.$$
Тогда
$$\alpha^{-1}\circ\theta'_1 : \langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to e\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle, \alpha^{-1}\circ\theta'_2 : \langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to (1-e)\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle$$
также будут являться кольцевыми гомоморфизмом и антигомоморфизмом соответственно. Обозначим эти отображения через θ_1 и θ_2 соответственно. Тогда будет выполнено равенство
$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) \text{ для всех } A \in \mathrm{E}\,(R). \tag{3.26}$$

Пусть $I, J \lhd S$, такие, что $\mathrm{Mat}\,(I) = e\mathrm{Mat}\,(S)$, $\mathrm{Mat}\,(J) = (1-e)\mathrm{Mat}\,(S)$. Тогда $I \oplus J = S$. Положим $M_1 = \varphi^{-1}(\mathrm{GL}\,(S, I)), N_1 = \varphi^{-1}(\mathrm{GL}\,(S, J)$. По лемме 3.1 получаем, что $M_1 = \mathrm{GL}\,(R, hR), N_1 = \mathrm{GL}\,(R, (1-h)R)$, где h — центральный идемпотент кольца R. Пусть $B = E + hre_{ij} \in \mathrm{E}\,(R, hR)$, тогда $\varphi(B) - E \in \mathrm{Mat}\,(I)$. Имеем $\varphi(B)-E = \theta_1(B-E)+\theta_2(B^{-1}-E)$, следовательно, $\theta_2(B^{-1} - E) = 0$. Это означает, что $hr \in \ker\theta_4$, то есть
$$hR \subseteq \ker\theta_4. \tag{3.27}$$
Аналогично
$$(1-h)R \subseteq \ker\theta_3. \tag{3.28}$$

Покажем, что
$$\ker\theta_3 \cap \ker\theta_4 = \{0\}. \tag{3.29}$$
Действительно, пусть $r \in \ker\theta_3 \cap \ker\theta_4$. Рассмотрим матрицу $A = E + re_{12}$. Имеем $\varphi(A) = E + \theta_3(r)f_{12} - \theta_4(r)f_{21} = E$, откуда $A = E$, то есть $r = 0$.

Из соотношений (3.27), (3.28) и (3.29) мы получаем, что $\ker\theta_3 = (1-h)R$, $\ker\theta_4 = hR$, то есть
$$\theta_3 : hR \to b_1S_1, \theta_4 : (1-h)R \to (1-b_1)S_1 \text{ — инъективные отображения.} \tag{3.30}$$

Легко видеть, что $\theta_4(1-h) = 1 - b_1$, значит, $\theta_2'((1-h)\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle) \subseteq (1-e')\langle \mathrm{GL}\,(S_1)\rangle$ (отображение θ_2' как раньше определяется по формуле (3.25)). Следовательно, можно определить отображение

$$\theta_2 = \alpha^{-1} \circ \theta_2' : (1-h)\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to (1-e)\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle.$$

В силу (3.30) построенное отображение θ_2 инъективно. Рассуждая аналогично, мы можем определить отображение

$$\theta_1 = \alpha^{-1} \circ \theta_1' : h\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \to e\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle,$$

которое также будет являться инъективным.

Заметим, что для доказательства включения $\varphi(\mathrm{E}\,_n(R)) \subseteq \mathrm{E}\,_n(S_1)$ мы пользовались только следующими свойствами системы $\{f_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$:

$$\begin{aligned} &\varphi(E - 2e_{ii}) = E - 2f_{ii}, \\ &\varphi(E - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}) = E - f_{ii} - f_{jj} + f_{ij} + f_{ji}, \text{ при } i \neq j. \end{aligned}$$

Следовательно, рассматривая отображение $\varphi^{-1} \circ \alpha^{-1} : \mathrm{GL}\,(S_1) \to \mathrm{GL}\,(R)$ и проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что $\varphi^{-1}(E + sf_{ij}) \in \mathrm{E}\,(R), s \in S_1$. Следовательно, θ_1, θ_2 сюръективны, то есть являются изоморфизмом и антиизоморфизмом колец, соответственно. А в силу соотношений (3.26), (3.28) и (3.29) выполнено равенство

$$\varphi(A) = \theta_1(hA) + \theta_2((1-h)A^{-1}) \text{ для всех } A \in \mathrm{E}\,(R).$$

Теорема доказана.

Замечание. Заметим, что $f_{ij} \in \mathrm{FMat}\,(R), i, j \in \mathbb{N}$. Следовательно, по определению отображений θ_1 и θ_2 мы получаем

$$\theta_1(ee_{11}) = ff_{11} \in \mathrm{FMat}\,(S), \theta_2((1-e)e_{11}) = (1-f)f_{11} \in \mathrm{FMat}\,(S).$$

Также по определению θ_1 и θ_2 и свойству 2 из леммы 3.3 имеем

$$\theta_1^{-1}(fe_{11}) \in \mathrm{FMat}\,(R), \theta_2^{-1}((1-f)e_{11}) \in \mathrm{FMat}\,(R).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} &\mathrm{FMat}\,(eR) \subseteq e\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \subseteq \mathrm{FCRMat}\,(eR), \\ &\mathrm{FMat}\,((1-e)R) \subseteq (1-e)\langle \mathrm{GL}\,(R)\rangle \subseteq \mathrm{FCRMat}\,((1-e)R), \\ &\mathrm{FMat}\,(fS) \subseteq e\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle \subseteq \mathrm{FCRMat}\,(fS), \\ &\mathrm{FMat}\,((1-f)S) \subseteq (1-f)\langle \mathrm{GL}\,(S)\rangle \subseteq \mathrm{FCRMat}\,((1-f)S). \end{aligned}$$

Следовательно, отображения θ_1 и $\theta_2 \circ t$ удовлетворяют условию 3 теоремы 2.5, [13]. Значит, кольца eR и fS Морита-эквивалентны и кольца $(1-e)R$ и $(1-f)S$ также Морита-эквивалентны.

Глава 4

Изоморфизмы стабильных унитарных групп

4.1 Обозначения и соглашения

Будем обозначать через E_{ij} стандартные матричные единицы кольца $\mathrm{Mat}\,(R)$. Также введем два счетных набора индексов из $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}'$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ V & W \end{pmatrix}, \quad X, Y, V, W \in \mathrm{Mat}_{\,\infty}(R),$$

тогда индексы $i \in \mathbb{N}$ будут применяться для нумерации строк и столбцов матрицы X, строк матрицы Y и столбцов V, а индексы $j \in \mathbb{N}'$ — для нумерации строк и столбцов матрицы W, строк матрицы V и столбцов Y. Также будем считать, что $(i')' = i, i \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $e_{ij}, i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$, стандартные матричные единицы кольца $\mathrm{Mat}_{\,2,\infty}(R)$. Согласно введенным обозначениям

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{ij'} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{i'j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} & 0 \end{pmatrix}, e_{i'j'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix}$$

Положим $s_{ij} = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}, h_{ij} = \begin{pmatrix} s_{ij} & 0 \\ 0 & s_{ij}. \end{pmatrix}$. Ясно, что $h_{ij} \in \mathrm{U}\,(R)$.

Положим $T = \{r \in R \mid r = r^{\tau}\}$, $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Если $A \subseteq \mathrm{U}\,(R)$, то $\mathrm{C}\,(A) = \{B \in \mathrm{U}\,(R) \mid BX = XB \; \forall X \in A\})$, $\mathrm{St}\,(A) = \{B \in \mathrm{U}\,(R) \mid B^{-1}AB = A\})$. Через $\langle A \rangle_{mul}$ будем обозначать подгруппу, порожденную элементами из A. Через $\langle A \rangle$ будем обозначать кольцо, полученное путем сложения и умножения элементов A, а также взятия их обратных элементов в случае, когда такие элементы существуют.

Кроме того, мы будем опускать нулевые элементы при записи матриц в случае, когда это не приводит к неоднозначности.

Целью данной главы является доказательство следующей теоремы:

Теорема 8. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $\frac{1}{2}$, τ — инволюция на R, ε — инволюция на S, $\varphi : \mathrm{U}(R) \to \mathrm{U}(S)$ — изоморфизм стабильных унитарных групп. Пусть также существует обратимый элемент $\beta \in Z(R)$, для которого $\beta\beta^\tau - 1$ обратим. Тогда существует кольцевой изоморфизм*

$$\theta : \langle \mathrm{U}(R) \rangle \to \langle \mathrm{U}(S) \rangle,$$

такой, что

$$\varphi(A) = \theta(A) \text{ для всех } A \in \mathrm{EU}(R).$$

4.2 Предварительные результаты

В этом разделе мы построим систему матричных единиц кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(S)$, удовлетворяющую специальным свойствам.

Пункт 1. Для доказательства нам потребуется следующее утверждение из работы [6].

Предложение 4.1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с $\frac{1}{2}$, H, G — подгруппы в группе обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$. Элементы γ_1 и γ_2 — идемпотенты кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$, такие, что $E - 2\gamma_1 \in H, E - 2\gamma_2 \in H, E - 2\gamma_1\gamma_2 \in G, \gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$,*

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_G(\mathrm{St}_G\{E - 2\gamma_1, E - 2\gamma_2\}) \subseteq \mathrm{C}_G(H),\\ &H = \langle \{(E - 2\gamma_1)a(E - 2\gamma_1)a^{-1} \mid a \in H\}\rangle_{mul}.\end{aligned}$$

Тогда $\gamma_1\gamma_2 = 0$ и $H \subseteq (\gamma_1 + \gamma_2)\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)(\gamma_1 + \gamma_2) + E$.

Пусть $H_{ij}, i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$, — подгруппа $\mathrm{U}(R)$, порожденная элементами

$$E + re_{ij} - re_{j'i'}, E + re_{ji} - re_{i'j'}, E + re_{ij'} + re_{j,i'}, E + re_{i'j} + re_{j'i}.$$

Пусть

$$A \in \mathrm{C}(\mathrm{St}\{E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}), E - 2(e_{jj} + e_{j'j'})\}).$$

Так как элементы $E + re_{ii'}, E + re_{jj'}, E + re_{i'i}, E + re_{j'j}, h_{ij}$ содержатся в $\mathrm{St}\,\{E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}), E - 2(e_{jj} + e_{j'j'})\}$, то A коммутирует с ними. Значит,

$$A = \xi(e_{ii} + e_{i'i'} + e_{jj} + e_{j'j'}) + x,$$
$$xe_{kk} = e_{kk}x = 0, k \in \{i, i', j, j'\}, \xi r = r\xi \text{ при } r \in T.$$

Отсюда следует, что $A \in \mathrm{C}\,(H_{ij})$, то есть

$$\mathrm{C}\,(\mathrm{St}\,\{E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}), E - 2(e_{jj} + e_{j'j'})\}) \subseteq \mathrm{C}\,(H_{ij}). \tag{4.1}$$

Для любого $s_r \in \{E{+}re_{ij}{-}r_{j'i'}, E{+}re_{j,i}{-}re_{i'j'}, E{+}re_{ij'}{+}re_{ji'}, E{+}re_{i'j}{+}re_{j'i}\}$ имеем

$$(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}))s_r(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})) = s_r^{-1}, s_r^2 = s_{2r}.$$

Следовательно,

$$H_{ij} = \langle (E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}))s(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}))s^{-1} \mid s \in H_{ij}\rangle_{mul}. \tag{4.2}$$

В силу равенств $[E + e_{ij} - e_{j'i'}, E + re_{ij'} + re_{ji'}] = E + 2re_{ii'}, E - 2(e_{kk} + e_{k'k'}) = ((E + e_{kk'})(E - 2e_{k'k}))^2, k = i, j$, получаем

$$\begin{aligned} &E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}), E - 2(e_{jj} + e_{j'j'}) \in H_{ij}, \\ &E + re_{ii'}, E + re_{jj'}, E + re_{i'i}, E + re_{j'j} \in H_{ij}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Положим

$$\varphi(E - 2(e_{kk} + e_{k'k'})) = E - 2f_k, k \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Тогда в силу равенств (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) для f_i, f_j и H_{ij} выполнены условия предложения 4.1. Следовательно,

$$f_i f_j = f_j f_i = 0,$$
$$\varphi(H_{ij}) \subseteq (f_i + f_j)\mathrm{Mat}_{\,2,\infty}(S)(f_i + f_j) + E.$$

Пункт 1 завершен.

Пункт 2. Положим

$$H_k = \langle E + re_{kk'}, E + re_{k'k} \mid r \in T\rangle_{mul}, k = i, j.$$

Тогда $H_i, H_j \subseteq H_{ij}$. Покажем, что

$$\varphi(H_k) \subseteq f_k\mathrm{Mat}_{\,2,\infty}(S)f_k + E, k = i, j.$$

Доказательство. Положим $N_k = \{A \in \mathrm{U}\,(S) \mid A = f_k A f_k + E - f_k\}, k = i, j$. Тогда
$$N_i \cap N_j = \{E\}, [N_i, N_j] = \{E\}. \tag{4.5}$$

В силу того, что элементы групп $\varphi(H_i), \varphi(H_j)$ коммутируют с $f_k, k = i, j$, мы получаем, что
$$H_i H_j \subseteq \varphi^{-1}(N_i N_j).$$
Следовательно, для всех $r \in T$ существуют $\gamma_k(r), \rho_k(r) \in N_k$, для которых
$$E + re_{ii'} = \gamma_i(r)\gamma_j(r), E + re_{i'i} = \rho_i(r)\rho_j(r).$$
Положим
$$d = \beta e_{ii} + \beta^{-\tau} e_{i'i'} + E - e_{ii} - e_{i'i'},$$
где β — центральный элемент кольца R, $\beta, \beta^\tau, \beta\beta^\tau - 1$ обратимы в R. Тогда получаем, что $d \in \mathrm{U}\,(R)$ и коммутирует с $E - 2(e_{kk} + e_{k'k'}), k = i, j$, следовательно,
$$d\varphi^{-1}(N_k)d^{-1} \subseteq \varphi^{-1}(N_k), k = i, j.$$
Положим $F = \{E + re_{ii'} \mid r = r^\tau\}$. В силу того, что F — коммутативная группа, и с помощью (4.5) получаем
$$\gamma_1(r), \gamma_2(r) \in \mathrm{C}\,(F). \tag{4.6}$$
Несложно показать, что $[\mathrm{C}\,(F), d] \subseteq F$, откуда в силу (4.6)
$$\begin{aligned}[E + re_{ii'}, d] &= \gamma_i(r)\gamma_j(r)d\gamma_j(r)^{-1}\gamma_i(r)d^{-1} = \\ &= \gamma_i(r)[\gamma_j(r), d]\gamma_i(r)d^{-1} = [\gamma_j(r), d][\gamma_i(r), d] = [\gamma_i(r), d][\gamma_j(r), d].\end{aligned}$$
Имеем $[\gamma_k(r), d] \in F$, следовательно, в силу обратимости $\beta\beta^\tau - 1$ можно считать, что $\gamma_k(r) \in F, k = i, j$, и для каждого $r \in T$ существует t_r, такой, что
$$E + t_r e_{ii'} \in \varphi^{-1}(N_i), E + (r - t_r)e_{ii'} \in \varphi^{-1}(N_j). \tag{4.7}$$
Аналогично для каждого $r \in T$ найдется элемент s_r, для которого
$$E + s_r e_{i'i} \in \varphi^{-1}(N_i), E + (r - s_r)e_{i'i} \in \varphi^{-1}(N_j). \tag{4.8}$$
Из (4.5), (4.7), (4.8) получаем, что
$$(E + (r - t_r)e_{ii'})(E + s_w e_{i'i}) = (E + s_w e_{i'i})(E + (r - t_r)e_{ii'}),$$
$$(E + t_r e_{ii'})(E + (w - s_w)e_{i'i}) = (E + (w - s_w)e_{i'i})(E + t_r e_{ii'}).$$

Следовательно,

$$(r-t_r)s_w = s_w(r-t_r) = t_r(w-s_w) = (w-s_w)t_r = 0, \text{ для всех } r, w \in T. \quad (4.9)$$

В том числе $0 = t_1(1-s_1) = (1-t_1)s_1$, откуда $t_1 = s_1 = s_1^2 = r_1^2$. Тогда в силу (4.7), (4.8)

$$((E + t_1 e_{ii'})(E - t_1 e_{i'i})^2)^2 = E - 2t_1(e_{ii} + e_{i'i'}) \in \varphi^{-1}(N_i), \quad (4.10)$$

и аналогично

$$E - 2(1-t_1)(e_{ii} + e_{i'i'}) \in \varphi^{-1}(N_j). \quad (4.11)$$

Так как

$$(E - 2t_1(e_{ii} + e_{i'i'}))(E - 2(1-t_1)(e_{ii} + e_{i'i'})) = E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}),$$
$$E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}) = \varphi^{-1}(E - 2f_i) \in \varphi^{-1}(N_i),$$

то из (4.5) выводим $E - 2(1-t_1)(e_{ii} + e_{i'i'}) = E$. Следовательно, $t_1 = s_1 = 0$, откуда, учитывая (4.9), вытекает, что $r = t_r = s_r$. То есть в силу (4.10) и (4.11) получаем

$$\varphi(E + re_{ii'}), \varphi(E + re_{i'i}) \in N_i.$$

Следовательно, $\varphi(H_i) \subseteq N_i \subseteq f_i \mathrm{Mat}_{\,2,\infty}(S) f_i + E$. Аналогично $\varphi(H_j) \subseteq N_j \subseteq f_j \mathrm{Mat}_{\,2,\infty}(S) f_j + E$. Пункт 2 завершен.

Пункт 3. Положим $\varphi(E + re_{ii'}) = E + x_{r,i}, \varphi(E + re_{i'i}) = E + y_{r,i}$, где $i \in \mathbb{N}, r \in T$,

$$g_r = E + \frac{1}{2}(x_{r,i} + x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1}) - \varphi(h_{i,i+1})x_{r,i}^{\varepsilon} + \varphi(h_{i,i+1})x_{r,i}^{\varepsilon}\varphi(h_{i,i+1})).$$

Покажем, что

$$x_{r,i}x_{s,i} = 0, y_{r,i}y_{s,i} = 0 \text{ для всех } r, s \in T. \quad (4.12)$$

Из определения $x_{r,i}$ получаем

$$x_{r,i} + x_{r,i}^{\varepsilon} + x_{r,i}x_{r,i}^{\varepsilon} = 0, x_{r+s,i} = x_{r,i} + x_{s,i} + x_{r,i}x_{s,i}. \quad (4.13)$$

Доказательство. Пусть

$$\lambda = \beta(e_{ii} + e_{i+1,i+1}) + \beta^{-\tau}(e_{i'i'} + e_{(i+1)'(i+1)'}) + E - e_{ii} - e_{i+1,i+1} - e_{i'i'} - e_{(i+1)'(i+1)'}.$$

Тогда $\lambda h_{i,i+1} = h_{i,i+1}\lambda, \lambda re_{ii'}\lambda^{-1} = \beta\beta^{\tau} re_{ii'}$, следовательно,

$$\varphi(\lambda)\varphi(h_{i,i+1}) = \varphi(h_{i,i+1})\varphi(\lambda), \varphi(\lambda)x_r\varphi(\lambda^{-1}) = x_{\beta\beta^{\tau}r}. \quad (4.14)$$

Легко видеть, что $x_{-r,i} = (x_{r,i})^{\varepsilon}$ и $g_r \in \mathrm{U}\,(S)$. Так как элементы $E + re_{ii'}$ и $E + se_{ii'}$ коммутируют, то $x_{r,i}x_{s,i} = x_{s,i}x_{r,i}$. Также ясно, что

$$x_{r,i}, y_{r,i} \in f_i \mathrm{Mat}\,_{2,\infty} f_i, \varphi(h_{i,i+1}) e_i \varphi(h_{i,i+1}) = e_{i+1}. \tag{4.15}$$

Значит, $[g_r, (E + x_{s,i})\varphi(h_{i,i+1})(E + x_{s,i})\varphi(h_{i,i+1})] = E$. Следовательно,

$$\varphi^{-1}(g_r)(re_{ii'} + re_{i+1(i+1)'}) = (re_{ii'} + re_{i+1(i+1)'})\varphi^{-1}(g_r). \tag{4.16}$$

Из определения g_r легко видеть, что $[g_r, E - 2(e_i + e_{i+1})] = E$. Учитывая (4.16), получаем

$$\varphi^{-1}(g_r) = \begin{pmatrix} A_1 & & & B_1 & & \\ & A_2 & & & B_2 & \\ & & A_3 & & & B_3 \\ C_1 & & & D_1 & & \\ & 0 & & & A_2 & \\ & & C_3 & & & D_3 \end{pmatrix},$$

$$A_1, B_1, C_1, D_1 \in \mathrm{Mat}\,_{i-1}(R), A_2, B_2 \in \mathrm{Mat}\,_2(R), A_3, B_3, C_3, D_3 \in \mathrm{Mat}\,_\infty(R)$$

(на пустых местах в матрице предполагаются нулевые элементы).

При этом, так как матрица $\varphi^{-1}(g_r)$ обратима, то A_2 также обратима. Тогда элемент $\varphi^{-1}(g_r)$ может быть представлен в виде

$$\varphi^{-1}(g_r) = G_1 G_2,$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} E_{i-1} & & & 0 & \\ & E_2 & & & B_2A_2^{-1} \\ & & E_\infty & & & 0 \\ & 0 & & & E_\infty \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} A_1 & & & B_1 & & \\ & A_2 & & & 0 & \\ & & A_3 & & & B_3 \\ C_1 & & & D_1 & & \\ & 0 & & & A_2 & \\ & & C_3 & & & D_3 \end{pmatrix}$$

(на пустых местах в матрицах предполагаются нулевые элементы). (4.17)

Легко видеть, что G_2 коммутирует с λ. Имеем

$$[\varphi^{-1}(g_r), \lambda] = G_1 G_2 \lambda G_2^{-1} G_1^{-1} \lambda^{-1} = [G_1, \lambda].$$

Отсюда следует, учитывая вид G_1 из (4.17), что $[\varphi^{-1}(g_r), \lambda]$ коммутирует с $E + se_{ii'}$. Значит, $[g_r, \varphi(\lambda)]x_{s,i} = x_{s,i}[g_r, \varphi(\lambda)]$. Тогда, используя (4.14), (4.15), получаем

$$0=[g_r,\varphi(\lambda)]x_{s,i}f_{i+1}=x_{s,i}[g_r,\varphi(\lambda)]f_{i+1}=x_{s,i}g_r\varphi(\lambda)g_r^{-1}\varphi(\lambda)^{-1}f_{i+1}=$$
$$=x_{s,i}(E+\frac{1}{2}(x_{r,i}+x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1})-\varphi(h_{i,i+1})x^{\varepsilon}_{r,i}+\varphi(h_{i,i+1})x^{\varepsilon}_{r,i}\varphi(h_{i,i+1}))\varphi(\lambda)\times$$
$$\times(E+\frac{1}{2}(x^{\varepsilon}_{r,i}-x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1})+\varphi(h_{i,i+1})x^{\varepsilon}_{r,i}+\varphi(h_{i,i+1})x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1}))\varphi(\lambda)^{-1}f_{i+1}=$$
$$=x_{s,i}(f_i+\frac{1}{2}x_{r,i}+\frac{1}{2}x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1}))(E+\frac{1}{2}(x_{r_2,i}-x_{r_1,i}\varphi(h_{i,i+1})+\varphi(h_{i,i+1})x_{r_2,i}+$$
$$+\varphi(h_{i,i+1})x_{r_1,i}\varphi(h_{i,i+1}))f_{i+1}=x_{s,i}(f_i+\frac{1}{2}x_{r,i}+\frac{1}{2}x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1}))(f_{i+1}-\frac{1}{2}x_{r_1,i}\varphi(h_{i,i+1})+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi(h_{i,i+1})x_{r_1,i}\varphi(h_{i,i+1}))=x_{s,i}(x_{r,i}-x_{r_1,i})\frac{1}{2}\varphi(h_{i,i+1}),r_1=\beta\beta^{\tau}r.$$

Следовательно, с помощью (4.13),

$$0=x_{s,i}(x_{r,i}-x_{r_1,i})=x_{s,i}(x_{r,i}+x^{\varepsilon}_{r_1,i}+x_{r_1,i}x^{\varepsilon}_{r_1,i})=$$
$$=x_{s,i}(x_{r,i}+x_{-r_1,i}+x_{r_1,i}x_{-r_1,i})=x_{s,i}(x_{r-r_1,i}+(x_{r_1,i}-x_{r,i})x_{r_1,i})=x_{r,i}x_{r-r_1,i}.$$

Так как $r-r_1=(1-\beta\beta^{\tau})r$ пробегает все элементы T, то получаем, что $x_{r,i}x_{s,i}=0$. Аналогично выводим равенство $y_{r,i}y_{s,i}=0$. Пункт 3 завершен.

Пункт 4. Положим

$$z_{ii}=x_{1,i}y_{1,i},\ z_{i'i'}=y_{1,i}x_{1,i},\ i\in\mathbb{N}. \tag{4.18}$$

Выполнено равенство $((E+e_{ii'})(E-e_{i'i}))^3=E-2(e_{ii}+e_{i'i'})$. Значит, $E-2f_i=((E-x_{1,i})(E-y_{1,i}))^3$, следовательно, учитывая (4.15),

$$2f_i+x_{1,i}+y_{1,i}-2x_{1,i}y_{1,i}-2y_{1,i}x_{1,i}-x_{1,i}y_{1,i}x_{1,i}-y_{1,i}x_{1,i}y_{1,i}=0. \tag{4.19}$$

Умножая полученное равенство слева на $x_{1,i}$ и справа на $y_{1,i}$, получаем, что $(x_{1,i}y_{1,i})^2=x_{1,i}y_{1,i}$. Аналогично, умножая (4.19) слева на $y_{1,i}$ и справа на $x_{1,i}$, получаем $(y_{1,i}x_{1,i})^2=y_{1,i}x_{1,i}$. Значит, элементы z_{ii} и $z_{i'i'}$ являются идемпотентами.

Преобразовав (4.19), видим, что

$$f_i=x_{1,i}(E-2y_{1,i}-y_{1,i}x_{1,i})+y_{1,i}(E-2x_{1,i}-x_{1,i}y_{1,i}).$$

Отсюда выводим, учитывая (4.18) и (4.15),

$$x_{1,i}=z_{ii}(E-2x_{1,i}-x_{1,i}y_{1,i})=z_{ii}^2(E-2x_{1,i}-x_{1,i}y_{1,i})=z_{ii}x_{1,i}.$$

Аналогично получается $y_{1,i} = z_{i'i'}y_{1,i}$. Следовательно, из (4.19) и (4.15)

$$\begin{aligned} &f_i = z_{ii} + z_{i'i'}, \\ &\varphi(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})) = E - 2(z_{ii} + z_{i'i'}), i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Легко видеть, что элементы $z_{ii}, i \in \mathbb{N}$ сопряжены между собой, и элементы $z_{i'i'}, i' \in \mathbb{N}$ сопряжены между собой (например, при помощи матриц $\varphi(h_{ij})$). Покажем, что z_{ii} и $z_{i'i'}$, $i \in \mathbb{N}$ также сопряжены. Рассмотрим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} E_\infty - E_{11} & -E_{11} \\ E_{11} & E_\infty - E_{11} \end{pmatrix}.$$

Прямым подсчетом убеждаемся, что $H^{-1} = (E - 2(e_{11} + e_{1'1'}))H = H(E - 2(e_{11} + e_{1'1'}))$, и что $H \in \mathrm{U}\,(R)$. Имеем $H(E + re_{11'})H^{-1} = E + re_{1'1}$, значит, $\varphi(H)z_{11}\varphi(H)^{-1} = z_{1'1'}$. Положим

$$T_{ij} = (h_{i,i-1} \dots h_{21})H(h_{12} \dots h_{j,j-1}).$$

Заметим, что $T_{ij} \in \mathrm{U}\,(R)$. Тогда получаем

$$z_{i'i'} = \varphi(T_{ij})z_{jj}\varphi(T_{ij})^{-1}. \tag{4.21}$$

Имеем

$$\begin{aligned} T_{ij}^{-1} = (h_{j,j-1} \dots h_{12})H^{-1}(h_{21} \dots h_{i,i-1}) = \\ = (h_{j,j-1} \dots h_{12})(E - 2(e_{11} + e_{1'1'})H(h_{21} \dots h_{i,i-1}) = \\ = (E - 2(e_{jj} + e_{j'j'}))(h_{j,j-1} \dots h_{12})H(h_{21} \dots h_{i,i-1}) = \\ = (E - 2(e_{jj} + e_{j'j'}))T_{ji}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Итак, $\{z_{ii}, z_{i'i'} \mid i \in \mathbb{N}\}$ — система ортогональных сопряженных между собой идемпотентов. Положим

$$\begin{aligned} &z_{ij} = z_{ii}\varphi(h_{i,i+1} \dots h_{j-1,j})z_{jj}, i < j, \\ &z_{ij} = z_{ii}\varphi(h_{i-1,i} \dots h_{j,j+1})z_{jj}, i > j, \\ &z_{i'j'} = z_{i'i'}\varphi(h_{i,i+1} \dots h_{j-1,j})z_{j'j'}, i < j, \\ &z_{i'j'} = z_{i'i'}\varphi(h_{i-1,i} \dots h_{j,j+1})z_{j'j'}, i > j, \\ &z_{ij'} = z_{ii}\varphi(T_{ji}^{-1})z_{j'j'}, \\ &z_{i'j} = z_{i'i'}\varphi(T_{ij})z_{jj}. \end{aligned}$$

Из соотношения $\varphi(h_{ij})z_{ii}\varphi(h_{ij}) = z_{jj}, i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$, и равенства (4.21) легко вывести, что $z_{\mu\nu}z_{\lambda\gamma} = \delta_{\nu\lambda}z_{\mu\gamma}$, $\mu, \nu, \lambda, \gamma \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$. Также получаем $(E + x_{1,i})^\varepsilon = \varphi(E + e_{ii'})^\varepsilon = \varphi(E + e_{ii'})^{-1} = E - x_{1,i}$, откуда $x_{1,i}^\varepsilon = -x_{1,i}$. Аналогично $y_{1,i}^\varepsilon = -y_{1,i}$. Значит,

$$z_{ii}^\varepsilon = z_{i'i'}, z_{ij}^\varepsilon = z_{j'i'}. \tag{4.23}$$

Далее, из (4.22) следует, что

$$z_{ij'}^\varepsilon = z_{j'j'}^\varepsilon\varphi(T_{ji}^{-1})^\varepsilon z_{ii}^\varepsilon = z_{jj}\varphi(T_{ji})z_{i'i'} = z_{jj}(E - 2(z_{jj} + z_{j'j'}))\varphi(T_{ij}^{-1})z_{i'i'} = -z_{ji'}.$$

Аналогично

$$z_{i'j}^\varepsilon = -z_{j'i}. \tag{4.24}$$

Пункт 4 завершен.

Отметим два свойства построенной системы матричных единиц.

Свойство 4.1. *Для любого $A \in \mathrm{U}\,(S)$ найдется n (зависящее от A), такое, что A коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k}(z_{ii} + z_{i'i'})$ и $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k}(e_{ii} + e_{i'i'})$ при всех $k \geqslant n$.*

Доказательство. По определению $\mathrm{U}\,(R)$ найдется такое n, что для всех $k \geqslant n$ элемент $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k}(e_{ii} + e_{i'i'})$. Следовательно, $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует и с $E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})$. В силу равенства (4.20)

$$\varphi(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})) = \varphi(\prod_{i=1}^{k}(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})) = \prod_{i=1}^{k}(E - 2(z_{ii} + z_{i'i'})) =$$
$$= E - 2(\sum_{i=1}^{k}(z_{ii} + z_{i'i'})).$$

Значит, A коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k}(z_{ii} + z_{i'i'})$ при всех $k \geqslant n$.

Свойство 4.2. *Для любого $A \in \mathrm{U}\,(S)$ найдется n (зависящее от A), такое, что A коммутирует со всеми $z_{ii} + z_{i'i'}$ и $\varphi^{-1}(A)(e_{ii} + e_{i'i'}) = (e_{ii} + e_{i'i'})\varphi^{-1}(A) = e_{ii} + e_{i'i'}$ при $i \geqslant n$.*

Доказательство аналогично доказательству свойства 4.1.

4.3 Построение изоморфизма между кольцами $\langle \mathrm{U}\,(S)\rangle$ и $\langle \mathrm{U}\,(S_1)\rangle$, где $S_1 = z_{11}\mathrm{Mat}\,_{2,\infty}(S)z_{11}$

Пункт 5. Для всех матриц из $\langle \mathrm{U}\,(S)\rangle$ определим отображение α по формуле

$$\alpha(A) = \begin{pmatrix} (z_{1i}Az_{j1}) & (z_{1i}Az_{j'1}) \\ (z_{1i'}Az_{j1}) & (z_{1i'}Az_{j'1}) \end{pmatrix}, i, j \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Лемма 4.1. *Построенное отображение α является изоморфизмом между кольцами $\langle \mathrm{U}\,(S)\rangle$ и $\langle \mathrm{U}\,(S_1)\rangle$, $S_1 = z_{11}\mathrm{Mat}\,_2(\mathrm{Mat}\,(S))z_{11} = z_{11}\mathrm{Mat}\,_{2,\infty}(S)z_{11}$.*

Для доказательства нам потребуется следующая

Лемма 4.2. *Если матрица*

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}\,_{2,\infty}(R)$$

коммутирует с $E + e_{ii'}$, то $E_{ii}Z = ZE_{ii} = 0, E_{ii}W = XE_{ii}$.

Если матрица

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}\,_{2,\infty}(R)$$

коммутирует с $E + e_{i'i}$, то $E_{ii}Y = YE_{ii} = 0, WE_{ii} = E_{ii}X$.

Доказательство. Проверяется прямым подсчетом.

Также нам потребуется

Лемма 4.3. *Если $A \in \mathrm{U}\,(S)$ коммутирует со всеми $z_{ii}, z_{i'i'}, x_{1,i}, y_{1,i}$, то $A = E$.*

Доказательство. Так как A коммутирует с $E - 2(z_{ii} + z_{i'i'})$, то $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})$. Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}\,[a_1, a_2, \ldots] & \mathrm{diag}\,[b_1, b_2, \ldots] \\ \mathrm{diag}\,[c_1, c_2, \ldots] & \mathrm{diag}\,[d_1, d_2, \ldots] \end{pmatrix}.$$

В силу того, что A коммутирует с $E + x_{1,i}, E + y_{1,i}$, получаем, что $\varphi(A)$ коммутирует с $E + e_{ii'}, E + e_{i'i}$. Значит, по лемме 4.2 $b_i = c_i = 0$, $a_i = d_i$.

Положим

$$h'_{ij} = E - z_{ii} - z_{jj} + z_{ij} + z_{ji} - z_{i'i'} - z_{j'j'} + z_{i'j'} + z_{j'i'}.$$

Легко видеть, что $h'_{ij} \in \mathrm{U}(S)$. Рассмотрим матрицу h'_{12}. Элемент $\varphi^{-1}(h'_{12})$ коммутирует с $E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}), E + e_{ii'}, E + e_{i'i}, i \neq 1, 2$. Значит,

$$\varphi^{-1}(h'_{12}) = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & & r_2 & s_2 & \\ t_1 & g_1 & & t_2 & g_2 & \\ & & \operatorname{diag}[x_1, x_2 \ldots] & & & \operatorname{diag}[0, 0 \ldots] \\ r_3 & s_3 & & r_4 & s_4 & \\ t_3 & g_3 & & t_4 & g_4 & \\ & & \operatorname{diag}[0, 0 \ldots] & & & \operatorname{diag}[x_1, x_2 \ldots] \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$(E - 2(z_{11} + z_{1'1'}))h'_{12} = h'_{12}(E - 2(z_{22} + z_{2'2'})),$$

следовательно,

$$\begin{pmatrix} -r_j & -s_j \\ t_j & g_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_j & -s_j \\ t_j & -g_j \end{pmatrix},$$

откуда $r_j = g_j = 0$. По определению z_{ij}, учитывая равенства $x_{1,i} = z_{ii}x_{1,i}, y_{1,i} = z_{i'i'}y_{1,i}$, получаем, что $h'_{12}x_{1,1} = x_{1,2}h'_{12}, h'_{12}y_{1,1} = y_{1,2}h'_{12}$. Следовательно, $s_2 = t_2 = s_3 = t_3 = 0$. Имеем $(h'_{12})^2 = E$, значит,

$$\begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ t_1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} s_1t_1 & 0 \\ 0 & t_1s_1 \end{pmatrix} = E,$$

то есть $t_1 = s_1^{-1}$. Так же получаем, что $t_4 = s_4^{-1}$. Аналогичным способом можно установить, что

$$\begin{gathered} \varphi^{-1}(h'_{ij}) = a_{ij}e_{ij} + a_{ij}^{-1}e_{ji} + b_{ij}e_{i'j'} + b_{ij}^{-1}e_{j'i'} + X, \\ \text{где } X = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}[x_1, x_2, \ldots] & 0 \\ 0 & \operatorname{diag}[x_1, x_2, \ldots] \end{pmatrix}, x_i = x_j = 0, i, j \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{4.26}$$

По условию матрица A перестановочна со всеми z_{ij}, следовательно, $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $\varphi^{-1}(h'_{ij})$. Значит, из (4.26), a_i и d_i сопряжены между собой, и в силу того, что $\varphi^{-1}(A) \in \mathrm{U}(R)$, получаем $a_i = d_i = 1$. Лемма 4.3 доказана.

Докажем теперь лемму 4.1. В силу свойства 4.2 системы $\{z_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'\}$ получаем, что $\alpha(A) \in \mathrm{Mat}_2(\mathrm{Mat}(S_1))$. В силу свойства 4.1 получаем, что α — кольцевой гомоморфизм.

Докажем инъективность отображения α. Пусть $\alpha(A)=0, A\in\langle \mathrm{U}\,(S)\rangle$, это означает, что $z_{ij}Az_{kl}=0, z_{ij}A^{\varepsilon}z_{kl}=0$ для любых $i,j,k,l\in\mathbb{N}\cup\mathbb{N}'$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})A\sum\limits_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})=0, \sum\limits_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})A^{\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})=0$ для любых $n\geqslant 1$. По свойству 4.1 системы $\{z_{ij}\}$ получаем, что существует n, такое, что $\sum\limits_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})$ коммутирует с $A, A^{\varepsilon}, e_{1i}, e_{j2}, e_{2'j'}, e_{i'1'}$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})e_{1j}Ae_{j2}\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})=0,$$
$$\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{1'i'}\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})=0.$$

Значит,

$$E+a_{ij}e_{12}-a_{ij}^{\varepsilon}e_{2'1'}=E+e_{1i}Ae_{j2}+e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{i'1'}=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})(E+e_{1i}Ae_{j2}+e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{i'}1')\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})+$$
$$+(E-\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'}))(E+e_{1i}Ae_{j2}+e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{i'}1')(E-\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'}))=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})+(E-\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'}))(E+e_{1i}Ae_{j2}+e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{i'1'})(E-\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})).$$

Следовательно, матрица $E+a_{ij}e_{12}-a_{ij}^{\varepsilon}e_{2'1'}$ удовлетворяет условию леммы 4.3. Тогда $a_{ij}=0, i,j\in\mathbb{N}$. Аналогично можно показать, что $a_{ij}=0$ для всех $i,j\in\mathbb{N}\cup\mathbb{N}'$, то есть $A=0$.

Очевидно, что $\mathrm{Mat}\,_2(\mathrm{FMat}\,(S_1))\subseteq\mathrm{Im}\,\alpha, \alpha(\mathrm{Mat}\,_2(\mathrm{FMat}\,(S))=\mathrm{Mat}\,_2(\mathrm{FMat}\,(S_1)$. Так как для любой $A\in\mathrm{U}\,(S_1)$ имеем $A-E\in\mathrm{Mat}\,_2(\mathrm{FMat}\,(S))$, то $\langle\mathrm{U}\,(S_1)\rangle\subseteq\mathrm{Im}\,\alpha$.

Пусть $\alpha(A)=B, A\in\mathrm{U}\,(S)$. Покажем, что $B\in\mathrm{U}\,(S_1)$. В силу свойства 4.2 найдется n, такое, что A коммутирует с $z_{ii}+z_{i'i'}, i\geqslant n$. Значит,

$$B=\begin{pmatrix} X & & Y & \\ & \mathrm{diag}\,[x_1,x_2,\ldots] & & \mathrm{diag}\,[y_1,y_2,\ldots] \\ V & & W & \\ & \mathrm{diag}\,[v_1,v_2,\ldots] & & \mathrm{diag}\,[w_1,w_2,\ldots]\end{pmatrix}$$

Можно выбрать такое n, что $\varphi^{-1}(A)$ также будет коммутировать с $E+e_{i'i}, E+e_{ii'}$ при $i \geqslant n$. Значит, можно считать, что $y_i = v_i = 0, x_i = w_i$. Элемент B коммутирует с $h'_{ij}, i, j \geqslant n$, следовательно, $x_i = w_i = a$. Покажем, что $a \in Z(S_1)$. Пусть

$$C = E + z_{i1} c z_{1i+1} - z_{(i+1)'1'} c^{\varepsilon} z_{1'i'}.$$

Так как элемент C перестановочен с $E - 2(z_{jj} + z_{j'j'}), E + x_{1,j}, E + y_{1,j}, j \neq i, i+1, E + x_{1,i}, E + y_{1,i+1}$ и с $h'_{ij}, i, j \in [1, i-1] \cup [i+2, \infty)$, то

$$\varphi^{-1}(C) = \begin{pmatrix} E_{i-1} & & & & 0 & & & & \\ & a_1 & b_1 & & & & a_2 & 0 & \\ & c_1 & d_1 & & & & 0 & 0 & \\ & & & E_\infty & & & & & 0 \\ 0 & & & & E_{i-1} & & & & \\ & 0 & 0 & & & & a_4 & b_4 & \\ & 0 & d_3 & & & & c_4 & d_4 & \\ & & & 0 & & & & & E_\infty \end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi^{-1}(C)$ коммутирует с $\varphi^{-1}(B)$ и C коммутирует с B. Следовательно, a перестановочен с c, то есть $a \in Z(S_1)$.

Имеем

$$\begin{pmatrix} \operatorname{diag}[a, a, \ldots] & 0 \\ 0 & \operatorname{diag}[a, a, \ldots] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & & Y & \\ & aE_\infty & & 0 \\ V & & W & \\ & 0 & & aE_\infty \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -X + \operatorname{diag}[a, \ldots, a] & & -Y & \\ & 0 & & 0 \\ -V & & -W + \operatorname{diag}[a, \ldots, a] & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix} = B + B'.$$

Ясно, что $\alpha^{-1}(B') \in \mathrm{FMat}\,(S)$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \operatorname{diag}[a, a, \ldots] & 0 \\ 0 & \operatorname{diag}[a, a, \ldots] \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} \alpha$$

и

$$\alpha^{-1}\left(\begin{pmatrix} \operatorname{diag}[a, a, \ldots] & 0 \\ 0 & \operatorname{diag}[a, a, \ldots]) \end{pmatrix}\right) \in Z(\mathrm{U}\,(S).$$

Отсюда получаем, что $a = 1$ в силу тривиальности $Z(\mathrm{U}\,(S))$. Значит, $\alpha(\mathrm{U}\,(S)) = \mathrm{U}\,(S_1)$, откуда $\mathrm{Im}\,\alpha = \langle \mathrm{U}\,(S_1)\rangle$. Лемма 4.1 доказана.

Далее при записи элементов из $\mathrm{Mat}\,_{2,\infty}(S)$ в виде матриц, мы будем подразумевать их образы при отображении α.

Для обозначения матрицы из $\mathrm{Mat}\,_{2,\infty}(S_1)$, содержащей единственный ненулевой элемент $a \in S_1$ на месте (i, j), мы будем использовать запись az_{ij}.

Определим отображение $\varepsilon_1 : S_1 \to S_1$ по формуле $(z_{11}Az_{11})^{\varepsilon_1} = z_{11'}A^{\varepsilon}z_{1'1}$. Ясно, что ε_1 — инволюция на кольце S_1. Имеем

$$(z_{1i}Az_{j1})^{\varepsilon_1} = z_{11'}(z_{1i}Az_{j1})^{\varepsilon}z_{1'1} = z_{1j'}A^{\varepsilon}z_{i'1}. \tag{4.27}$$

Аналогично получаем

$$(z_{1i'}Az_{j'1})^{\varepsilon_1} = z_{1j}A^{\varepsilon}z_{i1}, (z_{1i'}Az_{j1})^{\varepsilon_1} = -z_{1j'}A^{\varepsilon}z_{i1}, (z_{1i}Az_{j'1})^{\varepsilon_1} = -z_{1j}A^{\varepsilon}z_{i'1}. \tag{4.28}$$

Положим, как раньше,

$$B^{\varepsilon_1} = Q^{-1}\begin{pmatrix}(b_{ji}^{\varepsilon_1}) & (b_{j'i}^{\varepsilon_1})\\ (b_{ji'}^{\varepsilon_1}) & (b_{j'i'}^{\varepsilon_1})\end{pmatrix} Q, B \in \langle \mathrm{U}\,(S_1)\rangle.$$

Тогда из (4.27), (4.28)

$$\alpha(A^{\varepsilon}) = \alpha(A)^{\varepsilon_1}, A \in \langle \mathrm{U}\,(S)\rangle. \tag{4.29}$$

4.4 Доказательство основной теоремы

Теперь мы можем завершить доказательство основной теоремы.

Пункт 6. Покажем, что

$$\varphi(h_{ij}) = E - z_{ii} - z_{jj} + a_{ij}z_{ij} + a_{ij}^{-1}z_{ji} - z_{i'i'} - z_{j'j'} + a_{ij}^{\varepsilon_1}z_{i'j'} + (a_{ij}^{-1})^{\varepsilon_1}z_{j'i'}.$$

Доказательство. Аналогично описанию $\varphi^{-1}(h'_{ij})$ можно установить, что

$$\alpha(\varphi(h_{ij})) = a_{ij}z_{ij} + a_{ij}^{-1}z_{ji} + d_{ij}z_{i'j'} + d_{ij}^{-1}z_{j'i'} + Y,$$
$$\text{где } Y = \begin{pmatrix}\mathrm{diag}\,[y_1, y_2, \ldots] & 0\\ 0 & \mathrm{diag}\,[y_1, y_2, \ldots]\end{pmatrix}, y_i = y_j = 0, i, j \in \mathbb{N}.$$

Так как h_{ij} и h_{kl} коммутируют при различных индексах, то y_n сопряжены друг с другом. Значит, в силу стабильности матриц $\alpha(\varphi(h_{ij}))$, получаем, что $y_n = 1$. А в силу унитарности матриц h_{ij} получаем $d_{ij} = a_{ij}^{\varepsilon_1}$. Обозначим элементы $a_{i,i+1}$ через a_i.

Пункт 7. Ясно, что

$$x_{1,i} = b_i z_{ii'}, y_{1,i} = b_i^{-1} z_{i'i}.$$

Выполнено равенство $h_{i,i+1}(E + e_{ii'})h_{i,i+1} = (E + e_{i+1,(i+1)'})$, следовательно, $\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ a_i^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_i^{-\varepsilon_1} \\ a_i^{\varepsilon_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{i+1} & 0 \end{pmatrix}$, откуда

$$b_i = a_i b_{i+1} a_i^{\varepsilon}. \tag{4.30}$$

Пусть

$$D_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}\,[b_1^{-1}, b_1^{-1}, \ldots] & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$
$$D_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}\,[1, a_1, a_1 a_2, \ldots] & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}\,[1, a_1^{-\varepsilon_1}, a_1^{-\varepsilon_1} a_2^{-\varepsilon_1}, \ldots] \end{pmatrix}.$$

Положим

$$z'_{ij} = \alpha^{-1}((D_2 D_1)^{-1} \alpha(z_{ij})(D_2 D_1)). \tag{4.31}$$

Тогда $z'_{ii} = z_{ii}, z'_{i'i'} = z_{i'i'}, z'_{i,i+1} = a_i z_{i,i+1}$, а в силу (4.30) $z'_{ii'} = x_{1,i}, z'_{i'i} = y_{1,i}$. Следовательно,

$$\varphi(h_{ij}) = E - z'_{ii} - z'_{jj} + z'_{ij} + z'_{ji} - z'_{i'i'} - z'_{j'j'} + z'_{i'j'} + z'_{j'i'},$$
$$\varphi(E + e_{ii'}) = E + z'_{ii'}, \varphi(E + e_{i'i}) = E + z'_{i'i}.$$

Заметим, что для построенных матричных единиц по-прежнему выполнены равенства (4.23) и (4.24). Далее всюду в качестве матричных единиц $\{z_{ij}\}$ мы будем рассматривать матричные единицы, полученные при помощи формулы (4.31).

Пункт 8. Вычислим вид образов элементов, которые порождают элементарную подгруппу. Ясно, что $\varphi(E+re_{ii'}) = E+sz_{i1'}, \varphi(E+re_{i'i}) = E+s_1 z_{i'i}, r \in$

T. Покажем, что $w_{12}^r = E + re_{12} - r^\tau e_{2'1'}$ переходит в $E + az_{21} - a^{\varepsilon_1} z_{2'1'}$. Так как w_{12}^r коммутирует с $E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}), E + e_{ii'}, E + e_{i'i}$ при $i \neq 1, 2$, то

$$\varphi(w_{12}^r) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & a_2 & b_2 & \\ c_1 & d_1 & & c_2 & d_2 & \\ & & \mathrm{diag}\,[s_1, s_2, \ldots] & & & \mathrm{diag}\,[0, \ldots] \\ a_3 & b_3 & & a_4 & b_4 & \\ c_3 & d_3 & & c_4 & d_4 & \\ & & \mathrm{diag}\,[0, \ldots] & & & \mathrm{diag}\,[s_1, s_2 \ldots] \end{pmatrix}$$

В силу того, что w коммутирует также с $E + e_{11'}$ и с $E + e_{2'2}$, получаем, что $c_1 = b_4 = a_3 = c_3 = b_3 = c_2 = d_2 = b_2 = 0, a_1 = a_4, d_1 = d_4$. Имеем $(E - 2(e_{11} + e_{1'1'})w(E - 2(e_{11} + e_{1'1'}) = w^{-1}$, откуда

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & a_2 & 0 & \\ 0 & d_1 & & 0 & 0 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & 0 & & a_1 & 0 & \\ 0 & d_3 & & c_4 & d_1 & \\ & & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & a_2 & 0 & \\ 0 & d_1 & & 0 & 0 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & 0 & & a_1 & 0 & \\ 0 & d_3 & & -c_4 & d_1 & \\ & & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^2 & -a_1 b_1 + b_1 d_1 & & a_1 a_2 + a_2 a_1 & 0 & \\ 0 & d_1^2 & & 0 & 0 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & 0 & & a_1^2 & 0 & \\ 0 & d_1 d_3 + d_3 d_1 & & c_4 a_1 - d_1 c_4 & d_1^2 & \\ & & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, $a_1^2 = d_1^2 = s_1^2 = s_4^2 = 1$, откуда $a_1 = d_1 = s_i = 1$, так как $(w_{12}^r)^2 = w_{12}^{2r}$ и $\frac{1}{2} \in R$. А значит, $a_2 = 0, d_3 = 0$. В силу унитарности w_{12}^r получаем $c_4 = -b_1^{\varepsilon_1}$.

Теперь рассмотрим $v_{12}^r = E + re_{12'} + r^\tau e_{21'}$. Так как v_{12}^r коммутирует с $E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}), E + e_{i'i}, i \neq 1, 2$, и с $E + e_{jj'}$, то аналогично описанию образующей

w_{12}^r получаем, что

$$v_{12}^r = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & a_2 & b_2 & & \\ 0 & d_1 & & c_2 & d_2 & & \\ & & \mathrm{diag}\,[s_1, s_2, \ldots] & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & 0 & d_1 & & \\ & & \ddots & & & \mathrm{diag}\,[s_1, s_2, \ldots] & \end{pmatrix}.$$

А так как $(E - 2(e_{11} + e_{1'1'})v_{12}^r(E - 2(e_{11} + e_{1'1'}) = (v_{12}^r)^{-1}$, то также, как выше, $a_1 = d_1 = s_i, a_2 = d_2 = 0$. В силу унитарности v_{12}^r получаем $c_2 = b_2^{\varepsilon_1}$. Пункт 8 доказан.

Пункт 9. Так как $\varphi(h_{ij}) = \begin{pmatrix} s_{ij} & 0 \\ 0 & s_{ij} \end{pmatrix}$, то $\varphi(w_{ij}^r) = E + a_r z_{ij} - a_r^{\varepsilon_1} z_{j'i'}$, $\varphi(v_{ij}^s) = E + b_r z_{ij'} + b_r^{\varepsilon_1} z_{ji'}$, $\varphi(p_{ii}^r) = E + c_r z_{ii'}$ причем a_r, b_r, c_r зависят только от элемента r. Покажем, что $a_r = b_r = c_r$.

Имеем $[E + re_{12'} + r^\tau e_{21'}, E + e_{1'1}](E + r^\tau r e_{22'}) = E + r^\tau e_{21} - re_{1'2'}$. Следовательно,

$$[E + b_r z_{12'} + b_r^{\varepsilon_1} z_{21'}, E + z_{11'}](E + dz_{11'}) =$$
$$= E + b_r z_{12'} + b_r^{\varepsilon_1} z_{21'} + (d + b_r^{\varepsilon_1} b_r) z_{22'} = E + a_r z_{12} - a_r^{\varepsilon_1} z_{2'1'},$$

откуда $a_r = b_r$.

Покажем, что $\varphi(E + e_{12} - e_{2'1'}) = E + z_{12} - z_{2'1'}$. Имеем $((E + e_{12} - e_{2'1'})(E - e_{21} + e_{1'2'})(E - e_{21} + e_{1'2'}))^2 = E - 2(e_{11} + e_{22} + e_{1'1'} + e_{2'2'})$. Значит,

$$((E + az_{12} - a^{\varepsilon_1} z_{2'1'})(E + 2az_{21} - 2a^{\varepsilon_1} z_{1'2'}))^2 = E - 2(z_{11} + z_{22} + z_{1'1'} + z_{2'2'}).$$

Следовательно, $a^2 = 1$. Также имеем $E + e_{13} - e_{3'1'} = [E + e_{12} - e_{2'1'}, E + e_{23} - e_{3'2'}]$. Тогда

$$E + az_{13} - a^{\varepsilon_1} z_{3'1'} = [E + az_{12} - a^{\varepsilon_1} z_{2'1'}, E + az_{23} - a^{\varepsilon_1} z_{3'2'}],$$

откуда $a^2 = a$. Значит, $a = 1$.

Имеем $[E + e_{12} - e_{2'1'}, E + re_{12'} + re_{21'}] = E + 2re_{11'}, r = r^\tau$. Следовательно, $[E + z_{12} - z_{2'1'}, E + a_r z_{12'} - a_r z_{21'}] = E + 2c_r z_{11'}$. Отсюда $a_r = c_r$. Пункт 9 завершен.

Определим отображение $\pi : R \to S_1$ по правилу $\pi(r) = a_r$. Отображение π — гомоморфизм колец, так как $[E + ae_{12} - a^\tau e_{2'1'}, E + be_{23} - b^\tau e_{3'2'}] = E + abe_{13} - b^\tau a^\tau e_{3'1'}$. Так как $E + \pi(r^\tau) + \pi(r^\tau)^{\varepsilon_1} = \varphi(E + r^\tau e_{12'} + re_{21'}) = \varphi(h_{12})(\varphi(E+re_{12'}+r^\tau e_{21'}))\varphi(h_{12}) = E+\pi(r)^{\varepsilon_1} z_{12'}+\pi(r)z_{21'}$, то $\pi(r^\tau) = \pi(r)^{\varepsilon_1}$. Заметим, что так как выполнены равенства $\varphi(E+e_{ii'}) = E+z_{ii'} = E+\pi(r)z_{ii'}$, то $\pi(1) = 1$.

Определим отображение $\theta : \langle \mathrm{U}\,(R)\rangle \to \langle \mathrm{U}\,(S_1)\rangle$ по формуле $\theta(A) = (\pi(a_{ij})), i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$. Тогда очевидно, что θ — кольцевой гомоморфизм, причем в силу результата пункта 9

$$\theta(A) = \alpha \circ \varphi(A) \text{ при } A \in \mathrm{EU}\,(R).$$

Пусть $\theta(A) = 0$, то есть $\pi(a_{ij}) = 0, i, j \in \mathbb{N}\cup\mathbb{N}'$. Пусть r — некоторый элемент из матрицы A. Тогда

$$\varphi(E + re_{12} - r^\tau e_{2'1'}) = E + \pi(r)z_{12} - \pi(r)^{\varepsilon_1} z_{2'1'} = E.$$

Так как φ — изоморфизм, то $r = 0$, следовательно, θ — инъективное отображение.

Заметим, что для доказательства включения $\alpha \circ \varphi(\mathrm{EU}\,(R)) \subseteq \mathrm{EU}\,(S_1)$ мы пользовались только свойством (4.12) и следующими свойствами системы $\{z_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'\}$:

$$\begin{aligned}
&\varphi(E + e_{ii'}) = E + z_{ii'},\\
&\varphi(E - 2(e_{ii} + e_{jj}) = E - 2(z_{ii} + z_{jj}),\\
&\varphi(h_{ij}) = E - z_{ii} - z_{jj} + z_{ij} + z_{ji} - z_{i'i'} - z_{j'j'} + z_{i'j'} + z_{j'i'}.
\end{aligned}$$

Следовательно, рассматривая отображение $\varphi^{-1} \circ \alpha^{-1} : \mathrm{U}\,(S_1) \to \mathrm{U}\,(R)$ и проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что $\varphi^{-1} \circ \alpha^{-1}(\mathrm{EU}\,(S_1)) \subseteq \mathrm{EU}\,(R)$. То есть мы получаем, что $\mathrm{EU}\,(S_1)$ содержится в $\mathrm{Im}\,\theta$. Следовательно, θ — сюръективное отображение, так как $\langle \mathrm{EU}\,(S_1)\rangle = \langle \mathrm{U}\,(S_1)\rangle$. Значит, θ является кольцевым изоморфизмом. Отсюда получаем, что отображение $\alpha^{-1} \circ \theta : \langle \mathrm{U}\,(R)\rangle \to \langle \mathrm{U}\,(S)\rangle$ также является кольцевым изоморфизмом и удовлетворяет условию теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Если $\mathrm{U}_{2n}(R) \cong \mathrm{U}_{2m}(S)$, то из теоремы 2, [4], легко можно вывести, что кольца R и S Морита-эквивалентны. Установим этот факт для рассматриваемого нами случая $\mathrm{U}\,(R) \cong \mathrm{U}\,(S)$.

Кольцо $\langle \mathrm{U}\,(R)\rangle$ можно рассматривать как подкольцо в кольце $\mathrm{End}\,(V)$, $V = V_1 \bigoplus V_2$, где V_1 — свободный модуль счетного ранга с базисом $e_1, e_2 \ldots$, V_2 — свободный модуль счетного ранга с базисом $e_{1'}, e_{2'} \ldots$. Если в модуле V сделать замену базиса $\overline{e}_1 = e_1, \overline{e}_2 = e_{1'}, \overline{e}_3 = e_2, \overline{e}_4 = e_{2'} \ldots$, то матрице

$$\begin{pmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}\,_{2,\infty}(R)$$

будет соответствовать матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} & \ldots \\ c_{11} & d_{11} & c_{12} & d_{12} & \ldots \\ a_{21} & b_{21} & a_{22} & b_{22} & \ldots \\ c_{21} & d_{21} & c_{22} & d_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}\,(S).$$

Следовательно, $\langle \mathrm{U}\,(R)\rangle$ можно рассматривать, как подкольцо в $\mathrm{FCRMat}\,(R)$, причем $\mathrm{FMat}\,(R) \subseteq \langle \mathrm{U}\,(R)\rangle$. Аналогично можно считать, что $\mathrm{FMat}\,(S) \subseteq \langle \mathrm{U}\,(S)\rangle \subseteq \mathrm{FCRMat}\,(S)$.

Из определения θ и леммы 4.1 следует, что

$$\theta(e_{11}) \in \mathrm{FMat}\,(S), \theta^{-1}(e_{11}) \in \mathrm{FMat}\,(R).$$

Значит, отображение θ удовлетворяют условию 3 теоремы 2.5, [13], откуда следует, что кольца R и S Морита-эквивалентны. Значит, мы получаем, что изоморфность групп $\mathrm{U}\,(R) \cong \mathrm{U}\,(S)$ влечет Морита-эквивалентность колец R и S, также, как в и случае, когда $\mathrm{U}\,_{2n}(R) \cong \mathrm{U}\,_{2m}(S)$.

Литература

[1] Балаба И.Н. *Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов прообразующих.* Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — **13**, №1. — 3–10.

[2] Голубчик И.З. *Линейные группы над ассоциативными кольцами.* Докт. дис. Уфа. — 1997.

[3] Голубчик И.З., Михалёв А.В. *Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом.* Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1983. — №3. — 61–72.

[4] Голубчик И.З., Михалёв А.В. *Изоморфизм унитарных групп над ассоциативными кольцами.* Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. — 1983. — **132**. — 97–109.

[5] Зельманов Е.И. *Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом.* Сиб. мат. журн. — 1985. — **26**, №4. — 49–67.

[6] Клейн И.С., Михалёв А.В. *Ортогональная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией.* Алгебра и Логика. — 1970. — **9**, №2. — 145–166.

[7] Клейн И.С., Михалёв А.В. *Унитарная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией.* Алгебра и Логика. — 1970. — **9**, №5. — 510–519.

[8] Петечук В.М. *Автоморфизмы групп* SL_n, GL_n *над некоторыми локальными кольцами.* Матем. заметки. — 1980. — **28**, №2. — 187–206.

[9] Петечук В.М. *Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами.* Матем. сборник. — 1982. — **117**, №4. — 534–547.

[10] Петечук В.М. *Автоморфизмы симплектической группы* $\mathrm{Sp}_n(R)$ *над некоторыми локальными кольцами.* Деп. ВИНИТИ. — №2224-80.

[11] Петечук В.М. *Изоморфизмы симплектических групп над коммутативными кольцами.* Алгебра и Логика. — 1983. — **22**, №5. — 551–562.

[12] Фейс. К. *Кольца, модули, категории.* М.: Мир, 1979.

[13] Abrams. G. *Infinite matrix types which determine Morita equivalence.* Archiv der Mathematik. — 1986. — **46**, №1. — 33–37.

[14] Dieudonne J. *On the automorphisms of the classical groups.* Mem. Amer. Math. Soc. — 1951. — **2**. — 1–95.

[15] Hahn A.J., O'Meara O.T. *The Classical Groups and K-Theory.* Berlin, N. Y.: Springer-Verlag, 1989.

[16] Hua L.K. *On the automorphisms of the symplectic group over any field.* Ann. of Math. — **49**, №4. — 1948. — 739–759.

[17] Hua L.K., Reiner I. *Automorphisms of the unimodular group.* Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — **71**. — 331–348.

[18] Johnson A.A. *The automorphisms of the unitary groups over infinite fields.* Amer. J. Math. — 1973. — **95**, №1. — 87–107.

[19] Landin J., Reiner I. *Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain.* Ann. Math. — 1957. — **65**, №3. — 519–526.

[20] Li Fuan. *Infinite Steinberg Groups.* Acta Mathematica Sinica. — 1994. — **10**, №2. — 149–157.

[21] McDonald B.R., Pomfret J. *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$*, R a local ring.* Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — **173**. — 379–388. (Русский перевод в кн.: *Автоморфизмы классических групп.* М.: Мир, 1976. — 176–187.)

[22] McQueen L., McDonald B.R. *Automorphisms of the symplectic group over a local ring.* J. Algebra. — 1974. — **30**, №1–3. — 485–495.

[23] Nastasescu C., van Oystaeyen F. *Graded Ring Theory.* Amsterdam: North-Holland, 1982.

[24] O'Meara O.T. *Lectures on linear groups.* Providence, Rhode Island, 1974.

[25] O'Meara O.T. *The automorphisms of the standard symplectic group over any integral domain.* J. Reine Angew. Math. — 1968. — **230**. — 103–138.

[26] Rickart C.E. *Isomorphic groups of linear transformations, I.* Amer. J. Math. — 1950. — **72**. — 451–464.

[27] Rickart C.E. *Isomorphic groups of linear transformations, II.* Amer. J. Math. — 1951. — **73**. — 697–716.

[28] Yan Shi-jian. *Linear groups over a ring.* Chinese Math. — 1965. — **7**, №2. — 163–179.

[29] Schreier O., Waerden B.L. van der. *Die Automorphismen der projektiven Gruppen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1928. — **6**. — 303–322.

[30] Wan C.H. *On the automorphism of linear group over a noncommutative principal ideal domain of characteristic* $\neq 2$. Acta Math. Sinica. — 1957. — **7**. — 533–573.

[31] Waterhouse W.C. *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$. Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — **79**, №3. — 347–351.

Работы автора по теме диссертации

[32] Аткарская А.С., Бунина Е.И., Михалёв А.В. *Изоморфизмы общих линейных групп над ассоциативными кольцами, градуированными абелевой группой.* Доклады Академии наук. — 2011. — **437**, №3. — 295–296.

[33] Аткарская А.С. *Изоморфизмы стабильных линейных групп над ассоциативными кольцами, содержащими* $\frac{1}{2}$. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2014, №4. — с. 28–32.

[34] Аткарская А.С. *Стабильные группы над ассоциативными кольцами с* $\frac{1}{2}$. *Описание изоморфизмов стабильных линейных групп.* Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — **18**, №1. — 3—20.

[35] Аткарская А.С. *Стабильные группы над ассоциативными кольцами с* $\frac{1}{2}$. *Описание изоморфизмов стабильных унитарных групп.* Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — **18**, №4. — 3—21.

[36] Аткарская А.С., Бунина Е.И., Михалёв А.В. *Изоморфизмы общих линейных групп над ассоциативными кольцами, градуированными абелевой группой.* Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — **16**, №3. — 5—40.