

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.982.256
515.124.4

Беднов Борислав Борисович

КРАТЧАЙШИЕ СЕТИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и
функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2014

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент Бородин Петр Анатольевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Лившиц Евгений Давидович
(руководитель исследовательской
группы «ООО Эверноут»)

кандидат физико-математических наук
Дружинин Юрий Юрьевич
(методист ГБОУ СОШ №1158)

Ведущая организация: Московский физико-технический институт

Защита диссертации состоится 17 октября 2014 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8-й этаж).

Автореферат разослан сентября 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физ.-матем. наук,
профессор

В.Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена вопросам геометрии банаховых пространств, связанным с понятиями кратчайшей сети, минимального заполнения, точек Штейнера (и соответствующих им кратчайших сетей типа звезды) для конечных подмножеств этих пространств. В работе исследуются существование кратчайшей сети, существование и единственность точки Штейнера, реализуемость минимальных заполнений и минимальных заполнений типа звезды в общих банаховых и конкретных функциональных пространствах, а также существование элемента наилучшего n -приближения.

Актуальность темы. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $G = (V, E)$ — связный граф со множеством вершин V и множеством ребер E . Отображение $\Gamma : V \rightarrow X$ называется *сетью* в X , параметризованным графом G , или сетью типа G . Вершинами сети Γ называются точки $\Gamma(v)$, $v \in V$, ребрами сети Γ называются пары $\Gamma(v), \Gamma(w)$ при условии, что пара v, w соединена ребром в графе G . Длиной ребра $\Gamma(v)\Gamma(w)$ называется число $\rho(\Gamma(v), \Gamma(w))$, а длиной $|\Gamma|$ сети Γ — сумма длин всех ее ребер. Если $M \subset X$ — конечное множество и $M \subset \Gamma(V)$, то говорят, что сеть Γ соединяет (или затягивает) множество M . Множество M называется границей сети Γ .

Число

$$|\text{smt}|(M, X) = \inf\{|\Gamma| : \text{сеть } \Gamma \text{ соединяет } M\}$$

называется длиной кратчайшей сети для M в X , а

$$\text{smt}(M, X) = \{\Gamma : \Gamma \text{ — сеть в } X, \text{ соединяющая } M, |\Gamma| = |\text{smt}|(M, X)\}$$

есть (возможно, пустое) множество кратчайших сетей для M в X .

Теория кратчайших сетей (и более общо, экстремальных сетей) составляет обширную область метрической геометрии. Теорией кратчайших сетей интересовался Гаусс: в письме к Шумахеру он задал вопрос о том, как построить кратчайшую систему дорог, соединяющих четыре города. Общая задача о поиске кратчайшей сети (то есть связного графа минимальной длины), соединяющей заданное конечное множество точек плоскости, была поставлена Ярником и Кесслером¹ в 1934 году. В книге Куранта и Роббинса "Что такое математика?" эта задача называется проблемой Штейнера. В настоящее время теория экстремальных сетей в метрических пространствах получила значительное развитие благодаря исследованиям А.О. Иванова, А.А. Тужилина и их учеников.

¹ Jarník V., Kössler M. O minimalnich grafeth obeahujících n daných bodů, Čas. Pěst. Mat. a Fys., 1934, 63, 223-235.

Типы связных графов, задающих кратчайшие сети, удовлетворяют достаточно жестким условиям, сформулированным в следующей хорошо известной лемме.

ЛЕММА А. Пусть M_n — n -точечное множество в метрическом пространстве X . При поиске графа, параметризующего кратчайшую сеть $\Gamma \in \text{smt}(M_n, X)$, достаточно рассматривать деревья, которые имеют не более $n - 2$ дополнительных (отличных от прообразов точек из M_n) вершин, причем каждая из этих дополнительных вершин имеет степень не меньше 3.

В банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ сети можно представлять себе как связные конечные объединения отрезков, соединяющих точки этого пространства, то есть как связные графы в X с ребрами-отрезками. В случае конечномерных банаховых пространств некоторые свойства кратчайших сетей собраны в книге Сванеполя "The local Steiner problem in Minkowski spaces" (2009). В диссертации исследуются кратчайшие сети в бесконечномерных банаховых пространствах.

Для трехточечных множеств M_3 кратчайшая сеть в силу леммы А состоит из трех (возможно, вырожденных) отрезков, соединяющих точки из M_3 с их точкой Штейнера, то есть точкой, сумма расстояний от которой до точек из M_3 минимальна.

В дальнейшем нам понадобится общее определение: для заданного набора $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера (в англоязычной литературе — медиан) $\text{st}(M, X)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\text{st}|(M, X).$$

В случае гильбертова пространства точка Штейнера $s(x_1, x_2, x_3)$ существует и единственна: она лежит в плоскости точек x_1, x_2, x_3 и либо совпадает с одной из них (если в треугольнике $x_1x_2x_3$ есть угол, не меньший 120°), либо совпадает с точкой Торричелли (из которой все стороны треугольника видны под углом 120°).

В широком классе метрических пространств кратчайшая сеть существует для любого набора точек.

В бесконечномерном банаховом пространстве X кратчайшие сети могут не существовать уже для трехточечных множеств M_3 — другими словами, множества $\text{smt}(M_3, X)$ и $\text{st}(M_3, X)$ могут быть пустыми. Первый пример таких X и M_3 построил А.Л. Гаркави² в 1974 г. Другие примеры строи-

²Гаркави А.Л., Шматков В.А. О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве //

лись Л. Веселы (1993), М. Баронти, Е. Касини, П. Папини (1993), П. Папини (2005), П.А. Бородиным (2010).

Л. Веселы³ доказал, что всякое нерефлексивное банахово пространство X можно так эквивалентно перенормировать, что в новой норме некоторая тройка $M_3 \subset X$ не затягивается кратчайшей сетью. В.М. Кадец (2011), не зная о работе Веселы, доказал этот результат иным способом. Н.П. Стрелкова (2011) для всякого $n \geq 3$ построила пример банахова пространства X и n -точечного множества $M_n \subset X$, для которых множество $\text{smt}(M_n, X)$ кратчайших сетей пусто. Построение Стрелковой основывается на примере П.А. Бородина (2010), для которого свойство несуществования точки Штейнера приводимых троек x_1, x_2, x_3 устойчиво: для любых троек элементов x'_1, x'_2, x'_3 , достаточно близких по норме к x_1, x_2, x_3 соответственно, точка Штейнера также не существует. Пример Гаркави также обладает этим свойством устойчивости.

В главе I диссертации доказывается, что во всяком банаховом пространстве X , 1-дополняемом в своем втором сопряжённом (в частности, в любом сопряжённом пространстве, а также в любом пространстве L_1) множество $\text{smt}(M, X)$ непусто для всякого конечного $M \subset X$.

Недавно в работе А.О. Иванова и А.А. Тужилина⁴ (2012) наметилось новое направление теории кратчайших сетей, связанное с введенным ими понятием *минимального заполнения*.

Пусть (M, ρ) — конечное метрическое пространство. Число

$$|\text{mf}|(M) = \inf \{ |\text{smt}|(\varphi(M), Y) : \varphi : M \rightarrow Y \},$$

где инфимум берется по всем изометричным вложениям пространства M в различные метрические пространства Y , называется длиной минимального заполнения пространства M , а сети — элементы множества

$$\text{mf}(M) = \{ \text{smt}(\varphi(M), Y) : |\text{smt}|(\varphi(M), Y) = |\text{mf}|(M) \}$$

называются минимальными заполнениями пространства M .

Для всякого конечного множества M в метрическом пространстве (X, ρ) , рассматриваемого как метрическое пространство с той же метрикой ρ , выполнено очевидное неравенство $|\text{smt}|(M, X) \geq |\text{mf}|(M)$.

Матем. сб., 1974, **95(137)**, №2(10), 272–293.

³ *Vesely L.* A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers // Extracta Mathematicae, 1993, **8**, №2–3, 125–131.

⁴ *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб., 2012, **203**, №5, 65–118.

В отличие от кратчайших сетей, минимальные заполнения всегда существуют, то есть $\text{mf}(M)$ непусто для всякого конечного метрического пространства M .

Для трехточечного пространства $M_3 = (\{x_1, x_2, x_3\}, \rho)$ минимальное заполнение можно получить в четырехточечном расширении $(\{x_1, x_2, x_3, s\}, \rho)$, где $\rho(s, x_i) = \frac{1}{2}(\rho(x_i, x_j) + \rho(x_i, x_k) - \rho(x_j, x_k))$ ($i = 1, 2, 3$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) в виде сети-дерева с ребрами sx_1 , sx_2 и sx_3 . При этом величина $|\text{mf}|(M_3)$ равна полупериметру треугольника $x_1x_2x_3$.

Для четырехточечного пространства $M_4 = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \rho)$ минимальное заполнение имеет длину $|\text{mf}|(M_4) = \frac{1}{2}(\max(M_4) + \min(M_4))$, где $\max(M_4)$ и $\min(M_4)$ — соответственно максимальная и минимальная из сумм $\rho(x_1, x_2) + \rho(x_3, x_4)$, $\rho(x_1, x_3) + \rho(x_2, x_4)$, $\rho(x_1, x_4) + \rho(x_2, x_3)$, и может быть реализовано сетью в некотором не более чем 6-точечном расширении M_4 .

Для произвольных конечных метрических пространств M величина $|\text{mf}|(M)$ как функция расстояний между точками из M может быть вычислена по некоторой переборной формуле, полученной А.Ю. Ереминым⁵.

Будем говорить, что метрическое пространство (X, ρ) *реализует минимальное заполнение* для своего конечного подмножества M , если $|\text{smt}|(M, X) = |\text{mf}|(M)$ и множество $\text{smt}(M, X)$ непусто.

А.О. Иванов и А.А. Тужилин поставили задачу⁶ об описании всех метрических пространств, реализующих минимальные заполнения для всех своих конечных подмножеств, и вместе со своими учениками привели нетривиальные примеры таких пространств. В частности, З.Н. Овсянников (2011) доказал, что таким пространством является пространство l_∞^n для всякого натурального n (n -мерное действительное пространство с нормой $\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$), а также пространство l_∞ ограниченных последовательностей.

В случае банаховых пространств эта задача полностью решается в главе I диссертации. Именно, оказалось, что банахово пространство реализует минимальные заполнения для всех своих конечных подмножеств в точности тогда, когда оно обладает так называемым свойством 4.2.I.P. (предуально к L_1 , является пространством Линденштраусса).

Напомним необходимые сведения из геометрии банаховых пространств.

Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. Говорят, что банахово пространство

⁵Еремин А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сб., 2013, **204**, 9, 51–72.

⁶Edelsbrunner H., Ivanov A., Karasev R. Current Open Problems in Discrete and Computational Geometry // Модел. и анализ информ. систем, 2012, **19**, №5, 5–17.

X обладает свойством $n.2.I.P.$ ($n.2$ Intersection Property), если всякие n попарно пересекающихся замкнутых шаров в X имеют непустое пересечение.

ТЕОРЕМА А (Гротендик⁷, Линденштраусс⁸). Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:

- (1) X обладает свойством $n.2.I.P.$ для всякого $n \geq 3$;
- (2) X обладает свойством $4.2.I.P.$;
- (3) X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E , некоторой σ -алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ -аддитивной меры μ , определенной на Σ ;
- (4) X^{**} 1-дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве Z (то есть существует линейный проектор $P : Z \rightarrow X^{**}$ нормы 1).

Пространства, удовлетворяющие условиям теоремы А, называются преддуальными к L_1 или пространствами Линденштраусса. К этому классу пространств относятся все пространства $C(Q)$ действительнзначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте Q , пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие. Пространство размерности n преддуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n .

Отметим, что класс преддуальных к L_1 пространств уже известен как описывающий экстремальное геометрическое свойство.

ТЕОРЕМА В (Рао⁹). Действительное банахово пространство X преддуально к L_1 тогда и только тогда, когда для всякого конечного множества $M \subset X$ его чебышевский радиус

$$r_C(M) = \inf_{e \in X} \sup_{x \in M} \|x - e\|$$

равен половине диаметра M .

Нетрудно видеть, что для всякого ограниченного множества в произвольном банаховом пространстве X имеет место неравенство $r_C(M) \geq \text{diam}(M)/2$. При этом Рао показал, что чебышевский центр (точка e , для которой $\sup_{x \in M} \|x - e\| = r_C(M)$) в преддуальном к L_1 пространстве существует для всякого конечного множества M , то есть преддуальные к L_1 пространства и только они реализуют "минимальные заполнения" всех своих конечных подмножеств в смысле чебышевских центров.

⁷ Grothendieck A. Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 // Canad. J. Math., 1955, **7**, №4, 552–561.

⁸ Lindenstrauss J. Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc., 1964, **48**, 1–112.

⁹ Rao T. S. S. R. K. Chebyshev centers and centrable sets // Proc. Amer. Math. Soc., 2002, **130**, №9, 2593–2598.

В главе II диссертации доказывается аналог теоремы В, в котором вместо чебышевских центров фигурируют точки Штейнера. Приведем необходимые определения.

Помимо общих минимальных заполнений, в упомянутой работе Иванова и Тужилина вводятся еще так называемые параметрические минимальные заполнения конечных метрических пространств (M, ρ) , в определении которых изометрично вложенное пространство $\varphi(M)$ соединяется в пространстве Y кратчайшей сетью заданного типа. Один из таких типов, специально рассматриваемый в работе Иванова и Тужилина, получил название *звезды*: рассматриваемые сети параметризуются графами-деревьями, в которых одна вершина соединена со всеми остальными. Дадим точное определение в терминах точек Штейнера.

Число

$$|st|(M) = \inf\{|st|(\varphi(M), Y) : \varphi : M \rightarrow Y\},$$

где инфимум берется по всем изометричным вложениям пространства M в различные метрические пространства Y , называется длиной минимального заполнения типа звезды множества M .

Для трехточечных метрических пространств M_3 величина $|st|(M_3)$ совпадает с $|mf|(M_3)$ и равна полупериметру треугольника с вершинами из M_3 .

Для четырехточечных метрических пространств M_4 нетрудно показать, что $|st|(M_4)$ совпадает с определенной выше величиной $\max(M_4)$.

Будем говорить, что метрическое пространство (X, ρ) реализует минимальное заполнение типа звезды для своего конечного подмножества M , если $|st|(M, X) = |st|(M)$ и множество $st(M, X)$ непусто.

Теперь можно сформулировать доказываемый в главе II аналог теоремы В: банахово пространство реализует минимальные заполнения типа звезды тогда и только тогда, когда оно предуально к L_1 .

Остальные результаты главы II посвящены точкам Штейнера (или, что то же, кратчайшим сетям типа звезды) в пространствах L_1 и C .

В пространстве $L_1(M, \Sigma, \mu)$ действительных функций, суммируемых на множестве M по мере μ , определенной на сигма-алгебре Σ подмножеств M , точки Штейнера описываются достаточно просто. Для трех функций f_1, f_2, f_3 из этого пространства точка Штейнера s существует, единственна и почти в каждой точке $t \in M$ значение $s(t)$ равно среднему из чисел $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$. При этом величина $|st|(\{f_1, f_2, f_3\}, L_1)$ равна полупериметру треугольника f_1, f_2, f_3 , то есть пространство L_1 реализует минимальные заполнения (они же — минимальные заполнения типа звезды) для всех своих трехточечных множеств.

Как показано в главе II, это свойство вместе со свойством единственности точки Штейнера $s(f_1, f_2, f_3)$ полностью характеризует пространство L_1 среди всех банаховых пространств.

Отметим, что это не первый результат, в котором пространство L_1 характеризуется во "внутренне-метрических" терминах — см., например, теорему 3.10 в работе О. Лимы¹⁰.

Отметим также, что в терминах точек Штейнера были охарактеризованы гильбертовы пространства.

ТЕОРЕМА С (Бенитез, Фернандез, Сориано¹¹). *Действительное нормированное пространство X размерности не меньше 2 является гильбертовым тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка любых трёх точек из X содержит их точку Штейнера.*

Кроме того, в главе II диссертации приводится описание множеств точек Штейнера для троек точек в пространстве непрерывных функций и исследуются свойства этих множеств.

Наряду с точками Штейнера можно (по аналогии с чебышевскими центрами) рассматривать и *относительные* точки Штейнера, когда для заданных точек $x_1, \dots, x_n$ банахова пространства X точка s , минимизирующая сумму $\|x_1 - s\| + \dots + \|x_n - s\|$, ищется не во всем пространстве X , а в заданном множестве $M \subset X$. Такие точки s составляют так называемую метрическую n -проекцию $P_M(x_1, \dots, x_n)$ точек $x_1, \dots, x_n$ на множество M .

Исследование свойств метрической n -проекции — относительно новый раздел теории приближений в нормированных пространствах. В частности, в работе П.А. Бородина¹² поставлен вопрос об исследовании n -антипроксиминальных множеств.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $M \subset X$. Для $x_1, \dots, x_n \in X$ положим $\rho(x_1, \dots, x_n, M) = \inf_{z \in M} \sum_{i=1}^n \|x_i - z\|$

Непустое множество M назовём *n -антипроксиминальным*, если для любых таких $x_1, \dots, x_n \in X$, что $\rho(x_1, \dots, x_n, M) > \rho(x_1, \dots, x_n, X)$, выполнено $P_M(x_1, \dots, x_n) \setminus \{x_i\}_{i=1}^n = \emptyset$.

При $n = 1$ это определение дает обычные антипроксиминальные множества (то есть такие множества $M \subset X$, что для любой точки $x \in X \setminus M$ во множестве M нет точки, ближайшей к x), исследование которых состав-

¹⁰ Lima Á. Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc., 1977, **227**, 1–62.

¹¹ Benítez C., Fernández M., Soriano M.L. Location of Fermat–Torricelli medians of three points // Trans. Amer. Math. Soc., 2002, **354**, №12, 5027–5038.

¹² Бородин П.А. О выпуклости N -чебышёвских множеств // Изв. РАН. Сер. Матем., 2011. **75**, № 5. 19–46.

ляет заметную область в геометрической теории приближений.

Кли¹³ сформулировал вопрос о существовании в банаховом пространстве выпуклого замкнутого ограниченного антипроксиминального множества. Антипроксиминальные множества начал исследовать Зингер¹⁴. Он называл такие множества "very non-proximinal". Пространство X содержит выпуклое замкнутое антипроксиминальное множество M тогда и только тогда, когда оно не рефлексивно (M — ядро функционала, не достигающего своей нормы). Холмс ввёл термин "антипроксиминальное множество". Эдельштейн (1970) доказал, что в сепарабельном сопряжённом пространстве выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множеств нет. Эдельштейн и Томпсон¹⁵ (1972) построили первое выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело (в пространстве $\mathbf{c}_0$). Кобзаш (1974, 1976, 1978) привёл примеры таких тел в пространствах, изоморфных $\mathbf{c}_0$, и доказал, что если измеримое пространство (E, Σ, μ) содержит атом относительно меры μ , то в пространстве $L_1(E, \Sigma, \mu)$, для которого сопряжённое пространство канонически изоморфно $L_\infty(E, \Sigma, \mu)$, выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множеств нет. Борвейн, Эдельштейн и Фелпс доказали отсутствие выпуклых замкнутых ограниченных множеств в пространствах X со свойством Радона-Никодима. Флорет (1978) доказал несуществование таких множеств в пространствах $X = X_1 \times X_2$ с нормой $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, где рефлексивное пространство $X_2 \neq \{0\}$. В.П. Фонф построил выпуклые замкнутые ограниченные антипроксиминальные тела в широком классе пространств непрерывных функций и доказал, что произвольное бесконечномерное банахово пространство можно так эквивалентно перенормировать, что выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множеств в новой норме существовать не будет. В.С. Балаганский¹⁶ построил пример такого множества в бесконечномерном пространстве $C(Q)$ для произвольного топологического хаусдорфова пространства Q , а также в некоторых пространствах Гротендика (2012). Борвейн, Хименез-Севилла и Морено (2002) доказали, что в пространстве $X = Y \times \mathbf{c}_0$ с нормой $\|x\| = \max\{\|y\|, \|z\|\}$ есть выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело. Теория

¹³ Klee V. Remarks on nearest points in normed linear spaces // Proc. Colloq. Convexity, Copenhagen 1965. 161–176.

¹⁴ Singer I. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Bucharest-Berlin: Editura Academiei and Springer Verlag, 1970.

¹⁵ Edelstein M., Thompson A.C. Some results on nearest points and support properties of convex sets in $\mathbf{c}_0$ // Pacific J. Math. 1972. 40, № 3. 553–560.

¹⁶ Балаганский В.С. Антипроксиминальные множества в пространствах непрерывных функций // Математические заметки. 1996. 60, № 5. 643–657.

антипроксиминальных множеств развивалась также и в других направлениях.

Одна из самых интересных нерешённых задач теории антипроксиминальных множеств формулируется так: существует ли выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело в $L_1[0, 1]$?

В главе III диссертации исследуется вопрос о существовании выпуклых замкнутых n -антипроксиминальных множеств в пространствах непрерывных функций и суммируемых функций.

Цель работы: исследование существования кратчайшей сети, существования и единственности точки Штейнера, реализуемости минимальных заполнений и минимальных заполнений типа звезды в общих банаховых и конкретных функциональных пространствах, а также существования элемента наилучшего n -приближения.

Научная новизна работы. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Доказано, что в банаховом пространстве X , для которого существует проектор $P : X^{**} \rightarrow X$ нормы 1 (в частности, в любом сопряжённом пространстве или в пространстве L_1), для любого натурального n и для любых n точек существует соединяющая их кратчайшая сеть.

2. Доказано, что для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны: X реализует минимальное заполнение для всякого конечного набора своих элементов; X реализует минимальное заполнение для всякой четвёрки своих элементов; X реализует минимальное заполнение типа звезды для всякого конечного набора своих элементов; X реализует минимальное заполнение типа звезды для всякой тройки и всякой четвёрки своих элементов; X предуально к L_1 .

3. Доказано, что действительное банахово пространство X реализует единственное минимальное заполнение типа звезды для всякой тройки своих элементов тогда и только тогда, когда X изометрически изоморфно L_1 .

4. Доказано, что в пространствах C и L_1 условия антипроксиминальности и 2-антипроксиминальности множества эквивалентны, и что в этих пространствах не существует n -антипроксиминальных выпуклых замкнутых ограниченных тел при $n = 3, 4, \dots$

Методы исследования. В работе используются различные методы теории функций действительного переменного, функционального анализа, линейной алгебры, выпуклой геометрии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретиче-

ский характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функций, функциональном анализе и геометрии.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар по теории приближений и граничным свойствам функций в МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора Е.П. Долженко (неоднократно, 2010–2014);
- семинар по теории приближений в МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора И.Г. Царькова, доцента А.С. Кочурова, н.с. А.Р. Алимова, асс. А.А. Васильевой (2011);
- семинар по теории функций в МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством академика РАН Б.С. Кашина, чл.-корр. РАН С.В. Конягина, проф. Б.И. Голубова и проф. М.И. Дьяченко (2012);
- научный семинар кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета) под руководством профессора Е.С. Половинкина (2014);
- семинар по геометрической теории приближений в МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством доцента П.А. Бородина (неоднократно, 2009–2014).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Международная конференция «Теория приближений», посвященная 90-летию со дня рождения С.Б. Стечкина (2010);
- школа С.Б. Стечкина по теории функций в г.Миасс (2011, 2013, 2014);
- 17-я Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (2014).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 5 работах (три из перечня ВАК), список которых приведён в конце автореферата. Из работы [2] в диссертацию включены только результаты, доказанные автором без участия Н.П. Стрелковой. Все теоремы из [1] получены совместно с П.А. Бородиным и включены в диссертацию. В каждой из них автору принадлежит либо первая, либо вторая половина доказательства.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы из 66 наименований. Общий объём диссертации — 70 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, а также изложены основные результаты диссертации.

В главе I диссертации исследуется вопрос существования кратчайших сетей и минимальных заполнений для конечных множеств в банаховых пространствах.

ТЕОРЕМА 1.1. *В банаховом пространстве X , для которого существует проектор $P : X^{**} \rightarrow X$ нормы 1 (в частности, в любом сопряжённом пространстве или в пространстве L_1), для любого натурального n и для любых точек $x_1, \dots, x_n$ существует соединяющая их кратчайшая сеть.*

Далее $m[a, b]$ обозначает метрический отрезок с концами a и b в банаховом пространстве X :

$$m[a, b] = \{x \in X : \|x - a\| + \|x - b\| = \|a - b\|\}.$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть X — действительное банахово пространство. Следующие свойства эквивалентны:*

- (1) *X реализует минимальное заполнение для всякой тройки своих точек;*
- (2) *для всякой тройки $a, b, c \in X$ множество $st(\{a, b, c\}, X)$ непусто и величина $|st|(\{a, b, c\}, X)$ равна полупериметру треугольника abc ;*
- (3) *для всякой тройки $a, b, c \in X$ пересечение $m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$ непусто;*
- (4) *X обладает свойством 3.2.I.P.*

При этом во всяком таком пространстве X для всякой тройки точек выполнено равенство $st(\{a, b, c\}, X) = m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$.

Приводится пример четырёх точек в пространстве l_1^3 (обладающего свойством 3.2.I.P.), для которых минимальное заполнение не реализуется.

Следующая теорема характеризует банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения для произвольного конечного множества своих элементов.

ТЕОРЕМА 1.4. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) X реализует минимальное заполнение для всякого конечного набора своих точек;
- (2) X реализует минимальное заполнение для всякого набора из 4 своих точек;
- (3) X предуально к L_1 .

Из этой теоремы следует, что в пространстве непрерывных функций для любого конечного набора точек существует кратчайшая сеть, которая является минимальным заполнением для этого набора.

В главе II диссертации исследуются свойства сетей типа звезды и множеств точек Штейнера в банаховых пространствах.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*

- (1) X реализует минимальное заполнение типа звезды для всякого конечного набора своих точек;
- (2) X реализует минимальное заполнение типа звезды для всех троек и четверок своих точек;
- (3) X предуально к L_1 .

ТЕОРЕМА 2.2. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (1) для всяких трех точек $a, b, c \in X$ существует и единственна точка $s = \text{st}(a, b, c)$, для которой сумма $\|s - a\| + \|s - b\| + \|s - c\|$ равна полупериметру треугольника abc ;
- (2) для всяких трех точек $a, b, c \in X$ пересечение $m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$ одноточечно;
- (3) X изометрически изоморфно некоторому пространству $L_1(\mu)$.

В пространстве непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K описано множество точек Штейнера для произвольной тройки функций, выявлены тройки функций, для которых точка Штейнера единственна, и построена липшицева выборка из отображения St , ставящего в соответствие тройке функций множество их точек Штейнера.

Глава III диссертации посвящена исследованию n -антипроксиминальных множеств в пространствах непрерывных и суммируемых функций.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть M — выпуклое замкнутое множество в пространстве $\mathbf{c}_0$ и $n \in \mathbb{N}$. Множество M n -антипроксиминально тогда и только тогда, когда M антипроксиминально.*

ТЕОРЕМА 3.2. *В пространстве $C[K]$ непрерывных функций на бесконечном хаусдорфовом компакте K (1) антипроксиминаль-*

ность выпуклого замкнутого множества M эквивалентна его 2-антипроксиминальности; (2) не существует выпуклых замкнутых ограниченных n -антипроксиминальных тел при $n = 3, 4, \dots$.

ТЕОРЕМА 3.3. *В пространстве $\mathbf{c}$ нет выпуклых замкнутых n -антипроксиминальных множеств при $n = 3, 4, \dots$.*

Здесь $\mathbf{c}$ обозначает пространство сходящихся последовательностей с равномерной нормой.

Приведён пример, показывающий, что аналог теоремы 3.3 для произвольного пространства $C[K]$ неверен.

ТЕОРЕМА 3.4. *Для пространства $L_1(E, \Sigma, \mu)$, сопряжённое к которому канонически изоморфно $L_\infty(E, \Sigma, \mu)$, в частности, для пространства $L_1(E, \Sigma, \mu)$ с σ -конечной мерой μ , верны следующие утверждения:*

- (1) антипроксиминальность выпуклого замкнутого множества M эквивалентна его 2-антипроксиминальности;
- (2) не существует выпуклого замкнутого n -антипроксиминального множества при $n = 3, 4, \dots$;
- (3) если σ -алгебра Σ содержит хотя бы один атом относительно меры μ , то в пространстве $L_1(E, \Sigma, \mu)$ нет выпуклых замкнутых ограниченных 2-антипроксиминальных множеств.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук Петру Анатольевичу Бородину за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе. Автор благодарен профессору И.Г. Царькову, академику РАН Б.С. Кашину, кандидату физико-математических наук А.Р. Алимову, доценту О.Н. Косухину за ценные замечания.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] *Беднов Б.Б., Бородин П.А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб., 2014, Т. 205, вып. 4, 3–21.
- [2] *Беднов Б.Б., Стрелкова Н.П.* О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах // Матем. заметки, 2013, Т. 94, вып. 1, 46–54.
- [3] *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестник МГУ, Серия 1, Математика, Механика, 2011, № 6, 26-31.
- [4] *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Международная конференция по теории приближений, посвященная 90-летию С.Б. Стечкина, Тезисы докладов, М., 2010, 9.
- [5] *Беднов Б.Б.* Об n -антипроксиминальных множествах // Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, ООО Издательство "Научная книга", 2014, 33–34.