Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.982.256

515.124.4

Беднов Борислав Борисович

Кратчайшие сети в банаховых пространствах

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

доцент П.А. Бородин

Москва 2014

Содержание

Введение

Диссертация посвящена вопросам геометрии банаховых пространств, связанным с понятиями кратчайшей сети, минимального заполнения, точек Штейнера (и соответствующих им кратчайших сетей типа звезды) для конечных подмножеств этих пространств. В работе исследуются существование кратчайшей сети, существование и единственность точки Штейнера, реализуемость минимальных заполнений и минимальных заполнений типа звезды в общих банаховых и конкретных функциональных пространствах, а также существование элемента наилучшего $n-$приближения.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $G = (V, E)$ — связный граф со множеством вершин V и множеством ребер E. Отображение $\Gamma : V \to X$ называется *сетью* в X, параметризованной графом G, или сетью типа G. Вершинами сети Γ называются точки $\Gamma(v)$, $v \in V$, ребрами сети Γ называются пары $\Gamma(v)$, $\Gamma(w)$ при условии, что пара v, w соединена ребром в графе G. Длиной ребра $\Gamma(v)\Gamma(w)$ называется число $\rho(\Gamma(v), \Gamma(w))$, а длиной $|\Gamma|$ сети Γ — сумма длин всех ее ребер. Если $M \subset X$ — конечное множество и $M \subset \Gamma(V)$, то говорят, что сеть Γ соединяет (или затягивает) множество M. Множество M называется границей сети Γ.

Число

$$|\mathrm{smt}|(M, X) = \inf\{|\Gamma| : \text{ сеть } \Gamma \text{ соединяет } M\}$$

называется длиной кратчайшей сети для M в X, а

$$\mathrm{smt}(M, X) = \{\Gamma : \Gamma\text{— сеть в } X, \text{соединяющая } M, |\Gamma| = |\mathrm{smt}|(M, X)\}$$

есть (возможно, пустое) множество кратчайших сетей для M в X.

Теория кратчайших сетей (и более обще, экстремальных сетей) составляет обширную область метрической геометрии. Теорией кратчайших сетей интересовался Гаусс: в письме к Шумахеру [42] он задал вопрос о том, как построить кратчайшую систему дорог, соединяющих четыре города. Общая задача о поиске кратчайшей сети (то есть связного графа минимальной длины), соединяющей заданное конечное множество точек плоскости, была поставлена Ярником и Кесслером [48] в 1934 году. В книге Куранта и Роббинса [18] эта задача называется проблемой Штейнера. Сейчас теория экстремальных сетей в метрических пространствах развивается в нашей стране благодаря исследованиям, в основном, А.О. Иванова, А.А. Тужилина и их учеников. Наиболее полно теория кратчайших сетей изложена в работах [31], [46], [47], [12].

Типы связных графов, задающих кратчайшие сети, удовлетворяют достаточно жестким условиям, сформулированным в следующей хорошо известной лемме.

Лемма А. *Пусть M_n — n-точечное множество в метрическом пространстве X. При поиске графа, параметризующего кратчайшую сеть $\Gamma \in \mathrm{smt}(M_n, X)$, достаточно рассматривать деревья, которые имеют не более $n-2$ дополнительных (отличных от прообразов точек из M_n) вершин, причем каждая из этих дополнительных вершин имеет степень не меньше 3.*

Доказательство. Рассмотрим сеть Γ, соединяющую M_n в X. Пусть в графе $G = (V, E)$, параметризующем Γ, есть цикл. Рассмотрим граф G', полученный из G удалением произвольного ребра из этого цикла. Множество вершин и связность G' — как у G. Тогда сеть Γ', параметризованная графом G', соединяет M_n и имеет длину меньше длины Γ.

Рассмотрим дополнительную вершину $t \in V$. Если степень её равна 1, то построим граф G' из G удалением вершины t и соответствующего ей ребра. Длина Γ' также меньше длины Γ. Если же степень дополнительной вершины t равна 2, то из G удалим t с соответствующими ей двумя рёбрами tx_1, tx_2

и добавим ребро x_1x_2. Получим граф G' и соответствующую ему сеть Γ' с длиной не больше (по неравенству треугольника), чем у Γ.

Рассмотрим теперь дерево $G = (V, E)$, параметризующее сеть Γ, причём $M_n \subset \Gamma(V)$ и степень каждой дополнительной вершины графа G не менее 3. Пусть множество V состоит из $n + N$ точек (то есть в графе G ровно N дополнительных вершин), а множество E состоит из p элементов. Так как G — дерево, то $p = n + N - 1$. Так как из каждой дополнительной вершины выходит не менее трёх рёбер, а из остальных выходит хотя бы по одному ребру, то количество рёбер в G не меньше $(3N + n)/2$. Следовательно, $p = n + N - 1 \geq (3N + n)/2$, что эквивалентно условию $N \leq n - 2$.

Таким образом, для любой сети, соединяющей M_n, найдётся сеть Γ меньшей или равной длины, также соединяющая M_n, со следующими свойствами: Γ параметризована деревом G; каждая дополнительная вершина в G имеет степень не меньше 3; дополнительных вершин в G не более $n - 2$.

Лемма доказана.

Из леммы A следует, что граф, параметризующий кратчайшую сеть для $n-$точечного множества, можно искать среди графов конечного числа различных типов. Действительно, число топологически различных деревьев с не более чем $n + N \leq 2n - 2$ вершинами конечно.

В банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ сети можно представлять себе как связные конечные объединения отрезков, соединяющих точки этого пространства, то есть как связные графы в X с ребрами–отрезками.

Для трехточечных множеств M_3 кратчайшая сеть в силу леммы A состоит из трех (возможно, вырожденных) отрезков, соединяющих точки из M_3 с их точкой Штейнера, то есть точкой, сумма расстояний от которой до точек из M_3 минимальна.

В дальнейшем нам понадобится общее определение: для заданного набора

$M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера (в англоязычной литературе — медиан) $\mathrm{st}(M, X)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\mathrm{st}|(M, X).$$

В случае гильбертова пространства $X = H$ точка Штейнера $s(x_1, x_2, x_3)$ существует и единственна (см., например, [18, глава 7, § 5]): она лежит в плоскости точек x_1, x_2, x_3 и либо совпадает с одной из них (если в треугольнике $x_1x_2x_3$ есть угол, не меньший $120°$), либо совпадает с точкой Торричелли (из которой все стороны треугольника видны под углом $120°$).

В широком классе метрических пространств кратчайшая сеть существует для любого набора точек. В книге [47, глава 2, § 2] приведено доказательство существования кратчайшей сети на полном римановом многообразии, частным случаем которого является евклидова плоскость (доказательство для плоскости есть также в [20, приложение Б]). Некоторые результаты для метрических пространств имеются в [25, глава 4, § 5].

В бесконечномерном банаховом пространстве X кратчайшие сети могут не существовать уже для трехточечных множеств M_3 — другими словами, множества $\mathrm{smt}(M_3, X)$ и $\mathrm{st}(M_3, X)$ могут быть пустыми. Первый пример таких X и M_3 построил А.Л. Гаркави [8] в 1974 г.

Имеются и другие примеры [60, 27, 56, 4]. Л. Веселы [60] доказал, что всякое нерефлексивное банахово пространство X можно так эквивалентно перенормировать, что в новой норме некоторая тройка $M_3 \subset X$ не затягивается кратчайшей сетью. Конструкция новой нормы у Л. Веселы основана на идее С.В. Конягина [17]. В.М. Кадец [49], не зная о работе Веселы, доказал этот результат иным способом. Наконец, Н.П. Стрелкова в работе [64] для всякого $n \geq 3$ построила пример банахова пространства X и n-точечного множества $M_n \subset X$, для которых множество $\mathrm{smt}(M_n, X)$ кратчайших сетей пусто. Построение Стрелковой основывается на примере из [4], для которого свойство несуществования точки Штейнера приводимых троек x_1, x_2, x_3 устойчиво: для любых троек элементов x_1', x_2', x_3', достаточно близких по норме к x_1, x_2, x_3 соответственно, точка Штейнера также не существует. Пример в [8] также обладает этим свойством устойчивости.

В I главе диссертации доказывается, что во всяком банаховом пространстве X, $1-$дополняемом в своем втором сопряженном (в частности, в любом сопряжённом пространстве, а также в любом пространстве L_1) множество $\mathrm{smt}(M, X)$ непусто для всякого конечного $M \subset X$.

Недавно в работе А.О. Иванова и А.А. Тужилина [13] наметилось новое направление теории кратчайших сетей, связанное с введенным ими понятием *минимального заполнения.*

Пусть (M, ρ) — конечное метрическое пространство. Число

$$|\mathrm{mf}|(M) = \inf\{|\mathrm{smt}|(\varphi(M), Y) : \varphi : M \to Y\},$$

где infimum берется по всем изометричным вложениям пространства M в различные метрические пространства Y, называется длиной минимального заполнения пространства M, а сети — элементы множества

$$\mathrm{mf}(M) = \{\mathrm{smt}(\varphi(M), Y) : |\mathrm{smt}|(\varphi(M), Y) = |\mathrm{mf}|(M)\}$$

называются минимальными заполнениями пространства M.

Для всякого конечного множества M в метрическом пространстве (X, ρ), рассматриваемого как метрическое пространство с той же метрикой ρ, выполнено очевидное неравенство $|\mathrm{smt}|(M, X) \geq |\mathrm{mf}|(M)$.

Отметим, что определение минимального заполнения аналогично определению минимального поперечника, введённому Р.С. Исмагиловым [15].

В отличие от кратчайших сетей, минимальные заполнения всегда существуют [13], то есть $\mathrm{mf}(M)$ непусто для всякого конечного метрического пространства M.

Для трехточечного пространства $M_3 = (\{x_1, x_2, x_3\}, \rho)$ минимальное заполнение можно получить [13] в четырехточечном расширении $(\{x_1, x_2, x_3, s\}, \rho)$, где

$$\rho(s, x_i) = \frac{1}{2}(\rho(x_i, x_j) + \rho(x_i, x_k) - \rho(x_j, x_k))$$

$(i = 1, 2, 3,\ \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\})$ в виде сети–дерева с ребрами sx_1, sx_2 и sx_3. При этом

$$|\mathrm{mf}|(M_3) = \frac{1}{2}P(x_1, x_2, x_3), \tag{0.1}$$

где $P(x_1, x_2, x_3)$ — периметр треугольника $x_1x_2x_3$.

Для четырехточечного пространства $M_4 = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \rho)$ минимальное заполнение имеет длину

$$|\mathrm{mf}|(M_4) = \frac{1}{2}(\max(M_4) + \min(M_4)), \tag{0.2}$$

где $\max(M_4)$ и $\min(M_4)$ — соответственно максимальная и минимальная из сумм $\rho(x_1, x_2) + \rho(x_3, x_4)$, $\rho(x_1, x_3) + \rho(x_2, x_4)$, $\rho(x_1, x_4) + \rho(x_2, x_3)$, и может быть реализовано сетью в некотором не более чем 6—точечном расширении M_4 [13].

Для произвольных конечных метрических пространств M величина $|\mathrm{mf}|(M)$ как функция расстояний между точками из M может быть вычислена по некоторой переборной формуле, полученной А.Ю. Ереминым [11].

Будем говорить, что метрическое пространство (X, ρ) *реализует минимальное заполнение* для своего конечного подмножества M, если $|\mathrm{smt}|(M, X) = |\mathrm{mf}|(M)$ и множество $\mathrm{smt}(M, X)$ непусто.

А.О. Иванов и А.А. Тужилин поставили [24] задачу об описании всех метрических пространств, реализующих минимальные заполнения для всех своих конечных подмножеств, и вместе со своими учениками [13, 14] привели нетривиальные примеры таких пространств. В частности, З.Н. Овсянников [14] доказал, что таким пространством является пространство l_∞^n для всякого натурального n (n-мерное действительное пространство с нормой $\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$), а также пространство l_∞ ограниченных последовательностей.

В случае банаховых пространств эта задача полностью решается в главе I диссертации. Именно, оказалось, что банахово пространство реализует минимальные заполнения для всех своих конечных подмножеств в точности тогда, когда оно обладает так называемым свойством 4.2.I.P. (предуально к L_1, является пространством Линденштраусса).

Напомним необходимые сведения из геометрии банаховых пространств.

Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством n.2.I.P. (n.2 Intersection Property), если всякие n попарно пересекающихся замкнутых шаров в X имеют непустое пересечение.

Теорема A (Гротендик [43], Линденштраусс [54], см. также [53]). *Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*

(1) *X обладает свойством n.2.I.P. для всякого $n \geq 3$;*

(2) *X обладает свойством 4.2.I.P.;*

(3) *X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ;*

(4) *X^{**} 1-дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве Z (то есть существует линейный проектор $P : Z \to X^{**}$ нормы 1).*

Пространства, удовлетворяющие условиям теоремы A, называются предуальными к L_1 или пространствами Линденштраусса. К этому классу пространств относятся все пространства $C(Q)$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте Q, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие. Пространство размерности n предуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n.

Отметим, что класс предуальных к L_1 пространств уже известен как описывающий экстремальное геометрическое свойство.

Теорема B (Рао [58]). *Действительное банахово пространство X предуально к L_1 тогда и только тогда, когда для всякого конечного множества $M \subset X$ его чебышевский радиус*

$$r_C(M) = \inf_{e \in X} \sup_{x \in M} \|x - e\|$$

равен половине диаметра M.

Нетрудно видеть, что для всякого ограниченного множества в произвольном банаховом пространстве X имеет место неравенство $r_C(M) \geq$ diam(M)/2. При этом в [58] показано, что чебышевский центр (точка e, для которой $\sup_{x \in M} \|x - e\| = r_C(M)$) в предуальном к L_1 пространстве существует для всякого конечного множества M, то есть предуальные к L_1 пространства и только они реализуют "минимальные заполнения" всех своих конечных подмножеств в смысле чебышевских центров.

Во II главе диссертации доказывается аналог теоремы B, в котором вместо чебышевских центров фигурируют точки Штейнера. Приведем необходимые определения.

Помимо общих минимальных заполнений, в работе [13] вводятся еще так называемые параметрические минимальные заполнения конечных метрических пространств (M, ρ), в определении которых изометрично вложенное пространство $\varphi(M)$ соединяется в пространстве Y кратчайшей сетью заданного типа. Один из таких типов, специально рассматриваемый в [13], получил название *звезды*: рассматриваемые сети параметризуются графами–деревьями, в которых одна вершина соединена со всеми остальными. Дадим точное определение в терминах точек Штейнера.

Число
$$|\mathrm{st}|(M) = \inf\{|\mathrm{st}|(\varphi(M), Y) : \varphi : M \to Y\},$$
где infimum берется по всем изометричным вложениям пространства M в различные метрические пространства Y, называется длиной минимального заполнения типа звезды множества M.

Для трехточечных метрических пространств M_3 величина $|\mathrm{st}|(M_3)$ совпадает с $|\mathrm{mf}|(M_3)$ и равна полупериметру треугольника с вершинами из M_3.

Для четырехточечных метрических пространств M_4 нетрудно показать, что $|\mathrm{st}|(M_4)$ совпадает с определенной в формуле (0.2) величиной $\max(M_4)$.

Будем говорить, что метрическое пространство (X, ρ) реализует минимальное заполнение типа звезды для своего конечного подмножества M, если $|\mathrm{st}|(M, X) = |\mathrm{st}|(M)$ и множество $\mathrm{st}(M, X)$ непусто.

Теперь можно сформулировать доказываемый во II главе аналог теоремы B: банахово пространство реализует минимальные заполнения типа звезды тогда и только тогда, когда оно предуально к L_1.

Остальные результаты II главы посвящены точкам Штейнера (или, что то же, кратчайшим сетям типа звезды) в пространствах L_1 и C.

В пространстве $L_1(M, \Sigma, \mu)$ действительнозначных функций, суммируемых на множестве M по мере μ, определенной на сигма-алгебре Σ подмножеств M, точки Штейнера описываются достаточно просто. Для трех функций f_1, f_2, f_3 из этого пространства точка Штейнера s существует, единственна и почти в каждой точке $t \in M$ значение $s(t)$ равно среднему из чисел

$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$. При этом выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{3} \|f_k - s\| = \frac{1}{2}(\|f_1 - f_2\| + \|f_1 - f_3\| + \|f_2 - f_3\|).$$

Нетрудно заметить, что в любом банаховом пространстве для любых элементов x_1, x_2, x_3 и любой их точки Штейнера $s = s(x_1, x_2, x_3)$ верно неравенство $\sum_{k=1}^{3} \|x_k - s\| \geq \frac{1}{2}(\|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_3\| + \|x_2 - x_3\|)$.

Таким образом, пространство L_1 реализует минимальные заполнения (они же — минимальные заполнения типа звезды) для всех своих трехточечных множеств (см. формулу (0.1) выше).

Как показано во II главе, это свойство вместе со свойством единственности точки Штейнера $s(f_1, f_2, f_3)$ полностью характеризует пространство L_1 среди всех банаховых пространств.

Отметим, что это не первый результат, в котором пространство L_1 характеризуется во "внутренне–метрических" терминах. Например, справедлива

Теорема C (Лима [53, теорема 3.10]). *Действительное банахово пространство X изометрично пространству L_1 тогда и только тогда, X обладает R_4-свойством, то есть для любых $x_1, x_2, x_3 \in X$ существуют такие $u_{ij} \in X, 1 \leq i < j \leq 4$, что*

$$x_1 = u_{12} + u_{13} + u_{14}, \|x_1\| = \|u_{12}\| + \|u_{13}\| + \|u_{14}\|,$$

$$x_2 = -u_{12} + u_{23} + u_{24}, \|x_2\| = \|u_{12}\| + \|u_{23}\| + \|u_{24}\|,$$

$$x_3 = -u_{13} - u_{23} + u_{34}, \|x_3\| = \|u_{13}\| + \|u_{23}\| + \|u_{34}\|,$$

$$\|x_1 + x_2 + x_3\| = \|u_{14} + u_{24} + u_{34}\| = \|u_{14}\| + \|u_{24}\| + \|u_{34}\|.$$

Отметим также, что в терминах точек Штейнера были охарактеризованы гильбертовы пространства.

Теорема D (Бенитез, Фернандез, Сориано [28]). *Действительное банахово пространство X размерности не меньше 3 является гильбертовым тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка любых трёх точек из X содержит их точку Штейнера.*

Кроме того, во II главе диссертации приводится описание множеств точек Штейнера для троек точек в пространстве непрерывных функций и изучаются свойства этих множеств.

Наряду с точками Штейнера можно (по аналогии с чебышевскими центрами) рассматривать и *относительные* точки Штейнера, когда для заданных точек $x_1, \dots, x_n$ банахова пространства X точка s, минимизирующая сумму $\|x_1 - s\| + \dots + \|x_n - s\|$, ищется не во всем пространстве X, а в заданном множестве $M \subset X$. Такие точки s составляют так называемую метрическую n-проекцию $P_M(x_1, \dots, x_n)$ точек $x_1, \dots, x_n$ на множество M.

Исследование свойств метрической n-проекции — относительно новый раздел теории приближений в нормированных пространствах [5]. В частности, в [5] поставлен вопрос об исследовании $n-$антипроксиминальных множеств.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $M \subset X$. Для $x_1, \dots, x_n \in X$ положим $\rho(x_1, \dots, x_n, M) = \inf_{z \in M} \sum_{i=1}^{n} \|x_i - z\|$

Непустое множество M назовём $n-$*антипроксиминальным*, если для любых таких $x_1, \dots, x_n \in X$, что $\rho(x_1, \dots, x_n, M) > \rho(x_1, \dots, x_n, X)$, выполнено $P_M(x_1, \dots, x_n) \setminus \{x_i\}_{i=1}^{n} = \emptyset$.

При $n = 1$ это определение дает обычные антипроксиминальные множества (то есть такие множества $M \subset X$, что для любой точки $x \in X \setminus M$ во множестве M нет точки, ближайшей к x), исследование которых составляет заметную область в геометрической теории приближений.

Кли [51] сформулировал вопрос о существовании в банаховом пространстве выпуклого замкнутого ограниченного антипроксиминального множества. Антипроксиминальные множества начал исследовать Зингер в книге [59, глава 1, § 2 и Appendix 1, § 2]. Он называл такие множества "very non-proximinal". Пространство X содержит выпуклое замкнутое антипроксиминальное множество M тогда и только тогда, когда оно не рефлексивно (M — ядро функционала, не достигающего своей нормы). Холмс [45, § 30] ввёл термин "антипроксиминальное множество". Эдельштейн [37] доказал, что в сепарабельном сопряжённом пространстве выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множеств нет. Эдельштейн и Томпсон [39] построили первое выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело (в пространстве $\mathbf{c_0}$). Кобзаш [16], [33], [34] привёл примеры таких тел в пространствах, изоморфных $\mathbf{c_0}$, и доказал, что если измеримое пространство (E, Σ, μ) содержит атом относительно меры μ, то в пространстве $L_1(E, \Sigma, \mu)$, для которого сопряжённое пространство канонически изоморфно $L_\infty(E, \Sigma, \mu)$, выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множеств нет [32]. Борвейн [29], Эдельштейн [38] и Фелпс [57] доказали отсутствие выпуклых замкнутых ограниченных множеств в пространствах X со свойством Радона-Никодима. Флорет [40] доказал несуществование таких множеств в пространствах $X = X_1 \times X_2$ с нормой $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, где рефлексивное пространство $X_2 \neq \{0\}$. В.П. Фонф [22] построил выпуклые замкнутые ограниченные антипроксиминальные тела в широком классе пространств непрерывных функций и доказал [23], что произвольное бесконечномерное банахово пространство можно так эквивалентно перенормировать, что выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множеств в новой норме существовать не будет. В.С. Балаганский [1] построил пример такого множества в бесконечномерном пространстве $C(Q)$ для произвольного топологического хаусдорфового пространства Q, а также в некоторых пространствах Гротендика [2]. Борвейн, Хименез-Севилла и Морено [30] доказали, что в пространстве $X = Y \times \mathbf{c_0}$ с нормой $\|x\| = \max\{\|y\|, \|z\|\}$ есть выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело. Теория антипроксиминальных множеств развивалась и в других направлениях. Подробнее см. обзор [35].

Одна из самых интересных нерешённых задач теории антипроксиминальных множеств формулируется так: существует ли выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело в $L_1[0,1]$?

В главе III диссертации исследуется вопрос о существовании выпуклых замкнутых $n-$антипроксиминальных множеств в пространствах непрерывных функций и суммируемых функций.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы из 66 наименований. Общий объем диссертации — 70 страниц. В каждой главе принята сквозная нумерация теорем, лемм, примеров и формул.

Перейдем к обзору результатов по главам.

В I главе исследуется вопрос существования кратчайших сетей и минимальных заполнений для конечных множеств в банаховых пространствах.

Теорема 1.1. *В банаховом пространстве X, для которого существует проектор $P : X^{**} \to X$ нормы 1 (в частности, в любом сопряжённом пространстве или в пространстве L_1 [36]), для любого натурального n и для любых точек $x_1, \ldots, x_n$ существует соединяющая их кратчайшая сеть.*

Оказывается, что пространства со свойством 3.2.I.P. и только они реализуют минимальные заполнения для произвольной тройки своих элементов.

Далее $m[a, b]$ обозначает *метрический отрезок* с концами a и b в банаховом пространстве X:

$$m[a, b] = \{x \in X : \|x - a\| + \|x - b\| = \|a - b\|\}.$$

Теорема 1.2. *Пусть X — действительное банахово пространство. Следующие свойства эквивалентны:*
(1) *X реализует минимальное заполнение для всякой тройки своих точек;*
(2) *для всякой тройки $a, b, c \in X$ множество $\mathrm{st}(\{a, b, c\}, X)$ непусто и $|\mathrm{st}|(\{a, b, c\}, X) = \frac{1}{2}P(a, b, c)$;*
(3) *для всякой тройки $a, b, c \in X$ пересечение $m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$ непусто;*
(4) *X обладает свойством 3.2.I.P.*
При этом во всяком таком пространстве X для всякой тройки точек выполнено равенство $\mathrm{st}(\{a, b, c\}, X) = m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$.

Приводится пример четырёх точек в пространстве l_1^3 (обладающего свойством 3.2.I.P.), для которых минимальное заполнение не реализуется.

Следующая теорема характеризует банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения для произвольного конечного множества своих элементов.

Теорема 1.4. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*
(1) *X реализует минимальное заполнение для всякого конечного набора своих точек;*
(2) *X реализует минимальное заполнение для всякого набора из 4 своих точек;*
(3) *X предуально к L_1.*

Из этой теоремы следует, что в пространстве непрерывных функций для любого конечного набора точек существует кратчайшая сеть, которая является минимальным заполнением для этого набора.

В главе II исследуются свойства сетей типа звезды и множеств точек Штейнера в банаховых пространствах.

Теорема 2.1. *Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*
(1) *X реализует минимальное заполнение типа звезды для всякого конечного набора своих точек;*
(2) *X реализует минимальное заполнение типа звезды для всех троек и четверок своих точек;*
(3) *X предуально к L_1.*

Теорема 2.2. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*
(1) *для всяких трех точек $a, b, c \in X$ существует и единственна точка $s = \mathrm{st}(a, b, c)$, для которой выполнено равенство*

$$\|s - a\| + \|s - b\| + \|s - c\| = \frac{1}{2}P(a, b, c);$$

(2) *для всяких трех точек $a, b, c \in X$ пересечение $m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$ одноточечно;*
(3) *X изометрически изоморфно некоторому пространству $L_1(\mu)$.*

В пространстве непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K описано множество точек Штейнера для произвольной тройки функций, выявлены тройки функций, для которых точка Штейнера единственна, и построена липшицева выборка из отображения St, ставящего в соответствие тройке функций множество их точек Штейнера.

Глава III посвящена исследованию $n-$антипроксиминальных множеств в пространствах непрерывных и суммируемых функций.

Теорема 3.1. *Пусть M — выпуклое замкнутое множество в пространстве $\mathbf{c_0}$, и $n \in \mathbb{N}$. Множество M $n-$антипроксиминально тогда и только тогда, когда M антипроксиминально.*

Теорема 3.2. *В пространстве $C[Q]$ непрерывных функций на бесконечном хаусдорфовом компакте Q 1) антипроксиминальность выпуклого замкнутого множества M эквивалентна его $2-$антипроксиминальности; 2) не существует выпуклых замкнутых ограниченных $n-$антипроксиминальных тел при $n = 3, 4, \dots$.*

Теорема 3.3. *В пространстве $\mathbf{c}$ нет выпуклых замкнутых $n-$антипроксиминальных множеств при $n = 3, 4, \dots$.*

Здесь $\mathbf{c}$ обозначает пространство сходящихся последовательностей с равномерной нормой.

Приведён пример, показывающий, что аналог теоремы 3.3 для произвольного пространства $C[Q]$ неверен.

Теорема 3.4. *Для пространства $L_1(E, \Sigma, \mu)$, сопряжённое к которому канонически изоморфно $L_\infty(E, \Sigma, \mu)$, в частности, для пространства $L_1(E, \Sigma, \mu)$ с $\sigma-$конечной мерой μ, верны следующие утверждения:*
1) антипроксиминальность выпуклого замкнутого множества M эквивалентна его $2-$антипроксиминальности;
2) не существует выпуклого замкнутого $n-$антипроксиминального множества при $n = 3, 4 \dots$;
3) если $\sigma-$алгебра Σ содержит хотя бы один атом относительно меры μ, то в пространстве $L_1(E, \Sigma, \mu)$ нет выпуклых замкнутых ограниченных $2-$антипроксиминальных множеств.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [62], [63], [64], [65], [66], приведенных в конце списка литературы. Из работы [64] в диссертацию включены только результаты, доказанные автором без участия Н.П. Стрелковой. Все теоремы из [65] получены совместно с П.А. Бородиным и включены в диссертацию. В каждой из них автору принадлежит либо первая, либо вторая половина доказательства.

Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории приближений и граничным свойствам функций в МГУ под руководством профессора Е.П. Долженко, на семинаре по теории приближений в МГУ под руководством профессора И.Г. Царькова и доцента А.С. Кочурова, на семинаре по теории функций в МГУ под руководством академика РАН Б.С. Кашина, чл.-корр. РАН С.В. Конягина, проф. Б.И. Голубова и проф. М.И. Дьяченко, на семинаре по геометрической теории приближений в МГУ под руководством доцента П.А. Бородина, на научном семинаре кафедры высшей математикик МФТИ под руководством профессора Е.С. Половинкина, на международной конференции «Теория приближений», посвященной 90-летию со дня рождения С. Б. Стечкина (2010), на школе С.Б. Стечкина по теории функций в г.Миасс (2011, 2013) и на 17 Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (2014).

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю П.А. Бородину за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе.

Автор благодарен И.Г. Царькову, Б.С. Кашину, А.Р. Алимову, О.Н. Косухину за ценные замечания.

Глава I. Кратчайшие сети и минимальные заполнения

§1. Существование кратчайших сетей

Пусть X — линейное нормированное пространство, пространства X^* и X^{**} — первое и второе сопряжённые к X соответственно.

Напомним, что непустое множество T называется *направленным*, если на нём введена частичная упорядоченность, удовлетворяющая следующему условию: для всяких $t, s \in T$ найдётся такое $u \in T$, что $t \leq u$ и $s \leq u$.

Направленностью (см., например, [3, глава 1, §9]) в топологическом пространстве X называется набор элементов $\{x_t\}_{t \in T}$ в X, индексируемых направленным множеством T.

Направленность $\{x_t\}_{t \in T}$ называется *поднаправленностью* направленности $\{y_s\}_{s \in S}$, если есть такое отображение $\pi : T \to S$, что $x_t = y_{\pi(t)}$ и для всякого $s_0 \in S$ найдётся $t_0 \in T$ с условием $\pi(t) \geq s_0$ при всех $t \geq t_0$.

По определению, направленность $\{x_t\}_{t \in T}$ в топологическом пространстве X сходится к элементу $x \in X$, если для всякого открытого множества U, содержащего x, найдётся такой индекс t_0, что $x_t \in U$ для всех $t \in T$ с условием $t \geq t_0$.

Теорема 1.1. *В банаховом пространстве X, для которого существует проектор $P : X^{**} \to X$ нормы 1 (в частности, в любом сопряжённом пространстве или в пространстве L_1 [36]), для любого натурального n и для любых точек $x_1, \ldots, x_n$ существует соединяющая их кратчайшая сеть.*

Доказательство. Рассмотрим сети в пространстве X^{**} с границей $x_1, \ldots, x_n \in X$. Заметим, что дополнительные вершины кратчайшей сети можно искать лишь в замкнутом шаре $B \subset X^{**}$ радиуса $2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ с центром в нуле. Действительно, любая дополнительная вершина связной сети соединяется со всеми $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, по ломаным, и если некоторая вершина a_l кратчайшей сети Γ лежит вне шара B, то длина этой сети больше $\|a_l - x_1\| \geq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$. Но сеть $\cup_{i=1}^n [0, x_i]$ имеет длину, равную $\sum_{i=1}^n \|x_i\|$, что противоречит тому, что сеть Γ является кратчайшей.

Фиксируем один тип сетей. На множестве $\mathcal{S}$ сетей данного типа в пространстве $X^{**} \supset X$ с границей $x_1, \dots, x_n \in X$ введём частичный порядок: $\Gamma_1 \geq \Gamma_2$ тогда и только тогда, когда $|\Gamma_1| \leq |\Gamma_2|$. Заметим, что любые две сети одного типа при таком упорядочивании сравнимы.

Пусть у сетей данного типа d дополнительных вершин и N рёбер. Сети $s \in \mathcal{S}$ данного типа поставим в соответствие элемент $\gamma_s = (a_1, \dots, a_d) \in (X^{**})^d$, состоящий из её дополнительных вершин. Множество $\mathcal{S}$ направлено, поэтому множество $\{\gamma_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ является направленностью.

Пространство $(X^{**})^d$ с нормой $\|\gamma\| = \|(a_1, \dots, a_d)\| = \sum_{i=1}^d \|a_i\|_{X^{**}}$ является хаусдорфовым в *-слабой топологии, и замкнутый шар B^d в этом пространстве *-слабо компактен по теореме Банаха-Алаоглу ([3, глава 6, §7]) как шар в пространстве, сопряжённом к $(X^*)^d$. По теореме 1.9.10 из [3, глава 1, §9], всякая бесконечная направленность в $(X^{**})^d$ имеет поднаправленность, сходящуюся (относительно $*$-слабой топологии) к некоторому элементу из $(X^{**})^d$. Поэтому существует сходящаяся к $\overline{\gamma} = (\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_d) \in (X^{**})^d$ поднаправленность $\{g_s\}_{s \in S \subseteq \mathcal{S}} \subseteq \{\gamma_t\}_{t \in \mathcal{S}}$. Сеть данного типа с дополнительными вершинами $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_d$ и границей $x_1, \dots, x_n$ обозначим $\overline{\Gamma}$.

Докажем, что $\overline{\Gamma}$ — кратчайшая сеть данного типа, соединяющая точки $x_1, \dots, x_n$ в X^{**}. Можно считать $|\overline{\Gamma}| > 0$.

Рассмотрим произвольную дополнительную вершину a_i сети s данного типа. Пусть из неё выходит n_i рёбер к вершинам $a_1^i, \dots, a_{k_i}^i, x_1^i, \dots, x_{l_i}^i$ сети s, $l_i + k_i = n_i$. Занумеруем рёбра вершины a_i в некотором порядке. Рассмотрим

*-слабую окрестность

$$U = U(\overline{\gamma}, \varepsilon) = U(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_d; f_1^1, \ldots, f_{n_1}^1, f_1^2, \ldots, f_1^d, \ldots, f_{n_d}^d, \varepsilon) =$$

$$= \{(a_1, \ldots, a_d) : |f_j^i(a_i - \overline{a}_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, d, j = 1, \ldots, n_i\}$$

точки $\overline{\gamma}$. Здесь функционал $f_j^i \in X^*$, $\|f_j^i\| = 1$ при каждом $i \in \{1, \ldots, d\}$ и $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ выбирается так, что если a_i соединена ребром с a_k (тогда и $\overline{a}_i$ соединена ребром с $\overline{a}_k$), то $|f_j^i(\overline{a}_i - \overline{a}_k)| > (1-\varepsilon)\|\overline{a}_i - \overline{a}_k\|$, а если a_i соединена ребром с x_l, то $|f_m^i(\overline{a}_i - x_l)| > (1-\varepsilon)\|\overline{a}_i - x_l\|$, где j и m — это номера рёбер, соединяющих a_i с a_k и x_l соответственно. Тогда для элементов набора $(a_1, \ldots, a_d) \in U$ выполнены следующие неравенства : $\|a_i - a_k\| \geq |f_j^i(a_i - a_k)| = |f_j^i((a_i - \overline{a}_i) + (\overline{a}_i - \overline{a}_k) + (\overline{a}_k - a_k))| \geq |f_j^i(\overline{a}_i - \overline{a}_k)| - 2\varepsilon \geq (1-\varepsilon)\|\overline{a}_i - \overline{a}_k\| - 2\varepsilon$ при соединении ребром вершин a_i и a_k и $\|a_i - x_l\| \geq |f_m^i(a_i - x_l)| = |f_m^i((a_i - \overline{a}_i) + (\overline{a}_i - x_l))| \geq |f_m^i(\overline{a}_i - x_l)| - \varepsilon \geq (1-\varepsilon)\|\overline{a}_i - x_l\| - \varepsilon$ при соединении ребром вершин a_i и x_l.

Для сети $\hat{\Gamma}$ данного типа, имеющей дополнительные вершины в точках $\{a_1, \ldots, a_d\}$, из этих неравенств следует, что $|\hat{\Gamma}| = \sum_{i=1}^d (\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k_i} \|a_i - a_p^i\| + \sum_{r=1}^{l_i} \|a_i - x_r^i\|) \geq (1-\varepsilon)(\sum_{i=1}^d (\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k_i} \|\overline{a}_i - \overline{a}_p^i\| + \sum_{r=1}^{l_i} \|\overline{a}_i - x_r^i\|)) - 2N\varepsilon = (1-\varepsilon)|\overline{\Gamma}| - 2N\varepsilon$. То есть для любого элемента $(a_1, \ldots, a_d) \in U$ и соответствующей сети $\hat{\Gamma}$ верно $|\hat{\Gamma}| \geq (1-\varepsilon)|\overline{\Gamma}| - 2N\varepsilon$.

Пусть в направленности $\{\gamma_t\}_{t \in \mathfrak{S}}$ есть элемент $\widetilde{\gamma}_1$, соответствующая которому сеть $\widetilde{\Gamma}_1$ имеет длину меньше $|\overline{\Gamma}|$. Тогда (по определению поднаправленности) в $\{g_s\}_{s \in S \subseteq \mathfrak{S}}$ найдётся элемент $\widetilde{\gamma}$, длина соответствующей которому сети $\widetilde{\Gamma}$ не больше $|\widetilde{\Gamma}_1|$.

Рассмотрим $\widetilde{\gamma}$ и соответствующую ему сеть $\widetilde{\Gamma}$. Пусть $|\widetilde{\Gamma}| + \delta = |\overline{\Gamma}|$ при некотором $\delta > 0$. Тогда найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $\widetilde{\gamma} \notin U(\overline{\gamma}, \varepsilon)$. Действительно, для каждого $\gamma \in U(\overline{\gamma}, \varepsilon)$ верно неравенство $|\Gamma| \geq (1-\varepsilon)|\overline{\Gamma}| - 2N\varepsilon$, при некотором $\varepsilon > 0$ несовместное с равенством $|\widetilde{\Gamma}| + \delta = |\overline{\Gamma}|$.

По определению сходящейся направленности для указанного ε существуют такие элемент $\gamma_0 = \gamma_0(\varepsilon)$ и соответствующая ему сеть Γ_0, что все $\gamma \in \{g_s\}_{s\in S}$ с условием $|\Gamma| \leq |\Gamma_0|$ попадают в $U(\overline{\gamma}, \varepsilon)$. Для $\gamma_0 \in U(\overline{\gamma}, \varepsilon)$ выполнено неравенство $|\Gamma_0| \geq (1-\varepsilon)|\overline{\Gamma}| - 2N\varepsilon > |\overline{\Gamma}| - \delta = \widetilde{\Gamma}$, то есть $|\widetilde{\Gamma}| < |\Gamma_0|$, что влечёт $\widetilde{\gamma} \in U(\overline{\gamma}, \varepsilon)$.

Полученное противоречие доказывает отсутствие элемента $\widetilde{\gamma}_1 \in \{\gamma_t\}_{t\in\mathcal{S}}$, соответствующая которому сеть $\widetilde{\Gamma}_1$ имеет длину меньше $\overline{\Gamma}$.

Таким образом, в X^{**} существует кратчайшая сеть $\overline{\Gamma}$ данного типа.

Подействовав на $\overline{\Gamma}$ проектором P из условия, получим сеть в пространстве X с длиной, не превосходящей $|\overline{\Gamma}|$. Таким образом, в пространстве X для каждого типа есть кратчайшая сеть. В силу леммы А при поиске кратчайшей сети можно ограничиваться конечным числом различных типов, поэтому существует кратчайшая сеть.

Теорема доказана.

Пространства, предуальные к L_1 (в частности, пространства непрерывных функций на хаусдорфовом компакте), не охватываются теоремой 1.1. Далее из теоремы 1.4 будет выведено, что в этих пространствах кратчайшая сеть также существует для любого конечного набора точек — см. следствие 1.1.

§2. Пространства со свойством 3.2.I.P.

Напомним, что банахово пространство X обладает свойством 3.2.I.P., если всякие 3 попарно пересекающихся замкнутых шара в X имеют непустое пересечение.

Конечномерные банаховы пространства со свойством 3.2.I.P. полностью описаны в работе [44]: это пространства, получаемые из одномерных последовательным применением операций l_1- и l_∞-суммирования (из пары пространств X и Y образуется прямая сумма $X \oplus Y$ с нормой $\|x\| + \|y\|$ или

$\max\{\|x\|, \|y\|\}$ соответственно). Единичные шары таких пространств называются многогранниками Ханнера.

Теорема 1.2. *Пусть X — действительное банахово пространство. Следующие свойства эквивалентны:*
(1) X реализует минимальное заполнение для всякой тройки своих точек;
(2) для всякой тройки $a, b, c \in X$ множество $\mathrm{st}(\{a, b, c\}, X)$ непусто и $|\mathrm{st}|(\{a, b, c\}, X) = \frac{1}{2}P(a, b, c)$;
(3) для всякой тройки $a, b, c \in X$ пересечение $m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$ непусто;
(4) X обладает свойством 3.2.I.P.
При этом во всяком таком пространстве X для всякой тройки точек выполнено равенство $\mathrm{st}(\{a, b, c\}, X) = m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$.

Эквивалентность утверждений (3) и (4) фактически доказывалась в [53, Теорема 3.2].

Доказательство. Утверждение (1) $\Longrightarrow$ (2) следует из отмечавшихся выше (во Введении) структуры кратчайшей сети и формулы (0.1) длины минимального заполнения для трехточечных множеств.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Если $s \in \mathrm{st}(\{a, b, c\}, X)$ и $\|s-a\|+\|s-b\|+\|s-c\| = \frac{1}{2}P(a, b, c)$, то в каждом из неравенств $\|s-a\|+\|s-b\| \geq \|a-b\|$, $\|s-b\|+\|s-c\| \geq \|b-c\|$, $\|s-c\|+\|s-a\| \geq \|c-a\|$ должно быть равенство, то есть $s \in m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Пусть $B(a, r_a)$, $B(b, r_b)$, $B(c, r_c)$ — три попарно пересекающихся шара в X. Возьмем какую-нибудь точку $s \in m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$. Сеть $\Gamma = [a, s] \cup [b, s] \cup [c, s]$ обладает тем свойством, что расстояние вдоль этой сети между любыми двумя ее точками x, y равно $\|x - y\|$. Поэтому множества $B(a, r_a) \cap \Gamma$, $B(b, r_b) \cap \Gamma$ и $B(c, r_c) \cap \Gamma$ связны и попарно пересекаются. Следовательно (например, по теореме Хелли), эти множества имеют общую

точку, а значит, и исходные шары имеют общую точку.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $x_1, x_2, x_3 \in X$. Положим

$$r_i = \frac{1}{2}\big(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|\big), i = 1, 2, 3, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Поскольку $r_i + r_j = \|x_i - x_j\|$, шары $B(x_i, r_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ попарно пересекаются, а значит, имеют общую точку s. Длина сети $\cup_{i=1}^{3}[x_i, s]$ не превосходит $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{1}{2}P(x_1, x_2, x_3) = |\mathrm{mf}|(\{x_1, x_2, x_3\})$, то есть X реализует минимальное заполнение для $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Пусть действительное банахово пространство X обладает свойством 3.2.$I.P$. Тогда для всякого четырехточечного множества $M_4 \subset X$ справедливо равенство*

$$|\mathrm{smt}|(M_4, X) = \frac{1}{2}\big(|\mathrm{st}|(M_4, X) + \min(M_4)\big), \tag{1.1}$$

где $\min(M_4)$ *определяется так же, как в (0.2).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем точку $s \in X$ со свойством $\sum_{k=1}^{4} \|x_k - s\| < |\mathrm{st}|(M_4, X) + \varepsilon$. Без ограничения общности считаем, что $\min(M_4) = \|x_1 - x_2\| + \|x_3 - x_4\|$. Рассмотрим какие-нибудь $s' \in \mathrm{st}(\{x_1, x_2, s\}, X)$ и $s'' \in \mathrm{st}(\{x_3, x_4, s\}, X)$. Тогда сеть, состоящая из отрезков $[x_1, s'], [x_2, s'], [s', s], [s, s''], [s'', x_3], [s'', x_4]$, соединяет M_4 и имеет длину

$$\frac{1}{2}P(x_1, x_2, s) + \frac{1}{2}P(x_3, x_4, s) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{4} \|x_k - s\| + \|x_1 - x_2\| + \|x_3 - x_4\|\right)$$
$$< \frac{1}{2}\big(|\mathrm{st}|(M_4, X) + \varepsilon + \min(M_4)\big).$$

Отсюда в силу произвольности ε получаем знак "$\leq$" в формуле (1.1).

Пусть теперь сеть-дерево Γ соединяет M_4 в X, и $|\Gamma| < |\mathrm{smt}|(M_4, X) + \varepsilon$. Возьмем на Γ точку s так, чтобы она разбила Γ на два поддерева Γ_1 и Γ_2,

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{s\}$, каждое из которых содержало бы ровно две точки из M_4. Пусть, скажем, Γ_1 содержит x_i и x_j, а Γ_2 содержит x_l и x_m. Тогда

$$|\mathrm{smt}|(M_4, X) + \varepsilon > |\Gamma| = |\Gamma_1| + |\Gamma_2| \geq |\mathrm{st}|\big(\{x_i, x_j, s\}, X\big) + |\mathrm{st}|\big(\{x_l, x_m, s\}, X\big)$$

$$= \frac{1}{2}P(x_i, x_j, s) + \frac{1}{2}P(x_l, x_m, s) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{4} \|x_k - s\| + \|x_i - x_j\| + \|x_l - x_m\|\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\big(|\mathrm{st}|(M_4, X) + \min(M_4)\big).$$

Отсюда в силу произвольности ε получаем знак "$\geq$" в (1.1).

Теорема доказана.

Из теоремы 1.3 и формулы (0.2) минимального заполнения для 4-точечного метрического пространства следует, что банахово пространство X со свойством 3.2.I.P., вообще говоря, не реализует минимальные заполнения для четверок своих точек. Приведем соответствующий пример в пространстве $\mathbf{l}_1^3$, которое обладает свойством 3.2.I.P. (см. замечание в начале параграфа).

Пример 1.1. В пространстве l_1^3 для множества

$$M_4 = \big\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\big\}$$

имеет место равенство $|\mathrm{smt}|(M_4, l_1^3) = \frac{5}{4}|\mathrm{mf}|(M_4)$.

Доказательство. Все попарные расстояния в этом множестве M_4 равны 2, поэтому по формуле (0.2) получаем $|\mathrm{mf}|(M_4) = \frac{1}{2}(4+4) = 4$. Множество $\mathrm{st}(M_4, l_1^3)$ состоит из всех точек (t_1, t_2, t_3), для которых $t_j \in [0,1]$, поэтому $|\mathrm{st}|(M_4, l_1^3) = 6$, и по теореме 1.3 получаем $|\mathrm{smt}|(M_4, l_1^3) = \frac{1}{2}(6+4) = 5$.

Доказательство окончено.

Интересно, что для четверки $\widetilde{M_4} \subset l_1^3$, состоящей из точек $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ и изометричной указанной в примере 1.1 четверке M_4 (все попарные расстояния также равны 2), имеет место равенство $|\mathrm{smt}|(\widetilde{M}_4, l_1^3) = |\mathrm{mf}|(\widetilde{M}_4) = 4$, то есть минимальное заполнение реализуется.

§3. Пространства, реализующие минимальные заполнения

Банаховы пространства, обладающие свойством 3.2.I.P., составляют класс более широкий, чем класс предуальных к L_1 пространств (см. теорему A во Введении). Типичные примеры пространств со свойством 3.2.I.P., не предуальных к L_1 (то есть не обладающих свойством 4.2.I.P.) представляют собой различные виды пространств L_1: $L_1[0,1]$ (пространство действительнозначных функций, интегрируемых по Лебегу на отрезке), l_1^n (n-мерное действительное пространство с нормой $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$) при $n \geq 3$, l_1 (пространство суммируемых последовательностей). Эта типичность проявляется в следующем утверждении, которое нам понадобится.

Теорема E (Лима [53, следствие 4.5]). *Пусть действительное банахово пространство X обладает свойством 3.2.I.P., но не обладает свойством 4.2.I.P. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся линейное вложение $A : l_1^3 \to X$, для которого $\|x\|_{l_1^3} \leq \|Ax\|_X \leq (1+\varepsilon)\|x\|_{l_1^3}$, $x \in l_1^3$, и линейный проектор $P : X \to A(l_1^3)$ с $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$.*

Кроме того, нам понадобится

Теорема F ([26]). *Всякое предуальное к L_1 пространство X обладает следующим свойством: если $a_1, \dots, a_n \in X$ и замкнутые шары $B^{**}(a_i, r_i) = \{x \in X^{**} : \|x - a_i\|_{X^{**}} \leq r_i\}$ имеют непустое пересечение в X^{**}, то шары $B(a_i, r_i) = \{x \in X : \|x - a_i\|_X \leq r_i\}$ имеют непустое пересечение в X.*

Напомним, что банахово пространство реализует минимальное заполнение для своего конечного подмножества M, если M соединяется кратчайшей сетью в X и $|\mathrm{smt}|(M) = |\mathrm{mf}|(M)$ (см. Введение).

Теорема 1.4. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*
(1) *X реализует минимальное заполнение для всякого конечного набора своих точек;*
(2) *X реализует минимальное заполнение для всякого набора из 4 своих точек;*
(3) *X предуально к L_1.*

Доказательство. Утверждение (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Пространство X реализует минимальное заполнение для всякой тройки своих точек (всякую тройку можно считать четверкой с двумя склеенными точками). По теореме 1.2 пространство X обладает свойством 3.2.I.P.

Предположим, что X не обладает свойством 4.2.I.P. Тогда по теореме E для всякого $\varepsilon > 0$ найдется линейное вложение $A : l_1^3 \to X$ со свойствами

$$\|x\|_{l_1^3} \le \|Ax\|_X \le (1+\varepsilon)\|x\|_{l_1^3}, \quad x \in l_1^3,$$

и линейный проектор $P : X \to A(l_1^3)$ с $\|P\| \le 1+\varepsilon$.

Возьмем в l_1^3 4-точечное множество M_4 из примера 1.1. По условию множество $A(M_4)$ соединяется в X кратчайшей сетью Γ, длина которой $|\Gamma| = |\mathrm{mf}|(A(M_4)) \le (1+\varepsilon)|\mathrm{mf}|(M_4)$ (из формулы (0.2) и свойств оператора A). Тогда сеть $P(\Gamma)$ затягивает $A(M_4)$ в $A(l_1^3)$ и имеет длину не более чем $(1+\varepsilon)|\Gamma| \le (1+\varepsilon)^2|\mathrm{mf}|(M_4)$. В таком случае сеть $A^{-1}(P(\Gamma))$, соединяющая M_4 в само́м l_1^3, имеет длину также не больше чем $(1+\varepsilon)^2|\mathrm{mf}|(M_4)$. Но

$$|A^{-1}(P(\Gamma))| \ge |\mathrm{smt}|(M_4, l_1^3) = \frac{5}{4}|\mathrm{mf}|(M_4),$$

и при $(1+\varepsilon)^2 < \frac{5}{4}$ получается противоречие.

$(3) \Longrightarrow (1)$. Пусть X предуально к L_1. Докажем индукцией по $n \geq 3$, что X реализует минимальные заполнения для всякого набора из n своих точек. Для $n = 3$ это верно, поскольку X обладает свойством 3.2.I.P.

Пусть $n \geq 4$, X реализует минимальное заполнение для всякого $(n-1)-$точечного своего подмножества и $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$. Возьмем какое-нибудь минимальное заполнение $\Gamma_0 \in \mathrm{mf}(M)$.

Нам понадобится

Лемма 1.1 (о склейке метрических пространств). *Пусть два метрических пространства (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) как множества имеют непустую общую часть $X_1 \cap X_2$, на которой метрики ρ_1 и ρ_2 совпадают, причем $X_1 \cap X_2$ полно относительно этой метрики. Тогда существует метрика на $X_1 \cup X_2$, сужение которой на X_k совпадает с ρ_k, $k = 1, 2$.*

Эта лемма без условия полноты $X_1 \cap X_2$ и для полуметрик вместо метрик следует из упражнения 3.1.13 книги [6].

Искомая метрика на $X_1 \cup X_2$ определяется так: $\rho(x_1, x_2) := \rho_k(x_1, x_2)$ при $x_1, x_2 \in X_k$ $(k = 1, 2)$ и

$$\rho(x_1, x_2) := \inf\{\rho_1(x_1, z) + \rho_2(z, x_2) : z \in X_1 \cap X_2\}$$

при $x_1 \in X_1 \setminus X_2$ и $x_2 \in X_2 \setminus X_1$. Новые расстояния, определяемые этой формулой, положительны в силу полноты $X_1 \cap X_2$, а неравенства треугольников для треугольников, содержащих эти новые расстояния, нетрудно проверить.

Продолжим доказательство теоремы.

По лемме 1.1 на $X^{**} \cup \Gamma_0$ можно так определить метрику, что все расстояния внутри X^{**} и внутри Γ_0 сохранятся. Вложим полученное метрическое пространство $X^{**} \cup \Gamma_0$ изометрично в какое-нибудь универсальное банахово пространство C. При этом X^{**} вкладывается линейно по теореме Мазура–

Улама. По теореме A пространство X^{**} 1-дополняемо в C, так что сеть $\Gamma_0 \subset C$ можно спроектировать в сеть $\Gamma \subset X^{**}$, соединяющую множество M в X^{**} и имеющую ту же длину $|\mathrm{mf}|(M)$ (меньше длина сети уже не может стать).

На дереве Γ возьмем точку p, разбивающую его на два дерева Γ_1 и Γ_2 ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{p\}$), каждое из которых содержит не более $n-2$ точек из M. Положим $M_i = M \cap \Gamma_i, i = 1, 2$.

В пространстве X^{**} рассмотрим замкнутые шары с центрами $x_k \in M$ и радиусами $\|x_k - p\|_{X^{**}}$. Эти шары имеют непустое пересечение в X^{**} (точка p лежит в каждом из них), следовательно, по теореме F они имеют общую точку $p' \in X$.

По индуктивному предположению X реализует $\mathrm{mf}(M_1 \cup \{p'\})$ в виде сети Γ_1', длина которой равна $|\mathrm{mf}|(M_1 \cup \{p'\}) \leq |\mathrm{mf}|(M_1 \cup \{p\}) = |\Gamma_1|$ (поскольку все расстояния во множестве $M_1 \cup \{p'\}$ не больше соответствующих расстояний во множестве $M_1 \cup \{p\}$). Аналогично, X реализует сеть $\Gamma_2' \in \mathrm{mf}(M_2 \cup \{p'\})$ и $|\Gamma_2'| \leq |\Gamma_2|$. Отсюда $|\Gamma_1' \cup \Gamma_2'| \leq |\Gamma_1 \cup \Gamma_2| = |\Gamma| = |\mathrm{mf}|(M)$, и, следовательно, X реализует минимальное заполнение для множества M.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *В пространстве $C(Q)$ действительнозначных функций, непрерывных на хаусдорфовом компакте Q, для любого конечного множества $M \subset C(Q)$ существует кратчайшая сеть.*

Глава II. Сети типа звезды

§1. Минимальные заполнения типа звезды

Напомним (см. Введение), что банахово пространство X реализует минимальное заполнение типа звезды для конечного набора M своих точек, если в X существует точка Штейнера для M и $|\mathrm{st}|(M, X) = |\mathrm{st}|(M)$.

Теорема 2.1. *Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*

(1) *X реализует минимальное заполнение типа звезды для всякого конечного набора своих точек;*

(2) *X реализует минимальное заполнение типа звезды для всех троек и четверок своих точек;*

(3) *X предуально к L_1.*

Эта теорема аналогична теореме B о чебышевских центрах (см. Введение).

Доказательство. Утверждение (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Пусть $M_4 = \{a, b, c, d\} \subset X$, $s \in \mathrm{st}(M_4, X)$. Для четырехточечных метрических пространств M_4 нетрудно показать, что $|\mathrm{st}|(M_4)$ совпадает с определенной в формуле (0.2) величиной $\max(M_4)$. По условию $|\mathrm{st}|(M_4, X) = \max(M_4) = \|a - b\| + \|c - d\|$ (последнее равенство — без ограничения общности). Пусть $\min(M_4) = \|a - c\| + \|b - d\|$. Возьмем какие-нибудь $s_1 \in \mathrm{st}(\{a, c, s\}, X)$ и $s_2 \in \mathrm{st}(\{b, d, s\}, X)$. Тогда сеть $[a, s_1] \cup [c, s_1] \cup [s_1, s] \cup [s, s_2] \cup [s_2, b] \cup [s_2, d]$ соединяет M_4 в X и имеет длину

$$|\mathrm{st}|(\{a, c, s\}, X) + |\mathrm{st}|(\{b, d, s\}, X) = \frac{1}{2}\big(P(a, c, s) + P(b, d, s)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(\|a - c\| + \|b - d\| + |\mathrm{st}|(M_4, X)\big) = \frac{1}{2}\big(\min(M_4) + \max(M_4)\big)$$

(первое равенство — в силу того, что X реализует минимальное заполнение типа звезды для всех троек). Таким образом, в силу формулы (0.2) X реализует минимальное заполнение для всякой четверки своих точек, и по теореме 1.4 X предуально к L_1.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Пусть X предуально к L_1 и $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное конечное множество в X. Возьмем какое-нибудь минимальное заполнение $\Gamma_0 \in \mathrm{st}(M)$ типа звезды.

По лемме 1.1 на $X^{**} \cup \Gamma_0$ можно так определить метрику, что все расстояния внутри X^{**} и внутри Γ_0 сохранятся. Вложим метрическое пространство $X^{**} \cup \Gamma_0$ изометрично в какое-нибудь универсальное банахово пространство C. При этом X^{**} вкладывается линейно по теореме Мазура–Улама. Пространство X^{**} 1-дополняемо в C, так что сеть $\Gamma_0 \subset C$ можно спроектировать в сеть $\Gamma \subset X^{**}$, соединяющую M в X^{**} и имеющую ту же длину $|\mathrm{st}|(M)$. Сеть Γ представляет собой объединение отрезков $[x_k, s]$, где s — некоторая точка из X^{**}.

Замкнутые шары с центрами x_k и радиусами $\|x_k - s\|_{X^{**}}$ имеют общую точку s в X^{**}, а значит, по теореме F они имеют общую точку $s' \in X$. Сеть $\Gamma' = \cup_{k=1}^{n} [x_k, s']$ типа звезды соединяет M в X и имеет длину не больше, чем $\sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = |\mathrm{st}|(M)$. Следовательно, X реализует минимальное заполнение типа звезды для M.

Теорема доказана.

§2. Характеризация пространства L_1 в терминах точек Штейнера

Среди действительных банаховых пространств, обладающих свойством 3.2.I.P., пространства $L_1(\mu)$ выделяется тем, что в каждом из них для всякой тройки точек точка Штейнера единственна. В самом деле, множество

$\mathrm{st}(\{f_1, f_2, f_3\}, L_1(E, \Sigma, \mu))$ состоит из единственной функции s, *средней* для функций f_1, f_2, f_3 (для почти всех $t \in E$ значение $s(t)$ является средним из значений $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$). Оказывается, это свойство единственности точки Штейнера характеризует пространства $L_1(\mu)$ в классе пространств из теоремы 1.2.

Теорема 2.2. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*
(1) *для всяких трех точек $a, b, c \in X$ существует и единственна точка $s = \mathrm{st}(a, b, c)$, для которой выполнено равенство*

$$\|s - a\| + \|s - b\| + \|s - c\| = \frac{1}{2}P(a, b, c);$$

(2) *для всяких трех точек $a, b, c \in X$ пересечение $m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$ одноточечно;*
(3) *X изометрически изоморфно некоторому пространству $L_1(\mu)$.*

Теорема 2.2 может быть (нетривиально) сведена к следствию 3.8 работы [53]. Мы приведем прямое

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) доказывается так же, как в теореме 1.2. Импликация (3) $\Longrightarrow$ (1) уже отмечалась выше (перед теоремой).

Для доказательства (1) $\Longrightarrow$ (3) покажем, что при условии (1) пространство X удовлетворяет условиям следующего утверждения, характеризующего пространство L_1 в классе банаховых решеток.

Теорема G (Какутани [50], см. также [55, гл. 1, § b]) *Пусть X — банахова решетка со свойством*

$$x, y \in X, x \wedge y = 0 \Longrightarrow \|x + y\| = \|x\| + \|y\|. \tag{2.1}$$

Тогда X изометрически изоморфно (с сохранением порядка) некоторому *пространству* $L_1(\mu)$.

Для сведе́ния теоремы 2.2 к теореме G надо сделать из нашего пространства X банахову решетку, то есть ввести на X частичный порядок, удовлетворяющий аксиомам (см., например, [55, гл. 1, § a]):

a) из $x \leq y$ следует $x + z \leq y + z$ для всех $x, y, z \in X$;

b) если вектор $x \geq 0$ и число $\lambda \geq 0$, то $\lambda x \geq 0$;

c) для всяких $x, y \in X$ существует точная верхняя грань $x \vee y$ ($x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$ и для любого z с $z \geq x$, $z \geq y$ выполнено $z \geq x \vee y$); из существования $x \vee y$ вытекает и существование точной нижней грани $x \wedge y$, которая определяется аналогично и участвует в свойстве (2.1) в теореме G ;

d) из $|x| \leq |y|$ следует $\|x\| \leq \|y\|$ (здесь $|x| := x \vee (-x)$).

Кроме того, вводимый порядок должен удовлетворять условию (2.1) теоремы G.

Возьмем функционал $f_0 \in S(X_0^*)$, грань $J(f_0) = \{x : f_0(x) = 1\} \cap S(X)$ которого максимальна (то есть не существует такого функционала $f_0 \in S(X_0^*)$, что его грань $J(f)$ содержит $J(f_0)$ как собственное подмножество; существование функционалов с максимальной гранью нетрудно доказать с помощью леммы Цорна).

Введем на X частичный порядок:

$$x \geq y \iff f_0(x - y) = \|x - y\|.$$

Для этого порядка аксиомы a) и b) банаховой решетки очевидно выполняются. Свойство (2.1) из теоремы G также выполнено: при $x, y \geq 0$ (что слабее, чем $x \wedge y = 0$) имеем $\|x + y\| \geq f_0(x + y) = f_0(x) + f_0(y) = \|x\| + \|y\|$, что вместе с неравенством треугольника дает равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

Осталось проверить аксиомы c) и d).

Лемма 2.1. *Для всякого* $x \in X$ *существует и единствен такой элемент*

x^+, *что* $x^+ \geq 0$, $x^+ \in m[0,x]$ *и*

$$\|x^+\| = \sup\{\|u\| : u \geq 0, u \in m[0,x]\} =: p(x).$$

Доказательство. Возьмем два элемента $u, v \in m[0,x]$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Пусть $w = st(x, u+v, 0)$. Имеем $w \in m[0,x]$ и $w \geq 0$ (поскольку $w \in m[0, u+v]$ и $u + v \geq 0$).

Пусть $w' = st(x, u+v, u)$. Докажем, что $w = w'$.

Во-первых, $w' \in m[x, u+v]$ в силу своего определения.

Во-вторых,

$$\|w'\| + \|w' - x\| = \|w'\| + \|x - u\| - \|u - w'\| = \|w'\| + \|x\| - \|u\| - \|u - w'\|$$
$$\leq \|w'\| + \|x\| - \|w'\| = \|x\|,$$

откуда $w' \in m[0,x]$.

В-третьих, из $w' \in m[u, u+v]$ и $u \in m[0, u+v]$ следует $w' \in m[0, u+v]$.

Итак, $w' \in m[x, u+v] \cap m[0,x] \cap m[0, u+v]$, то есть $w' = st(0, u+v, x) = w$ (именно здесь используется единственность точки Штейнера).

Из доказанного равенства $w = w'$ следует, что $w \in m[u, u+v]$, откуда $w \geq u$.

Аналогично доказывается, что $w \geq v$.

Таким образом, $w \in m[0,x]$, $w \geq 0$, $w \geq u$, $w \geq v$. Следовательно,

$$\|u - v\| \leq \|w - u\| + \|w - v\| = \|w\| - \|u\| + \|w\| - \|v\| \leq 2p(x) - \|u\| - \|v\|.$$

Это неравенство показывает, что всякая последовательность $u_n \in X$ со свойствами $u_n \geq 0$, $u_n \in m[0,x]$, $\|u_n\| \to p(x)$ фундаментальна и сходится к искомому элементу x^+.

Лемма доказана.

Положим $x^- = -(-x)^+$. Нетрудно видеть, что $x^- \leq 0$ и $x^- \in m[0,x]$, и что x^- имеет наибольшую норму среди всех векторов u со свойствами $u \leq 0$, $u \in m[0,x]$.

Лемма 2.2. *Для всякого вектора $x \in X$ справедливо равенство*

$$\|x\| = \|x^+\| + \|x^-\| + \|x - x^+ - x^-\|.$$

Доказательство. Пусть $a = st(x^+, x^-, x)$. Из $a \in m[x^-, x]$ следует, что $a - x^- \in m[0,x]$, а из $a \in m[x^-, x^+]$ следует, что $a - x^- \geq 0$. Таким образом,

$$\|a - x^-\| \leq \|x^+\|. \tag{2.2}$$

Аналогично доказывается, что

$$\|a - x^+\| \leq \|x^-\|. \tag{2.3}$$

Отсюда

$$\|x^+\| + \|x^-\| = \|x^+ - x^-\| \leq \|a - x^+\| + \|a - x^-\| \leq \|x^-\| + \|x^+\|,$$

так что в (2.2) и (2.3) имеем равенства.

Поскольку $a - x^- \geq 0$, $a - x^- \in m[0,x]$ и $\|a - x^-\| = \|x^+\| = p(x)$, по лемме 2.1 получаем $a - x^- = x^+$, а поскольку еще $a \in m[x^+, x]$, имеем

$$\|x\| = \|x^+\| + \|x - x^+\| = \|x^+\| + \|a - x^+\| + \|x - a\| = \|x^+\| + \|x^-\| + \|x - x^+ - x^-\|.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь, что $x = x^+ + x^-$ для всякого $x \in X$.

Пусть для какого-то $x = x^+ + x^- + x_0$ имеем $x_0 \neq 0$.

Возьмем произвольный элемент $a \geq 0$ и положим $v = st(x_0, a, 0)$. Имеем $v \in [0,a]$, откуда $v \geq 0$. Из включения $v \in m[0, x_0]$ и леммы 2.2 получаем

$$\|x\| = \|x_0\| + \|x^+\| + \|x - x_0 - x^+\| = \|v\| + \|x_0 - v\| + \|x^+\| + \|x - x_0 - x^+\|$$

$$\geq \|v\| + \|x^+\| + \|x - x^+ - v\| = \|v + x^+\| + \|x - (v + x^+)\|,$$

т.е. $v + x^+ \in [0, x]$. Кроме того, $v + x^+ \geq 0$, так что по определению x^+ имеем $\|x^+\| = p(x) \geq \|x^+ + v\| = \|x^+\| + \|v\|$, откуда $v = 0$.

Поскольку $v \in m[x_0, a]$ и $v = 0$, имеем

$$\|x_0 - a\| = \|x_0\| + \|a\|. \tag{2.4}$$

Аналогично доказывается, что для всякого $a \geq 0$ справедливо равенство

$$\|x_0 + a\| = \|x_0\| + \|a\|. \tag{2.5}$$

Из (2.4), в частности, следует, что единичный вектор $s = x_0/\|x_0\|$ не лежит в грани $J(f_0)$ функционала f_0 (иначе для $a = x_0$ в (2.4) получим $0 = 2\|x_0\|$).

Покажем, что вектор x_0 (а значит, и вектор s) не лежит в замыкании линейного подпространства

$$Y_0 = \{a - b : a, b \in X, a \geq 0, b \geq 0\}.$$

Действительно,

$$\|x_0 - (a - b)\| \geq \max\bigl\{\|x_0 - a\| - \|b\|, \|x_0 + b\| - \|a\|\bigr\}$$

$$= \max\bigl\{\|x_0\| + \|a\| - \|b\|, \|x_0\| + \|b\| - \|a\|\bigr\} = \|x_0\| + \bigl|\|a\| - \|b\|\bigr| \geq \|x_0\|$$

(в первом равенстве использованы равенства (2.4) и (2.5)).

На линейном подпространстве

$$Y = \{u + \lambda s : u \in Y_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

определим функционал f_1 равенством $f_1(u + \lambda s) = f_0(u) + \lambda$. Для всякого $y = a - b + \lambda s \in Y$, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$, имеем

$$|f_1(y)| = |f_0(a) - f_0(b) + \lambda| = \bigl|\|a\| - \|b\| + \lambda\bigr| \leq \bigl|\|a\| - \|b\|\bigr| + |\lambda| \leq \|y\|$$

— поскольку, например, при $\|a\| \geq \|b\|$ в силу (2.4) и (2.5) имеем

$$\big|\|a\| - \|b\|\big| + |\lambda| = \|a\| + |\lambda| - \|b\| = \|a + \lambda s\| - \|b\| \leq \|a - b + \lambda s\| = \|y\|.$$

Таким образом, норма функционала f_1 в Y^* равна 1. Продолжив функционал f_1 без увеличения нормы на все пространство X по теореме Хана–Банаха, получим функционал нормы 1, опорная грань которого на сфере $S(X)$ содержит грань $J(f_0)$ и еще вектор s, что противоречит максимальности грани $J(f_0)$.

Итак, $x = x^+ + x^-$ для всякого $x \in X$.

Положим

$$|x| = x^+ - x^-, \qquad x \vee y = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$$

и проверим оставшиеся аксиомы c) и d) банаховой решетки (равенство $|x| = x \vee (-x)$ для так определенных операций $|\cdot|$ и $\vee$, очевидно, выполнено).

Имеем

$$\big\||x|\big\| = f_0\big(|x|\big) = f_0(x^+) - f_0(x^-) = \|x^+\| + \|x^-\| = \|x\| \tag{2.6}$$

(последнее равенство по лемме 2.2), откуда следует справедливость аксиомы d:

$$|x| \leq |y| \Longrightarrow \|x\| = \big\||x|\big\| \leq \big\||y|\big\| = \|y\|.$$

Далее, если какой-то элемент $z \in X$ удовлетворяет неравенствам $z \geq x$, $z \geq y$ и $z \leq x \vee y$, то

$$(z - x) + (z - y) \leq 2(x \vee y) - x - y = |x - y|, \tag{2.7}$$

откуда $\|z-x\|+\|z-y\| = f_0\big((z-x)+(z-y)\big) \leq f_0\big(|x-y|\big) = \big\||x-y|\big\| = \|x-y\|$ (последнее равенство — в силу (2.6)), что вместе с неравенством треугольника дает равенство в (2.7), а значит, и равенство $z = x \vee y$. Таким образом, определенный выше элемент $x \vee y$ — действительно точная верхняя грань.

Теорема доказана.

§3. Точки Штейнера в пространстве C

Пусть $C[Q]$ — пространство непрерывных функций на фаусдорфовом компакте Q. В этом параграфе описываются множества точек Штейнера для каждой тройки $f_1, f_2, f_3 \in C[Q]$. Существование точек Штейнера для троек функций в пространстве C доказано в работе [61].

Напомним,что $\mathrm{rba}(Q)$ обозначает сопряженное к $C[Q]$ линейное пространство, состоящее из регулярных ограниченных аддитивных функций (мер) множества, определенных на алгебре, порожденной замкнутыми множествами. Нормой меры $\mu \in \mathrm{rba}(Q)$ является ее полная вариация [9, гл. 4, § 6].

Основным инструментом для исследования (относительных) точек Штейнера является следующая хорошо известная

Лемма B ([21], [5]). *Пусть Y — замкнутое линейное подпространство банахова пространства X и $x_1, \ldots, x_n \in X$. Элемент $y_0 \in Y$ принадлежит множеству $P_Y(x_1, \ldots, x_n) = \{z \in Y : \sum_{j=1}^n \|x_j - z\| = \inf_{z \in Y} \sum_{j=1}^n \|x_j - z\|\}$ тогда и только тогда, когда найдутся такие функционалы $f_1, \ldots, f_n \in X^*$, что*

1) $\sum_{j=1}^n f_j \in Y^\perp$;

2) $\max \|f_j\| = 1$;

3) $f_j(x_j - y_0) = \|x_j - y_0\|$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Последнее равенство означает, что либо $\|f_j\| = 1$, либо $x_j = y_0$.

В [21] доказано более общее утверждение: вместо линейного подпространства рассматривается выпуклое множество Y, вместо суммы расстояний минимизируется сумма расстояний с неотрицательными весами. В то же время эта лемма является обобщением хорошо известного критерия элемента наилучшего приближения для случая $n = 1$ [59].

В случае $Y = X$ в лемме B вместо $P_Y(x_1, \ldots, x_n)$ получается $\mathrm{st}(x_1, \ldots, x_n)$, а условие 1) выглядит как $\sum_{j=1}^{n} f_j = 0$. Для пространства $C[Q]$ сформулируем явно

Лемма B'. *Пусть* $f_1, \dots, f_n \in C[Q]$. *Элемент* $g \in C[Q]$ *принадлежит множеству* $\mathrm{st}(f_1, \dots, f_n)$ *тогда и только тогда, когда найдутся такие функционалы* $F_1, \dots, F_n \in \mathrm{rba}(Q)$, *что*
1) $\sum_{j=1}^{n} F_j = 0$;
2) $\max \|F_j\| = 1$;
3) $F_j(f_j - g) = \|f_j - g\|$ $(j = 1, \dots, n)$.

Рассмотрим такие две необязательно непрерывные функции f и g, что $f(t) \le g(t)$ для любого $t \in Q$. Напомним, что интервалом $[\![f; g]\!]$ в $C[Q]$ называется (см. [41], а также [7]) множество

$$[\![f; g]\!] = \{h \in C[Q] : \forall t \in Q \ h(t) \in [f(t); g(t)]\}.$$

Теорема 2.3. *Пусть* $f_1, f_2, f_3 \in C[Q]$.

(1) *Функция* $s \in \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$ *тогда и только тогда, когда для любых* $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \ne j$, *найдется такая точка* $t = t_{ij} \in Q$, *что* $f_i - s$ *и* $f_j - s$ *достигают в* t *своих норм с противоположным знаком.*

(2) *Множество* $\mathrm{st}(f_1, f_2, f_3) = \bigcap_{i=1}^{3} [\![f_i - r_i, f_i + r_i]\!] \ne \varnothing$, *где* $r_i =: \frac{1}{2}(\|f_j - f_i\| + \|f_k - f_i\| - \|f_k - f_j\|)$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. (1). Заметим, что $\mathrm{st}(f_1, f_2, f_3) - g = \mathrm{st}(f_1 - g, f_2 - g, f_3 - g)$. Поэтому без ограничения общности считаем, что $0 \in \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$.

Необходимость. При совпадении всех функций $f_1 = f_2 = f_3$ единственная точка Штейнера совпадает с f_1, поэтому $0 = s = f_1$, и утверждение (1) верно.

При совпадении двух функций $f_1 = f_2$ единственная точка Штейнера также совпадает с f_1, ибо $\|f_3 - s\| + 2\|f_1 - s\| \ge \|f_3 - f_1\| + \|f_1 - s\| \ge \|f_3 - f_1\|$, поэтому $0 = s = f_1$, и (1) верно.

При различных f_i по лемме B' найдутся такие $F_1, F_2, F_3 \in \mathrm{rba}(Q)$, что $\max \|F_j\| = 1, F_1 + F_2 + F_3 = 0, F_i(f_i) = \|f_i\|, i = 1, 2, 3$. Пусть $F_i = F_i^+ + F_i^-$ — разложение Хана меры F_i, $A_i^\pm$ — носители $F_i^\pm$ соответственно. Если $f_i \neq 0$, то функционал F_i достигает нормы на f_i, откуда $A_i^+ \subseteq \{t \in Q : f_i(t) = \|f_i\|\}$, $A_i^- \subseteq \{t \in Q : f_i(t) = -\|f_i\|\}$, так что $A_i^+ \cap A_i^- = \varnothing$.

По крайней мере у двух функционалов из F_1, F_2, F_3 норма равна 1 по лемме B' (точка Штейнера может совпадать лишь с одной из функций).

Предположим, что $\|F_i\| > 0$ для любого $i = 1, 2, 3$. Пусть, например, для пары $i = 1, j = 3$ не выполнено условие теоремы, т.е. функции f_1 и f_3 не достигают одновременно своих норм с разными знаками ни в какой точке $t \in Q$. Следовательно, $A_1^+ \cap A_3^- = \varnothing$ и $A_1^- \cap A_3^+ = \varnothing$.

Из того, что $F_1 = -(F_2 + F_3)$, следует, что $A_1^- \subset A_2^+ \cup A_3^+$, к тому же и $A_1^- \cap A_3^+ = \varnothing$, поэтому $A_1^- \subset A_2^+$, и аналогично $A_3^- \subset A_2^+$. Тогда $A_2^+ \supset A_1^- \cup A_3^-$. Но, так как $F_2 = -(F_1 + F_3)$, имеем $A_2^+ \subset A_1^- \cup A_3^-$. Таким образом, $A_2^+ = A_1^- \cup A_3^-$. Аналогично $A_2^- = A_1^+ \cup A_3^+$. Отсюда $F_2^+ = -(F_1^- + F_3^-), F_2^- = -(F_1^+ + F_3^+)$, и $\|F_2\| = \|F_2^+\| + \|F_2^-\| = \|F_3^-\| + \|F_1^-\| + \|F_3^+\| + \|F_1^+\| = \|F_1\| + \|F_3\| > 1$ (поскольку хотя бы одно из чисел $\|F_1\|$ и $\|F_3\|$ равно 1, а другое положительно), что противоречит неравенству $\|F_2\| \leq 1$.

Если же одно из чисел $\|F_i\| = 0$, скажем $\|F_1\| = 0$, то по лемме B' имеем $f_1 = s = 0$. Тогда $F_2 = -F_3$. Возьмем точку t из общего носителя F_2 и F_3. Пусть для определенности $t \in A_2^+ = A_3^-$. Поскольку $f_2(t) = \|f_2\|$ и $f_3(t) = -\|f_3\|$ для любого $t \in A_2^+ = A_3^-$, то это и есть искомая точка t_{23} и она же подойдет в качестве t_{13} и t_{12}.

Достаточность. Возьмем произвольную функцию $g \in C[Q]$. Существует такая точка $t = t_{12} \in Q$, что $f_1(t) \cdot f_2(t) = -\|f_1\| \cdot \|f_2\|$. Имеем $\|g - f_1\| + \|g - f_2\| \geq |(g - f_1)(t)| + |(g - f_2)(t)| \geq |(f_1 - f_2)(t)| = \|f_1\| + \|f_2\|$. Аналогичные точки $t_{23}, t_{13} \in Q$ найдутся для пар f_2, f_3 и f_1, f_3 соответственно (точки t_{ij}

могут совпадать). Тогда $\|g-f_1\|+\|g-f_2\|+\|g-f_3\| = \frac{1}{2}(\|g-f_1\|+\|g-f_2\|)+\frac{1}{2}(\|g-f_1\|+\|g-f_3\|)+\frac{1}{2}(\|g-f_2\|+\|g-f_3\|) \geq \frac{1}{2}(\|f_1\|+\|f_2\|)+\frac{1}{2}(\|f_1\|+\|f_3\|)+\frac{1}{2}(\|f_2\|+\|f_3\|) = \|f_1\|+\|f_2\|+\|f_3\|$. Следовательно, $s = 0 \in \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$.

Утверждение (2) сразу следует из теоремы 2.1. Приведём более простое доказательство.

Покажем, что любая функция $s \in \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$ лежит в пересечении указанных интервалов. Согласно п. (1), существует точка $t_{ij} \in Q : (f_i - s)(t_{ij}) \cdot (f_j - s)(t_{ij}) = -\|f_i - s\| \cdot \|f_j - s\|$. Тогда $|(f_i - f_j)(t_{ij})| = \|f_i - s\| + \|f_j - s\| \geq \|f_i - f_j\|$, и, следовательно, $|(f_i - f_j)(t_{ij})| = \|f_i - f_j\| = \|f_i - s\| + \|f_j - s\|$. Отсюда

$$\|f_i - s\| = \frac{\|f_j - f_i\| + \|f_k - f_i\| - \|f_j - f_k\|}{2} = r_i,$$

$i = 1, 2, 3, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Поэтому $s(t) \in [f_i(t) - r_i; f_i(t) + r_i]$ для любого $t \in Q$, т.е. $s \in [\![f_i - r_i, f_i + r_i]\!]$.

Докажем, что $\cap_{i=1}^{3} [\![f_i - r_i, f_i + r_i]\!] \neq \varnothing$.

Для любой пары функций f_i, f_j и любого $t \in Q$ имеем

$$\left[\begin{array}{l} f_i(t) - r_i \leq f_j(t) - r_j \leq f_i(t) + r_i, \\ f_j(t) - r_j \leq f_i(t) - r_i \leq f_j(t) + r_j \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} r_j - r_i \leq (f_j - f_i)(t) \leq r_i + r_j \leq \|f_j - f_i\|, \\ r_i - r_j \leq (f_i - f_j)(t) \leq r_i + r_j \leq \|f_i - f_j\| \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} r_j - r_i \leq (f_j - f_i)(t) \leq \|f_j - f_i\|, \\ -\|f_i - f_j\| \leq (f_j - f_i)(t) \leq r_j - r_i. \end{array}\right.$$

В последней совокупности одно из двойных неравенств верно. Таким образом, при каждом $t \in Q$ любые два из отрезков $[f_i(t)-r_i; f_i(t)+r_i]$ пересекаются, а значит, все эти три отрезка имеют непустое пересечение и это пересечение непрерывно зависит от t. Следовательно, пересечение $\cap_{i=1}^{3} [\![f_i-r_i, f_i+r_i]\!]$ всегда не пусто.

Покажем, что любая функция $s \in \bigcap_{i=1}^{3} [\![f_i - r_i, f_i + r_i]\!]$ принадлежит множеству точек Штейнера $\mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$.

Нетрудно видеть, что $\|s - f_i\| \le r_i$. Для любой пары $i, j \in \{1, 2, 3\}$ существует такая точка $t \in Q$, что $f_i(t) - f_j(t) = \pm\|f_i - f_j\|$. В точке t пересечение отрезков $[f_i(t) - r_i; f_i(t) + r_i] \cap [f_j(t) - r_j; f_j(t) + r_j]$ одноточечно, так как $r_i + r_j = \|f_i - f_j\|$. В точке t функция s однозначно определена и равна либо $f_i(t) - r_i = f_j(t) + r_j$, либо $f_i(t) + r_i = f_j(t) - r_j$. Поэтому s удовлетворяет условиям п. (1).

Теорема доказана.

Установим еще несколько свойств множеств $\mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$ в пространстве $C[Q]$.

Теорема 2.4. *Множество* $\mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$ *состоит из единственной функции* s *тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

(1) *для каждого* $t \in Q$ *найдется такая пара функций* f_i, f_j, *что* $|f_i(t) - f_j(t)| = \|f_i - f_j\|$ *(и при этом* $s(t) = f_a(t) + r_a$, *где* $a = a(t)$ *таково, что* $f_a(t) = \min\{f_i(t), f_j(t)\}$*);*

(2) *для некоторого* $i \in \{1, 2, 3\}$ *справедливо равенство* $\|f_j - f_k\| = \|f_i - f_j\| + \|f_i - f_k\|$ *(и при этом* $s = f_i$*).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $s \in \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$ единственна, тогда три отрезка $[f_i(t) - r_i; f_i(t) + r_i], i = 1, 2, 3,$ для любого $t \in Q$ пересекаются в одной точке.

Если существует такое $j \in \{1, 2, 3\}$, что $r_j = \|f_j - s\| = 0$, тогда выполнен случай (2).

Если не существует такого $l \in \{1, 2, 3\}$, что $r_l = \|f_l - s\| = 0$, то в каждой точке t выполнено одно из равенств $f_i(t) \pm r_i = f_j(t) \mp r_j$ для некоторых i, j. Тогда $(f_i - f_j)(t) = \mp(r_i + r_j) = \mp\|f_i - f_j\|$, $s(t) = f_a(t) + r_a$, где $a = a(t)$ таково, что $f_a(t) = \min\{f_i(t), f_j(t)\}$, т.е. выполнен случай (1).

Достаточность. Пусть выполнен случай (1). Так как для любого $t \in Q$ найдутся такие i, j, что $|f_i(t) - f_j(t)| = \|f_i - f_j\| = r_i + r_j$, то пересечение отрезков $[f_i(t) - r_i; f_i(t) + r_i], [f_j(t) - r_j; f_j(t) + r_j]$ есть точка, и $\cap_{i=1}^{3} [\![f_i - r_i, f_i + r_i]\!]$ состоит из единственной функции.

Пусть выполнен случай (2). Если для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$ справедливо равенство $\|f_j - f_k\| = \|f_i - f_j\| + \|f_i - f_k\|$, то $r_i = 0$, и, согласно п. (2) теоремы 2.3, $f_i \in \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$ — единственная точка Штейнера.

Теорема доказана.

Лемма 2.3. *Для функций f_1, f_2, s найдется точка $t \in Q$, в которой $(f_1 - s)(t) \cdot (f_2 - s)(t) = -\|f_1 - s\| \cdot \|f_2 - s\|$, тогда и только тогда, когда $\|f_1 - s\| + \|f_2 - s\| = \|f_1 - f_2\|$.*

Доказательство. *Необходимость.* Имеем $|(f_1 - f_2)(t)| = \|f_1 - s\| + \|f_2 - s\| \geq \|f_1 - f_2\|$, и, следовательно, $|(f_1 - f_2)(t)| = \|f_1 - f_2\| = \|f_1 - s\| + \|f_2 - s\|$.

Достаточность. Рассмотрим точку $t_0 \in Q$, в которой $|(f_1 - f_2)(t_0)| = \|f_1 - f_2\|$. Если в ней не достигается хотя бы одна из норм $\|f_1 - s\|, \|f_2 - s\|$, то $\|f_1 - f_2\| < \|f_1 - s\| + \|f_2 - s\|$, что противоречит условию. Значит, в точке t_0 обе функции $f_1 - s$ и $f_2 - s$ достигают норм, причем с разными знаками.

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Всякая функция $s \in \mathrm{St}(f_1, f_2, 0)$ достигает нормы во всех точках t, в которых достигает нормы хотя бы одна из функций $f_i, i = 1, 2$, причем знаки $s(t)$ и $f_i(t)$ совпадают.*

Действительно, по теореме 1 для любого $i = 1, 2$ найдется точка $t_i \in Q$, в которой $f_i - s$ и $-s$ достигают норм с противоположными знаками. При этом $\|f_i\| = \|f_i - s\| + \|s\|$ по лемме 2.3. Поэтому во всех точках, где f_i достигает нормы, s достигает нормы с тем же знаком.

Лемма 2.5. *Для функций f_1, f_2 найдется точка $t \in Q$, в которой $f_1(t) \cdot f_2(t) = -\|f_1\| \cdot \|f_2\|$, тогда и только тогда, когда $\mathrm{St}(f_1, f_2, 0) = \{0\}$.*

Действительно, по лемме 2.3 существование указанной точки t равносильно равенству $\|f_1 - f_2\| = \|f_1\| + \|f_2\|$, что в свою очередь в силу теоремы 1 равносильно равенству $r_3 = \|s - 0\| = \frac{1}{2} \cdot (\|f_1\| + \|f_2\| - \|f_1 - f_2\|) = 0$ для любого $s \in \mathrm{St}(f_1, f_2, 0)$.

В связи с теоремой 2.3 естественно возникает вопрос о существовании хорошей выборки из многозначного отображения $\mathrm{st} : (f_1, f_2, f_3) \to \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3) = [\![\max\limits_{1\le i\le 3}(f_i - r_i), \min\limits_{1\le i\le 3}(f_i + r_i)]\!]$. Оказывается, что существует липшицева выборка $V : (C[Q])^3 \to C[Q]$ из этого отображения.

Теорема 2.5. *Отображение* $V(f_1, f_2, f_3)(t) = \min\{f_1(t) + r_1, f_2(t) + r_2, f_3(t) + r_3\}$ *является липшицевой выборкой из отображения* st (*здесь* $r_i = r_i(f_1, f_2, f_3)$ — *числа из условия теоремы 2.3*). *При этом в случае метрического пространства* Q *модуль непрерывности функции* V *удовлетворяет неравенству* $\omega(V, \delta) \le \max\limits_{i=1,2,3} \omega(f_i, \delta)$, $\delta > 0$.

Доказательство. То, что отображение V — выборка из st, следует из теоремы 2.3.

Докажем липшицевость. Возьмем две тройки непрерывных функций (f_1, f_2, f_3), (g_1, g_2, g_3) и соответствующие им точки Штейнера $s(t) = \min\{f_1(t)+r_1, f_2(t)+r_2, f_3(t)+r_3\}$, $q(t) = \min\{g_1(t)+r_1', g_2(t)+r_2', g_3(t)+r_3'\}$. В каждой фиксированной точке $t \in Q$ оценим разность $s(t) - q(t)$. Для этого рассмотрим случаи.

(a) Допустим, что $s(t) = f_i(t) + r_i$ и $q(t) = g_i(t) + r_i'$. Тогда

$$|s(t) - q(t)| =$$

$$= \frac{1}{2}\big|2f_i(t) - 2g_i(t) + \|f_j - f_i\| + \|f_k - f_i\| - \|f_k - f_j\| - \|g_j - g_i\| - \|g_k - g_i\| + \|g_k - g_j\|\big| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\big(2\|f_i - g_i\| + \big|\|f_j - f_i\| - \|g_j - g_i\|\big| + \big|\|f_k - f_i\| - \|g_k - g_i\|\big| + \big|\|f_k - f_j\| - \|g_k - g_j\|\big|\big). \tag{2.8}$$

Заметим, что

$$\big|\|f_n - f_m\| - \|g_n - g_m\|\big| \le$$
$$\le \big|\|f_n - g_n\| + \|g_n - g_m\| + \|f_m - g_m\| - \|g_n - g_m\|\big| =$$
$$= \|f_n - g_n\| + \|f_m - g_m\|.$$

Тогда

$$|s(t)-q(t)| \le 2\|f_i-g_i\|+\|f_j-g_j\|+\|f_k-g_k\| \le 2(\|f_1-g_1\|+\|f_2-g_2\|+\|f_3-g_3\|). \tag{2.9}$$

(б) Пусть теперь $s(t) = f_i(t)+r_i$ и $q(t) = g_j(t)+r_j^{'}$, $i \ne j$. Без ограничения общности считаем, что $\max\{f_i(t)+r_i, g_j(t)+r_j^{'}\} = f_i(t)+r_i$. Поскольку $f_i(t)+r_i \le f_j(t)+r_j$ и $|s(t)-q(t)| = f_i(t)+r_i-g_j(t)-r_j^{'} \le f_j(t)+r_j-g_j(t)-r_j^{'}$, то последнее выражение в силу неравенств (2.8) и (2.9) не превосходит $2(\|f_1 - g_1\| + \|f_2 - g_2\| + \|f_3 - g_3\|)$.

Докажем утверждение касательно модуля непрерывности. Возьмем две точки $a, b \in Q$ с $\rho(a,b) \le \delta$. Без ограничения общности $V(b) \ge V(a)$. Пусть, скажем, $\min\limits_i (f_i + r_i)(a) = f_1(a) + r_1$. Имеем $|V(b) - V(a)| = V(b) - V(a) \le f_1(b) + r_1 - (f_1(a) + r_1) = f_1(b) - f_1(a) \le \omega(f_1, \delta)$, что и требовалось.

Теорема доказана.

Можно ставить вопросы о существовании других выборок из отображения st, сохраняющих какие-либо структурные свойства функций f_1, f_2, f_3.

Приведем пример такой тройки $f_1, f_2, f_3 \in C[-1,1]$ многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$, что ни одна точка Штейнера этой тройки не является многочленом степени не выше n. Рассмотрим четное $n = 2k$, где $k > 3$ и не кратно двум, и $f_1(t) = T_n(t)$, $f_2(t) = T_{n-4}(t)$, $f_3 \equiv 0$ на отрезке $[-1;1]$, где $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ — многочлен Чебышева степени n. У функций f_1 и f_2 нет точки, где они одновременно достигают нормы с разными знаками. Поэтому по утверждению (1) теоремы 2.3 имеем $0 \notin \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$. По лемме

2.4 количество глобальных экстремумов у любой функции $s \in \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$ не меньше $n+1+n-3-3 = 2n-5$. Здесь $n+1$ и $n-3$ — число точек экстремума у T_n и T_{n-4} соответственно, а в трех точках $t = -1, 0, 1$ эти многочлены равны друг другу и достигают нормы. Поскольку $2n-5 > n+1$ при $n > 6$, любая функция $s \in \mathrm{st}(f_1, f_2, f_3)$ не является многочленом степени не выше n.

§4. Некоторые дополнения

Интересно описать все (для начала хотя бы двумерные) банаховы пространства X, в которых для всяких $a, b, c \in X$ величина $|\mathrm{st}|(\{a, b, c\}, X)$ зависит только от длин сторон треугольника abc. В класс пространств, обладающих указанным в этой задаче свойством, заведомо входят пространства, предуальные к L_1, а также гильбертовы (евклидовы) пространства. Приведем пример двумерного пространства, не обладающего таким свойством.

Пример 2.1 двумерного банахова пространства X_2, в котором есть два треугольника T и T' с попарно равными сторонами, но $|\mathrm{st}|(T, X_2) \neq |\mathrm{st}|(T', X_2)$.

Возьмем двумерное пространство X_2, единичная сфера в котором — правильный шестиугольник (см. рис. 1). Пусть $T = \{\frac{a-c}{2}, \frac{c-a}{2}, b\}$ (светлые точки на рисунке), $T' = \{a, -a, \frac{b+c}{2}\}$ (темные точки).

Нетрудно показать, что в каждом из этих треугольников длины сторон равны $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2$. Для треугольника T пространство X_2 реализует минимальное заполнение с вершиной $\frac{b}{2}$:

$$\left\|\frac{b}{2} - b\right\| + \left\|\frac{b}{2} - \frac{a-c}{2}\right\| + \left\|\frac{b}{2} - \frac{c-a}{2}\right\| = \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{1}{2}P(T).$$

Если бы у треугольника T' также реализовывалось минимальное заполнение, то в X_2 нашлась бы такая точка p, что $\|p-a\| = \|p+a\| = (2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2})/2 = 1$

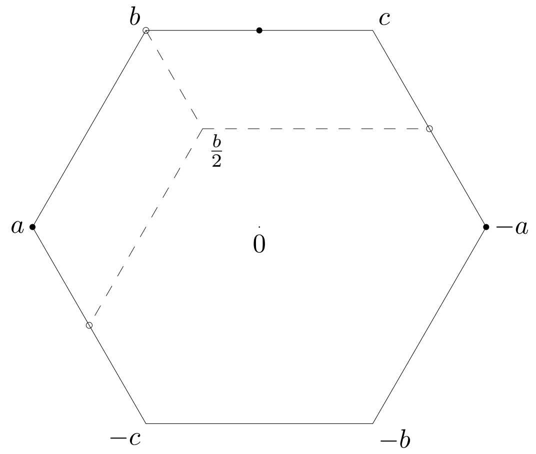

Рис. 1:

и $\|p - \frac{a+c}{2}\| = (\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 1)/2 = \frac{1}{2}$. Но первые равенства означают, что $p = 0$, а расстояние от $\frac{a+c}{2}$ до 0 равно 1.

Таким образом, $|\mathrm{smt}|(T', X_2) > \frac{5}{2} = |\mathrm{mf}|(T') = |\mathrm{smt}|(T, X_2)$.

Можно показать, что $\mathrm{st}(T', X_2) \ni 0$, то есть $|\mathrm{smt}|(T', X_2) = 3$.

Рассмотрение примера закончено.

В связи с теоремой 1.4 возникает естественный вопрос: во сколько раз величина $|\mathrm{smt}|(M, X)$ может быть больше величины $|\mathrm{mf}|(M)$ для какого-либо конечного множества M в банаховом пространстве X? Оказывается, не более чем в 2 раза. В работе [13] введено *суботношение Штейнера*

$$\mathrm{ssr}(X) = \inf\left\{\frac{|\mathrm{mf}|(M)}{|\mathrm{smt}|(M, X)} : M\text{— конечное неодноточечное подмножество в } X\right\}$$

метрического пространства X. В работе [19] показано, что для всякого метрического пространства X справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \le \mathrm{ssr}(X) \le 1. \tag{2.10}$$

В этой терминологии теорема 1.4 описывает банаховы пространства X с $\mathrm{ssr}(X) = 1$ и дополнительным условием существования кратчайших сетей у всех конечных подмножеств.

Правое неравенство в (2.10) очевидно, а левое доказывается достаточно просто. Для всякого X и $M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ всякая сеть–дерево $\Gamma \in \mathrm{mf}(M)$ имеет обход, при котором каждое ребро в Γ проходится по 2 раза. В этом обходе длина каждой ломаной от вершины x_i до следующей за ней (в порядке обхода) вершины x_j не меньше $\|x_i - x_j\|$. Если L — замкнутая ломаная в X с вершинами только в точках x_k, обходящая эти точки в том же порядке, то получается, что

$$2|\mathrm{mf}|(M) = 2|\Gamma| \geq |L| \geq |\mathrm{smt}|(M, X),$$

откуда и следует левое неравенство в (2.10).

В связи с этим возникает вопрос: существует ли банахово пространство X с $\mathrm{ssr}(X) = 1/2$?

Покажем, что это равенство не может выполняться для банаховых пространств малых размерностей.

Пусть M — конечное подмножество банахова пространства X размерности d. Возьмем какое-нибудь минимальное заполнение $\Gamma_0 \in \mathrm{mf}(M)$.

По лемме 1.1 на $X \cup \Gamma_0$ можно так определить метрику, что все расстояния внутри X и внутри Γ_0 сохранятся. Вложим полученное метрическое пространство $X \cup \Gamma_0$ изометрично в какое-нибудь универсальное банахово пространство C. Существует линейный проектор $P : C \to X$ нормы не больше абсолютной проекционной константы λ_d. Сеть $P(\Gamma_0)$ соединяет множество M в X и имеет длину не больше $\lambda_d|\Gamma_0|$. Таким образом,

$$|\mathrm{mf}|(M) = |\Gamma_0| \geq |P(\Gamma_0)|/\lambda_d \geq |\mathrm{smt}|(M, X)/\lambda_d,$$

откуда $\mathrm{ssr}(X) \geq 1/\lambda_d$. Известно [52], что $\lambda_2 = 4/3$, $\lambda_3 \leq (\sqrt{5} + 1)/2$, $\lambda_4 \leq (3\sqrt{6} + 2)/5$. Эти три числа меньше 2, поэтому для всех не более чем четырехмерных пространств X получается $\mathrm{ssr}(X) > 1/2$.

Было бы интересно вычислить величины $\operatorname{ssr}(d) := \inf\{\operatorname{ssr}(X) : \dim X = d\}$. Так, уже можно отметить неравенства

$$\frac{3}{4} \le \operatorname{ssr}(2) \le \frac{5}{6}, \qquad \frac{2}{\sqrt{5}+1} \le \operatorname{ssr}(3) \le \frac{4}{5}.$$

Левые неравенства здесь только что доказаны, а правые получаются из примеров 2.1 и 1.1 соответственно.

Глава III. $N-$антипроксиминальные множества

Рассмотрим банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ и непустое множество M в нём. Для точки $x \in X$ определим метрическую проекцию $P_M(x) = \{y \in M : \|x-y\| = \rho(x, M)\}$, где $\rho(x, M) = \inf_{z\in M} \|x-z\|$. Множество M называется *антипроксиминальным*, если для любой точки $x \in X \setminus M$ во множестве M нет ближайшей точки, то есть $P_M(x) = \emptyset$.

В работе [5] для точек $x_1, \ldots, x_n \in X$ определена метрическая $n-$проекция $P_M(x_1, \ldots, x_n) = \{y \in M : \sum_{i=1}^n \|x_i - y\| = \rho(x_1, \ldots, x_n, M)\}$, где $\rho(x_1, \ldots, x_n, M) = \inf_{z\in M} \sum_{i=1}^n \|x_i - z\|$, и поставлен вопрос об исследовании $n-$антипроксиминальных множеств. Введём следующее

Определение. Непустое множество M назовём $n-$*антипроксиминальным*, если для любых таких $x_1, \ldots, x_n \in X$, что $\rho(x_1, \ldots, x_n, M) > \rho(x_1, \ldots, x_n, X)$, выполнено $P_M(x_1, \ldots, x_n) \setminus \{x_i\}_{i=1}^n = \emptyset$.

Геометрически свойство множества M быть антипроксиминальным означает, что для любой точки $x \in X \setminus M$ замкнутый шар $B(x, \rho(x, M))$ не имеет с M общих точек. Аналогично $n-$антипроксиминальность означает, что для любых точек $x_1, \ldots, x_n \in X$ с условием $\rho(x_1, \ldots, x_n, M) > \rho(x_1, \ldots, x_n, X)$ замкнутый $n-$*шар* $B(x_1, \ldots, x_n, \rho(x_1, \ldots, x_n, M)) = \{y \in X : \sum_{k=1}^n \|y - x_k\| \leq \rho(x_1, \ldots, x_n, M)\}$ не имеет с M общих точек, кроме, быть может, x_i.

При $n = 1$ $n-$антипроксиминальное множество есть в точности антипроксиминальное множество. Действительно, неравенство $\rho(x_1, \ldots, x_n, M) > \rho(x_1, \ldots, x_n, X)$ становится неравенством $\rho(x, M) > \rho(x, X)$, что эквивалентно условию $x \notin M$, и условие $P_M(x) \setminus \{x\} = \emptyset$ выполнено для антипроксиминального множества M.

Неравенство $\rho(x_1, \ldots, x_n, M) > \rho(x_1, \ldots, x_n, X)$ в определении означает, что метрическая проекция $P_M(x_1, \ldots, x_n)$ не пересекается со множеством точек Штейнера $P_X(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{st}(x_1, \dots, x_n)$. Если это условие убрать, то определение потеряет смысл: при $n = 2$ для всякого непустого множества $M \neq X$ можно найти такие две точки x_1, x_2, что интервал (x_1, x_2) пересекает M; тогда $P_M(x_1, x_2) \setminus \{x_1, x_2\} \supset (x_1, x_2) \cap M$, и получится, что $2-$антипроксиминальных выпуклых множеств вообще нет.

Если же условие $P_M(x_1, \dots, x_n) \setminus \{x_i\}_{i=1}^n = \emptyset$ заменить на $P_M(x_1, \dots, x_n) = \emptyset$, то получится более узкий класс $\mathcal{Z}_n(X)$ множеств в пространстве X, при $n = 1, 2$ совпадающий с уже введённым. Действительно, $(1-)$шар $B(x, \rho(x, M))$ и $2-$шар $B(x_1, x_2, \rho(x_1, x_2, M))$ содержат соответственно точки x и x_1, x_2 строго внутри себя (при условиях $\rho(x, M) > \rho(x, X) = 0$ и $\rho(x_1, x_2, M) > \rho(x_1, x_2, X) = \|x_1 - x_2\|$ соответственно), и если $P_M(x) \setminus \{x\} = \emptyset$ или $P_M(x_1, x_2) \setminus \{x_1, x_2\} = \emptyset$, то и $P_M(x) = \emptyset$ или $P_M(x_1, x_2) = \emptyset$ соответственно. При натуральном $n \geq 3$ класс $\mathcal{Z}_n(X)$ в любом банаховом пространстве X не содержит выпуклых замкнутых множеств (см. ниже утверждение 3.1), поэтому исследование этого класса $\mathcal{Z}_n(X)$ представляется бессодержательным.

§1. Вспомогательные результаты

Лемма 3.1. *Если множество M $n-$антипроксиминально, то для любого числа k — делителя n — множество M является $k-$антипроксиминальным. В частности, всякое $n-$антипроксиминальное множество антипроксиминально.*

Доказательство. При фиксированном $n = kl$ рассмотрим k точек $x_1, \dots, x_k \in X$ с условием $\rho(x_1, \dots, x_k, M) > \rho(x_1, \dots, x_k, X)$. Пусть $y_{pk+r} = x_r$ при каждом фиксированном натуральном числе $r \in \{1, \dots, k\}$ и каждом натуральном $p \in \{1, \dots, l-1\}$. Множества $P_M(y_1, \dots, y_n)$ и $P_M(x_1, \dots, x_k)$ одинаковы и, в силу $n-$антипроксиминальности множества

M, множество $P_M(y_1, \dots, y_n) \setminus \{y_i\}_{i=1}^n = P_M(x_1, \dots, x_k) \setminus \{x_i\}_{i=1}^k$ пусто, то есть M $k-$антипроксиминально.

Лемма доказана.

Функционал $f \in X^*$ называется *опорным* к выпуклому замкнутому множеству $A \subset X$, если найдётся такой элемент $x \in A$, что $f(x) = \sup\{f(z) : z \in A\}$ или $f(x) = \inf\{f(z) : z \in A\}$ (см., например, [16]). Функционал f, опорный к единичному шару $B(X)$ пространства X, достигает нормы на некотором ненулевом элементе $x \in X$, то есть $f(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. Единичную сферу пространства X обозначим $S(X)$.

Лемма C ([39], [1]). *Непустое выпуклое замкнутое множество $M \subset X$ антипроксиминально тогда и только тогда, когда любой ненулевой функционал, опорный к M, не является опорным к $B(X)$.*

В [39] эта лемма доказывалась при дополнительном условии ограниченности множества M.

Лемма 3.2. *Непустое выпуклое замкнутое множество $M \subset X$ $n-$антипроксиминально тогда и только тогда, когда для всякого опорного к M ненулевого функционала f не существует таких $f_1, \dots, f_n \in X^*$ и $x_1, \dots, x_n \in S(X)$, что:*

1) $f_1 + \dots + f_n = f$;

2) $\|f_1\| = \dots = \|f_n\| > 0$;

3) $f_k(x_k) = \|f_k\| \cdot \|x_k\|$, $k = 1, \dots, n$;

4) $0 \notin P_X(x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство. Если множество M не $n-$антипроксиминально, то существуют $x_1, \dots, x_n \in X$ с условием $\rho(x_1, \dots, x_n, M) > \rho(x_1, \dots, x_n, X)$, для которых найдётся $y_0 \in P_M(x_1, \dots, x_n)$, причём $y_0 \neq x_i$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Имеем $y_0 \in B(x_1, \dots, x_n, \rho(x_1, \dots, x_n, M)) \cap M$. Множества M

и $B := B(x_1, \dots, x_n, \rho(x_1, \dots, x_n, M))$ выпуклы и замкнуты. Множество B имеет непустую внутренность. По лемме об отделимости [45, § 3g], существует гиперплоскость $Y = \{x \in X : f(x) = f(y_0)\} \ni y_0$, разделяющая M и B. Ясно, что функционал f является опорным как к M, так и к B, и $y_0 \in P_Y(x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим подпространство $Y_0 = Y - y_0$. Для точек $x_1 - y_0, \dots, x_n - y_0$ множество $P_{Y_0}(x_1 - y_0, \dots, x_n - y_0)$ содержит точку 0. По лемме B из § 3 главы II найдутся такие функционалы $f_1, \dots, f_n \in X^*$, что $\sum f_j \in Y_0^{\perp} = \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\max \|f_j\| = 1$ и $f_j(x_j - y_0) = \|f_j\| \cdot \|x_j - y_0\|$, $j = 1, \dots, n$, причём все $\|x_j - y_0\|$ отличны от нуля, что эквивалентно раскладываемости функционала f в сумму n опорных к $B(X)$ функционалов одинаковой нормы. При этом точка $0 \notin P_X(x_1 - y_0, \dots, x_n - y_0)$, поскольку $y_0 \notin P_X(x_1, \dots, x_n)$.

Обратно, пусть для некоторого функционала f, опорного ко множеству M в точке z_0, существуют опорные к $B(X)$ функционалы $f_1, \dots, f_n \in X^*$ и точки $x_1, \dots, x_n \in S(X)$, удовлетворяющие условиям 1)-4). По лемме B из § 3 главы II в ядре Y функционала f для таких $x_1, \dots, x_n$ точка 0 является ближайшей, но не точкой Штейнера, то есть выполнено условие $\rho(x_1, \dots, x_n, Y) > \rho(x_1, \dots, x_n, X)$. Поэтому $n-$шар $B := B(x_1, \dots, x_n, \rho(x_1, \dots, x_n, Y))$ имеет непустую внутренность. Следовательно, $z_0 \in P_{Y+z_0}(x_1 + z_0, \dots, x_n + z_0)$. Так как либо $B + z_0$, либо $-B + z_0$ отделяется от M гиперплоскостью $Y + z_0$ и $\pm x_k + z_0 \neq z_0$, то множество M не $n-$антипроксиминально.

Утверждение 3.1. *Для всякого натурального $n \geq 3$ класс $\mathcal{Z}_n(X)$ в произвольном банаховом пространстве X не содержит выпуклых замкнутых множеств.*

Действительно, рассмотрим произвольный опорный функционал f, $\|f\| = 1$, к выпуклому замкнутому множеству $M \subset X$ в точке $y \in M$. По теореме Бишопа-Фелпса [10, глава 1] множество опорных к $B(X)$ функционалов плотно в X^*, поэтому найдётся такой опорный к $B(X)$ функционал g, что $\|f-g\| < 1/(n-1)$, $\|g\| = 1$. Возьмём такую точку $x \neq 0$, что $g(x) = \|x\|$. Точки $x_1 = \cdots = x_{n-1} = x$, $x_n = 0$ и функционалы $f_1 = \cdots = f_{n-1} = g/(n-1)$, $f_n = f - g$ удовлетворяют условию леммы B из §3 главы II, поэтому $P_{\mathrm{Ker}f}(x_1, \ldots, x_n) \ni 0$. Так как $n-$шар $B := B(x_1, \ldots, x_n, \rho(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Ker}f))$ имеет непустую внутренность, то либо $B + y$, либо $-B + y$ отделяется от M гиперплоскостью $\mathrm{Ker}f + y$, а значит, либо $P_M(x_1+y, \ldots, x_n+y) \ni y$, либо $P_M(-x_1+y, \ldots, -x_n+y) \ni y$. Поскольку $\rho(x_1+y, \ldots, x_n+y, M) = (n-1)\|x\| > \|x\| = \rho(x_1+y, \ldots, x_n+y, X)$, получаем $M \notin \mathcal{Z}_n(X)$.

§2. Пространства C

Теорема 3.1. *Пусть M — выпуклое замкнутое множество в пространстве $\mathbf{c_0}$, и $n \in \mathbb{N}$. Множество M $n-$антипроксиминально тогда и только тогда, когда M антипроксиминально.*

Доказательство. Напомним, что функционал $f \in \mathbf{c_0}^* = \mathbf{l_1}$ не является опорным к $B(\mathbf{c_0})$ тогда и только тогда, когда f имеет бесконечное число ненулевых координат.

Необходимость следует из леммы 3.1.

Докажем достаточность. По лемме C любой опорный к антипроксиминальному множеству M функционал f_0 не является опорным к $B(\mathbf{c_0})$. Ясно, что такой $f_0 \in \mathbf{c_0}^*$ не раскладывается в конечную сумму опорных к $B(\mathbf{c_0})$ функционалов, так как конечная сумма функционалов, у каждого из которых конечное число ненулевых координат, имеет конечное число ненулевых координат. Поэтому по лемме 3.2 множество M $n-$антипроксиминально для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

Антипроксиминальное выпуклое замкнутое ограниченное тело V, построенное Эдельштейном и Томпсоном [39] в пространстве $\mathbf{c_0}$, есть образ $T(B(\mathbf{c_0}))$ под действием обратимого линейного непрерывного оператора $T : \mathbf{c_0} \to \mathbf{c_0}$, для которого сопряжённый оператор T^* переводит всякий функционал, достигающий нормы, в функционал, не достигающий нормы.

Следствие 3.1. *Множество V из [39] $n-$антипроксиминально для любого натурального n.*

В связи с доказательством теоремы 3.1 интересно описать все банаховы пространства X, для которых множество функционалов, достигающих нормы, образует собственное линейное подпространство в X^*. Примером такого X является $\mathbf{c_0}$.

Пусть Q — хаусдорфов компакт, $C[Q]$ — пространство непрерывных функций на компакте Q. Напомним, что $C^*[Q] = \mathrm{rba}(Q)$ обозначает линейное пространство, состоящее из регулярных ограниченных аддитивных функций множества (мер), определенных на алгебре, порожденной замкнутыми множествами из Q. Нормой меры $\mu \in \mathrm{rba}(Q)$ является ее полная вариация [9, гл. 4, § 6].

Пусть $\mu^+ + \mu^- = \mu$ есть разложение Хана для функционала $\mu \in C^*[Q]$, $S = S(\mu)$ — его замкнутый носитель, $S^+(\mu) = S(\mu^+)$ и $S^-(\mu) = S(\mu^-)$. Напомним, что функционал $\mu \in \mathrm{rba}(Q)$ не достигает нормы тогда и только тогда, когда пересечение замкнутых множеств $S^+(\mu)$ и $S^-(\mu)$ не пусто (см., например, [59, гл. 1, § 1]). Обозначим δ_t, $t \in Q$, функционал означивания: $\delta_t(x) = x(t)$, $x \in C[Q]$.

Если компакт Q конечен, то пространство $C[Q]$ конечномерно, следовательно, рефлексивно. В таком пространстве нет выпуклых замкнутых антипроксиминальных множеств, а значит нет и выпуклых замкнутых $n-$антипроксиминальных множеств.

Теорема 3.2. *В пространстве* $C[Q]$ *непрерывных функций на бесконечном хаусдорфовом компакте* Q *1) антипроксимальность выпуклого замкнутого множества* M *эквивалентна его* $2-$*антипроксиминальности; 2) не существует выпуклых замкнутых ограниченных* $n-$*антипроксиминальных тел при* $n = 3, 4, \dots$.

Доказательство. 1) По лемме 3.1 из $2-$антипроксиминальности множества M следует его антипроксиминальность. Для доказательства $2-$антипроксиминальности выпуклого замкнутого антипроксиминального множества M рассмотрим функционал $\mu \in C^*[Q]$, опорный к этому множеству. По лемме C такой функционал не достигает нормы, то есть $S^+(\mu) \cap S^-(\mu) \neq \emptyset$. Пусть существуют такие опорные к $B(C[Q])$ функционалы μ_1, μ_2 одинаковой нормы, что $\mu_1 + \mu_2 = \mu$. Тогда точка $t \in S^+(\mu) \cap S^-(\mu)$ принадлежит либо множеству $S^+(\mu_1) \cap S^-(\mu_2)$, либо множеству $S^-(\mu_1) \cap S^+(\mu_2)$, и хотя бы одно из этих множеств не пусто. Это означает, что в точке t функции $x_1, x_2 \in C[Q]$, для которых $\mu_i(x_i) = \|\mu_i\| \cdot \|x_i\|$, $i = 1, 2$, достигают нормы с разными знаками, то есть $\|x_1\| + \|x_2\| = \|x_1 - x_2\|$ и $0 \in P_{C[Q]}(x_1, x_2)$. Поэтому разложение $\mu = \mu_1 + \mu_2$ не удовлетворяет условию 4) леммы 3.2, и множество M является $2-$антипроксиминальным.

2) Зафиксируем произвольную точку $t \in Q$ и натуральное число $n \geq 3$. По теореме Бишопа-Фелпса [10, глава 1] для произвольного выпуклого замкнутого ограниченного тела $M \subset C[Q]$ существует такой опорный к нему функционал $\mu \in C^*[Q]$, что $\|\mu\| = 1$ (в частности, $|\mu(\{t\})| \leq 1$) и $\|\mu - \delta_t\| < \frac{1}{n}$. Это означает, что если разложение Хана меры $\mu - \mu(\{t\})\delta_t$ есть $\tilde{\mu}^+ + \tilde{\mu}^-$, то $\|\mu - \delta_t\| = \|\tilde{\mu}^+\| + \|(\mu(\{t\}) - 1)\delta_t + \tilde{\mu}^-\| = \|\tilde{\mu}^+\| + 1 - \mu(\{t\}) + \|\tilde{\mu}^-\|$, то есть $0 \leq 1 - \mu(\{t\}) \leq \frac{1}{n}$, $\|\tilde{\mu}^-\| \leq \frac{1}{n}$. Значит, точка $t \in S^+(\mu)$ и $\|\mu^-\| = \|\tilde{\mu}^-\| \leq \frac{1}{n}$. Пусть $\nu_1 = \mu^- - \alpha\delta_t$, $\nu_2 = \dots = \nu_n = \frac{1}{n-1}\mu^+ + \frac{\alpha}{n-1}\delta_t$, где $\alpha = \frac{1-n\|\mu^-\|}{n-2}$. Заметим, что $\|\nu_1\| = \|\nu_2\|$, каждый из ν_i достигает нор-

мы и $\sum_{i=1}^n \nu_i = \mu$. Рассмотрим такие $x_1, x_2 = \dots = x_n =: s \in S(C[Q])$, что $\nu_k(x_k) = \|\nu_k\|$. Заметим, что $\sum_{i=1}^n \|x_i - s\| = \|x_1 - s\| \le 2 < n = \sum_{i=1}^n \|x_i - 0\|$, поэтому $0 \notin P_{C[Q]}(x_1, \dots, x_n)$. Поэтому по лемме 3.2 множество M не $n-$антипроксиминально.

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *В пространстве* $\mathbf{c}$ *нет выпуклых замкнутых* $n-$*антипроксиминальных множеств при* $n = 3, 4, \dots$.

Доказательство. Напомним, что функционал $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots) \in \mathbf{l_1} = \mathbf{c}^*$ (действие функционала f на вектор $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{c}$ задаётся формулой $f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k x_k + f_0 \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$) не достигает нормы на $B(\mathbf{c})$ тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из трёх условий: а) бесконечно множество как положительных координат f, так и отрицательных; б) бесконечно множество положительных координат и $f_0 < 0$; в) бесконечно множество отрицательных координат и $f_0 > 0$.

Рассмотрим функционал $f \in S(\mathbf{c}^*)$, не достигающий нормы. Без ограничения общности считаем, что $f_0 \ge 0$, следовательно, у функционала f бесконечное число отрицательных координат. Фиксируем $n \ge 3$. Рассмотрим такой функционал g, имеющий только отрицательные координаты, что $\|g\| \le 1/n$ и $f - g$ достигает нормы (то есть имеет конечное число отрицательных координат). Обозначим

$$\alpha := \frac{\|f-g\|/(n-1) - \|g\|}{n-2} > 0$$

и рассмотрим такую точку $t \in S^-(g)$, что $(f-g)(t) = 0$. Определим функционалы $g_1 = g - (n-1)\alpha\delta_t, g_k = (f-g)/(n-1) + \alpha\delta_t$, $k = 2, \dots, n$. Каждый из них достигает нормы; $\|g_1\| = \|g\| + (n-1)\alpha = \|f-g\|/(n-1) + \alpha = \|g_k\|, k = 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n g_i = f$. Рассмотрим такие $x_1, x_2 = \dots = x_n =: s \in S(\mathbf{c})$, что $g_k(x_k) = \|g_k\|$. Заметим, что $\sum_{i=1}^n \|x_i - s\| = \|x_1 - s\| \le 2 < n =$

$\sum_{i=1}^{n} \|x_i - 0\|$, поэтому $0 \notin P_{\mathbf{c}}(x_1, \dots, x_n)$. По лемме 3.2 множество $\mathrm{Ker} f$ не $n-$антипроксиминально.

Пусть M — выпуклое замкнутое множество в $\mathbf{c}$, f — ненулевой функционал, опорный к M. Если f достигает своей нормы, то M не антипроксиминально, а значит, и не $n-$антипроксиминально (леммы C и 3.1). Если же f не достигает нормы, то из приведённого выше разложения $f = g_1 + \dots + g_n$ в силу леммы 3.2 получаем, что M не $n-$антипроксиминально.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается отсутствие свойства $n-$антипроксиминальности у ядра любого не опорного к шару $B(C[Q])$ функционала μ, носитель которого имеет единственную предельную точку, при $n = 3, 4, \dots$.

Аналог теоремы 3.3 для произвольного пространства $C[Q]$ неверен, как показывает следующий

Пример 3.1. Гиперплоскость $\mathrm{Ker}\,\mu$ при $\|\mu^+\| = \|\mu^-\|$ и $S(\mu^+) \cap S(\mu^-) = [0, 1]$ в пространстве $C[0, 1]$ $3-$антипроксиминальна.

Доказательство. Пусть заданный функционал μ раскладывается в сумму трёх опорных к единичному шару функционалов: $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \mu$. Рассмотрим такие $x_1, x_2, x_3 \in B(C[0, 1])$, на которых ν_1, ν_2, ν_3 соответственно достигают нормы. По теореме 2.3 точка $0 \in P_{C[0,1]}(x_1, x_2, x_3)$ тогда и только тогда, когда найдутся три точки $t_{1,2}, t_{2,3}, t_{1,3} \in [0, 1]$, в которых соответствующие пары функций достигают нормы с противоположными знаками. Таким образом, в этих точках пересекаются носители соответствующих функционалов, причём с разными знаками. Назовём точку $t \in S$ граничной для замкнутого множества $S \subset [0, 1]$, если в любой открытой окрестности точки t есть точки, не принадлежащие S.

Докажем, что любая граничная точка носителя $S(\nu_i)$, $i = 1, 2, 3$, принадлежит носителю каждой из функций ν_1, ν_2, ν_3. При этом знаки двух носителей, содержащих эту точку, различны. Действительно, пусть t — граничная точка $S^+(\nu_1)$. Так как $t \in S^-(\mu)$ и $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \mu$, то $t \in S^-(\nu_1) \cup S^-(\nu_2) \cup S^-(\nu_3)$. Но функционал ν_1 достигает нормы, поэтому $t \in S^-(\nu_2) \cup S^-(\nu_3)$. Без ограничения общности, $t \in S^-(\nu_3)$. Рассмотрим точку $t' \in [0,1] \setminus S^+(\nu_1)$ из $\varepsilon-$окрестности точки t. Так как $t' \in S^+(\mu)$, то $t' \in S^+(\nu_2) \cup S^+(\nu_3)$. Устремляя ε к нулю получаем последовательность точек из замкнутого множества $S^+(\nu_2) \cup S^+(\nu_3)$, сходящуюся к t. Поэтому $t \in S^+(\nu_2) \cup S^+(\nu_3)$. Так как ν_3 достигает нормы и $t \in S^-(\nu_3)$, то $t \in S^+(\nu_2)$.

Если ни одной граничной точки у носителей $S(\nu_i)$, $i = 1, 2, 3$, нет, то, без ограничения общности считаем $S^-(\nu_3) = [0,1] = S^+(\nu_1) = S^+(\nu_2)$. Тогда $\nu_3 = \mu^- - \alpha$, $\nu_1 + \nu_2 = \mu^+ + \alpha$ при некоторой положительной мере α. В силу равенств $\|\nu_1 + \nu_2\| = \|\nu_1\| + \|\nu_2\| = \|\mu^+ + \alpha\| = \|\mu^- - \alpha\| = \|\nu_3\|$ получаем различные нормы у ν_i, что не удовлетворяет условию. Пусть, без ограничения общности, граничная точка $t \in S^+(\nu_1) \cap S^+(\nu_2) \cap S^-(\nu_3)$ (точка t играет роль точек $t_{1,3}$ и $t_{2,3}$ в терминах теоремы 2.3). Если множества $S^-(\nu_1)$ и $S^-(\nu_2)$ пусты, то также верно равенство $\|\nu_1\| + \|\nu_2\| = \|\nu_3\|$ и нормы у ν_i различны, что не удовлетворяет условию. Если же хотя бы одно из множеств $S^-(\nu_1)$, $S^-(\nu_2)$ не пусто, то найдётся его граничная точка из множества $S^-(\nu_3) \neq \emptyset$, которая и есть точка $t_{1,2}$. Действительно, если $S^-(\nu_3) = [0,1]$, то для граничной точки t_1 множества, без ограничения общности, $S^-(\nu_1)$, верно включение $t_1 \in S^-(\nu_3) \cap S^+(\nu_2)$, так как граничная точка принадлежит трём носителям одновременно. Если же множество $S^-(\nu_3)$ имеет граничную точку t_2, то эта точка граничная и для одного из множеств $S^-(\nu_1)$, $S^-(\nu_2)$. Поэтому t_2 принадлежит положительному носителю оставшегося функционала. Таким образом, для данных ν_1, ν_2, ν_3 и соответствующих им $x_1, x_2, x_3 \in B(C[0,1])$ точка $0 \in P_{C[0,1]}(x_1, x_2, x_3)$, то есть не выполнено условие 4) леммы 3.2. Доказательство завершено.

Заметим, что выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело V_1, построенное Кобзашем [16] в пространстве $\mathbf{c}$, $2-$антипроксиминально, но не $n-$антипроксиминально при $n \geq 3$ (множество V_1 строится из упоминавшегося выше множества V, построенного Эдельштейном и Томпсоном [39], при помощи изоморфизма пространств $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c_0}$). Заметим также, что выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело V_2, построенное Балаганским [1] в пространстве $C[Q]$, $2-$антипроксиминально, но не $n-$антипроксиминально при $n \geq 3$. Оба этих наблюдения сразу следуют из теоремы 3.2.

§3. Пространства L_1

Теорема 3.4. *Для пространства $L_1(E, \Sigma, \mu)$, сопряжённое к которому канонически изоморфно $L_\infty(E, \Sigma, \mu)$, в частности, для пространства $L_1(E, \Sigma, \mu)$ с $\sigma-$конечной мерой μ, верны следующие утверждения:*

1) антипроксиминальность выпуклого замкнутого множества M эквивалентна его $2-$антипроксиминальности;

2) не существует выпуклого замкнутого $n-$антипроксиминального множества при $n = 3, 4\ldots$;

3) если $\sigma-$алгебра Σ содержит хотя бы один атом относительно меры μ, то в пространстве $L_1(E, \Sigma, \mu)$ нет выпуклых замкнутых ограниченных $2-$антипроксиминальных множеств.

Получается, что вопрос о существовании выпуклого замкнутого ограниченного антипроксиминального тела в пространстве $L_1[0, 1]$ эквивалентен вопросу о существовании выпуклого замкнутого ограниченного $2-$антипроксиминального тела в этом пространстве и остаётся нерешённым.

Доказательство. Напомним, что функционалы $f \in L_\infty(E, \Sigma, \mu)$, которые не являются опорными к $B(L_1(E,\Sigma,\mu))$, характеризуются равенством $\mu(\{t\in E:|f(t)|=\|f\|\})=0$.

1) По лемме 3.1 из $2-$антипроксиминальности множества M следует его антипроксиминальность. Для доказательства $2-$антипроксиминальности выпуклого замкнутого антипроксиминального множества M рассмотрим функционал $f\in L_\infty$, опорный к этому множеству. По лемме C такой функционал не достигает нормы. Пусть существуют такие опорные к $B(L_1)$ функционалы f_1, f_2 одинаковой нормы, что $f_1+f_2=f$. Докажем, что для таких $x_1,x_2\in L_1$, что $f_i(x_i)=\|f_i\|\cdot\|x_i\|$, $i=1,2$, точка 0 является точкой Штейнера, то есть $\|x_1\|+\|x_2\|=\|x_1-x_2\|$. Заметим, что $x_i(t)\neq 0$ только в тех точках $t\in E$, где $|f_i(t)|=\|f_i\|$, причём в таких точках знаки $x_i(t)$ и $f_i(t)$ совпадают. Так как каждый из f_i достигает нормы, а их сумма — нет, то мера множества $\{t\in E: f_1(t)\cdot f_2(t)=\|f_1\|\cdot\|f_2\|\}$ равна нулю. Поэтому $\mu(\{t\in E: x_1(t)\cdot x_2(t)>0\})=0$, следовательно, $x_1(t)\cdot x_2(t)\leq 0$ для почти всех $t\in E$, и выполнено равенство $\|x_1\|+\|x_2\|=\|x_1-x_2\|$. Поэтому разложение любого не опорного к $B(L_1)$ функционала в сумму двух опорных не удовлетворяет условию 4) леммы 3.2, и множество M является $2-$антипроксиминальным.

2) Докажем, что любой не опорный к $B(L_1)$ единичный функционал f раскладывается в сумму $n\geq 3$ различных опорных к $B(L_1)$ функционалов. Без ограничения общности можем считать, что множество $U^+ := \{t\in E: f(t)\geq \|f\|-1/(n-1)\}$ имеет положительную меру. Тогда U^+ либо имеет непрерывную часть положительной меры, либо содержит бесконечное число атомов (так как $\mu(\{t\in E:|f(t)|=\|f\|\})=0$). В случае существования непрерывной части рассмотрим n непересекающихся множеств $U_1,\dots,U_n\subset U^+$ положительной меры. В случае бесконечного числа атомов во множестве

U^+ выберем n атомов $U_1, \dots, U_n \subset U^+$. Построим функционалы

$$g_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & t \in (U_1 \cup \dots \cup U_n) \setminus U_i, \\ f(t) - 1, & t \in U_i, \\ \frac{1}{n} \cdot f(t), & t \in E \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n), \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$. Ясно, что $\|g_i\|_\infty = 1/(n-1)$, каждый из g_i достигает нормы на $B(L_1)$, $i = 1, \dots, n$ и $\sum_{i=1}^n g_i = f$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ рассмотрим такой элемент $x_i \in S(L_1)$, равный нулю вне $(U_1 \cup \dots \cup U_n) \setminus U_i$ и равный положительной константе на $(U_1 \cup \dots \cup U_n) \setminus U_i$, для которого $g_i(x_i) = \|g_i\| \cdot \|x_i\|$. Так как для почти всех $t \in U_1 \cup \dots \cup U_n$ только одна функция из $\{x_k\}_{k=1}^n$ равна нулю, а остальные положительны, то точка $0 \notin P_{L_1}(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть M — выпуклое замкнутое множество в L_1, f — ненулевой функционал, опорный к M. Если f достигает своей нормы, то M не антипроксимально, а значит, и не $n-$антипроксимально (леммы C и 3.1). Если же f не достигает нормы, то из приведённого выше разложения $f = g_1 + \dots + g_n$ в силу леммы 3.2 получаем, что M не $n-$антипроксимально.

3) Если $\sigma-$алгебра Σ содержит хоть один атом относительно меры μ, то в пространстве $L_1(E, \Sigma, \mu)$, сопряжённое к которому канонически изоморфно L_∞, нет выпуклых замкнутых ограниченных антипроксимальных множеств [32]. По лемме 3.1 в таком пространстве L_1 нет выпуклых замкнутых ограниченных $2-$антипроксимальных множеств.

Теорема доказана.

В каждом из рассмотренных в этой главе пространств антипроксимальность выпуклого замкнутого множества эквивалентна его $2-$антипроксимальности. Возникает вопрос: существует ли антипроксимальное, но не $2-$антипроксимальное выпуклое замкнутое множество?

Список литературы

[1] *Балаганский В.С.* Антипроксиминальные множества в пространствах непрерывных функций// Математические заметки. 1996. **60**, № 5. 643-657.

[2] *Балаганский В.С.* Об антипроксиминальных множествах в пространстве Гротендика// Труды института математики и механики УрО РАН. 2012.**18**, № 4. 90-103.

[3] *Богачёв В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс, Москва, Ижевск, НИЦ РХД, 2009.

[4] *Бородин П.А.* Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве// Матем. заметки, 2010, **87**, №4, 514–518.

[5] *Бородин П.А.* О выпуклости $N-$чебышёвских множеств // Изв. РАН. Сер. Матем., 2011. **75**, № 5. 19-46.

[6] *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии, Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[7] *Васильева А.А.* Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. **68**, № 4. 75–116.

[8] *Гаркави А.Л., Шматков В.А.* О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб., 1974, **95(137)**, №2(10), 272–293.

[9] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.

[10] *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища Школа, 1980.

[11] *Еремин А.Ю.* Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сб., 2013, **204**, 9, 51-72.

[12] *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Теория экстремальных сетей, М., Ижевск: ИКИ, 2003.

[13] *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении// Матем. сб., 2012, **203**, №5, 65–118.

[14] *Иванов А.О., Тужилин А.А., Еремин А.Ю., Ероховец Е.С., Овсянников З.Н., Пахомова А.С., Рублева О.В., Стрелкова Н.П., Филоненко Е.И.* Минимальные заполнения псевдометрических пространств // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике, 2011, **27**, 83–105.

[15] *Исмагилов Р.С.* Минимальные поперечники метрических пространств // Функц. анализ и его прил., 1999, **33**, №4, 38–49.

[16] *Кобзаш С.* Выпуклые антипроксиминальные множества в пространствах $\mathbf{c_0}$ и $\mathbf{c}$// Матем. Заметки. 1975, **17**, 449–457.

[17] *Конягин С.В.* Замечание о перенормировке нерефлексивных пространств и существовании чебышёвского центра// Вестник МГУ, 1988, **2**, 81 – 82.

[18] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.; Ижевск: РХД, 2001.

[19] *Пахомова А.С.* Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера–Громова// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ., 2013, (в печати)

[20] *Протасов В.Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии, М., Издательство МЦНМО, 2005.

[21] *Рубинштейн Г.Ш.* Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве // Сибирский математический журнал, 1965. **VI**, № 3, 711-714.

[22] *Фонф В.П.* Об антипроксиминальных множествах в пространствах непрерывных функций на бикомпактах// Математические заметки. 1983. **33**, № 3, 549-558.

[23] *Фонф В.П.* О сильно антипроксиминальных множествах в банаховых пространствах// Математические заметки. 1990. **47**, № 2, 130-136.

[24] *Edelsbrunner H., Ivanov A., Karasev R.* Current Open Problems in Discrete and Computational Geometry // Модел. и анализ информ. систем, 2012, **19**, №5, 5–17.

[25] *Ambrosio L., Tilli P.* Topics on analysis in metric spaces, Oxford, 2004.

[26] *Bandyopadhyay P., Rao T. S. S. R. K.* Central subspaces of Banach spaces// J. Approx. Th., 2000, **103**, №2, 206–222.

[27] *Baronti M., Casini E., Papini P.L.* Equilateral sets and their central points // Rend. Mat. Appl., 1993, **13**, №1, 133–148.

[28] *Benítez C., Fernández M., Soriano M.L.* Location of Fermat–Torricelli medians of three points // Trans. Amer. Math. Soc., 2002, **354**, №12, 5027–5038.

[29] *Borwein J.M.* Some remarks on a paper of S. Cobzas on antiproximinal sets// Bull. Calcutta Math. Soc. 1981. **73**, 5-8.

[30] *Borwein J.M., Jiménez-Sevilla M., Moreno J.P.* Antiproximinal Norms in Banach Spaces// Journal of Approximation Theory, 2002. **114**, 57–69.

[31] *Cieslik D.* Steiner Minimal Trees, Kiuwer Academic Publishers, Boston-London-Dordrecht, 1998.

[32] *Cobzaş S.* Antiproximinal sets in some Banach spaces// Math. Balkanica, 1974, **4**, 79-82.

[33] *Cobzaş S.* Antiproximinal sets in Banach spaces of continuous functions// Anal. Numer. Theorie Approx. 1976. **5**, 127-143.

[34] *Cobzaş S.* Antiproximinal sets in Banach spaces of c_0-type// Rev. Anal. Numer. Theorie Approx. 1978. **7**, 141-145.

[35] *Cobzaş S.* Antiproximinal sets in Banach spaces// Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, 1999. **40**, № 2. 43-52.

[36] *Dixmier J.* Sur un théorème de Banach// Duke Math. J., 1948, V. 15, 1057 – 1071.

[37] *Edelstein M.* A note on nearest points// Quart. J. Math. 1970. **21**, 403-407.

[38] *Edelstein M.* Weakly proximinal sets// Journal of Approx. Theory, 1976. **18**, № 1. 1-8.

[39] *Edelstein M., Thompson A.C.* Some results on nearest points and support properties of convex sets in $\mathbf{c_0}$// Pacific J. Math. 1972. **40**, № 3. 553-560.

[40] *Floret K.* On the sum of two closed convex sets// Methods of Operation Research, 1978. **36**, 73-85.

[41] *Franchetti C., Cheney E.W.* The embedding of proximinal sets // J. Approxim. Theory, 1986. **48**, № 2, 213-223.

[42] *Gauss C.F.* Briefwechsel Gauss–Schuhmacher, в книге: Werke Bd. X, 1, pp. 459–468, Göttingen, 1917.

[43] *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1// Canad. J. Math., 1955, **7**, №4, 552–561.

[44] *Hansen A.B., Lima Å.* The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2. Intersection property// Acta Mathematica, 1981, **146**, №1, 1–23.

[45] *Holmes R.B.* A course on optimization and best approximation// Lecture Notes Math. vol. 257, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[46] *Hwang F.K., Richards D., Winter P.* The Steiners Tree Problem, Elsevier Science Publishers, 1992.

[47] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.* Minimal networks: the Steiner problem and its generalizations. London–Tokyo, CRC Press, Boca Raton Ann Arbor, 1994.

[48] *Jarník V., Kössler M.* O minimalnich grafeth obeahujicich n danijch bodu// Cas. Pest. Mat. a Fys., 1934, **63**, 223-235.

[49] *Kadets V.* Under a suitable renorming every nonreflexive Banach space has a finite subset without a Steiner point// Matematychni Studii, 2011, **36**, №2, 197-–200.

[50] *Kakutani S.* Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem// Ann. Math., 1941, **42**, №2, 523–537.

[51] *Klee V.* Remarks on nearest points in normed linear spaces//Proc. Colloq. Convexity, Copenhagen 1965. 161-176. Copenhagen 1967.

[52] *König H., Tomczak–Jaegermann N.* Norms of minimal projections// J. Funct. Anal., 1994, **119**, №2, 253–280.

[53] *Lima Å.* Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces// Trans. Amer. Math. Soc., 1977, **227**, 1–62.

[54] *Lindenstrauss J.* Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc., 1964, **48**, 1–112.

[55] *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces, II, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1979.

[56] *Papini P.L.* Two new examples of sets without medians and centers// Sociedad de Estadística e Investigacíon Operativa Top, 2005, **13**, №2, 315–320.

[57] *Phelps R.R.* Counterexamples concerning support theorems for convex sets in Hilbert space // Canad. Math. Bull. 1988. **31**, № 1, 121–128.

[58] *Rao T. S. S. R. K.* Chebyshev centers and centrable sets// Proc. Amer. Math. Soc., 2002, **130**, №9, 2593–2598.

[59] *Singer I.* Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Bucharest-Berlin: Editura Academiei and Springer Verlag, 1970.

[60] *Veselý L.* A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers // Extracta Mathematicae, 1993, **8**, №2–3, 125–131.

[61] *Veselý L.* Generalized centers of finite sets in Banach spaces // Acta Math.Univ. Comenianae, 1997, **66**, №1, 83–115.

[62] *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестник МГУ, Математика, Механика, 2011, № 6, 26-31.

[63] *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Международная конференция по теории приближений, посвященная 90-летию Б. Стечкина, Тезисы докладов, М., 2010, 9.

[64] *Беднов Б.Б., Стрелкова Н.П.* О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах // Матем. заметки, 2013, **94**, №1, 46–54.

[65] *Беднов Б.Б., Бородин П.А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб., 2014, **205**, 4, 3–21.

[66] *Беднов Б.Б.* Об $n-$антипроксиминальных множествах // Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 33–34.