УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор — проректор по научной работе
Московского физико-технического института
(государственного университета)

д.т.н., профессор О.А. Горшков

«26» 09 2014 года

М.П.

Отзыв ведущей организации на диссертацию Беднова Борислава Борисовича «Кратчайшие сети в банаховых пространствах», представленную к защите на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Борислава Борисовича Беднова посвящена изучению вопросов геометрии функциональных (банаховых) пространств, связанных с существованием сетей Штейнера, точки Штейнера, точки заданного подмножества, минимизирующей сумму расстояний от точек заданного конечного множества банахова пространства.

Тема исследований является классической, но при этом и вполне актуальной. Например, сети Штейнера изучались начиная с XIX века и изучаются до сих пор в силу своей очевидной практической значимости в вопросах народного хозяйства. Автор продолжает актуальное изучение понятия сети Штейнера и его аналогов в постановке банаховых пространств, которая также имеет вполне понятное практическое значение. Тема диссертации восходит к работам таких классиков как К.Ф. Гаусс, П.Л. Чебышёв, А. Гротендик.

Содержательная часть диссертации состоит из трёх глав.

В первой из них рассматриваются минимальные сети (то есть вложенные деревья), содержащие данное конечное множество точек. Существование минимальных сетей и их свойства хорошо изучены в случае конечномерного евклидова пространства. Автор начинает рассматривать аналогичный вопрос в произвольных банаховых пространствах. Формулируются достаточные условия на банахово пространство, чтобы в нём всякое конечное множество можно было соединить минимальной сетью, то есть чтобы достигался минимум длин сетей для любого конечного множества. При этом основным условием является наличие проекции единичной нормы из второго двойственного пространства на исходное пространство.

Также рассматривается класс пространств, для которого минимальные сети всегда являются минимальными метрическими заполнениями. Здесь минимальное заполнение — это сеть с длиной, равной минимальной длине метрического пространства–дерева, в которое можно изометрично вложить данное конечное множество, рассматриваемое как метрическое пространство. При помощи этих терминов охарактеризованы пространства Линденштраусса, или пространства, предуальные к пространству интегрируемых функций. В результатах первой главы важную роль играют комбинаторные свойства шаров банахова пространства.

Во второй главе изучается вопрос существования минимальной сети в виде графа–звезды для любого конечного набора точек в банаховых пространствах. Получена характеризация банаховых пространств, в которых минимальная сеть типа звезды является минимальной в абсолютном смысле (как в вопросе о минимальном заполнении) для любого конечного множества элементов пространства. Это в точности пространства Линденштраусса. В терминах минимальных сетей для каждой тройки элементов охарактеризовано пространство интегрируемых функций. Также изучается строение множества точек Штейнера для троек элементов в пространстве непрерывных функций на хаусдорфовом компакте. Приводится липшицева выборка из этого множества.

В третьей главе обобщается понятие множества, на котором функция расстояния до не лежащей в нём точки не достигает минимума ни в одном случае. Это понятие обобщается на функции, являющиеся суммами расстояний до n точек и приводится соответствующее определение n-антипроксиминального множества. Приводятся примеры, когда случаи $n > 1$ дают новое понятие и когда это не даёт существенно нового свойства. В общем оказывается, что при $n \geq 3$ такие множества отсутствуют в некоторых стандартных примерах банаховых пространств. Однако в пространстве сходящихся к нулю последовательностей антипроксиминальное множество n-антипроксиминально для каждого натурального числа n.

К работе имеются небольшие замечания:

- Слово «антипроксиминальные» (впервые встречается на стр. 12) слишком длинное и труднопроизносимое. Неплохо бы придумать какой-то другой термин вместо него.
- Доказательство теоремы 1.1. Видимо, это доказательство до слов «по лемме А» можно значительно сократить и сформулировать следующим образом:

  «Существование минимальной конфигурации для заданного соединяющего графа G в пространстве X^{**} очевидно, так как указанный функционал зависит от дополнительных вершин графа $y_1, \dots, y_m \in X^{**}$, то есть является суммой выражений вида $\|x_i - y_j\|$ и $\|y_i - y_j\|$, каждое из которых является полунепрерывной снизу функцией в $*$-слабой топологии $(X^{**})^m$. Из связности графа следует, что сумма стремится к бесконечности, если хотя бы один из y_i стремится к бесконечности, а так как ограниченные подмножества $(X^{**})^m$ компактны в $*$-слабой топологии, то указанная сумма достигает минимума (из полунепрерывности).

  С помощью существующей по предположению теоремы проекции X^{**} на X единичной нормы из такой минимальной конфигурации можно сделать минимальную конфигурацию в X, минимизирующую длину при заданном графе конфигурации.»
- Про рассуждении на стр. 49 можно заметить, что это адаптированная к рассматриваемой автором ситуации стандартная оценка для задачи коммивояжёра в метрическом пространстве через длину минимального остовного дерева.
- Статья Ярника и Кёсслера (Jarník, Kössler) процитирована неправильно. Видимо она называется “O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů”. Название журнала “Časopis pro pěstování matematiky a fysiky”. Это можно выяснить поиском в Google Scholar.

Указанные недостатки являются техническими и не принижают высокую положительную оценку работы.

Результаты диссертационной работы Беднова Борислава Борисовича являются актуальными и новыми. Их достоверность подтверждается публикациям в рецензируемых научных журналах, докладами на конференциях и научных семинарах. Значительная часть результатов работы опубликована в рецензируемых научных журналах. Исследования имеют существенное значение в развитии геометрии банаховых пространств и теории кратчайших сетей.

Результаты работы могут быть использованы в дальнейших фундаментальных и прикладных исследованиях, для чтения специальных курсов по геометрии функциональных пространств и смежным областям математики.

Автореферат диссертации адекватно отражает основное содержание работы.

Диссертация Беднова Борислава Борисовича «Кратчайшие сети в банаховых пространствах» удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней», утверждённого Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор — Беднов Борислав Борисович заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация была заслушана 05 июня 2014 г. на семинаре кафедры высшей математики МФТИ. Отзыв утверждён на заседании кафедры высшей математики 29 августа 2014 г. (протокол № 6).

Профессор, доктор физико-математических наук

_________ /Р.Н. Карасёв/

Заведующий кафедрой высшей математики МФТИ,
профессор, доктор физико-математических наук

_________ /Е.С. Половинкин/