ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Б.Б. Беднова "Кратчайшие сети в банаховых пространствах", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена вопросам геометрии банаховых пространств, связанным с кратчайшими сетями, то есть связными графами минимальной длины, затягивающими конечные подмножества этих пространств.

Кратчайшие сети — один из основных объектов исследования в метрической геометрии, возникший еще в работах К. Гаусса и Я. Штейнера. Тем не менее, в (бесконечномерных) банаховых пространствах кратчайшие сети систематически не изучались. А.Л. Гаркави в 1974 г. впервые построил пример несуществования точки Штейнера и кратчайшей сети для трех точек в некотором бесконечномерном банаховом пространстве. Другие примеры этого типа строились М. Баронти, Е. Казини, Р. Папини, П.А. Бородиным. Л. Веселы (1993) и независимо В.М. Кадец (2011) доказали, что такой пример можно построить в любом нерефлексивном пространстве при должном эквивалентном перенормировании. Н.П. Стрелкова (2013) для произвольного $n \geqslant 3$ построила пример несуществования кратчайшей сети у n точек банахова пространства. К. Бенитез, М. Фернандез, М. Сориано (2002) отыскали геометрическую характеризацию гильбертовых пространств в терминах точек Штейнера.

В целом исследования кратчайших сетей в банаховых пространствах до сих пор носили эпизодический характер и относились не столько к кратчайшим сетям, сколько к точкам Штейнера (точки, минимизирующие сумму расстояний до точек из заданного конечного набора).

Б.Б. Беднов стремится доказать существование кратчайших сетей в возможно более общих классах банаховых пространств. Он исследует минимальные заполнения в банаховых пространствах (кратчайшие сети, имеющие, так сказать, минимально возможную длину; исследование минимальных заполнений — новое направление в теории кратчайших сетей, возникшее в недавней работе А.О. Иванова и А.А. Тужилина). Кроме того, в диссертации вводятся и исследуются так называемые $n-$антипроксиминальные множества, с одной стороны, обобщающие обычные антипроксиминальные множества, популярные в геометрической теории приближений (М. Эдельштейн и А. Томпсон, С. Кобзаш, В.С. Балаганский), а с другой стороны, представляющие собой примеры несуществования относительных точек Штейнера.

В первой главе работы доказывается существование кратчайшей сети для любого конечного набора точек в произвольном банаховом пространстве, 1-дополняемом в своем втором сопряженном (этот класс пространств содержит все сопряженные пространства, а также все пространства L_1). В этой же главе описываются все банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения для всех своих конечных наборов точек — именно, это хорошо известные пространства, предуальные к L_1, или пространства Линденштраусса. Интересно, что из этого результата вытекает существование кратчайших сетей для любых конечных наборов точек в пространствах, предуальных к L_1, в частности, во всех пространствах C (которые не охватываются упомянутой выше первой теоремой главы).

Вторая глава посвящена точкам Штейнера и соответствующим им кратчайшим сетям типа звезды. Описываются банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения типа звезды для всех конечных наборов своих точек: это опять оказываются пространства, предуальные к L_1. Получена характеризация пространств L_1 в терминах точек Штейнера (банахово пространство X изометрически изоморфно некоторому пространству L_1 тогда и только тогда, когда для любой тройки точек $a, b, c \in X$ точка Штейнера s единственна и сумма $\|a-s\|+\|b-s\|+\|c-s\|$ равна полупериметру треугольника abc; это самый трудный результат в диссертации). Описываются множества точек Штейнера для троек точек в пространстве C, исследуются свойства этих множеств.

В третьей главе исследуются $n-$антипроксиминальные множества, то есть такие множества M в банаховом пространстве X, что для всякого набора из n точек, удовлетворяющего некоторым естественным требованиям типа невырожденности, в M нет точки, минимизирующей сумму расстояний до точек из этого набора (то есть нет относительной точки Штейнера). В случае $n = 1$ это обычные антипроксиминальные множества (то есть такие множества M, что всякая точка вне M не имеет ближайшей в M), изучение которых составляет заметную область в геометрической теории приближений. В диссертации в основном исследуется существование выпуклых замкнутых $n-$антипроксиминальных множеств в конкретных функциональных пространствах. Этот довольно тонкий вопрос напрямую связан с некоторыми алгебраическими и геометрическими свойствами множества функционалов из сопряженного пространства, достигающих своей нормы.

При доказательстве большинства своих теорем Б.Б. Беднову пришлось преодолеть существенные технические трудности. Несколько результатов диссертации доказаны им совместно со мной (теоремы 1.4, 2.1, 2.2). Подчеркну, что все эти результаты не могли быть доказаны без его участия.

Предпринятая Б.Б. Бедновым попытка ситематического изучения кратчайших сетей в конкретных функциональных и общих банаховых пространствах открывает новую страницу в геометрии банаховых пространств.

Тема диссертации актуальна, полученные результаты новы, интересны и могут быть использованы в научных исследованиях, ведущихся в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте математики и механики УРО РАН (Екатеринбург), Московском физико-техническом институте, Ярославском, Воронежском и Тульском государственных университетах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации; основные результаты диссертации опубликованы и апробированы на различных семинарах и конференциях.

Считаю, что диссертация "Кратчайшие сети в банаховых пространствах" удовлетворяет требованиям п. 8 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", а ее автор Б.Б. Беднов заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Д.ф.-м.н., доцент П.А. Бородин

20.05.2014г

Подпись П.А. Бородина заверяю В.Н. Губариков