Отзыв официального оппонента на диссертацию Беднова Борислава Борисовича “Кратчайшие сети в банаховых пространствах” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – “вещественный, комплексный и функциональный анализ”

В последние годы в рамках вычислительной (метрической) геометрии интенсивно развивалась теория экстремальных сетей, изучающая кратчайшие сети, проблему Штейнера, минимальные заполнения и восходящая, в некотором смысле, к работам Гаусса. В диссертации вопросы, относящиеся к проблематике этой области, рассматриваются в банаховых пространствах. Со своей в стороны, в геометрии банаховых пространств к настоящему времени разработан богатый аппарат для решения подобных задач. Это позволило диссертанту во многих случаях получить полные и содержательные ответы на поставленные вопросы. Безусловно, тематика диссертации является актуальной. Дополнительным подтверждением этого является то, что в списке литературы диссертации есть много работ, написанных в последние 20 лет.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы.

Во введении дается подробный исторический обзор исследуемой проблемы и кратко описываются основные результаты диссертационной работы.

В первой главе диссертации изучаются кратчайшие сети и минимальные заполнения. Доказана теорема существования кратчайших сетей.

Теорема 1.1. *В банаховом пространстве X, для которого существует проектор $P : X^{**} \to X$ нормы 1 (в частности, в любом сопряженном пространстве или в пространстве L_1), для любого натурального n и для любых точек $x_1, \dots, x_n$ существует соединяющая их кратчайшая сеть.*

В следующих двух теоремах диссертантом получено описание банаховых пространств, реализующих минимальное заполнение для конечных множеств своих точек

Теорема 1.2. *Пусть X — действительное банахово пространство. Следующие свойства эквивалентны:*
(1) X реализует минимальное заполнение для всякой тройки своих точек;
(2) для всякой тройки $a, b, c \in X$ множество $\mathrm{st}(\{a,b,c\}, X)$ непусто и величина $|\mathrm{st}|(\{a,b,c\}, X)$ равна полупериметру треугольника abc;
(3) для всякой тройки $a, b, c \in X$ пересечение $m[a,b] \cap m[b,c] \cap m[c,a]$ непусто;
(4) X обладает свойством 3.2.I.P.
При этом во всяком таком пространстве X для всякой тройки точек выполнено равенство $\mathrm{st}(\{a,b,c\}, X) = m[a,b] \cap m[b,c] \cap m[c,a]$.

Теорема 1.4. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*
(1) X реализует минимальное заполнение для всякого конечного набора своих точек;
(2) X реализует минимальное заполнение для всякого набора из 4 своих точек;
(3) X предуально к L_1.

Теоремы 1.2 и 1.4 решают задачу Иванова-Тужилина для банаховых пространств и, на мой взгляд, являются красивым и законченным результатом.

Вторая глава диссертации посвящена изучению банаховых пространств, реализующих минимальные заполнения типа звезды. Минимальные заполнения такого типа представляют особый интерес, так как "центр звезды" является точкой Штейнера. Получено описание банаховых пространств, реализующих минимальное заполнение типа звезды для конечного множества своих точек.

Теорема 2.1. *Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*
(1) X реализует минимальное заполнение типа звезды для всякого конечного набора своих точек;
(2) X реализует минимальное заполнение типа звезды для всех троек и четверок своих точек;
(3) X предуально к L_1.

Случай трехточечных множеств рассмотрен в диссертации более подробно.

Теорема 2.2. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*
(1) для всяких трех точек $a, b, c \in X$ существует и единственна точка $s = \mathrm{st}(a, b, c)$, для которой сумма $\|s-a\| + \|s-b\| + \|s-c\|$ равна полупериметру треугольника abc;
(2) для всяких трех точек $a, b, c \in X$ пересечение $m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$ одноточечно;
(3) X изометрически изоморфно некоторому пространству $L_1(\mu)$.

Также диссертантом были исследованы точки Штейнера в пространствах L_1 и C.

Третья глава диссертации посвящена исследованию n-антипроксиминальных множеств в пространствах непрерывных и суммируемых функций. N-антипроксимальные множества, являются обобщением антипроксимальных множеств, вопрос об их изучении был поставлен П.А. Бородиным. Для многих классических пространств автору удалось изучить существование n-антипроксиминальных множеств и исследовать эквивалентность n-антипроксимальности и антипроксимальности.

Теорема 3.1. *Пусть M — выпуклое замкнутое множество в пространстве c_0 и $n \in \mathbb{N}$. Множество M n-антипроксиминально тогда и только тогда, когда M антипроксиминально.*

Теорема 3.2. *В пространстве $C[K]$ непрерывных функций на бесконечном хаусдорфовом компакте K (1) антипроксиминальность выпуклого замкнутого множества M эквивалентна его 2-антипроксиминальности; (2) не существует выпуклых замкнутых ограниченных n-антипроксиминальных тел при $n = 3, 4, \ldots$*

Теорема 3.3. *В пространстве c нет выпуклых замкнутых n-антипроксиминальных множеств при $n = 3, 4, \ldots$.*

Приведен пример, показывающий, что аналог теоремы 3.3 для произвольного пространства $C[K]$ неверен.

Теорема 3.4. *Для пространства $L_1(E, \Sigma, \mu)$, сопряженное к которому канонически изоморфно $L_\infty(E, \Sigma, \mu)$, в частности, для пространства $L_1(E, \Sigma, \mu)$ с σ-конечной мерой μ, верны следующие утверждения:*
(1) антипроксиминальность выпуклого замкнутого множества M эквивалентна его 2-антипроксиминальности;
(2) не существует выпуклого замкнутого n-антипроксиминального множества при $n = 3, 4 \ldots$;
(3) если σ-алгебра Σ содержит хотя бы один атом относительно меры μ, то в пространстве $L_1(E, \Sigma, \mu)$ нет выпуклых замкнутых ограниченных 2-антипроксиминальных множеств.

Диссертант продемонстрировал очень хорошее владение аппаратом геометрии банаховых пространств. Все доказательства проведены аккуратно. Тем не менее, в диссертации есть несколько доказательств, некоторые моменты которых можно было бы описать чуть подробнее.

К недостаткам диссертации можно отнести:

- В теореме 2.2 и лемме 2.2 был опущен ряд промежуточных рассуждений.
- В доказательстве Утверждения 3.1 необходимо применить лемму В не к функционалам $f_1, \ldots, f_{n-1}$, а к функционалам $(n-1)f_1, \ldots, (n-1)f_{n-1}$.
- При построении примера 3.1 на странице 48, строчки 1, 2, вместо a должно быть b.
- При доказательстве теоремы 3.3 на стр. 58 вместо "отрицательные", должно быть "неположительные".
- Определение сопряжешого пространства (стр. 20), как пространства сопряженного к какому-либо банахову пространству, на мой взгляд, не является общеизвестным.
- В работе есть несколько опечаток, например, на стр. 39 и 44.

Перечисленные недостатки ни в коей мере не влияют на достоверность результатов и не умаляют очевидных достоинств диссертационной работы. Диссертация является научно квалифицированной работой, результаты которой представляют несомненный интерес для специалистов по теории приближения и теории функций. Автором опубликовано пять научных работ по теме диссертации, в том числе три статьи в изданиях, рекомендованных ВАК. Результаты докладывались и обсуждались на ряде российских и международных конференций, на различных научных семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация соответствует требованиям положения ВАК о присуждении ученых степеней, и ее автор, Беднов Борислав Борисович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
руководитель исследовательской группы ООО "Эверноут"

/Е.Д. Лившиц/

24 сентября 2014 года

Подпись Е.Д. Лившица заверяю
Генеральный директор ООО "Эверноут"

Н.В. Сошинская/