МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

*УДК 519.244.5(043)*

**Каменов Андрей Александрович**

# НЕАДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДИФФУЗИЙ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва
2014

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | академик РАН,<br>доктор физико-математических наук,<br>профессор Ширяев Альберт Николаевич |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук<br>Дарховский Борис Семенович,<br>главный научный сотрудник<br>Института Системного Анализа РАН |
| | доктор физико-математических наук,<br>профессор Павлов Игорь Викторович,<br>заведующий кафедрой высшей математики<br>Ростовского Государственного<br>Строительного Университета |
| Ведущая организация: | Институт прикладных математических<br>исследований КарНЦ РАН |

Защита состоится 3 октября 2014 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8 этаж) и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su

Автореферат разослан «      »                                  года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор                                   В. Н. Сорокин

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

Задача об оптимальной остановке имеет множество применений, в первую очередь в финансовой математике. Типичными ситуациями, в которых возникает указанная задача, являются определение безарбитражной цены для опционов Американского типа и задача оптимального управления капиталом.

Одной из значимых проблем финансовой математики является поиск справедливой цены для русского опциона. Термин «русский опцион» был впервые введен Л.Шеппом и А.Н.Ширяевым[1]. По такому контракту, покупатель имеет право в любой момент времени продать актив по максимальной цене, наблюдавшейся с момента заключения контракта, при этом платя штраф, пропорциональный прошедшему времени. Таким образом, покупатель опциона минимизирует возможные потери вследствие того, что он мог бы предъявить опцион к исполнению раньше. Такой контракт торгуется за рубежом, хотя и в сравнительно небольших объёмах. При этом для оценки его справедливой стоимости используется модель опциона американского типа с немного изменёнными параметрами.

Русскому опциону посвящены исследования множества авторов. В последующих работах Л.Шеппа и А.Н.Ширяева был предложен подход к решению задачи, основанный на введении дуальной мартингальной меры[2], а также решена задача для «барьерной» версии опциона – т.е. момент остановки не должен превосходить момента первого достижения процессом некоторого уровня[3]. Задача, аналогичная рассмотренной в настоящей работе, была решена для модели Блэка-Шоулза Г.Пешкиром[4], а Дуйстермаатом, Киприяну и ван Шайком

[1] *Shepp L.*, *Shiryaev A. N.* The Russian option: reduced regret // The Annals of Applied Probability. 1993. Т. 3, № 3. С. 631—640.

[2] *Shepp L. A.*, *Shiryaev A. N.* A New Look at Pricing of the «Russian Option» // Theory of Probability & Its Applications. 1994. Т. 39, № 1. С. 103—119.

[3] *Shepp L. A.*, *Shiryaev A. N.*, *Sulem A.* A barrier version of the Russian option // Advances in Finance and Stochastics. Springer, 2002. С. 271—284.

[4] *Peskir G.* The Russian option: Finite horizon // Finance and Stochastics. 2005. Апр. Т. 9, № 2. С. 251—267. ISSN 1432-1122.

предложен алгоритм, позволяющий явным образом строить аппроксимации для границы оптимальной области остановки[5].

Очень близкой является задача о поиске справедливой цены для другого экзотического производного финансового инструмента — лукбэк опциона. Одной из первых работ, касающихся этого типа опционов, стала в 1991 году статья А. Конзе и Вишванатана[6]. Метод для поиска цены можно найти в книге М. Мусиелы и М. Рутковски[7]. Ещё одна работа[8], посвященная исследованию лукбэк опциона на бесконечном временном горизонте, интересна тем, что условия гладкого склеивания, являющегося общим для большинства задач об оптимальной остановке, оказывается недостаточно. Авторами показано, что для решения поставленной задачи необходимо добавить условие на асимптотику границы между областями остановки и продолжения наблюдений.

Целый ряд авторов занимались задачей об остановке случайного процесса как можно более близко к его абсолютному максимуму (или, наоборот, так далеко, как возможно). Главной проблемой при решении задач такого рода по сравнению с задачей для функционала Майера $V = \sup\limits_{\tau} \mathbf{E}\, M(X_\tau)$ является тот факт, что процесс текущего максимума $M_t = \sup\limits_{s \leqslant t} X_t$ не является марковским, и для того, чтобы применить подход, основанный на использовании свойств марковских процессов, необходимо рассматривать двухмерный процесс $(X_t, M_t)$.

Одной из причин для постановки такой задачи является известная инвестиционная стратегия «покупай и держи». Она основана на эмпирическом наблюдении, состоящем в том, что на больших временных промежутках финансовые рынки обеспечивают достаточно высокую доходность, несмотря на имеющуюся волатильность. Согласно этой точке зрения, предсказание дальнейшего поведения цен невозможно (по крайней мере, для небольших инвесторов),

---

[5]*Duistermaat J.*, *Kyprianou A.*, *Schaik K. van* Finite expiry Russian options // Stochastic Processes and their Applications. 2005. Апр. Т. 115, № 4. С. 609—638. ISSN 0304-4149.

[6]*Conze A.*, *Visvanathan* Path dependent options: The case of lookback options // The Journal of Finance. 1991. Т. 46, № 5. С. 1893—1907.

[7]*Musiela M.*, *Rutkowski M.* Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, 2006. (Stochastic Modelling and Applied Probability). ISBN 9783540266532.

[8]*Guo X.*, *Shepp L.* Some optimal stopping problems with nontrivial boundaries for pricing exotic options // Journal of Applied Probability. 2001. Т. 38, № 3. С. 647—658.

и вместо попытки приобрести акции перед их ростом, лучше просто «купить и держать».

В пользу такого подхода говорит гипотеза эффективного рынка, утверждающая, что цена акции в каждый момент времени отражает всю доступную к этому моменту информацию, а следовательно, нет никакого смысла совершать финансовые операции в краткосрочной перспективе. Также сторонники упоминают о транзакционных издержках (оплата брокерских услуг, а также разница между рыночными ценами покупки и продажи). Очевидно, что указанная стратегия минимизирует количество проведенных операций (и, таким образом, размер издержек).

**Цель работы.**

Целью настоящей работы является исследование задачи об оптимальной остановке для процесса $(X_t, M_t)$ и получение результатов, расширяющих и обобщающих упомянутые выше работы. Основным направлением исследования является рассмотрение случаев однородной диффузии, а также произвольной целевой функции, оценивающей расстояние между значением процесса в момент остановки и абсолютным (или текущим) максимумом.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Решена задача об оптимальной остановке для «русского опциона» в модели Башелье. Доказано, что оптимальным моментом остановки является момент первого достижения процессом границы, являющейся единственным решением интегрального уравнения Вольтерры, кроме того, найдено асимптотическое поведение упомянутой границы в случаях временного горизонта, стремящегося к нулю и бесконечности.

2. Показано, что в случае произвольной задачи об оптимальной остановке однородной диффузии относительно её абсолютного максимума имеет место субгармоническая характеризация функции цены в точках, где значение процесса совпадает со значением его текущего максимума, что является расширением известного результата из общей теории оптимальной остановки. Получены системы дифференциальных уравнений со свободной границей. Доказательство проведено в случаях как бесконечного, так и конечного временного горизонта.

3. В случае задачи для бесконечного горизонта доказано, что для функций, удовлетворяющих условию однократного пересечения, границей оптимальной области остановки является максимальное из допустимых (т.е. целиком содержащихся в области, где целевая функция является субгармонической) решений определенного дифференциального уравнения. Также показано, что для функций, условию однократного пересечения не удовлетворяющих, можно явным образом построить модификацию, удовлетворяющую указанному условию, при этом сохраняющую значение цены и для которой любой оптимальный момент остановки в исходной задаче также является оптимальным.

4. В случае конечного временного горизонта найдена система из дифференциального уравнения и интегрального уравнения Вольтерры, которой должна удовлетворять граница оптимальной области остановки. В случае дополнительного условия на гладкость целевой функции на прямой, соответствующей временному горизонту, найдено преобразование для упомянутой системы, упрощающее её исследование и численное решение. Для случая функций, удовлетворяющих условию однократного пересечения, доказано, что оптимальным моментом остановки является момент первого пересечения процессом максимального решения построенной системы.

**Методы исследования.** В работе применяются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, методы динамического программирования, а также эконометрические методы. Для исследования частных случаев были применены методы численного решения дифференциальных и интегральных уравнений.

**Теоретическая и практическая ценность.** Исследование носит теоретический характер. Его результаты и методы могут быть полезны специалистам, занимающимся теорией оптимальной остановки. Явные формулы, полученные для задачи об остановке относительно максимума диффузии, могут быть использованы в качестве первого приближения в задачах подобного типа.

**Апробация работы.**

1. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством А.Н. Ширяева (2014)

2. На семинаре кафедры теории вероятностей МГУ им. М.В. Ломоносова «Стохастический анализ и мартингальные методы» под руководством А.Н. Ширяева (неоднократно, 2007-2014).

3. На русско-японском симпозиуме «Сложные статистические модели» в МИАН им. Стеклова (2007).

4. На международной конференции «European Young Statisticians Meeting» в Бухаресте, Румыния (2009).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы автором в 3 работах, 2 из которых – статьи в ведущих рецензируемых научных журналах. Список приведен в конце настоящего автореферата.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 89 страниц с 4 рисунками. Список литературы содержит 54 наименования.

# Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

**В первой главе** решена задача об оптимальной остановке для русского опциона в модели Башелье. Задача об оптимальной остановке для русского опциона в указанной модели принимает вид

$$\widehat{V}_T = \sup_{\tau \leqslant T} \mathbf{E} \left[ \max_{u \leqslant \tau} \widehat{X}_u - c\tau \right], \tag{1}$$

где $\widehat{X}_t = \mu t + B_t$.

Общая теория оценки опционов американского типа утверждает, что для нахождения справедливой цены такого опциона необходимо решить следующую задачу об оптимальной остановке:

$$\widehat{V}_T = \sup_{\tau \leqslant T} \mathbf{E} \left[ \max_{u \leqslant \tau} \widehat{X}_u - c\tau \right].$$

Ответ даёт

**Теорема 1.1.** *Оптимальным моментом остановки в задаче* (1) *является момент первого выхода процесса* $\max_{u \leqslant t} \widehat{X}_u - \widehat{X}_t$ *на кривую* $b(t)$, *заданную как решение интегрального уравнения*

$$\mathbb{A}(t, T, b(t)) = b(t) + (c - \mu)(T - t) - c \int_0^{T-t} \mathbb{B}(t, u, b(t), b(t + u)) du$$

*где* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *имеют следующий вид:*

$$\mathbb{A}(t, T, b(t)) = \mathbf{E}_{t,b(t)} X_T$$
$$\mathbb{B}(t, u, b(t), b(u)) = \mathbf{E}_{t,b(t)} \mathbf{I}(X_u \geqslant b(u)).$$

Нас интересуют свойства решения полученного уравнения, в частности, асимптотика при $T - t \to 0$ и $T - t \to \infty$.

**Теорема 1.2.** *При* $t \to T$

$$b(t) = \sqrt{\frac{T - t}{\ln(T - t)}} + O(T - t).$$

В случае бесконечного временного горизонта оптимальным моментом остановки является $\tau_\infty = \inf\{t : X_t \geqslant S_0\}$, где $S_0 = \frac{\ln(\mu/c+1)}{2\mu}$. Для горизонта, стремящегося к $\infty$, справедлива следующая оценка для функции цены.

**Теорема 1.3.** *Для некоторого положительного* $D$ *имеет место оценка* $0 < V_\infty(S) - U(t, S) < De^{x\mu/2-qt}\cos(\lambda x)$, *где* $\lambda = \pi/(2S_0)$ *и* $q = (\min(\mu, 0))^2/4 + \lambda^2$.

Отсюда можно найти оценку для асимптотики непосредственно границы области оптимальной остановки.

**Теорема 1.4.** *Имеет место оценка* $0 \leqslant S_0 - h(t) \leqslant \sqrt{D/(2c)}e^{qt/2}$.

**Во второй главе** мы переходим к исследованию задачи об оптимальной остановке для произвольной функции, зависящей от максимального значения процесса (гладкой и удовлетворяющей определенным условиям для роста на бесконечности). Поскольку для многих диффузий значение максимума на всей положительной полупрямой может быть не определено, то имеет смысл также рассмотреть аналогичную задачу для функций вида $h(X_\tau, M_{\tau+\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Как показано, обе эти формулировки являются частными случаями следующей задачи:

$$V_* = \sup_\tau \mathbf{E}_{xs}\, f(X_\tau, M_\tau)\,, \tag{3}$$

где для функции $f(x,s)$ выполнено условие $f'_s(x,s)|_{x=s} = 0$.

Обозначим

$$\mu(x) = \frac{b(x)}{\sigma^2(x)} = -\frac{1}{2}(\ln L'(x))' = -\frac{1}{2}\frac{L'(x)}{L''(x)}\,.$$

В силу супергармонической характеризации функции $V_*(x,s)$, в точках, где выполнено

$$f''_{xx}(x,s) + 2\mu(x) f'_x(x,s) > 0\,, \tag{4}$$

не лежащих на диагонали (т.е. $x < s$), останавливаться не оптимально.

Для точек, лежащих на диагонали, инфинитезимальный генератор имеет более сложный вид. Тем не менее, как оказывается, и для них условие (4) является достаточным для того, чтобы точка $(x,x)$ принадлежала области продолжения наблюдений.

**Теорема 2.1.** *Не оптимально останавливаться в точках $(x,x)$, для которых либо $f'_s(x,x) > 0$, либо $f'_s(x,x) = 0$ и выполнено* (4)

В случае, если при некотором $s$ верно $V_*(s,s) = f(s,s)$, то есть в точке $(s,s)$ на диагонали необходимо сразу останавливаться, вопрос нахождения $V_*(x,s)$ для всех $x < s$ сводится к задаче для одномерного процесса $X_t$, ответ в которой известен. Интерес, следовательно, представляют те случаи, когда при $M_t = s$ необходимо останавливаться при достижении процессом $X_t$ некоторого уровня $g_*(s) < s$ (при этом, опять-таки, для $x < g_*(s)$ вопрос нахождения $V_*(x,s)$ сводится к одномерной задаче). Далее мы выведем дифференциальное уравнение для оптимальной границы $g_*(s)$.

Чтобы найти уравнение для $g_*(s)$ (в случае, если области остановки и продолжения наблюдений действительно имеют описанный вид), запишем систему дифференциальных уравнений для $V(x,s)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_X V(x,s) &= 0 & g(s) < x < s \\ \left.\frac{\partial V}{\partial s}(x,s)\right|_{x=s-} &= 0 & \text{(нормальное отражение)} \\ V(x,s)|_{x=g(s)+} &= f(x,s) & \text{(мгновенная остановка)} \\ \left.\frac{\partial V}{\partial x}(x,s)\right|_{x=g(s)+} &= f'_x(x,s) & \text{(гладкое склеивание.)} \end{aligned} \tag{5}$$

**Теорема 2.2.** *Функция $V(x,s)$ удовлетворяет условиям* (5)*, если для границы $g(x,s)$ выполнено*

$$g'(s) = -\frac{f'_s(g(s),s)\Lambda^{-1}(g(s),s) + f''_{xs}(g(s),s)}{f''_{xx}(g(s),s) + 2\mu(s) f'_x(g(s),s)}, \tag{6}$$

*где* $\Lambda(g(s),s) = \frac{L(s)-L(g(s))}{L'(g(s))}$.

Далее мы придерживаемся стандартного для задач об оптимальной остановке порядка действий — доказываем верификационную теорему для функции $g$, удовлетворяющей (6).

**Определение 1.** *Функция $f(x,s)$ удовлетворяет условию однократного пересечения, если для любого $s$ существует $\underline{x}(s)$ такое, что $\mathbb{L}_X(x,s) \leqslant 0$ при $x < \underline{x}(s)$ и $\mathbb{L}_X(x,s) \geqslant 0$ при $s > x > \underline{x}(s)$.*

Оказывается, впрочем, что практически любую функцию $f$ можно модифицировать (не изменив решения задачи (3)) таким образом, что условие однократного пересечения окажется выполненным. Единственное, что нам потребуется – сделать некоторые достаточно естественные предположения относительно поведения функции $f$ при $x$ и $s$, стремящихся к границам интервала $I$.

**Условие 1.** *Существует функция $q(s)$ такая, что*

$$f(x,s) \leqslant \overline{f}(x,s) = q(s) + q'(s)\frac{L(x)-L(s)}{L'(s)}..$$

Отметим, что если для какого-то $s$ нельзя подобрать $q$ и $q'$ так, чтобы выполнялось указанное неравенство, то $V(x,s) = \infty$ при $x < s$.

**Условие 2.** *Для любого $s \in I$ в некоторой окрестности $s$ выполнено одно из двух условий:*

$$\lim_{x \to l_I} \frac{f(x,s)}{L(x)} = -\infty\,,$$

*или*

$$|f'_s(x,s)| < C, \ \ \forall x \in I\,.$$

**Теорема 2.3.** *Пусть $f(x,s)$ удовлетворяет условиям 1 и 2, а $g(s)$ - произвольная допустимая граница, причём $V(g(s),s) < \infty$. Тогда существует функция $\hat{f}(x,s) \in C^{2,1}$, такая, что для любых $(x,s)$*

*i)* $\mathbb{L}_X \hat{f}(x,s) \leqslant 0$ *при* $x \leqslant g(s)$,

*ii)* $\frac{\partial \hat{f}}{\partial s}(x,s)\Big|_{x=s} \geqslant 0$, *причем, если неравенство строгое, то* $\mathbb{L}_X \hat{f}(x,s) = 0$ *при* $x \in [s-\varepsilon, s]$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

*iii)* $\sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}(f)} \mathbf{E}_{xs}\, f(X_\tau, M_\tau) = \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}(f)} \mathbf{E}_{xs}\, \hat{f}(X_\tau, M_\tau)$,

*iv) Любой момент остановки $\tau$, являющийся оптимальным в первой задаче, оптимален и по второй,*

*v) Любой момент остановки $\tau$, такой, что $\mathbb{L}_X f(X_\tau, M_\tau) < 0$ п.н., оптимальный во второй задаче, является оптимальным моментом остановки в первой задаче.*

**Определение 2.** *Назовём границу $g : I \to I^0$, $g(s) \leqslant s$ допустимой, если:*

*i)* $g(s)$ *полунепрерывна снизу,*

*ii) В точках, где $l_I < g(s) < s$, $g(s)$ является решением уравнения* (6),

*iii) Для всех $s$ точка $(g(s),s)$ принадлежит замыканию множества* $\{(x,s) : \mathbb{L}_X f(x,s) < 0\}$.

Далее, для функций, удовлетворяющих принципу однократного пересечения, показано, что имеет место принцип максимума.

**Теорема 2.4.** *Пусть функция удовлетворяет условию однократного пересечения и выполнено утверждение ii) теоремы 2.3. Тогда*

1. *Существует максимальная допустимая граница* $g_*(s)$.

2. *Если для момента остановки* $\tau_* = \inf\{t > 0 : X_t \leqslant g_*(M_t)\}$ *выполнено* $\mathbf{E}\, f(X_{\tau_*}, M_{\tau_*}) < \infty$, *то он является оптимальным в задаче* (3).

Рассмотрен частный случай, а именно решена в случае $\varepsilon > 0$ задача $V = \sup\limits_{\tau\geqslant 0} \mathbf{E}\,(X_\tau - m_{\tau+\varepsilon})$ для процесса $X_t$, являющегося геометрическим броуновским движением $\exp(B_t - \mu t)$ и $m_t = \min\limits_{s\leqslant t} X_s$.

**Теорема 2.5.** *Оптимальный момент остановки в данном случае имеет вид:*

1. *Если* $\mu < \frac{1}{2}$, *то оптимального момента остановки не существует, а* $V_*(x,s) = \infty$.

2. *Если* $\mu = \frac{1}{2}$, *то* $V_* = \mathbf{E}\,(X_0 - m_\varepsilon)$, *причём равенство достигается на любом моменте остановки из* $\mathfrak{M}_X(f)$.

3. *Если* $\mu > \mu_0(\varepsilon)$, *где* $\mu_0$ *— единственный корень уравнения*
$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\phi(-\mu\sqrt{\varepsilon}) + 2(\mu-1)e^{\varepsilon(\frac{1}{2}-\mu)}\Phi((\mu-1)\sqrt{\varepsilon}) = 2\mu - 1\,,$$
*то оптимальным моментом остановки является* $\tau = 0$

4. *Наконец, если не выполнено ни одно из указанных условий, то оптимальным моментом остановки является* $\tau_* = \inf\{t : M_t - X_t = d\}$, *где* $d$ *— единственный корень уравнения*
$$\frac{2e^{-d}}{\sqrt{\varepsilon}}\phi\left(\frac{d-\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 2(\mu-1)e^{\varepsilon(\frac{1}{2}-\mu)}\Phi\left(\frac{-d-\varepsilon+\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = 2\mu - 1\,.$$

**В третьей главе** рассматривается самый важный и сложный случай — произвольная целевая функция на конечном временном интервале. Основная сложность, возникающая при такой постановке, состоит в том, что задача более не является однородной во времени.

Интерес представляет задача вида
$$V_* = \sup_{\tau\leqslant T} f(X_\tau, M_\tau, \tau)\,,$$

где $f'_s(x,s,t)|_{x=s}=0$. Важным частным случаем является задача

$$V_* = \sup_{\tau\leqslant T} h(X_\tau, M_T)\,. \tag{7}$$

Обозначим

$$V_*(x,s,t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} \mathbf{E}_{xst}\, f(X_\tau, M_\tau, \tau)\,, \tag{8}$$

где $\mathbf{E}_{xst}$ – математическое ожидание при условии $X_t = x$, $M_t = s$.

Так же, как и во второй главе, встаёт вопрос об остановке на диагонали. Ответ на него даёт следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** *Предположим что $f'_s(x,x,t)=0$. Тогда, если выполнено условие $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{L}_X\right) f(x,x,t) > 0$, то останавливаться в точке $(x,x,t)$ не оптимально.*

Для того, чтобы получить систему уравнений, которой должна удовлетворять граница оптимальной области остановки в данном случае, мы формулируем, в соответствии с общей теорией оптимальной остановки, систему дифференциальных уравнений со свободной границей (задачу Стефана):

$$\begin{aligned}
V'_t + \mathbb{L}_X V &= 0 & g(s) < x < s\\
\frac{\partial V}{\partial s}(x,s,t)\bigg|_{x=s-} &= 0 & \text{(нормальное отражение)}\\
V(x,s,t)|_{x=g(s)+} &= f(x,s,t) & \text{(мгновенная остановка)}\\
\frac{\partial V}{\partial x}(x,s,t)\bigg|_{x=g(s)+} &= f'_x(x,s,t) & \text{(гладкое склеивание.)}
\end{aligned} \tag{9}$$

В её решении оказывается полезным следующее утверждение, представляющее собой вариант теоремы об огибающей для рассматриваемой задачи.

**Теорема 3.2.** *$V'_s(x,s+,t)$ существует и на множестве продолжения наблюдений $C$ удовлетворяет уравнению*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{L}_X\right) V'_s(x,s+,t) = 0\,.$$

Обозначим $Y_t$ процесс $X_t$, остановленный в момент пересечения диагонали, т.е. $Y_t = X_{t\wedge\tau_0}$ и положим

$$\Psi(x,y,t) = \mathsf{P}(Y_t \leqslant y | X_0 = x)\,.$$

**Теорема 3.3.** *Если выполнены условия* (9)*, то* $g(s,t)$ *в точках, где* $g(s,t) < s$, *удовлетворяет уравнению*

$$g'_s(s,t) = \frac{\sigma^2(g(s,t))}{2} \cdot \frac{\int\limits_t^T f'_s(g(s,\theta),s,\theta)d\psi(s,t,\theta) - f''_{xs}(g(s,t),s,t)}{\left(f'_t + \mathbb{L}_X f\right)(g(s,t),s,t)}\,, \quad \textit{(10)}$$

*где* $\psi(s,t,\theta)$ *– функция, удовлетворяющая уравнению Вольтерры*

$$\Psi'_x(g(s,t),g(s,r),r) = \int\limits_t^r \Psi(g(s,\theta),g(s,r),r-\theta)d\psi(s,t,\theta) \qquad \textit{(11)}$$

*для всех* $t < r \leqslant T$.

Кроме того, если исходная задача имеет вид (7), то указанную систему можно упростить таким образом, что при различных $t$ ядро и образ уравнения Вольтерры остаются неизменными:

**Теорема 3.4.** *Если в условиях теоремы 3.3 имеет место* $f(X_\tau, M_\tau, \tau) = \mathbf{E}(h(X_\tau, M_T)|X_\tau, M_\tau, \tau)$ *и существует предел* $H(s) = \lim\limits_{t\to T} h'_s(g(s,T),s)$*, то* $g(s,t)$ *в точках, где* $g(s,t) < s$ *удовлетворяет следующему уравнению:*

$$g'_s(s,t) = \frac{\sigma^2(g(s,t))}{2} \cdot \frac{I(s,t) - f''_{xs}(g(s,t),s,t)}{\left(f'_t + \mathbb{L}_X f\right)(g(s,t),s,t)}\,,$$

*где*

$$I(s,t) = \int_t^T \chi(r)\Psi_x(x,g(s,r),r)dr + H(s)\Psi_x(g(s,t),s,T-t)\,,$$

*а* $\chi(r)$ *– решение уравнения Вольтерры*

$$f'_s(g(s,\theta),s,\theta) - H(s)\Psi(g(\theta,s),s,T-\theta) = \int_\theta^T \chi(r)\Psi(g(s,\theta),g(r,s),r-\theta)dr$$

*для всех* $\theta \in [t,T]$.

Такое преобразование значительно упрощает исследование и численное решение системы.

По аналогии со случаем бесконечного горизонта, дадим следующее определение:

**Определение 3.** *Функция $f(x, s, t)$ удовлетворяет условию однократного пересечения, если для каждого $s$ в интервале $I$ существует граница $\underline{x}(s, t)$ такая, что $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(x, s, t) \geqslant 0$ при $x > \underline{x}(s, t)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) (x, s, t) \leqslant 0$ при $x < \underline{x}(s, t)$.*

Далее будем предполагать условие однократного пересечения выполненным.

Определим $V_g(x, s, t)$ как решение задачи Коши:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) V_g(x, s, t) = 0$$
$$V_g(g(s, t), s, t) = f(g(s, t), s, t)$$
$$\frac{\partial V_g}{\partial x}(g(s, t), s, t) = f'_x(g(s, t), s, t)$$
$$V_g(x, s, T) = f(x, s, T), \;\; s \geqslant x \geqslant g(s, T) \;.$$

**Теорема 3.5.** *Пусть $g(s, t)$ – произвольное допустимое решение и $\tau_g \in \mathfrak{M}_X(f)$ – соответствующий ему момент остановки. Тогда*

1. *Для любого момента остановки $\tau \in \mathfrak{M}_X(f)$ верно*
$$\mathbf{E}_{xst}\, f(X_\tau, M_\tau, \tau) \leqslant V_g(x, s, t).$$

2. *Если $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(g(s, r), s, r) < 0$ для $\forall s, r$, и $\tau \in \mathfrak{M}_X(f)$ – оптимальный момент остановки, то $P_{xst}(\tau \neq \tau_g) = 0$*

Перейдём к вопросу о выборе конкретного допустимого решения.

**Теорема 3.6.** *Существует максимальная допустимая граница $g_*(s, t)$.*

Оказывается, что максимальная допустимая граница является оптимальной в исходной задаче. Используя теорему 3.5, получаем основное утверждение третьей главы:

**Теорема 3.7.** *Обозначим $g_*(s, t)$ максимальное допустимое решение. Тогда, если для момента остановки $\tau_* = \inf\{t > 0 : X_t \leqslant g_*(M_t, t)\}$ выполнено $\mathbf{E}\, f(X_\tau, M_\tau, \tau) < \infty$, то он является оптимальным в задаче (8).*

Наконец, рассмотрена задача о минимизации отношения к абсолютному максимуму для броуновского движения со сносом $X_t = B_t + \mu t$:

$$V_* = \inf_{\tau \leqslant T} \frac{X_t}{M_T} \tag{12}$$

Обозначим $G(x,t)$ функцию распределения величины $M_{T-t}$, а $\rho(x,t)$ – плотность этого распределения. Оказывается, что функция распределения $M_{T-t}$ является логарифмически выпуклой вверх, т.е. $\left(\frac{\rho(x,t)}{G(x,t)}\right)'_x > 0$.

Ответ в поставленной задаче даёт следующее утверждение:

**Теорема 3.8.** *1. Если $\mu \leqslant 0$, то оптимальным (причём единственным) моментом остановки в задаче* (12) *является $\tau_* = T$.*

*2. Если $\mu > 0$, то функция $f(x,s,t)$ удовлетворяет условию однократного пересечения. В этом случае оптимальный момент остановки имеет вид $\tau_* = \inf\{t : X_t \leqslant g(S_t,t)\}$, где $g(s,t)$ – единственное решение системы* (10)-(11) *с начальным условием $g(s,T) = s$.*

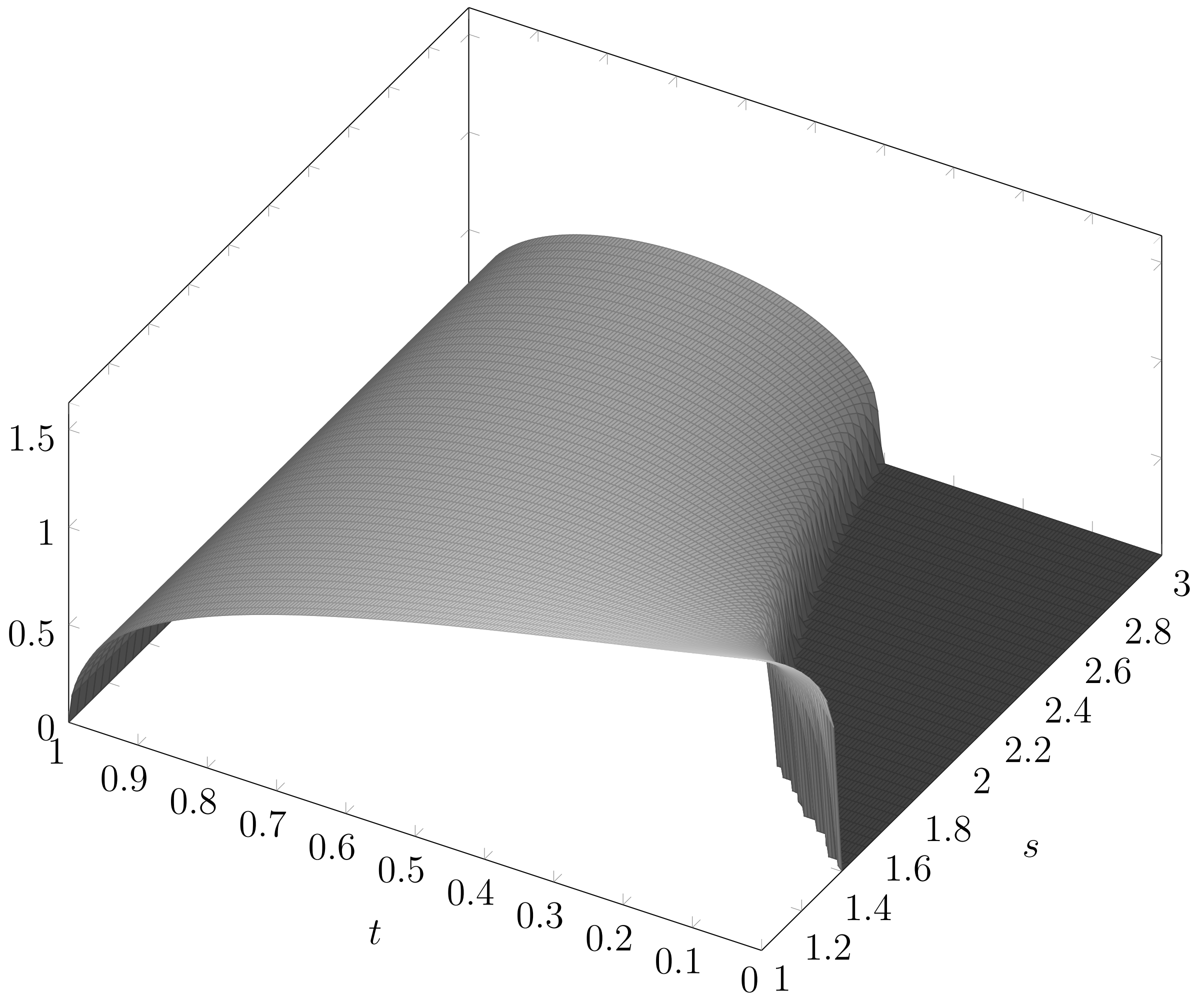
Более того, в рассматриваемом случае при помощи теоремы Гирсанова удаётся найти явное выражение для $\Psi(x,y,t)$:

$$\mathsf{P}_x(Y_t \leqslant y) = \Phi\left(\frac{y - x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{-2s + y + x - \mu t}{\sqrt{t}}\right).$$

Вместе с теоремой 3.7 это позволяет решить поставленную задачу численным методом. Для иллюстрации качественного поведения границы $g(s,t)$ результат решения задачи (с использованием библиотеки Math.NET Numerics) приведен на рисунке 1

**Благодарности.** Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику, доктору физико-математических наук, профессору Альберту Николаевичу Ширяеву за постановку задачи, неоценимую помощь и интерес к работе.

Рис. 1: Решение уравнения (10) в задаче (12), $\mu = 0.25$, $T = 1$




## Публикации автора по теме диссертации

1. *Каменов А. А.* Башелье-версия русского опциона на конечном интервале // Теория вероятностей и её применения. 2008. Т. 3, № 53. С. 576–587

2. *Каменов А. А.* Решение задачи о предсказании абсолютного максимума однородной диффузии // Успехи математических наук. 2014. Т. 69, № 3. С. 100–101

3. *Каменов А. А.* Оптимальная остановка для абсолютного максимума однородной диффузии // Депонировано в ВИНИТИ. №219-В2014