Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова
механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 519.244.5(043)

Каменов Андрей Александрович

Неаддитивные задачи об оптимальной остановке для стационарных диффузий

Специальность 01.01.05 —
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор А.Н.Ширяев

Москва – 2014

Содержание

Введение

Задача об оптимальной остановке имеет множество применений, в первую очередь в финансовой математике. Типичными ситуациями, в которых возникает указанная задача, являются определение безарбитражной цены для опционов Американского типа и задача оптимального управления капиталом.

Одной из значимых проблем финансовой математики является определение справедливой цены для русского опциона. Термин «русский опцион» был впервые введен Л.Шеппом и А.Н.Ширяевым в работе [1]. По такому контракту, покупатель имеет право в любой момент времени продать актив по максимальной цене, наблюдавшейся с момента заключения контракта, при этом платя штраф, пропорциональный прошедшему времени. Таким образом, покупатель опциона минимизирует возможные потери вследствие того, что он мог бы предъявить опцион к исполнению раньше. Такой контракт торгуется за рубежом, хотя и в сравнительно небольших объёмах. При этом для оценки его справедливой стоимости используется модель опциона американского типа с немного изменёнными параметрами.

Русскому опциону посвящены исследования множества авторов. В работе [2] был предложен подход к решению задачи, основанный на введении дуальной мартингальной меры. В [3] решена задача для «барьерной» версии опциона – т.е. момент остановки не должен превосходить момента первого достижения процессом некоторого уровня. Задача, аналогичная рассмотренной в настоящей работе, была решена для модели Башелье в [4], а в работе [5] предложен алгоритм, позволяющий явным образом строить аппроксимации для границы оптимальной области остановки.

Очень близкой является задача о поиске справедливой цены для другого экзотического производного финансового инструмента — лукбэк опциона. Одной из первых работ, касающихся этого типа опционов, стала в 1991 году статья [6]. Метод для поиска цены можно найти в книге [7]. Ещё одна работа, [8], посвященная исследованию лукбэк опциона на бесконечном временном горизонте, интересна тем, что условия гладкого склеивания, являющегося общим для большинства задач об оптимальной остановке, оказывается недостаточно. Авторами показано, что для решения поставленной задачи необходимо добавить условие на асимптотику границы между областями остановки и продолжения наблюдений.

Целый ряд авторов занимались задачей об остановке случайного процесса как можно более близко к его абсолютному максимуму (или, наоборот, так далеко, как возможно). Главной проблемой при решении задач такого рода по сравнению с задачей для функционала Майера $V = \sup_{\tau} \mathbf{E}\, M(X_\tau)$ является тот факт, что процесс текущего максимума $M_t = \sup_{s \leqslant t} X_t$ не является марковским, и для того, чтобы применить подход, основанный на использовании свойств марковских процессов, необходимо рассматривать двухмерный процесс (X_t, M_t).

Одной из причин для постановки такой задачи является известная инвестиционная стратегия «покупай и держи». Она основана на эмпирическом наблюдении, состоящем в том, что на больших временных промежутках финансовые рынки обеспечивают достаточно высокую доходность, несмотря на имеющуюся волатильность. Согласно этой точке зрения, предсказание дальнейшего поведения цен невозможно (по крайней мере, для небольших инвесторов), и вместо попытки приобрести акции перед их ростом, лучше просто «купить и держать».

В пользу такого подхода говорит гипотеза эффективного рынка, утверждающая, что цена акции в каждый момент времени отражает всю доступную к этому моменту информацию, а следовательно, нет никакого смысла совершать финансовые операции в краткосрочной перспективе. Также сторонники упоминают о транзакционных издержках (оплата брокерских услуг, а также разница между рыночными ценами покупки и продажи). Очевидно, что указанная стратегия минимизирует количество проведенных операций (и, таким образом, размер издержек).

Первыми теорию оптимальной остановки к стратегии «покупай и держи» применили Ширяев, Сюй и Чжоу в работе [9]. В построенной ими модели цена акции описывается геометрическим броуновским движением:

$$dX_t = (a - r)X_t dt + \sigma X_t dB_t\,. \tag{1}$$

В таком случае естественным образом возникает следующая задача об оптимальной остановке:

$$V = \sup_{\tau \leqslant T} \mathbf{E}\left[U\left(\frac{X_\tau}{M_T}\right)\right] \tag{2}$$

для определенной функции полезности U и значения максимума цены $M_t = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s$. В случае логарифмической U эта задача тривиальна, в упомянутой работе рассматривается случай линейной функции полезности. Доказано, что ответ в задаче зависит от значения показателя $\alpha = \frac{a-r}{\sigma^2}$ следующим образом: если $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, то оптимальным (и, в случае строгого неравенства, единственным) моментом остановки является $\tau^* = T$, если $\alpha \leqslant 0$, то оптимальным моментом является $\tau^* = 0$. Таким образом, дано математическое обоснование для стратегии «покупай и держи».

Недостающий случай $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ рассмотрели в [10] дю Туа и Пешкир. Кроме того, ими решена похожая задача $V = \inf\limits_{\tau \leqslant T} \mathbf{E}\left(\frac{M_T}{X_\tau}\right)$.

Другой вариант задачи (2) исследовали Дай, Цзин, Чжун и Чжоу в работе [11]. В этой статье поставлены 4 задачи, включающие в рассмотрение также процесс текущего минимума $m_t = \min\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$:

$$\min_{\tau\leqslant T}\mathbf{E}\left(\frac{X_\tau}{M_T}\right),\quad \min_{\tau\leqslant T}\mathbf{E}\left(\frac{X_\tau}{m_T}\right),\quad \max_{\tau\leqslant T}\mathbf{E}\left(\frac{X_\tau}{M_T}\right),\quad \max_{\tau\leqslant T}\mathbf{E}\left(\frac{X_\tau}{m_T}\right).$$

Здесь в каждом из 4 случаев при определенных промежуточных значениях параметра α области остановки и продолжения наблюдений имеют нетривиальный вид и разделяются некой непрерывной кривой.

Отметим, что во всех упомянутых работах, касающихся вариаций (2) основным этапом решения являлось приведение исходной задачи к форме Майера для вспомогательного процесса X_t/M_t, являющегося марковским (так называемый «бэнг-бэнг» процесс).

Аналогичная задача была рассмотрена Граверсеном, Пешкиром и Ширяевым в работе [12]: $V_* = \inf\limits_{\tau\leqslant 1}\mathbf{E}(B_\tau - M_1)^2$. Авторами был применен нестандартный подход, также позволивший перейти к рассмотрению классической задачи (на этот раз в форме Лагранжа, $V = \sup\limits_{\tau} E\int_0^t e^{-\lambda_s}L(X_s)ds$) для одномерного марковского процесса. Эта же задаче, но в случае броуновского движения со сносом, изучается в работе [13].

Ещё два варианта оценок расстояния между значением процесса и его абсолютным максимумом были изучены Педерсеном в работе [14]. Предложены следующие задачи об оптимальной остановке:

$$V_* = \inf_{\tau\leqslant 1}\mathbf{E}(M_1 - B_\tau)^q,\quad W_* = \sup_{\tau\leqslant 1}\mathsf{P}(M_1 - B_\tau \leqslant \varepsilon)\,.$$

Вторая из этих задач интересна тем, что максимизируется математическое ожидание разрывной функции от M_1 и B_τ.

Отметим также работу дю Туа и Пешкира [15], где рассмотрен принципиально иной подход к предсказанию максимума броуновского движения со сносом. Авторы вместо минимизации расстояния от текущего значения до абсолютного максимума исследуют следующую задачу: $V_* = \inf\limits_{0\leqslant\tau\leqslant 1}\mathbf{E}\,|\theta-\tau|$, где θ – момент достижения максимума.

Случай процессов с разладкой был рассмотрен Ширяевым и Новиковым в [16]. Ряд авторов рассматривали задачу (2) для процессов, не являющихся диффузиями. Стоит упомянуть работу [17], обобщающую результат работы [9] на случай экспоненциальных процессов Леви.

Альтернативный подход был применен Гораном Пешкиром в работе [18] к задаче об оптимальной остановке для функционала в LS-форме на бесконечном временном горизонте: $V = \sup_{\tau} \mathbf{E}\left(M_T - \int\limits_0^{\tau} c(X_t)dt\right)$. Поставленная задача была решена автором для класса процессов, являющихся темой и настоящей работы – для однородных диффузий, то есть процессов, удовлетворяющих стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t\,. \tag{3}$$

В такой постановке было получено дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять граница оптимальной области остановки и показано, что имеет место «принцип максимума»: из всех решений уравнений необходимо выбрать максимальное, не пересекающее прямую $X_t = M_t$.

Одной из важных техник, использованных автором, является так называемый метод замены пространства. Он состоит в том, что для определенной функции L, называемой функцией шкалы, процесс $Y_t = L(X_t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $dY_t = \sigma(X_t)L'(X_t)dW_t$. Сведя исходную формулировку к задаче для процесса Y_t, мы получаем возможность воспользоваться широким набором фактов из хорошо развитой теории мартингалов.

При этом в упомянутой работе имеются два важных предположения, позволяющих использовать выбранный метод. Во-первых, поставленная задача обладает определенными свойствами монотонности, а во-вторых, рассмотрен только случай бесконечного временного горизонта. Одна из основных целей настоящей работы — предложить подход к такого рода задачам, позволяющий избавиться от указанных предположений.

Упомянутый выше принцип максимума оказывается достаточно универсальным при исследовании задач, связанных с максимальным значением случайного процесса. Педерсеном в работе [19] был расширен класс задач, для которых он применим.

В настоящей работе показано, что он применим к более широкому, чем это сформулировано в [18], классу задач для однородных диффузий. Более того, однородными диффузиями область применимости принципа максимума не ограничивается — как показано Оттом в диссертации [20], аналогичный принцип имеет место и для задач, посвященных изучению спектрально отрицательных процессов Леви (т.е. не имеющих положительных скачков).

Стоит отметить, что в исследовании поставленной задачи важную роль играет специальный вид интегральных уравнений — уравнения Вольтерры:

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)ds\,. \tag{4}$$

В случае, если $f(t) \equiv 0$, такое уравнение называется уравнением первого рода, иначе – второго рода.

Одной из первых работ, посвященных изучению этого вида уравнений, является диссертация Траяна Лалеску [21]. Уравнения Вольтерры встречаются в демографии, теории вязкоупругости, а также страховой математике. За более чем столетие уравнения такого типа были очень хорошо изучены, в частности, множество результатов содержится в книге [22]. Кроме того, уравнения Вольтерры оказываются весьма удобными для численного решения – см. например, книгу [23].

В стохастическом анализе уравнения Вольтерры возникают, как правило, при решении задач о моментах первого достижения. Одними из наиболее полных работ, посвященных этой теме, являются статья [24] и диссертация [25].

Наконец, ещё одно важное семейство результатов, используемое в настоящей работе — теоремы об огибающей. Для параметризованных оптимизационных задач теоремами об огибающей называют утверждения, посвященные дифференцируемости решения по параметру, а также представляющие выражение для производной. Такие утверждения впервые появились в экономике (в теории спроса и предложения). В классическом варианте от допустимого множества в оптимизационной задаче требовалась выпуклость и определенные топологические свойства. Первой работой, сформулировавшей теорему об огибающей для произвольных допустимых множеств, стала статья Пола Милгрома и Ильи Сигала [26].

Результаты работы Милгрома и Сигала уже нашли свое применение в задачах об оптимальной остановке. В статье [27] показано, помимо прочего, что в параметризованной задаче об оптимальной остановке для LS-функционала ответ (функция цены) является дифференцируемым по параметру. При этом исследован только случай бесконечного временного горизонта. Использованный подход расширен в настоящей диссертации.

Основные понятия и определения

Пусть задано пополненное фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$. Однородной диффузией называется процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t\,, \tag{5}$$

где B_t – стандартное броуновское движение, согласованное с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, а функции b и σ липшицевы:

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant C\,|x - y| \tag{6}$$

для некоторой постоянной $C > 0$. Условие (6) обеспечивает существование и Р-п.н. единственность сильного решения уравнения (5) (см., например, [28]).

Напомним, что диффузия, принимающая значения на интервале I, называется *регулярной*, если для любых x, принадлежащего I^0 (внутренности I), и

$y \in I$ для марковского момента $\tau_y = \inf\{t : X_t = y\}$ верно $P_x(\tau_y < \infty) > 0$. Как показано в книге [29], любая диффузия представляется в виде композиции регулярных, поэтому далее можем без ограничения общности предполагать, что X регулярная. Нам понадобится также тот факт, что вероятность $\mathsf{P}(\lim\limits_{t\to\infty} X_t = l_I)$, где l_I – нижняя граница интервала I, либо равна нулю при всех $X_0 \in I$, либо при любых X_0 больше нуля (см., например, [30, гл. 5, предл. 5.22]).

Далее, характеристическим оператором марковского процесса X со значениями в $\mathbb{R}^d$ называется оператор $\mathbb{L}$, действующий на функциях $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, определенный следующим образом:

$$\mathbb{L}_X f(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbf{E}_x f(X_{\tau_u} - f(x))}{\mathbf{E}_x \tau_U}\,, \tag{7}$$

где $\mathbf{E}_x$ обозначает условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\cdot \mid X_0 = x)$, τ_U — момент первого выхода процесса X_t на границу окрестности U, а предел берется по последовательности вложенных окрестностей, пересечением которых является множество из одной точки x.

Характеристический оператор может быть рассмотрен как расширение понятия инфинитезимального генератора:

$$\mathbb{L}_X f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{E}_x f(X_t) - f(x))}{t}\,. \tag{8}$$

Как показано в [31], на множестве, где определены оба этих оператора, они совпадают. Более того, для диффузии (5) характеристический оператор равен (для дважды дифференцируемых функций f)

$$\mathbb{L}_X f(x) = b(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)\,. \tag{9}$$

Основные положения, выносимые на защиту:

Диссертация состоит из трёх глав, посвященных различным постановкам задачи об оптимальной остановке для однородной диффузии вместе с её абсолютным (или текущим) максимумом. Наиболее общая постановка содержится в третьей главе — она включает в себя задачу, рассмотренную в главе 1, и использует методы, являющиеся обобщением методов главы 2.

Подход, использованный во всех трёх главах, является достаточно типичным для задач об оптимальной остановке. Он основан на том, чтобы вначале угадать решение, исходя из субгармонической характеризации функции цены, а также принципов нормального отражения и гладкого склеивания. После того, как решение угадано, доказывается так называемая верификационная теорема, которая является самой сложной частью решения задачи.

Стоит отметить, что во второй и третьей главах отдельный интерес представляет вопрос об остановке процесса на диагонали, то есть в точках, где $X_t = M_t$. Возможности для применения общей теории в этом случае ограничены в связи с тем, что, как будет показано, в этих точках целевая функция не принадлежит области определения характеристического оператора процесса.

Перейдём к подробному описанию содержания каждой главы.

В первой главе решена задача об оптимальной остановке для русского опциона в модели Башелье. Введенная в 1900г. в работе [32], эта модель стала первой, применившей броуновское движение к исследованию динамики цен активов. Задача об оптимальной остановке для русского опциона в указанной модели принимает вид

$$\widehat{V}_T = \sup_{\tau \leqslant T} \mathbf{E}\left[\max_{u \leqslant \tau} \widehat{X}_u - c\tau\right],$$

где $\widehat{X}_t = \mu t + B_t$.

Доказано, что оптимальный момент остановки имеет вид $\tau^* = \inf\{t : \max\limits_{u \leqslant t} \widehat{X}_u - \widehat{X}_t \geqslant b(t)\}$, где $b(t)$ – решение уравнения Вольтерры

$$\mathbb{A}(t, T, b(t)) = b(t) + (c - \mu)(T - t) - c \int\limits_0^{T-t} \mathbb{B}(t, u, b(t), b(t+u))du \qquad (10)$$

для некоторых операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, явный вид которых также представлен.

В части 1.3 исследована асимптотика решения при $T - t \to 0$, а также при $T - t \to \infty$. В частности, доказано, что при $t \to T$ граница $b(t) = \sqrt{(T-t)\ln^{-1}(T-t)} + O(T-t)$.

Заметим, что при $T = \infty$, то есть в случае, когда временной горизонт бесконечен, решение поставленной задачи просто: необходимо останавливаться, как только величина $\max\limits_{u \leqslant t} \widehat{X}_u - \widehat{X}_t$ достигает определенного значения S_0. Логичным было бы ожидать, что при $T \to \infty$ граница $b(t)$ должна стремиться к S_0. Доказано, что такая сходимость действительно имеет место, причём

$$S_0 - b(t) \leqslant \sqrt{D/(2c)}e^{q(T-t)/2}, \tag{11}$$

где $q = -\frac{\min(\mu,0)^2}{4} - \frac{\pi^2}{4S_0^2}$ и D – некоторая положительная константа.

Во второй главе мы переходим к исследованию задачи об оптимальной остановке для произвольной функции, зависящей от максимального значения процесса (гладкой и удовлетворяющей определенным условиям для роста на бесконечности). Поскольку для многих диффузий значение максимума на всей положительной полупрямой может быть не определено (см. например, [33, упр. 3.12, стр. 311]), то имеет смысл также рассмотреть аналогичную задачу для функций вида $h(X_\tau, M_{\tau+\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Как показано, обе эти формулировки являются частными случаями следующей задачи:

$$V_* = \sup_\tau \mathbf{E}_{xs} f(X_\tau, M_\tau), \tag{12}$$

где для функции $f(x,s)$ выполнено условие $f'_s(x,s)|_{x=s} = 0$.

Доказано, что в случае, когда $\mathbb{L}_X f(s,s) > 0$, то останавливаться в точке $X_t = M_t = s$ не оптимально (напомним, что для точек, не лежащих на диагонали $x = s$, это следует из общей теории об оптимальной остановке).

Найдено дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять граница оптимальной области остановки в точках, не лежащих на диагонали:

$$g'(s) = -\frac{f'_s(g(s),s)\Lambda^{-1}(g(s),s) + f''_{xs}(g(s),s)}{f''_{xx}(g(s),s) + 2\mu(s)f'_x(g(s),s)}, \tag{13}$$

где $\Lambda(g(s), s) = \frac{L(s)-L(g(s))}{L'(g(s))}$.

Сформулирован (по аналогии с работой [27]) принцип однократного пересечения и доказано, что для любой функции можно построить её модификацию, удовлетворяющую принципу однократного пересечения, и при этом сохраняющую решение исходной задачи.

Далее, для функций, удовлетворяющих принципу однократного пересечения, показано, что имеет место принцип максимума, а именно: пусть $g_*(s)$ – максимальное решение уравнения, а $\tau_* = \inf\{t : X_t \leqslant g(M_t)\}$, тогда, если $\mathbf{E}\, f(X_{\tau_*}, M_{\tau_*}) < \infty$, то τ_* является оптимальным моментом остановки, в противном случае оптимального момента остановки не существует.

Рассмотрен частный случай, а именно решена в случае $\varepsilon > 0$ задача $V = \sup\limits_{\tau \geqslant 0} \mathbf{E}\,(X_\tau - m_{\tau+\varepsilon})$ для процесса X_t, являющегося геометрическим броуновским движением и $m_t = \min\limits_{s \leqslant t} X_s$. Доказано, что оптимальный момент остановки в данном случае имеет вид:

1. Если $\mu < \frac{1}{2}$, то оптимального момента остановки не существует, а $V_*(x,s) = \infty$.

2. Если $\mu = \frac{1}{2}$, то $V_* = \mathbf{E}\,(X_0 - m_\varepsilon)$, причём равенство достигается на любом моменте остановки из $\mathfrak{M}_X(f)$.

3. Если $\mu > \mu_0(\varepsilon)$, где μ_0 — единственный корень уравнения
$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\phi(-\mu\sqrt{\varepsilon}) + 2(\mu-1)e^{\varepsilon(\frac{1}{2}-\mu)}\Phi((\mu-1)\sqrt{\varepsilon}) = 2\mu - 1\,, \quad (14)$$
то оптимальным моментом остановки является $\tau = 0$

4. Наконец, если не выполнено ни одно из указанных условий, то оптимальным моментом остановки является $\tau_* = \inf\{t : \ln X_t - \ln m_t = d\}$, где d — единственный корень уравнения
$$\frac{2e^{-d}}{\sqrt{\varepsilon}}\phi\left(\frac{d-\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 2(\mu-1)e^{\varepsilon(\frac{1}{2}-\mu)}\Phi\left(\frac{-d-\varepsilon+\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = 2\mu - 1\,.$$

В третьей главе рассматривается самый важный и сложный случай — произвольная целевая функция на конечном временном интервале. Основная сложность, возникающая при такой постановке, состоит в том, что задача более не является однородной во времени.

Интерес представляет задача вида

$$V_* = \sup_{\tau \leqslant T} f(X_\tau, M_\tau, \tau)\,, \tag{15}$$

где $f'_s(x,s,t)|_{x=s} = 0$. Важным частным случаем является задача

$$V_* = \sup_{\tau \leqslant T} h(X_\tau, M_T)\,. \tag{16}$$

Доказано, так же как и в главе 2, что в случае, когда $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(s,s,t) > 0$, то останавливаться в точке $X_t = M_t = s$ не оптимально. Несмотря на то, что формулировка этого факта аналогична случаю бесконечного временного горизонта, он требует значительно более сложных рассуждений и аккуратных оценок.

Доказано, что правая производная $V'_s(x, s+, t)$ существует при всех $x, s \in I$, $x \leqslant s$, $t \in [0,T]$ и на множестве продолжения наблюдений C удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) V'_s(x, s+, t) = 0 \tag{17}$$

Найдена система из двух уравнений — интегрального уравнения Вольтерры и дифференциального уравнения, — которой должна удовлетворять граница оптимальной области остановки в точках, не лежащих на диагонали:

$$g'_s(s,t) = \frac{\sigma^2(g(s,t))}{2} \cdot \frac{\int\limits_t^T f'_s(g(s,\theta),s,\theta)d\psi(s,t,\theta - f''_{xs}(g(s,t),s,t)}{\left(f'_t + \mathbb{L}_X f\right)(g(s,t),s,t)}\,,,$$

и

$$\Psi'_x(g(s,t), g(s,r), r) = \int\limits_t^r \Psi(g(s,\theta), g(s,r), r-\theta)d\psi(s,t,\theta), \text{ для всех } t < r \leqslant T\,.$$

Здесь функция $\Psi(x,y,t) = \mathsf{P}_x(X_{t\vee\tau_0} \leqslant y)$.

Кроме того, если исходная задача имеет вид (16), то указанную систему можно упростить таким образом, что при различных t ядро и образ уравнения Вольтерры остаются неизменными (явный вид полученных уравнений приведен в теореме 3.4). Это значительно упрощает исследование и численное решение системы.

Сформулирован принцип однократного пересечения и для функций, ему удовлетворяющих, доказано, что существует максимальная допустимая граница g_* (т.е., являющаяся решением построенного уравнения во всех точках, не лежащих на диагонали). Более того, показано, что момент остановки $\tau_* = \inf\{t : X_t \leqslant g(M_t, t)\}$ является оптимальным в рассматриваемой задаче.

Наконец, рассмотрена задача о минимизации отношения к абсолютному максимуму для броуновского движения со сносом. В этом случае оказывается возможным найти явное выражение для функции $\Psi(x, y, t)$. Показано, что такая целевая функция удовлетворяет условию однократного пересечения, а также что начальное условие $g(s, T) = s$ задаёт максимальное решение. Поставленная задача решена численным методом (с использованием библиотеки Math.NET Numerics).

Апробация работы.

1. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на семинаре кафедры теории вероятностей МГУ им. М.В. Ломоносова „Стохастический анализ и мартингальные методы"под руководством академика РАН А. Н. Ширяева (2007-2014).

2. На русско-японском симпозиуме „Сложные статистические модели"в МИАН им. Стеклова (2007).

3. На международной конференции «European Young Statisticians Meeting» в Бухаресте, Румыния (2009).

4. На Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ им. М.В. Ломоносова (2014)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы автором в 3 работах, все из которых – статьи в ведущих рецензируемых научных журналах. Список приведен в конце диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 90 страниц с 4 рисунками. Список литературы содержит 48 наименований.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику, доктору физико-математических наук, профессору Альберту Николаевичу Ширяеву за постановку задачи, неоценимую помощь и интерес к работе.

Глава 1

Башелье-версия русского опциона на конечном интервале

1.1 Постановка задачи

В случае бесконечного временного горизонта оптимальное правило остановки формулируется просто: необходимо остановиться, как только разность или отношение (в случаях, соответственно, моделей Башелье и Блэка-Шоулза) максимума цены актива до настоящего момента и текущей цены достигнет определённого значения.

В том случае если временной горизонт конечен (иными словами, если остановка наблюдений должна произойти не позже некоторого момента времени T), задача значительно усложняется. Как показано для случая модели Блэка-Шоулза в работах [34] и [35], оптимально останавливаться тогда, когда указанное отношение достигает некоторой границы, непрерывно зависящей от времени. Настоящая глава посвящена исследованию вида этой кривой для модели Башелье.

В п. 1.2.1 после некоторых предварительных преобразований использован стандартный для задач об оптимальной остановке метод сведения к т.н. "задаче со свободной границей". С помощью него получено явное интегральное уравнение, являющееся уравнением Вольтерры второго рода, решение которого и даёт нам искомую кривую. Хотя это уравнение и возможно решить численно (результаты приведены в приложении), оно достаточно сложно и найти решение в явном виде не представляется возможным. Более того, из этого уравнения не удаётся даже получить асимптотическое поведение искомой кривой ни в нуле, ни на бесконечности.

Асимптотика кривой вблизи нуля находится аналогично американскому опциону — рассуждения основываются на работе [35] и приводятся здесь скорее для полноты изложения. Асимптотика границы на бесконечности показывает нам, насколько быстро граница области остановки с возрастанием времени до истечения стремится к значению для бесконечного временного горизонта. При её поиске, хотя используется та же главная идея, что и в [36], сами рассуждения значительно отличаются от проведённых в этой работе.

1.2 Решение задачи

1.2.1 Уравнение для границы области остановки

Предположим, что динамика цен $(\widehat{X}_t)_{t\geqslant 0}$ некоторого финансового актива описывается моделью Башелье:

$$\widehat{X}_t = \mu t + B_t\,,$$

где $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ стандартное броуновское движение.

Рассматривается платежное поручение, позволяющее обладателю предъявить его к исполнению в любой конечный момент времени τ, и предоставляющее выплаты в размере

$$\max_{u\leqslant\tau}\widehat{X}_u - c\tau\,. \tag{1.1}$$

Общая теория оценки опционов американского типа ([37]) утверждает, что для нахождения справедливой цены такого опциона необходимо решить следующую задачу об оптимальной остановке:

$$\widehat{V}_T = \sup_{\tau\leqslant T}\mathbf{E}\left[\max_{u\leqslant\tau}\widehat{X}_u - c\tau\right], \tag{1.2}$$

здесь и далее τ предполагается моментом остановки относительно (F_t^B), где $F_t^B = \sigma(B_s, s\leqslant t)$, а $c\geqslant 0$.

Теорема 1.1. *Оптимальным моментом остановки в задаче* (1.2) *является момент первого выхода процесса* $\max\limits_{u\leqslant t}\widehat{X}_u - \widehat{X}_t$ *на кривую* $b(t)$*, заданную как решение интегрального уравнения*

$$\mathbb{A}(t,T,b(t)) = b(t) + (c-\mu)(T-t) - c\int\limits_0^{T-t}\mathbb{B}(t,u,b(t),b(t+u))du \tag{1.3}$$

где $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *— операторы, явный вид которых указан в* (1.20).

Доказательство. Попробуем определить размерность этой задачи. Несложно видеть, что процесс $\max\limits_{u\leqslant t}\widehat{X}_u$ марковским не является. Свойством марковости обладает процесс $(\widehat{X}_t, \max\limits_{u\leqslant t}\widehat{X}_u)$, таким образом, поставленная задача двумерная. Тем не менее, как показывает следующая лемма, ее можно свести к одномерной.

Лемма 1.1. *Имеет место представление*

$$\widehat{V}_T = \sup_{t\leqslant T}\mathbf{E}\,G(X_\tau,\tau)\,, \tag{1.4}$$

где $\mathrm{Law}(X_t; t\leqslant T) = \mathrm{Law}(\max\limits_{u\leqslant t}\widehat{X}_u - \widehat{X}_t; t\leqslant T)$ *и* $G(x,t) = x-(c-\mu)t$*,* $x\geqslant 0$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\max_{u\leqslant t}\widehat{X}_u - ct = \left(\max_{u\leqslant t}\widehat{X}_u - \widehat{X}_t\right) + \left(\widehat{X}_t - ct\right)$ и, значит,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\max_{u\leqslant\tau}\widehat{X}_u - c\tau\right] = \mathbf{E}\left[\max_{u\leqslant\tau}\widehat{X}_u - \widehat{X}_t\right] + \mathbf{E}\Big[\widehat{X}_t \\ - c\tau\Big] = \mathbf{E}\left(\left[\max_{u\leqslant\tau}\widehat{X}_u - \widehat{X}_t\right] + (\mu - c)\tau\right).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Обозначим $c - \mu = r$ и используем тот факт (доказанный в [34]), что

$$\mathrm{Law}\left(\max_{u\leqslant t}\widehat{X}_u - \widehat{X}_t; t \leqslant T\right) = \mathrm{Law}\left(|Y_t^\mu|\,; t \leqslant T\right), \tag{1.6}$$

где $Y^\mu = (Y_t^\mu)_{t\leqslant T}$ — это «бэнг-бэнг» процесс, заданный стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY_t^\mu = -\mu\,\mathrm{sign}\,Y_t^\mu dt + dB_t\,. \tag{1.7}$$

Из соотношений (1.5) и (1.6) можно заключить, что достаточно рассматривать новую задачу

$$V_T = \sup_{\tau\leqslant T}\mathbf{E}\left[|Y_\tau^\mu| - r\tau\right]. \tag{1.8}$$

При этом, очевидно, $V_T = \widehat{V}_T$.

Процесс $|Y^\mu|$ — отражённое броуновское движение со сносом: $|Y^\mu| = RBM(-\mu) = X$. Это диффузионный (строго марковский) процесс с инфинитезимальным генератором $\mathbb{L}_X$, действующим на пространстве

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}_X) = \left\{f \in C_b^2(\mathbb{R}+)\middle| f'(0+) = 0\right\} \tag{1.9}$$

следующим образом:

$$\mathbb{L}_x = -\mu f' + \frac{1}{2}f''\,. \tag{1.10}$$

Итак, (1.8) можно записать как

$$V_T = \sup_{\tau\leqslant T}\mathbf{E}\,G(X_\tau, \tau)\,, \tag{1.11}$$

где $G(x,t) = x - rt$, $x \geqslant 0$. Лемма 1.1 доказана. □

Итак, исходная задача сведена к одномерной. Теперь рассмотрим последовательность задач

$$V(t,x) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T-t} \mathbf{E}_{tx}\, G(X_{t+\tau}, t+\tau)\,, \tag{1.12}$$

где E_{tx} обозначает условное математическое ожидание $\mathbf{E}\,(\cdot|X_t = x)$.

По формуле Ито-Танака $dX_t = d\,|Y^\mu_t| = -\mu dt + \operatorname{sign} Y^\mu_t dB_t + dL^0(Y^\mu)_t$ (здесь L^0 обозначает локальное время Леви процесса в нуле) и, следовательно,

$$\begin{aligned} V(t+s, X_{t+s}) = V(t, x_t) + \int_t^{t+s} \Bigg[\Bigg(V'_t \\ - \mu V'_x + \frac{1}{2} V''_{xx}\Bigg)(u, X_u)du + V'_x(u, X_u) dL^0(Y^\mu)_u\Bigg] + M_s\,, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $M_s = \int_0^s V'_x(t+u, X_{t+u}) \operatorname{sign} Y^\mu_u dB_t$.

□

Из стандартных рассуждений, основанных на строгой марковости, можно получить *принцип нормального отражения*:

$$V'_x(t, 0) = 0 \tag{1.14}$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в книге [38].

Из принципа нормального отражения следует, что при $x = 0$, т.е. в точках роста $L^0(Y^\mu)_u$ выполнено равенство $V'_x(t,x) = 0$, значит, $\int_0^s V'_x(t+u, X_{t+u}) dL^0(Y^\mu)_u = 0$.

Можно надеяться, что оптимальный момент остановки в задачах (1.12) определяется некоторой границей $b = (b(t))_{t\leqslant T}$, разделяющей области продолжения наблюдений $C_T = \{(t,x), t \leqslant T, x \geqslant 0 : x < b(t)\}$ и остановки наблюдений $D_T = \{(t,x), t \leqslant T, x \geqslant 0 : x \geqslant b(t)\}$. Отметим, что, как показано в работе [39], это верно для произвольных однородных диффузий с дважды дифференцируемыми коэффициентами для полунепрерывных сверху целевых функций.

Предположим, что области остановки и продолжения наблюдений имеют указанный вид для некоторой убывающей функции $b(t)$. Тогда выражение (1.13) можно записать следующим образом:

$$
\begin{gathered}
V(t, X_t) + \int_0^s \Big(\mathbf{I}\left(X_{t+u} \geqslant b(t+u)\right) \left[V_t' - \mu V_x' + \frac{1}{2} V_{xx}''\right] (t+u, X_{t+u}) + \\
\mathbf{I}\left(X_{t+u} < b(t+u)\right) \left[V_t' - \mu V_x' + \frac{1}{2} V_{xx}''\right] (t+u, X_{t+u}) \Big)\, du + M_s\,.
\end{gathered} \tag{1.15}
$$

При этом там, где наблюдения продолжаются, т.е. там, где выполнено неравенство $X_u < b(u)$, имеет место $V_t' - \mu V_x' + \frac{1}{2} V_{xx}'' = 0$. Действительно, двумерный процесс $Z_t = (X_t, t)$ марковский, его генератор $\mathbb{L}_Z$ равен $\frac{\partial}{\partial} t - \mu \frac{\partial}{\partial} x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial^2} x^2$. Как показано в [38, гл. 3, п. 2.1], внутри области продолжения наблюдений имеет место равенство $\mathbb{L}_Z V = 0$, т.е., с учётом вида $\mathbb{L}_Z$, имеем $V_t' - \mu V_x' + \frac{1}{2} V_{xx}'' = 0$.

Там же, где наблюдения останавливаются, $V(t, x)$ тождественно равно $G(t, x)$, следовательно, $V_t' - \mu V_x' + \frac{1}{2} V_{xx}'' = G_t' - \mu G_x' + \frac{1}{2} G_{xx}'' = -c$. Таким образом,

$$
V(t+s, X_{t+s}) = V(t, X_t) - c \int_t^{t+s} \mathbf{I}\left(X_u \geqslant b(u)\right) du + M_s \tag{1.16}
$$

Положим $s = T - t$, $X_t = x$:

$$
V(T, X_T) = V(t, X_t) - c \int_t^T \mathbf{I}\left(X_u \geqslant b(u)\right) du + M_s\,. \tag{1.17}
$$

Беря математическое ожидание в левой и правой части, находим

$$
\mathbf{E}_{tx}\, V(T, X_T) = V(t, x) - c \int_t^T \mathbf{E}_{tx} \left[\mathbf{I}(X_u \geqslant b(u))\right] du\,. \tag{1.18}
$$

Если $x = b(t)$, то $E_{t,b(t)}\left[X_T - rT\right] = V(t, b(t)) - c \int_t^T \mathbf{E}_{t,b(t)} \left[\mathbf{I}(X_u \geqslant b(u))\right] du$, или

$$
E_{t,b(t)} X_T = b(t) + r(T - t) - c \int_t^T \mathbf{E}_{t,b(t)} \left[\mathbf{I}(X_u \geqslant b(u))\right] du \tag{1.19}
$$

Формально, если положить

$$\mathbb{A}(t,T,b(t)) = \mathbf{E}_{t,b(t)}\, X_T \tag{1.20a}$$

$$\mathbb{B}(t,u,b(t),b(u)) = \mathbf{E}_{t,b(t)}\, \mathbf{I}(X_u \geqslant b(u)) \tag{1.20b}$$

,

то для нахождения b необходимо решить интегральное уравнение

$$\mathbb{A}(t,T,b(t)) = b(t) + (c-\mu)(T-t) - c\int_t^T \mathbb{B}(t,u,b(t),b(u))du\,. \tag{1.21}$$

Итак, с учётом сделанного предположения о виде оптимального правила остановки, мы доказали теорему 1.1. Доказательство того, что это предположение верно, приведено в следующем параграфе. Сейчас рассмотрим уравнение подробнее для частного случая.

Пусть $\mu = 0$, то есть, мы рассматриваем задачу

$$\widehat{V}_T = \sup_{t\leqslant T} \mathbf{E}\left[\max_{u\leqslant\tau} B_u - c\tau\right] = \sup_{\tau\leqslant T} \mathbf{E}\left[|B_\tau| - c\tau\right]. \tag{1.22}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(t,T,b(t)) &= \mathbf{E}\,|B_{T-t}+b(t)| = \mathbf{E}\left|\sqrt{T-t}B_1 + b(t)\right| = \sqrt{T-t}\,\mathbf{E}\left|B_1 + \frac{b(t)}{\sqrt{T-t}}\right| \\ &= \sqrt{T-t}\left[\frac{b(t)}{\sqrt{T-t}}\left(1\right.\right. \\ &\left.\left. - 2\Phi\left(-\frac{b(t)}{\sqrt{T-t}}\right)\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left\{-\frac{b^2(t)}{2(T-t)}\right\}\right]\end{aligned} \tag{1.23}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(t,u,b(t),b(u)) &= \mathbf{E}\,\mathbf{I}\left(|B_u + b(t)| > b(u)\right) = \mathsf{P}\left\{\left|\sqrt{u-t}B_1 + b(t)\right| > b(u)\right\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{b(u)-b(t)}{\sqrt{u-t}}\right) + \Phi\left(\frac{-b(u)-b(t)}{\sqrt{u-t}}\right).\end{aligned} \tag{1.24}$$

Подставляя эти выражения в (1.21), получаем

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{2}{\pi}(T-t)}\exp\left\{-\frac{b^2(t)}{2(T-t)}\right\}-2b(t)\Phi\left(-\frac{b(t)}{\sqrt{T-t}}\right)\\&=c\int_t^T\left[\Phi\left(\frac{b(u)-b(t)}{\sqrt{u-t}}\right)-\Phi\left(\frac{-b(u)-b(t)}{\sqrt{u-t}}\right)\right]du\,.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Для того, чтобы численно решить это уравнение, преобразуем его. Введём переменную $s=T-t$ и обозначим $h(s)=b(T-s)$, тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{2s}{\pi}}\exp\left\{-\frac{h^2(s)}{2s}\right\}-2h(s)\Phi\left(-\frac{h(s)}{\sqrt{s}}\right)\\&=c\int_0^s\left[\Phi\left(\frac{h(s-u)-h(s)}{\sqrt{u}}\right)-\Phi\left(\frac{-h(s-u)-h(s)}{\sqrt{u}}\right)\right]du\,.\end{aligned}\tag{1.26}$$

В таком виде уравнение допускает приближенное решение (см. рис. 1.1) с использованием, например, метода, изложенного в книге [23]. Результат численного решения приведён на рисунке 1.1.

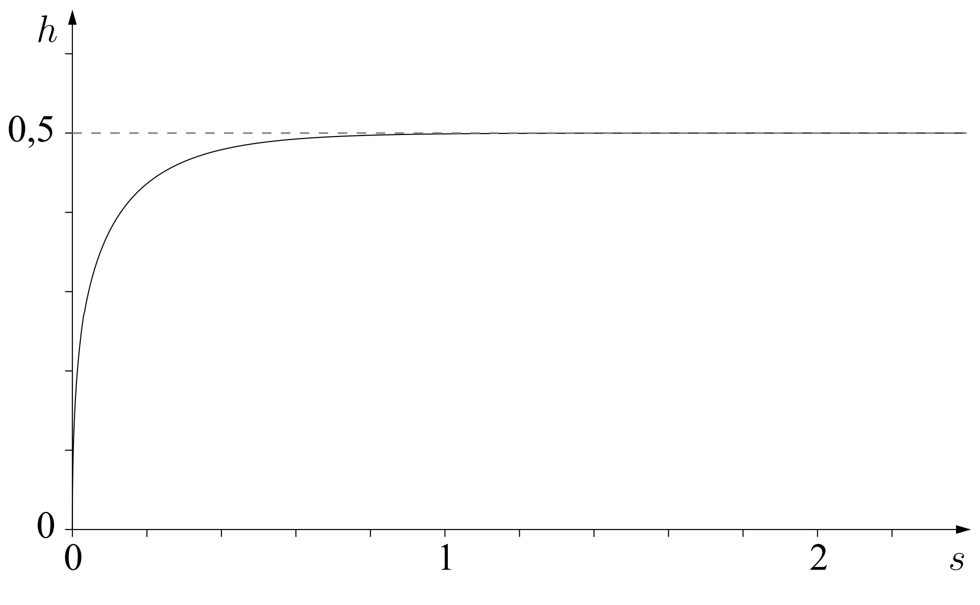


Рисунок 1.1: Результат численного решения уравнения 1.26

Заметим, что при $T=\infty$ решение существенно упрощается. В этом случае нам необходимо решить задачу:

$$V_\infty=\sup_{\tau<\infty}\mathbf{E}\left(|B_\tau|-c\tau\right).\tag{1.27}$$

Используя тождество $\mathbf{E}\,\tau = \mathbf{E}\,B_\tau^2$, получаем $V_\infty = \sup_{\tau<\infty} \mathbf{E}\left[|B_\tau| - cB_\tau^2\right]$. Заметив, что функция $|x| - cx^2$ достигает своего максимума в точках $|x| = \frac{1}{2c}$, получаем, что оптимальный момент остановки τ^* в этом случае равен $\inf\{t : |B_t| = \frac{1}{2c}\}$ и $V_\infty = \frac{1}{2c} - c\left(\frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c}$. Это позволяет проверять результаты численного моделирования, поскольку, как будет показано далее, $h(t)$ при $t \to \infty$ сходится к $\dfrac{1}{2c}$.

1.2.2 Доказательство оптимальности

Теперь докажем, что момент выхода процесса X_t на границу $b(t)$ действительно оптимален в исходной задаче об оптимальной остановке. Идейно доказательство повторяет приведённое в книге [38] для случая геометрического броуновского движения, однако некоторые существенные отличия всё же имеются.

Для установления некоторых свойств функции $V(t,x)$ нам понадобится её представление через $\widehat{X}_t$. Заметим, что $\mathbf{E}_{t,x}$ есть условное математическое ожидание при условии события $\left\{\widehat{M}_t - \widehat{X}_t = x\right\}$, где мы обозначили $\widehat{M}_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t} \widehat{X}_s$. Итак,

$$V(t,x) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T-t} \mathbf{E}\left(\widehat{M}_{t+\tau} - \widehat{X}_{t+\tau} - c(t+\tau)\middle|\widehat{M}_t - \widehat{X}_t = x\right). \qquad (1.28)$$

Заметим, что в силу независимости приращений броуновского движения, данное условное математическое ожидание не зависит от $\widehat{X}_t$, следовательно, его можно записать в виде $\mathbf{E}\left(\widehat{M}_{t+\tau} - \widehat{X}_{t+\tau} - c(\tau+t)\middle|\widehat{M}_t, \widehat{X}_t = 0\right)$. Вводя процесс $\widetilde{X}_t$, также являющийся броуновским движением со сносом μ и с условием $\widetilde{X}_0 = 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} V(t,x) &= -ct + \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T-t} \mathbf{E}\left(\max(\widetilde{M}_\tau - \widetilde{X}_\tau, x) - c\tau\right) \\ &= -ct + \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T-t} \mathbf{E}\left(\max(X_\tau, x) - c\tau\right), \end{aligned} \qquad (1.29)$$

где $\widetilde{M} = \max_{0\leqslant s\leqslant t} \widetilde{X}_s$.

Теперь, имеет место следующая

Лемма 1.2. *$V(t,x)$ возрастает и выпукла вниз по x при любом t.*

Доказательство. Функция $\max(X_\tau, x) - c\tau$ возрастает и выпукла вниз по x при любом τ. Взятие математического ожидания, разумеется, сохраняет эти свойства в силу линейности. Очевидно также, что взятие супремума сохраняет свойство возрастания. Наконец, если $f(\tau, x)$ – функция, обладающая указанными свойствами, и $x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_3$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\alpha \sup_\tau f(\tau, x_1) + (1-\alpha)\sup_\tau f(\tau, x_3) = \sup_\tau \alpha f(\tau, x_1) + \sup_\tau (1-\alpha) f(\tau, x_3) \leqslant \sup_\tau [\alpha f(\tau, x_1) + (1-\alpha) f(\tau, x_3)] \leqslant \sup_\tau f(\tau, x_2)\,. \tag{1.30}$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 1.3. *Функция $V : S = [0,T] \times [0,\infty)$ является непрерывной.*

Доказательство. Воспользовавшись представлением (1.29), получим для $x > y$:

$$V(t,x) - V(t,y) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T-t} \mathbf{E}\left(\max(X_\tau, x) - c\tau\right) - \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T-t} \mathbf{E}\left(\max(X_\tau, y) - c\tau\right) \leqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T-t} \left(\max(X_\tau, x) - \max(X_\tau, y)\right) \leqslant x - y \tag{1.31}$$

Таким образом, доказана равномерная непрерывность по x, и для доказательства непрерывности по паре переменных осталось доказать непрерывность по t при каждом фиксированном x. Действительно, пусть $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ и задано некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда возьмём момент остановки τ_1^ε таким, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{E}_{t_1,x} G(X_{t_1+\tau_1^\varepsilon}, t_1 + \tau_1^\varepsilon) \geqslant V(t_1, x) - \varepsilon$. Положим $\tau_2^\varepsilon = \min(\tau_1^\varepsilon, T - t_2)$. Пользуясь очевидным неравенством $V(t_2, x) \geqslant \mathbf{E}_{t_2,x} G(X_{t_2+\tau_2^\varepsilon}, t_2 + \tau_2^\varepsilon)$ и обозначая условные распределения X при условии $X_{t_1} = x$ через X^1, а при условии $X_{t_2} = x$ через X^2, получим

$$0 \leqslant V(t_1, x) - V(t_2, x) \leqslant \mathbf{E}\left(X^1_{t_1+\tau_1^\varepsilon} - X^2_{t_2+\tau_2^\varepsilon} - r(\tau_1^\varepsilon - \tau_2^\varepsilon)\right) + varepsilon \tag{1.32}$$

Далее, устремим сначала $t_2 - t_1$ к 0 (при этом $\tau_1^\varepsilon - \tau_2^\varepsilon \to 0$ и математическое ожидание тоже устремится к 0), а потом ε к 0. Тогда $V(t_1, x) - V(t_2, x) \to 0$, что и требовалось для доказательства непрерывности V. $\square$

Введём множество продолжения наблюдений

$$C = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, \infty) : V(t, x) > G(x)\} \tag{1.33}$$

и множество остановки

$$D = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, \infty) : V(t, x) = G(x)\}\,. \tag{1.34}$$

Поскольку функции V и G непрерывны, множество C открыто, а D, соответственно, замкнуто. С помощью стандартных рассуждений. основанных на строго марковском свойстве, получим, что момент остановки $\tau_D = \inf\{0 \leqslant s \leqslant T - t : (t + s, X_{t+s} \in D)\}$ является оптимальным в задаче (1.12).

Покажем, что множество продолжения наблюдений C действительно задаётся как $C = \{(t, x) : x < b(t)\}$ для некоторой убывающей функции $b(t)$.

В самом деле, предположим, что $(t, x) \in C$. Тогда, воспользовавшись неравенством (1.31), получим для $y < x$:

$$V(t, y) - y \geqslant V(t, x) - x > 0\,. \tag{1.35}$$

А значит, (t, y) также принадлежит C. Таким образом, области остановки и продолжения наблюдений разделяются графиком некоторой функции $b(t)$. То, что $b(t)$ убывающая, сразу следует из доказанного убывания $V(t, x)$ по t.

Для окончательного решения поставленной задачи осталось показать, что $b(t)$ является единственным решением интегрального уравнения (1.21). Соответствующее доказательство в нашем случае практически не отличается от доказательства, проведённого в [38, гл. 7, п.2.2], поэтому приводить мы его здесь не будем.

1.3 Свойства решения

1.3.1 Асимптотика вблизи T

Заметим, что если мы позволим менять T, то $b(t,T)$ будет зависеть только от $T-t$, поэтому вместо исследования вида кривой b мы будем работать с уже введённой функцией $h(t)=b(T-t)$. Очевидно, что $h(0)=0$ и $h(t)$ возрастает по t. Обозначим $U(t,x)=V_t(0,x)=c(T-t)+V_T(T-t,x)$.

Исследуем сначала асимптотику $b(t)$ при $t\to T$.

Теорема 1.2. *При $t\to T$*

$$b(t)=\sqrt{\frac{T-t}{\ln(T-t)}}+O(T-t). \qquad \textit{(1.36)}$$

Доказательство. Сразу перейдём от рассмотрения асимптотики $b(t)$ при $t\to T$ к изучению асимптотики $h(t)$ при $t\to 0$. Тогда утверждение теоремы можно сформулировать так:

$$h(t)=\sqrt{\frac{t}{\ln t}}+O(t)\,. \qquad (1.37)$$

Воспользовавшись тем, что $\mathrm{Law}(X_t)=\mathrm{Law}(\max_{u\leqslant t}\widehat{X}_u-\widehat{X}_t)$, напишем:

$$\mathbf{E}\,X_t=\mathbf{E}\left(\max_{u\leqslant t}\widehat{X}_u-\widehat{X}_t\right)=\mathbf{E}\max_{u\leqslant t}(\mu u+B_u)-\mu t\,. \qquad (1.38)$$

Далее, очевидно, что $\max_{u\leqslant t}(\mu u+B_u)\geqslant\max_{u\leqslant t}B_u+\min_{u\leqslant t}\mu u$, при этом второе слагаемое равно $\min(\mu t,0)$. Математическое ожидание максимума броуновского движения до момента t, как известно, равно $\sqrt{t\pi}/2$. Итак, получено неравенство

$$\mathbf{E}\,X_t\geqslant\sqrt{\frac{t\pi}{2}}-\mu t+\min(\mu t,0)=\sqrt{\frac{t\pi}{2}}-\mu^+t\,, \qquad (1.39)$$

где $\mu^+=\max(\mu,0)$.

Рассмотрим функцию $W(x)=\mathbf{E}_x\,X_t-rt$, где $\mathbf{E}_x$ обозначает условное математическое ожидание при условии $X_0=x$. Заметим, что если t мало, то $W(x) \geqslant W(0) > 0$ в силу найденной асимптотики для $\mathbf{E}\, X_t$, а значит, при достаточно малых x выполнено неравенство $W(x) > x$. При $x > h(t)$ имеем $W(x) \leqslant U(t,x) = x$. В силу выпуклости вниз $W(x)$ как функции от x, уравнение $W(x) = x$ при фиксированном t имеет единственный корень $a(t)$.

Лемма 1.4. *Если $t \to 0$, то $a(t) - h(t) = O(\sqrt{t})$.*

Доказательство. Заметим, что $a(t) < h(t)$, поскольку $a(t) = W(a(t)) < U(t, a(T))$, а значит, $a(t)$ лежит в области продолжения наблюдений. Далее, поскольку $U(t,x) \in C^2$ по x, то $U(t,a(t))$ может быть представлено в виде

$$U(t,a(t)) = U(t,h(t)) + (a(t)-h(t))U'_x(t,h(t)) + \frac{1}{2}\left(a(t)-h(t)\right)^2 U''_{xx}(t,\xi)\,, \tag{1.40}$$

где $a(t) < \xi < h(t)$. Условие гладкого склеивания для $V(t,x)$ даёт равенство $U'_x(t,h(t)) = 1$, а $U(t,h(t)) + a(t) - h(t) = a(t) = W(a(t))$. Таким образом, имеем

$$U(t,a(t)) - W(a(t)) = \frac{1}{2}\left(a(t)-h(t)\right)^2 U''_{xx}(t,\xi)\,. \tag{1.41}$$

С другой стороны, заметим, что $U(t,x) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\mathbf{E}(\max_{u\leqslant\tau}\widehat{X}_u \vee x - c\tau) \leqslant \mathbf{E}(\max_{u\leqslant t}\widehat{X}_u \vee x) = E_x X_t + \mu t$ и

$$U(t,x) - W(x) \leqslant \mathbf{E}_x\, X_t + \mu t - \mathbf{E}_x\, X_t + rt = ct\,. \tag{1.42}$$

Также имеем $\frac{1}{2}U''_{xx} = \mu U'_x + U'_t$. Далее, $U'_t \geqslant 0$ в силу возрастания $U(t,x)$ по t. Поскольку также $U'_x \geqslant 0$, то и $U''_{xx} \geqslant 0$. Это означает, что $U'_x(t,\xi) \geqslant U(t,\xi)/\xi \geqslant 1$. С учётом вышесказанного,

$$\left(a(t)-h(t)\right)^2 = 2\frac{U(t,a(t)) - W(a(t))}{U''_{xx}(t,\xi)} \leqslant \frac{2ct}{\mu U'_x + U'_t} \leqslant \frac{2ct}{\mu}\,. \tag{1.43}$$

□

Лемма 1.4 доказана, значит, для того, чтобы найти асимптотику $h(t)$, достаточно исследовать поведение $a(t)$ вблизи 0.

Лемма 1.5. *При $t \to 0$ верно $a(t) \sim \sqrt{t \ln t^{-1}}$.*

Доказательство. По определению $a(t) + r(t) = \mathbf{E}_{a(t)} X_t = \mathbf{E}(\max_{u\leqslant t} \widehat{X}_u \vee a(t)) - \mu t$, или $\mathbf{E}(\max_{u\leqslant t} \widehat{X}_u - a(t))^+ = (r+\mu)t = ct$. Но $\max_{u\leqslant t} \widehat{X}_u - \mu^+ t \leqslant \max_{u\leqslant t} B_u \leqslant \max_{u\leqslant t} \widehat{X}_u + \mu^- t$. Отсюда следует, что $0 < c - \mu^- \leqslant t^{-1}\,\mathbf{E}(\max_{u\leqslant t} \widehat{B}_u - a(t) - a(t))^+ \leqslant c + \mu^+$. Далее, $\mathbf{E}(\max_{u\leqslant t} B_u - a(t))^+ = \sqrt{t}\,\mathbf{E}(\max_{u\leqslant 1} B_u - \alpha(t))^+$, где $\alpha(t) = a(t)/\sqrt{t}$. Таким образом, $\mathbf{E}(\max_{u\leqslant 1} B_u - \alpha(t))^+ = O(\sqrt{t})$, что возможно лишь в том случае, когда $\alpha(t) \to \infty$ при $t \to 0$. Далее, обозначая $\max_{u\leqslant 1} B_u = \xi$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi - \alpha)^+ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_\alpha^\infty (x-\alpha) e^{-x^2/2} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\alpha^2} \int_0^\infty y e^{-y-y^2/(2\alpha^2)} dy \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\alpha^2} \end{aligned} \tag{1.44}$$

при $t \to 0$. Следовательно, $0 < m < \alpha^2 e^{\alpha^2/2} \sqrt{t} < M$, откуда $-\ln t + \ln m < \alpha^2 < -\ln t + \ln M$, что означает эквивалентность $\alpha(t) \sim \sqrt{\ln t^{-1}}$ при $t \to 0$, т.е. даёт необходимую асимптотику для $a(t)$ □

Сопоставляя леммы 1.4 и 1.5, приходим к утверждению теоремы 1.2. □

1.3.2 Асимптотика на бесконечности

Исследуем асимптотику $h(t)$ на бесконечности. В случае бесконечного временного горизонта оптимальным моментом остановки является момент первого достижения процессом X_t некоторого значения S_0, и было бы логично ожидать, что $h(t) \to S_0$ при $t \to \infty$. Для того, чтобы доказать это и найти, насколько сходимость быстрая, нам понадобится оценить разность между ценами опционов в нулевой момент времени для случаев конечного и бесконечного временного горизонтов.

Итак, сначала решим исходную задачу в случае бесконечного временного горизонта. Имеем следующую систему:

$$\frac{1}{2} V''_\infty(x) - \mu V'_\infty(x) = c, \quad \text{при } x \leqslant S_0, \tag{1.45a}$$

$$V'_\infty(x) = 0, \text{ при } x = 0, \tag{1.45b}$$
$$V'_\infty(x) = 1, \text{ при } x = S_0, \tag{1.45c}$$
$$V'_\infty(x) = x, \text{ при } x \geqslant S_0. \tag{1.45d}$$

Решив эту систему, получаем, что $V_\infty(x) = a_1 e^{2\mu x} + a_2 - cx/\mu$ на отрезке $[0, S_0]$, где

$$S_0 = \frac{\ln(\mu/c+1)}{2\mu}, \ \ , \ \ a_1 = \frac{c}{2\mu^2}, \ \ , \ \ a_2 = \frac{(1+c/\mu)(\ln(\mu/c+1)-1)}{2\mu} \ \ . \tag{1.46}$$

Заметим, что в тех точках, где $\mathbb{L}_X V = V'_t - \mu V'_x + \frac{1}{2}V''_{xx} = 0$, выполнено равенство $\mathbb{L}_1 U = c$, где $\mathbb{L}_1 = -\partial/\partial t - \mu\partial/\partial x + \frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2$ ($\mathbb{L}_1$ отличается от $\mathbb{L}_X$ знаком при $\partial/\partial t$).

Теорема 1.3. *Для некоторого положительного D имеет место оценка $0 < V_\infty(S) - U(t,S) < De^{x\mu/2-qt}\cos(\lambda x)$, где $\lambda = \pi/(2S_0)$ и $q = (\min(\mu,0))^2/4+\lambda^2$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое число $\xi > 0$ и обозначим $D_\xi = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1/(2c), 0 \leqslant t \leqslant \xi\}$. В этой области $V_\infty(S) > U(t,S)$. Оценим разность между $V_\infty(S)$ и $U(t,S)$ величиной $H(S,t)$ вида $H_1(S)H_2(t)$, удовлетворяющей условию $\mathbb{L}_1 H \leqslant 0$. В качестве такой величины можем взять $De^{pS+qt}\cos(\lambda S)$, где $\lambda = \pi/(2S_0)$. Заметим, что это выражение неотрицательно при $0 \leqslant S \leqslant S_0$. Указанное условие даёт нам два неравенства: $p \leqslant \mu/2$ и $q - \mu p + p^2 - \lambda^2 \leqslant 0$. Нам хотелось бы, чтобы q было возможно больше (чтобы получить максимально сильную оценку), но при этом, как будет видно позднее, p должно быть неположительным. В таком случае максимальное q можем взять при $p = \min(\mu,0)/2$, тогда $q = -(\min(\mu,0))^2/4 - \lambda^2$.

Введём величины $w = V_\infty - U - H$ и $\widetilde{w} = V_\infty - H$.

Лемма 1.6. *Максимум функции w в области D_ξ достигается на границе этой области.*

Доказательство. При $S < h(t)$ имеем $\mathbb{L}_1 w = \mathbb{L}_1 V_\infty - \mathbb{L}_1 U - \mathbb{L}_1 H = c - c - \mathbb{L}_1 H \geqslant 0$. При $S > h(t)$ также $\mathbb{L}_1 w = \mathbb{L}_1 V_\infty - \mathbb{L}_1 U - \mathbb{L}_1 H = c - \mu - \mathbb{L}_1 H \geqslant r \geqslant 0$. □

Во внутренних точках D_ξ, для которых $S \neq h(t)$, w не может достигать максимума, иначе мы получили бы, что $\mathbb{L}_1 w < 0$, что не так.

Предположим, что максимум достигается в точке $(h(t_0), t_0)$. Тогда в этой точке $\widetilde{w}'_S = U'_S = 1$. Также, очевидно, $\widetilde{w}'_t(h(t_0), t_0) \geqslant 0$ и $\widetilde{w}''_{SS}(h(t_0), t_0) \leqslant 0$. Учитывая всё это, получаем: $\mathbb{L}_1 \widetilde{w}(h(t_0), t_0) \leqslant -\mu$. Но, с другой стороны, $\mathbb{L}_1 \widetilde{w}(h(t_0), t_0) \geqslant c$, что делает достижение величиной w максимума на кривой $h(t)$ невозможным.

Таким образом, w должна достигать своего максимума на границе D_ξ. При $S = 0$ она не может его достичь, поскольку $w'_x(0,t) = -H'_x(0,t) = -pH(0,t) \geqslant 0$, при этом в случае равенства нулю имеем $w'_x(0,t) = -H'_x(0,t) = \lambda^2 H(0,t) \geqslant 0$. При $S = S_0$ имеем $V_\infty = U = S_0$, $w = -H < 0$.

Лемма 1.7. *Существует такое D, что при $t = 0$ и $x \in [0, S_0]$ имеет место неравенство $w \leqslant 0$.*

Доказательство. Заметим, что $V_\infty(S) - U(0,S) = e^{pS} cos(\lambda S)$, что равно нулю при $S = S_0$, причём производная первой функции в этой точке равна 0. Продифференцировав правую часть, получаем $pe^{pS_0}\cos(\lambda S_0) - \lambda e^{pS_0}\sin(\lambda S_0) = -\lambda e^{pS_0} < 0$. Это означает, что будучи доопределённой нулём в точке S_0, функция $(V - U)/(e^{pS}\cos(\lambda S))$ непрерывна на отрезке $[0, S_0]$ и достигает на нём максимума. Это максимальное значение и можно взять в качестве D. $\square$

Таким образом. если максимум функции w в области D_ξ положителен, то он достигается на отрезке $\{(x,\xi) : x \in [0, S_0]\}$. При $\xi \to \infty$ максимум не будет уменьшаться и при всех ξ будет достигаться на указанном отрезке. Но, с другой стороны, $\lim_{\xi\to\infty}(V_\infty - U) = \lim_{\xi\to\infty} H = 0$. Значит, максимум w в области D_ξ при любом ξ неположителен, следовательно, $w \leqslant 0$ в области $D_\infty = \{(x,t) : t \geqslant 0, x \in [0, S_0]\}$. $\square$

Наконец, воспользуемся доказанной теоремой, чтобы оценить разность $h(t) - S_0$.

Теорема 1.4. *Имеет место оценка* $0 \leqslant S_0 - h(t) \leqslant \sqrt{D/(2c)}e^{qt/2}$.

Доказательство. Первое неравенство очевидным образом следует из того, что

$$h(t) = U(t, h(t)) < V_\infty(h(t)). \tag{1.47}$$

Для доказательства второго неравенства напишем

$$\begin{aligned} &De^{qt} \geqslant De^{pS+qt}\cos(\lambda S) \geqslant V_\infty(h(t)) - U(t, h(t)) \\ &\ = V_\infty(h(t)) - V_\infty(S_0) + (S_0 - h(t)) \\ &\ = (V'_\infty(S_0) - 1)(h(t) - S_0) + \frac{1}{2}V''_\infty(\zeta)(h(t) - S_0)^2\,, \end{aligned} \tag{1.48}$$

где $h(t) \leqslant \zeta \leqslant S_0$.

Вторая производная $V''_\infty(\zeta)$ не меньше, чем $V''_\infty(S_0) = 2c$. таким образом, имеем $S_0 - h(t) \leqslant \sqrt{D/(2c)}e^{qt/2}$. □

Глава 2

Общая задача на бесконечном интервале

2.1 Постановка задачи.

Аналогично предыдущей главе, введём процесс максимума

$$M_t = \max_{s \leqslant t} X_s \tag{2.1}$$

Обозначим $\mathcal{J} = \{(x, s) : x \in I, s \in I, x \leqslant s\}$ – множество всех значений, которые может принимать двухмерный процесс (X_t, M_t).

В этой главе мы рассмотрим задачу

$$V_*(x, s) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_X(f)} \mathbf{E}_{xs}\, f(X_\tau, M_\tau)\,, \tag{2.2}$$

где предполагается, что $f(x, s) \in C^{2,1}(\mathcal{J})$, оценивающая «близость» значения процесса в момент остановки к значению текущего максимума, удовлетворяет условию

$$f'_s(x, s)|_{x=s} = 0\,, \tag{2.3}$$

а множество $\mathfrak{M}_X(f)$ определяется как множество всех моментов остановки τ, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{E}_{xs} \sup_{t \leqslant \tau} |f(X_t, M_t)| < \infty,\, \forall (x, s) \in \mathcal{J}\,. \tag{2.4}$$

Наконец, предположим, что выполняется следующее условие:

$$\text{если } \mathsf{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = l_I) > 0, \text{ то } \forall s \in I \ \limsup_{x\to l_I} f(x,s) < \infty\,. \tag{2.5}$$

Нарушение условия (2.5) для некоторого s означало бы, что $V_*(x,s) = \infty$ при $x < s$.

Помимо этой постановки, имеет смысл также рассматривать следующие две задачи:

$$V_*(x,s) = \sup_{\tau\geqslant 0} \mathbf{E}_{xs}\, h(X_\tau, M_{\tau-\varepsilon}) \tag{2.6}$$

и

$$V_*(x,s) = \sup_{\tau\geqslant 0} \mathbf{E}_{xs}\, h(X_\tau, M_{\tau+\varepsilon})\,. \tag{2.7}$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторая константа (возможно, равная бесконечности в случае задачи (2.7)).

Задача (2.7) является достаточно важным частным случаем задачи (2.2) для функции

$$f(X_\tau, M_\tau) = \mathbf{E}(h(X_\tau, M_{\tau+\varepsilon}|X_\tau, M_\tau))\,. \tag{2.8}$$

Метод, использованный для решения поставленной задачи, основан на подходе, использованном в работе [18].

Отметим также, что одна из причин для постановки задачи (2.7) – использование её в качестве промежуточного этапа для решения задачи на конечном временном горизонте:

$$V_*(x,s,t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} \mathbf{E}_{xst}\, h(X_\tau, M_T)\,. \tag{2.9}$$

В задаче (2.6), несмотря на то, что она представляет собой несомненный интерес, получено значительно меньше результатов и большинство из них касаются функций, зависящих только от значений процесса, но не от максимума. Одной из первых статей, сформулировавших задачу такого вида, была статья [40], из недавних отметим работу [41].

Далее в статье рассматривается как задача (2.2), так и (2.7).

2.2 Остановка на диагонали

Напомним, что *функция масштаба* для однородной диффузии, удовлетворяющей стохастическому уравнению (5), задаётся формулой

$$L(x) = \int^x \exp\left(-\int^y \frac{2b(z)}{\sigma^2(z)}\right). \tag{2.10}$$

Обозначим

$$\mu(x) = \frac{b(x)}{\sigma^2(x)} = -\frac{1}{2}(\ln L'(x))' = -\frac{1}{2}\frac{L'(x)}{L''(x)}.$$

При этом, если τ_a - момент достижения диффузией уровня a, а $\tau_{a,b} = \min(\tau_a, \tau_b)$, то при $a \leqslant x \leqslant b$ верно следующее (см. например, [42]):

$$P_x(X_{\tau_a} = a) = \frac{L(b) - L(x)}{L(b) - L(a)},$$
$$P_x(X_{\tau_a} = b) = \frac{L(x) - L(a)}{L(b) - L(a)}.$$

Отметим, что у марковского процесса (X_t, M_t) вторая координата меняется только на диагонали, то есть в точках, где $X_t = M_t$ (см. рис. 2.1).

В силу супергармонической характеризации функции $V_*(x, s)$ (см., например, [38]), в точках, где выполнено

$$f''_{xx}(x, s) + 2\mu(x) f'_x(x, s) > 0, \tag{2.11}$$

не лежащих на диагонали (т.е. $x < s$), останавливаться не оптимально.

Для точек, лежащих на диагонали, инфинитезимальный генератор имеет более сложный вид. Тем не менее, как показывает следующая лемма, и для них условие (2.11) является достаточным для того, чтобы точка (x, x) принадлежала области продолжения наблюдений.

Лемма 2.1. *Не оптимально останавливаться в точках* (x, x)*, для которых либо* $f'_s(x, x) > 0$*, либо* $f'_s(x, x) = 0$ *и выполнено* (2.11)

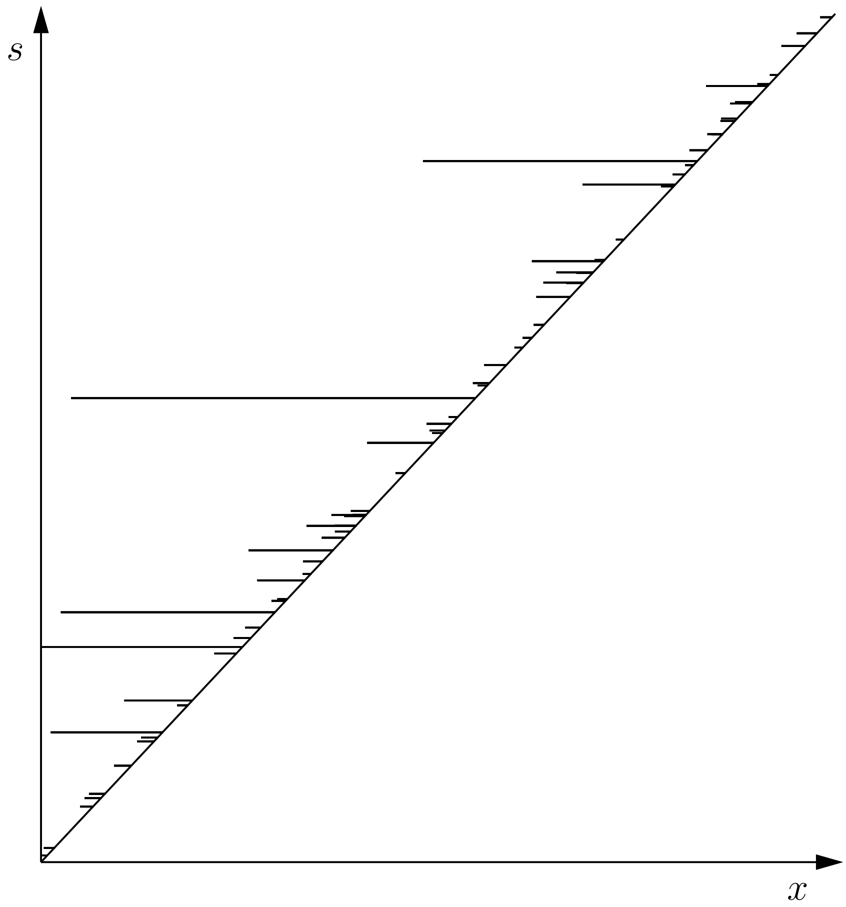


Рисунок 2.1: Качественный вид траекторий процесса (X_t, M_t).

Доказательство. Предположим, что момент остановки τ является оптимальным, при этом для некоторого x (для которого выполнено одно из условий, указанных в утверждении), в случае если $X_t = M_t = x$, то $\tau = t$. Построим момент остановки τ^*, для которого математическое ожидание в задаче (3.4) будет больше.

Определим

$$\tau_\delta = \begin{cases} \inf\{t : X_t \geqslant x + d\}, & \text{для } d > 0 \\ \inf\{t : X_t \leqslant x + d\}, & \text{для } d < 0. \end{cases}$$

Для произвольных $k, \delta > 0$ положим $\tau^* = \min(\tau_\delta, \tau_{-k\delta})$. Наконец, определим

$$\overline{\tau} = \begin{cases} \tau^*, & \text{если } X_\tau = M_\tau = x \\ \tau, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Необходимо проверить, что выполняется

$$\mathbf{E}_{xx}(f(X_{\overline{\tau}}, M_{\overline{\tau}})) > \mathbf{E}_{xx}(f(X_\tau, M_\tau)) = f(x, x)\,.$$

Обозначив

$$p = \mathsf{P}(\overline{\tau} = \tau_{-k\delta}) = \frac{L(x+\delta) - L(x)}{L(x+\delta) - L(x-k\delta)} \tag{2.12}$$

$$q = \mathsf{P}(\overline{\tau} = \tau_{\delta}) = \frac{L(x) - L(x-k\delta)}{L(x+\delta) - L(x-k\delta)}\,, \tag{2.13}$$

заметим, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{xx}(f(X_{\overline{\tau}}, M_{\overline{\tau}})) &= p\,\mathbf{E}_{xx}\left(f(X_{\tau_{-k\delta}}, M_{\tau_{-k\delta}})\middle|\overline{\tau} = \tau_{-k\delta}\right) + q\,\mathbf{E}_{xx}\left(f(X_{\tau_\delta}, M_{\tau_\delta})|\overline{\tau} = \tau_\delta\right) \\ &= p \cdot \mathbf{E}_{xx}(f(x-k\delta, M_{\tau_{-k\delta}})|\overline{\tau} = \tau_{-k\delta}) + q \cdot f(x+\delta, x+\delta) \\ &> p \cdot f(x-k\delta, x+r(\delta)) + q \cdot f(x+\delta, x+\delta)\,,\end{aligned}$$

где $r(\delta) = \underset{0 \leqslant y \leqslant \delta}{\arg\max}\, f(x-k\delta, y)$. Заметим, что в силу гладкости f в некоторой окрестности 0 верно одно из трёх утверждений:

- $r(\delta) = 0$
- $r(\delta) = \delta$
- $0 < r(\delta) < \delta$,

а значит, в некоторой (возможно, меньшей) окрестности 0, $0 \leqslant r'(\delta) \leqslant 1$.

Необходимо доказать, таким образом, что

$$\begin{aligned}R(\delta) = (L(x+\delta) - L(x))&f(x-k\delta, x+r(\delta)) \\ &+ (L(x) - L(x-k\delta))f(x+\delta, x+\delta) - (L(x+\delta) - L(x-k\delta))f(x,x) > 0\end{aligned}$$

Отметим, что при $\delta = 0$ имеет место равенство. Чтобы доказать, что указанное неравенство верно для достаточно малых δ, продифференцируем $R(\delta)$:

$$\begin{aligned}R'(\delta) = L'(x+\delta)&f(x-k\delta, x+r(\delta)) \\ &+ (L(x+\delta) - L(x))(f'_s(x-k\delta, x+r(\delta))r'(\delta) - kf'_x(x-k\delta, x+\delta)) \\ &+ kL'(x-k\delta)f(x+\delta, x+\delta) \\ &+ (L(x) - L(x-k\delta))(f'_s(x+\delta, x+\delta) + f'_x(x+\delta, x+\delta)) \\ &- (L'(x+\delta) + kL'(x-k\delta))f(x,x)\,.\end{aligned}$$

Как видно, при $R'(0) = 0$. Продифференцируем ещё раз:

$$\begin{aligned}
R''(\delta) = {} & L''(x+\delta)f(x-k\delta, x+r(\delta)) \\
& + 2L'(x+\delta)(f'_s(x-k\delta, x+r(\delta))r'(\delta) - kf'_x(x-k\delta, x+\delta)) \\
& + (L(x+\delta)-L(x))(f''_{ss}(x-k\delta, x+r(\delta))(r'(\delta))^2 + f'_s(x-k\delta, x+r(\delta))r''(\delta) \\
& - 2kf''_{xs}(x-k\delta, x+\delta) + k^2 f''_{xx}(x-k\delta, x+\delta)) - k^2 L''(x-k\delta)f(x+\delta, x+\delta) \\
& + 2kL'(x-k\delta)(f'_s(x+\delta, x+\delta) + f'_x(x+\delta, x+\delta)) \\
& + (L(x) - L(x-k\delta))(f''_{ss}(x+\delta, x+\delta) + 2f''_{xs}(x+\delta, x+\delta) \\
& \qquad + f''_{xx}(x+\delta, x+\delta)) - (L''(x+\delta) - k^2 L''(x-k\delta))f(x,x)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, $R''(0) = 2L'(0)f'_s(x,x)(k + r'(0))$ и в случае, если $f'_s(x,x) < 0$, получаем $R''(0) > 0$. Если же $f'_s(x,x) = 0$, то необходимо продифференцировать полученное выражение ещё раз. Для сокращения записи опустим аргументы при f, L и их производных:

$$\begin{aligned}
R'''(0) &= L'''f + 3L''(f'_s r' - kf'_x) + 3L'(f''_{ss}(r')^2 + f'_s r'' - 2kf''_{xs} + k^2 f''_{xx}) \\
&\quad + k^3 L''' f - 3k^2 L''(f'_s + f'_x) + 3kL'(f''_{ss} + 2f''_{xs} + f''_{xx} - L'''f - k^3 L''' f \\
&= -3L'' f'_x(k + k^2) + 3L'(f''_{ss}(k + (r')^2) + f''_{xx}(k^2 + k))) \\
&= 3L'((k^2 + k)(f''_{xx} + 2\mu f'_x) + (k + (r')^2)f''_{ss})\,.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Заметим, что $L' > 0$, $0 \leqslant (r')^2 \leqslant 1$, и если выполняется условие (2.11), можем выбором k добиться того, чтобы $(k^2+k)(f''_{xx}+2\mu f'_x)+(k+(r')^2)f''_{ss} > 0$. А в таком случае при достаточно малых δ верно $R(\delta) > 0$, что и требовалось доказать. □

Отметим, что для функций вида (2.8)

$$f'_s(x,s) = \left(\int_0^\infty h(x, s \vee (x+y))g(y)dy\right)'_s = \int_0^{s-x} h'_s(x,s)g(y)dy\,,$$

что равно 0 при $s = x$. Поэтому нас будет интересовать в первую очередь выполнение условия (2.11). Обозначим множество всех точек, для которых выполнено это условие, $C_1(f,\mu)$, а его дополнение — $D_1(f,\mu)$.

2.3 Решение задачи.

2.3.1 Дифференциальное уравнение для граничной кривой.

Поскольку, как было упомянуто ранее, вне прямой $x = s$ изменяется только первая координата процесса $\overline{X}_t = (X_t, M_t)$, то при $x < s$ инфинитезимальные генераторы процессов $\overline{X}_t$ и X_t совпадают: $\mathbb{L}_{\overline{X}} = \mathbb{L}_X$, при этом $\mathbb{L}_{\overline{X}}$ действует на функциях, удовлетворяющих $\frac{\partial f}{\partial s}(s, s) = 0$ (подробное доказательство см., например, [38]).

В случае, если при некотором s верно $V_*(s, s) = f(s, s)$, то есть в точке (s, s) на диагонали необходимо сразу останавливаться, вопрос нахождения $V_*(x, s)$ для всех $x < s$ сводится к задаче для одномерного процесса X_t, ответ в которой известен. Интерес, следовательно, представляют те случаи, когда при $M_t = s$ необходимо останавливаться при достижении процессом X_t некоторого уровня $g_*(s) < s$ (при этом, опять-таки, для $x < g_*(s)$ вопрос нахождения $V_*(x, s)$ сводится к одномерной задаче). Далее мы выведем дифференциальное уравнение для оптимальной границы $g_*(s)$.

Чтобы найти уравнение для $g_*(s)$ (в случае, если области остановки и продолжения наблюдений действительно имеют описанный вид), запишем систему дифференциальных уравнений для $V(x, s)$:

$$\mathbb{L}_X V(x, s) = 0 \qquad g(s) < x < s \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s}(x, s)\bigg|_{x=s-} = 0 \qquad \text{(нормальное отражение)} \tag{2.16}$$

$$V(x, s)|_{x=g(s)+} = f(x, s) \qquad \text{(мгновенная остановка)} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, s)\bigg|_{x=g(s)+} = f'_x(x, s) \qquad \text{(гладкое склеивание.)} \tag{2.18}$$

Здесь уравнение (2.17) очевидно, уравнения (2.15) и (2.16) следуют из общей теории. Было бы естественным ожидать выполнение также и условия гладкого склеивания (2.18). Мы будем придерживаться стандартного для задач такого вида порядка действий – напрямую это условие доказывать не будем, а докажем с помощью верификационной теоремы (теорема 2.4), что решение системы (2.15)– (2.18) действительно даёт оптимальный момент остановки в задаче (2.9).

Рассмотрим s такие, что $g(s) < s$. В уравнениях (2.17) и (2.18) подставим $g(s)$ вместо x, получим, соответственно,

$$V(x,s)|_{x=g(s)+} = f(g(s),s) = H(s) \tag{2.19}$$

и

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}(x,s)\right|_{x=g(s)+} = f'_x(g(s),s) = F(s)\,. \tag{2.20}$$

Обозначим

$$\tau_g = \inf\{t > 0 : X_t \leqslant g(M_t)\}$$

и

$$V_g(x,s) = \mathbf{E}_{x,s}\, f(X_{\tau_g}, M_{\tau_g})\,.$$

Также для удобства обозначим $V_g(s) = V_g(s,s)$. Используя то, что X - строго марковский, можем записать

$$V_g(s,x) = H(s)\frac{L(s)-L(x)}{L(s)-L(g(s))} + V_g(s)\frac{L(x)-L(g(s))}{L(s)-L(g(s))}\,.$$

Преобразовав это равенство, получим

$$\frac{V_g(x,s)-H(s)}{L(x)-L(g(s))} = \frac{V_g(s)-H(s)}{L(s)-L(g(s))}\,. \tag{2.21}$$

Заметим, что это равенство выполняется при всех $x \in (g(s),s)$. Возьмём предел левой части при $x \downarrow g(s)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow g(s)} \frac{V_g(x,s)-H(s)}{L(x)-L(g(s))} &= \lim_{x\downarrow g(s)} \left[\frac{V_g(x,s)-H(s)}{x-g(s)} \Big/ \frac{L(x)-L(g(s))}{x-g(s)}\right] \\ &= \left.\frac{\partial V_g(x,s)}{\partial x}\right|_{g(s)} \cdot \frac{1}{L'(g(s))} = \frac{F(s)}{L'(g(s))}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, из равенства (2.21) следует:

$$\frac{V_g(s) - H(s)}{L(s) - L(g(s))} = \frac{F(s)}{L'(g(s))}\,.$$

Отсюда можем выразить

$$V_g(s) = \left[\frac{F(s)}{L'(g(s))} \cdot (L(s) - L(g(s)))\right] + H(s)\,.$$

Подставляя в (2.21), находим

$$V_g(x,s) = \left[\frac{F(s)}{L'(g(s))} \cdot (L(x) - L(g(s)))\right] + H(s)\,. \tag{2.22}$$

Применим к этому равенству принцип нормального отражения (2.16), получим, что для $x = s-$ выполнено

$$H'(s) + \left[F(s) \cdot \frac{L(x) - L(g(s))}{L'(g(s))}\right]'\Bigg|_{x=s} = 0\,,$$

Обозначив $\Lambda(g(s), s) = \frac{L(s)-L(g(s))}{L'(g(s))}$, получим в точке $(g(s), s)$:

$$f_x' g'(s) + f_s' + (f_{xx}'' g'(s) + f_{xs}'')\Lambda + f_x' g'(s)\,(2\Lambda\mu - 1) = 0\,,$$

или

$$g'(s) = -\frac{f_s'(g(s),s)\Lambda^{-1}(g(s),s) + f_{xs}''(g(s),s)}{f_{xx}''(g(s),s) + 2\mu(s) f_x'(g(s),s)}\,. \tag{2.23}$$

Заметим, что при $g(s) = s$ значение правой части не определено. Но, как показывают следующие рассуждения, предел выражения в числителе существует и можем доопределить его по непрерывности.

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow s} \frac{f_s'(x,s) + f_{xs}''(x,s)\cdot\Lambda(x,s)}{\Lambda(x,s)} &= \lim_{x\uparrow s}\frac{\left(f_s'(x,s) + f_{xs}''(x,s)\cdot\Lambda(x,s)\right)'_x}{\Lambda_x'(x,s)}\\ &= \frac{f_{xs}''(x,s) - f_{xs}''(x,s)}{-1} = 0\,.\end{aligned}$$

Теорема 2.1. *Если границы $g(x,s)$ в тех точках, где $g(x,s) < s$, удовлетворяет уравнению (2.23), то $V_g(x,s)$, будучи определенной с помощью формулы (2.22), удовлетворяет условиям (2.15)– (2.18)*

Доказательство теоремы очевидным образом следует из проведенных выше рассуждений.

Таким образом, получено дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять граница $g(s)$ при $g(s) < s$, если она действительно является решением сформулированной нами задачи со свободной границей. При этом встаёт вопрос, какое из решений этого уравнения даёт оптимальный момент остановки.

2.3.2 Условие однократного пересечения.

Начнём с доказательства важного вспомогательного утверждения.

Лемма 2.2. *Пусть* $\varphi(x,s) \in C^{2,1}(\mathcal{J})$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{M}_X(\varphi)$, *причём* $\tau_1 \leqslant \tau_2$ *и* $\varphi_s(s,s) = 0$ *при* $M_{\tau_1} < s < M_{\tau_2}$. *Тогда, если* $\mathbb{L}_X\varphi(X_r, M_r) \geqslant 0$ *при* $\tau_1 \leqslant r \leqslant \tau_2$, *то*

$$\mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_2}, M_{\tau_2}) \geqslant \mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_1}, M_{\tau_1}). \tag{2.24}$$

Доказательство. Применим формулу Ито к процессу $\varphi(X_t, M_t)$:

$$\begin{aligned}\varphi(X_{\tau_2}, M_{\tau_2}) &= \varphi(x,s) + \int\limits_0^{\tau_2} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_r, M_r)dX_r + \int\limits_0^{\tau_2} \frac{\partial\varphi}{\partial s}(X_r, M_r)dM_r \\ &\quad + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(X_r, M_r)d\langle X, X\rangle_r \\ &= \varphi(x,s) + \int\limits_0^{\tau_2} \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}dB_r + \int\limits_0^{\tau_2}(\mathbb{L}_X\varphi)dr + \int\limits_0^{\tau_2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}dM_r\end{aligned} \tag{2.25}$$

Записав аналогичное равенство для τ_1, получаем после вычитания:

$$\varphi(X_{\tau_2}, M_{\tau_2}) - \varphi(X_{\tau_1}, M_{\tau_1}) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}dB_r + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}(\mathbb{L}_X\varphi)dr + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}dM_r\,. \tag{2.26}$$

Интеграл по M_r равен 0, поскольку в точках роста M_r подынтегральная функция равна 0. Процесс $\int\limits_0^t \sigma(X_r)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_r, M_r)dB_r$ является локальным мартингалом. Возьмём $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ – локализующую последовательность моментов остановки. Тогда, подставив в (2.25) вместо τ_1 и τ_2 моменты $\tau_1 \wedge \sigma_n$ и $\tau_2 \wedge \sigma_n$ соответственно и взяв математическое ожидание от обеих частей, получим

$$\mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_2\wedge\sigma_n}, M_{\tau_2\wedge\sigma_n}) \geqslant \mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_1\wedge\sigma_n}, M_{\tau_1\wedge\sigma_n})\,. \tag{2.27}$$

Устремив $n \to \infty$, с помощью теоремы Фату-Лебега получим (2.24). □

Следствие 2.3. *Если в условиях леммы 2.2 вместо* $\mathbb{L}_X\varphi(X_r, M_r) \geqslant 0$ *выполнено* $\mathbb{L}_X\varphi(X_r, M_r) = 0$ *(или* $\leqslant 0$*), то* $\mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_2}, M_{\tau_2}) = \mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_1}, M_{\tau_1})$ *(или* $\mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_2}, M_{\tau_2}) \leqslant \mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_1}, M_{\tau_1})$*)*

Отметим также, что условие равенства нулю производной в лемме 2.2 выполнено, если $M_{\tau_1} = M_{\tau_2}$.

Для достаточно широкого класса функций f в задаче (2.2) выполнено так называемое условие однократного пересечения:

Условие 1. *Для любого* s *существует* $\underline{x}(s)$ *такое, что* $\mathbb{L}_X(x, s) \leqslant 0$ *при* $x < \underline{x}(s)$ *и* $\mathbb{L}_X(x, s) \geqslant 0$ *при* $s > x > \underline{x}(s)$.

Например, это условие выполнено, если f не убывает по x, а μ – не возрастает. Более подробно условия, при которых имеет место однократное пересечение, рассмотрены в работе [43].

Оказывается, впрочем, что практически любую функцию f можно модифицировать (не изменив решения задачи (2.9)) таким образом, что условие однократного пересечения окажется выполненным. Единственное, что нам потребуется – сделать некоторые достаточно естественные предположения относительно поведения функции f при x и s, стремящихся к границам интервала I.

Условие 2. *Существует функция* $q(s)$ *такая, что*

$$f(x, s) \leqslant \overline{f}(x, s) = q(s) + q'(s)\frac{L(x) - L(s)}{L'(s)}.. \tag{2.28}$$

Отметим, что если для какого-то s нельзя подобрать q и q' так, чтобы выполнялось указанное неравенство, то $V(x,s)=\infty$ при $x<s$.

Условие 3. *Для любого $s \in I$ в некоторой окрестности s выполнено одно из двух условий:*

$$\lim_{x \to l_I} \frac{f(x,s)}{L(x)} = -\infty\,, \tag{2.29}$$

или

$$|f'_s(x,s)| < C, \quad \forall x \in I\,. \tag{2.30}$$

Обозначим I^0 интервал I вместе со своей левой границей, т.е. $I^0 = I \cup \{l_I\}$.

Определение 1. *Назовём границу $g : I \to I^0$, $g(s) \leqslant s$ допустимой, если:*

i) $g(s)$ *полунепрерывна снизу,*

ii) *В точках, где $l_I < g(s) < s$, $g(s)$ является решением уравнения (2.23),*

iii) *Для всех s точка $(g(s),s)$ принадлежит замыканию множества $\{(x,s) : \mathbb{L}_X f(x,s) < 0\}$.*

Наконец, нами будет использоваться следующий вариант теоремы об огибающей ([26, следствие 4]):

Теорема 2.2 (Milgrom, Segal)**.** *Предположим, что $\mathbf{X}$ – непустой компакт, $w(x,s)$ полунепрерывна сверху по x и $w'_s(x,s)$ непрерывна по паре (x,s). Обозначим $v(s) = \sup_{x\in\mathbf{X}} w(x,s)$ и $\mathbf{X}^*(s) = \{x \in \mathbf{X} : w(x,s) = v(s)\}$. Тогда*

1. *v абсолютно непрерывна и для любых $x^*(s) \in \mathbf{X}^*(s)$ имеет место представление*

$$v(s) = v(0) + \int_0^s w'_s(x^*(u),u)du \tag{2.31}$$

2. *$v'(s+) = \max\limits_{x\in\mathbf{X}^*(s)} w'_s(x,s)$ для любого $s \in [0,1)$ и $v'(s-) = \min\limits_{x\in\mathbf{X}^*(s)} w_s(x,s)$ для любого $s \in (0,1]$.*

3. v *дифференцируема в точке* $s \in (0,1)$ *тогда и только тогда, когда множество* $\{w_s(x,s) \mid x \in \mathbf{X}^*(s)\}$ *состоит из одного элемента, и в этом случае* $v'(s) = w'_s(x,s)$ *для всех* $x \in \mathbf{X}^*(s)$.

Покажем, что без ограничения общности можем считать, что $\mathbb{L}_X f(x,s) \leqslant 0$ при $x \leqslant g(s)$, где $g(s)$ - произвольная допустимая граница:

Теорема 2.3. *Пусть* $f(x,s)$ *удовлетворяет условиям 2 и 3, а* $g(s)$ *- произвольная допустимая граница, причём* $V(g(s),s) < \infty$. *Тогда существует функция* $\hat{f}(x,s) \in C^{2,1}$, *такая, что для любых* (x,s)

i) $\mathbb{L}_X \hat{f}(x,s) \leqslant 0$ *при* $x \leqslant g(s)$,

ii) $\frac{\partial \hat{f}}{\partial s}(x,s)\Big|_{x=s} \geqslant 0$, *причем, если неравенство строгое, то* $\mathbb{L}_X \hat{f}(x,s) = 0$ *при* $x \in [s-\varepsilon, s]$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

iii) $\sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}(f)} \mathbf{E}_{xs} f(X_\tau, M_\tau) = \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}(f)} \mathbf{E}_{xs} \hat{f}(X_\tau, M_\tau)$,

iv) Любой момент остановки τ, *являющийся оптимальным в первой задаче, оптимален и по второй,*

v) Любой момент остановки τ, *такой, что* $\mathbb{L}_X f(X_\tau, M_\tau) < 0$ *п.н., оптимальный во второй задаче, является оптимальным моментом остановки в первой задаче.*

Доказательство. Зафиксируем (произвольное) s и рассмотрим задачу об оптимальной остановке $\hat{f}(x,s) = \sup\limits_{\tau \leqslant \tau_0} E_{xs} f(X_\tau, s)$ (здесь, как и раньше, τ_0 – момент выхода процесса на диагональ, то есть $\tau_0 = \inf t : X_t = s$). Она может быть интерпретирована как задача об оптимальной остановке для диффузии с поглощением в точке s. Такая задача рассматривалась в работе [44]. В соответствии с предложением 5.3, $\hat{f}$ есть наименьшая мажоранта функции f, являющаяся X – выпуклой, то есть удовлетворяющая неравенству $\mathbb{L}_X \hat{f}(x,s)$. Таким образом, утверждение i) напрямую следует из построения.

Поскольку $\hat{f}$ является мажорантой, то

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}(f)} \mathbf{E}_{xs}\, f(X_\tau, M_\tau) \leqslant \sup_{\tau \in \mathfrak{M}(f)} \mathbf{E}_{xs}\, \hat{f}(X_\tau, M_\tau)\,. \tag{2.32}$$

Докажем неравенство в обратную сторону. Действительно, выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём момент $\tau_\varepsilon \in \mathfrak{M}$ такой, что $\mathbf{E}_{xs}\, \hat{f}(X_{\tau_\varepsilon}, M_\tau) \geqslant \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}(f)} \mathbf{E}_{xs}\, \hat{f}(X_\tau, M_\tau) - \varepsilon$. Далее, для каждой точки $(X_{\tau_\varepsilon}, M_{\tau_\varepsilon})$ найдём момент остановки $\sigma \geqslant \tau_\varepsilon$ такой, что для процесса, запущенного из этой точки, $\mathbf{E}\, f(X_\sigma, M_\sigma) \geqslant \hat{f}(X_{\tau_\varepsilon}, M_{\tau_\varepsilon}) - \varepsilon$ (возможность найти такой σ следует из определения $\hat{f}$). Наконец, определим

$$\sigma_M = \begin{cases} \sigma, & \text{если } \|f(X_\tau, M_{\tau_\varepsilon})\| \leqslant M \text{ при } \tau_\varepsilon \leqslant \tau \leqslant \sigma \\ \tau_\varepsilon, & \text{иначе} \end{cases} \tag{2.33}$$

В силу построения $\sigma_M \in \mathfrak{M}(f)$. Поскольку при $M \to \infty$ $\sigma_M \uparrow \sigma$, то $\lim\limits_{M\to\infty} \mathbf{E}\, f(X_{\sigma_M}, M_{\sigma_M}) = \mathbf{E}\, f(X_\sigma, M_\sigma) \geqslant \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}(f)} \mathbf{E}_{xs}\, \hat{f}(X_\tau, M_\tau) - 2\varepsilon$. Выбрав M достаточно большим, получим $\mathbf{E}\, f(X_{\sigma_M}, M_{\sigma_M}) \geqslant \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}(f)} \mathbf{E}_{xs}\, \hat{f}(X_\tau, M_\tau) - 3\varepsilon$, откуда в силу произвольности ε следует iv).

Утверждения iv) и v) следуют из построения $\hat{f}$. Далее, заметим, что $f(s,s) = \hat{f}(s,s)$ и продифференцируем это равенство по s. Учитывая, что $f'_s(s,s) = 0$, а $\hat{f}'_x(s,s) \leqslant f'_x(s,s)$, получаем утверждение ii).

Осталось доказать, что $\hat{f} \in C^{2,1}$. Поскольку для функции $\overline{f}$ из условия 2 выполнено $\mathbb{L}_X \overline{f}(x,s) = 0$ и $\overline{f}'_s(s,s) = 0$, то, в силу следствия 2.3, можем без ограничения общности считать, что f ограничена сверху (в противном случае перейдя к функции $f - \overline{f} \leqslant 0$).

Зафиксируем некоторые x и s и воспользуемся условием 3. Рассмотрим сначала случай, когда в окрестности s выполнено (2.30). Обозначим $\mathcal{T} = \{\tau_{ab}, s \geqslant b \geqslant x, x \geqslant a\}$ и $\mathcal{X}$ – семейство распределений X_τ при $\tau \in \mathcal{T}$. $\mathcal{X}$, очевидно, плотно, поэтому, в силу теоремы Прохорова, оно компактно в топологии слабой сходимости.

Обозначим $w(\tau, s) = \mathbf{E}_{xs} f(X_\tau, s)$. Поскольку $f'_s(x, s)$ непрерывна и ограничена, то $w_s(\tau, s)$ непрерывна по (τ, s). Кроме того, поскольку $f(x, s)$ ограничена сверху и непрерывна, то для любой последовательности $\tau_n \in \mathcal{T}$, сходящейся к τ, имеет место $\overline{\lim}\, w(\tau_n, s) \leqslant \overline{\lim}\, w(\tau, s)$, откуда следует, что $w(\tau, s)$ полунепрерывна сверху по τ. Это позволяет нам воспользоваться теоремой 2.2, из которой сразу следует, что $\hat{f} \in C^{2,1}$ в точке (x, s).

Далее, если в окрестности s (будем считать её замкнутым интервалом ненулевой длины) выполнено (2.29), то для любого x существует $\underline{x}(s) < x$ такое, что $\hat{f}(x, s) = f(x, s)$. Действительно, в противном случае $\hat{f}(x, s) = c_1 + c_2 L(x)$, что противоречит, например, предложению 5.4 работы [44]. В силу непрерывности $\hat{f}$ и f существует K такое, что можем выбрать $\underline{x}(s) > K$ во всей окрестности s. Тогда в предыдущем рассуждении можно ограничиться $\mathcal{T} = \{\tau_{ab}, s \geqslant b \geqslant x, x \geqslant a \geqslant K\}$, $f'_s(x, s)$ будет ограничена, как непрерывная функция на компакте. $\square$

2.3.3 Верификационная теорема.

Докажем, что уравнение (2.23) действительно определяет оптимальный в задаче (2.2). Определим для произвольной допустимой границы g функцию $V_g(x, s)$ с помощью формулы (2.22). Можем считать (не ограничивая общности, в силу теоремы 2.3), что

$$\mathbb{L}_X f(x, s) \leqslant 0 \ \text{ при } \ x \leqslant g(s)\,. \tag{2.34}$$

Лемма 2.4. *Если при всех s выполнено $g_1(s) \leqslant g_2(s)$, то $V_{g_1}(x, s) \geqslant V_{g_2}(x, s)$.*

Доказательство. В равенстве (2.22) рассмотрим g как независимую переменную (при фиксированном s) и продифференцируем по ней:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial g}(x, s) &= \frac{\partial H}{\partial g}(s) + F(s)\left(-1 - \frac{(L(x) - L(g))L''(g)}{(L'(g))^2}\right) + \frac{L(x) - L(g)}{L'(g)} \cdot \frac{\partial F}{\partial g} \\ &= \frac{L(x) - L(g)}{L'(g)}\left(2\mu(s) f'_x(g, s) + f''_{xx}(g, s)\right).\end{aligned}$$

Полученное выражение не превосходит 0 в силу (2.34), из чего следует утверждение леммы. □

Ответ на вопрос о выборе решения (2.23) даёт следующая

Теорема 2.4. *Пусть функция удовлетворяет условию однократного пересечения (условие 1) и выполнено утверждение ii) теоремы 2.3. Тогда*

1. *Существует максимальная допустимая граница* $g_*(s)$.

2. *Если для момента остановки* $\tau_* = \inf\{t > 0 : X_t \leqslant g_*(M_t)\}$ *выполнено* $\mathbf{E}\, f(X_{\tau_*}, M_{\tau_*}) < \infty$, *то он является оптимальным в задаче* (2.2).

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{G}$ – множество всех допустимых границ. Оно не пусто, так как содержит $g(s) \equiv l_I$ (соответствующую моменту остановки $\tau = \infty$). Положим $g_*(s) = \sup\limits_{g \in \mathcal{G}} g(s)$ и покажем, что она является допустимой. Действительно, свойство i) определения допустимой границы очевидно, iii) следует из непрерывности $\mathbb{L}_X f(x,s)$. Наконец, ii) следует из того, что решение дифференциального уравнения непрерывным образом зависит от начальных условий (см, например, [45, теорема V.2.1]). Таким образом, существование максимальной допустимой границы доказано.

Пусть $g(s)$ – любая допустимая граница. Тогда, в силу теоремы 2.1, соответствующая функция $V_g(x,s)$ удовлетворяет (2.15)-(2.18) в точках, где $g(s) < s$. Рассмотрим те точки s, в правой окрестности которых выполнено $g(s) = s$. Из определения допустимой границы следует, что существуют x, сколь угодно близкие к s, для которых $\mathbb{L}_X f(x,s) < 0$ – значит, в силу сделанных предположений, $V_s'(s,s) = f_s'(s,s) = 0$, то есть условие (2.16) выполнено. Выполнение остальных трёх условий очевидно.

Итак, можем записать, применив формулу Ито к процессу $V_g(X_t, M_t)$:

$$
\begin{aligned}
V_g(X_t, M_t) &= V_g(x,s) + \int\limits_0^t \frac{\partial V_g}{\partial x}(X_r, M_r)dX_r \\
&\quad + \int\limits_0^t \frac{\partial V_g}{\partial s}(X_r, M_r)dM_r + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{\partial^2 V_g}{\partial x^2}(X_r, M_r)d\langle X, X\rangle_r \\
&= V_g(x,s) + \int\limits_0^t \sigma(X_r)\frac{\partial V_g}{\partial x}(X_r, M_r)dB_r + \int\limits_0^t (\mathbb{L}_X V_g)(X_r, M_r)dr\,,
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

где интеграл по dM_r равен 0 (в силу (2.16)).

Процесс Q_t, определенный формулой

$$
Q_t = \int\limits_0^t \sigma(X_r)\frac{\partial V_g}{\partial x}(X_r, M_r)dB_r\,,
$$

является непрерывным локальным мартингалом. Введём процесс

$$
P_t = \int\limits_0^t (\mathbb{L}_X V_g)(X_r, M_r)\mathbb{I}_{(X_r \leqslant g(M_r))}dr\,,
$$

являющийся невозрастающим в силу условия однократного пересечения, и запишем

$$
V_g(X_t, M_t) = V_g(x,s) + Q_t + P_t\,.
$$

Отсюда следует, что процесс $V_g(X_t, M_t)$ является локальным супермартингалом.

Пусть τ – произвольный момент остановки для процесса X. Рассмотрим $\tau' = \inf\{t \geqslant \tau : \mathbb{L}_X(X_t, M_t) \leqslant 0\}$. Применив формулу Ито к процессу $f(X_t, M_t)$, получим, по аналогии с (2.35), что

$$
f(X_t, M_t) = f(x,s) + \widehat{Q}_t + \widehat{P}_t\,, \tag{2.36}
$$

где процесс

$$
\widehat{Q}_t = \int\limits_0^t \sigma(X_r)\frac{\partial f}{\partial x}(X_r, M_r)dB_r\,,
$$

также является локальным мартингалом, а процесс

$$\widehat{P}_t = \int\limits_0^t (\mathbb{L}_X f)(X_r, M_r)dr + \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(X_r, M_r)dM_r$$

возрастает при $\tau \leqslant t \leqslant \tau'$.

Выберем последовательность моментов остановки σ_n, являющуюся локализующей для Q и $\widehat{Q}$. Тогда

$$\mathbf{E}_{xs}\, f(X_{\tau\wedge\sigma_n}, M_{\tau\wedge\sigma_n}) \leqslant \mathbf{E}_{xs}\, f(X_{\tau'\wedge\sigma_n}, M_{\tau'\wedge\sigma_n}) \leqslant \mathbf{E}_{xs}\, V_g(X_{\tau\wedge\sigma_n}, M_{\tau\wedge\sigma_n}) \leqslant V_g(x,s) + \mathbf{E}_{xs}\, Q_{\tau'\wedge\sigma_n} = V_g(x,s)\,.$$

Устремив $n \to \infty$ и снова воспользовавшись леммой Фату, получим

$$\mathbf{E}_{xs}\, f(X_\tau, M_\tau) \leqslant V_g(x,s)\,. \tag{2.37}$$

Взяв супремум по всем возможным τ и инфимум по всем допустимым g, получим

$$V_*(x,s) \leqslant \inf_g V_g(x,s) = V_{g_*}(x,s)\,, \tag{2.38}$$

равенство имеет место в силу того, что

$$V_{g_*}(x,s) = \mathbf{E}_{xs}\, f(X_{\tau_*}, M_{\tau_*})\,.$$

□

2.4 Частный случай: максимизация расстояния до минимума.

Рассмотрим следующую задачу для геометрического броуновского движения $H_t = \exp(B_t - \mu t)$:

$$V_1 = \sup_{\tau \geqslant 0} \mathbf{E}\left(H_\tau - \min_{s \leqslant \tau+\varepsilon} H_s\right).$$

Эта задача может быть интерпретирована как задача о продаже акции с как можно большим доходом относительно минимальной цены. Она является частным случаем задачи (2.8) для процесса $X_t = B_t + \mu t$ и функции

$h(x,s) = e^{-x} - e^{-s}$. Обозначим $G(y)$ и $g(y)$, соответственно, функцию распределения и плотность для величины $M_{s+t} - X_s$. Функция выплат f в нашем случае имеет вид (для $d = s - x$)

$$f(x,s) = \mathbf{E}\left(h(X_\tau, M_{\tau+t}) \mid X_\tau = x, M_\tau = s\right) = \int\limits_0^\infty e^{-x} - e^{-s\vee(x+y)} g(y)dy$$

$$= e^{-x}\left[1 - \int\limits_0^\infty e^{-(d\vee y)} g(y)dy\right] = e^{-x}\left[1 - e^{-d}G(d) - \int\limits_d^\infty e^{-y} g(y)dy\right].$$

Теорема 2.5. *Оптимальный момент остановки в данном случае имеет вид:*

1. *Если $\mu < \frac{1}{2}$, то оптимального момента остановки не существует, а $V_*(x,s) = \infty$.*

2. *Если $\mu = \frac{1}{2}$, то $V_* = \mathbf{E}\left(X_0 - m_\varepsilon\right)$, причём равенство достигается на любом моменте остановки из $\mathfrak{M}_X(f)$.*

3. *Если $\mu > \mu_0(\varepsilon)$, где μ_0 — единственный корень уравнения*

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\phi(-\mu\sqrt{\varepsilon}) + 2(\mu-1)e^{\varepsilon(\frac{1}{2}-\mu)}\Phi((\mu-1)\sqrt{\varepsilon}) = 2\mu - 1\,,$$

то оптимальным моментом остановки является $\tau = 0$

4. *Наконец, если не выполнено ни одно из указанных условий, то оптимальным моментом остановки является $\tau_* = \inf\{t : \ln X_t - \ln m_t = d\}$, где d — единственный корень уравнения*

$$\frac{2e^{-d}}{\sqrt{\varepsilon}}\phi\left(\frac{d-\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 2(\mu-1)e^{\varepsilon(\frac{1}{2}-\mu)}\Phi\left(\frac{-d+(\mu-1)\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = 2\mu - 1\,. \quad (2.39)$$

Доказательство. Известен явный вид для функции $G(d)$. Это так называемая формула Башелье-Леви (см., например, [46]):

$$G(d) = \Phi\left(\frac{d-\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - e^{2d\mu}\Phi\left(\frac{-d-\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Обозначим $d = s - x$, $\gamma(d) = \int\limits_d^\infty e^{-y} g(y)dy$. Тогда имеет место $f(x) = e^{-x}\left[1 - e^{-d}G(d) - \gamma(d)\right]$. С помощью [47] найдём явный вид для $\gamma(d)$:

$$\int\limits_d^\infty e^{-y} g(y)dy = 2e^{\varepsilon(1/2-\mu)}\Phi\left(\frac{-d-\varepsilon+\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ - \frac{2\mu}{2\mu-1}\left[e^{\varepsilon(1/2-\mu)}\Phi\left(\frac{-d-\varepsilon+\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - e^{(2\mu-1)d}\Phi\left(\frac{-d-\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right],$$

или, упрощая,

$$\gamma(d) = \frac{1}{\mu-\frac{1}{2}}\left[(\mu-1)e^{\varepsilon(\frac{1}{2}-\mu)}\Phi\left(\frac{-d-\varepsilon+\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \mu e^{(2\mu-1)d}\Phi\left(\frac{-d-\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]. \tag{2.40}$$

Проверим условия леммы 2.1:

$$f'_x(x,s) = e^{-x}(\gamma(d)-1),$$
$$f''_{xx}(x,s) = e^{-x}(1-\gamma(d)+e^{-d}g(d)),$$
$$f''_{xx}(x,s) + 2\mu f'_x(x,s) = e^{-x}\left[e^{-d}g(d) + (2\mu-1)(\gamma(d)-1)\right].$$

Обозначим $Z_2(d) = e^{-d}g(d) + (2\mu-1)(\gamma(d)-1)$. После несложных преобразований можем получить явный вид:

$$Z_2(d) = \frac{2e^{-d}}{\sqrt{\varepsilon}}\phi\left(\frac{d-\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 2(\mu-1)e^{\varepsilon(\frac{1}{2}-\mu)}\Phi\left(\frac{-d-\varepsilon+\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - 2\mu + 1.$$

При $\mu \leqslant \frac{1}{2}$ это выражение положительно для любого d, а следовательно, оптимального момента остановки не существует. В случае $\mu = \frac{1}{2}$ процесс H_t является мартингалом и, поскольку $\mathbf{E}\min\limits_{s\leqslant t} H_s \to 0$ при $t \to \infty$, то $V_*(x,s) = x$. При $\mu < \frac{1}{2}$ процесс является субмартингалом и $V_*(x,s) = \infty$.

Далее будем везде полагать $\mu > \frac{1}{2}$. Заметим, что $Z_2'(d) = -e^{-d}(2\mu g(d) - g'(d)) < 0$, так как $2\mu g(d) - g'(d) = \frac{2de^{2\mu d}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\varphi(\frac{d+\mu\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}) > 0$ при $d > 0$. Следовательно, Z_2 является убывающей функций. Если $Z_2(0) \leqslant 0$, то в (2.35) имеем

$$\int\limits_0^t (\mathbb{L}_X V_g)(X_r, M_r)dr < 0,$$

следовательно, процесс $V(X_t, M_t)$ является супермартингалом, а значит, оптимальный момент остановки $\tau_* = 0$. С учётом явного вида для Z_2, условие $Z_2(0) = 0$ даёт уравнение (2.39).

Далее будем считать, что $Z_2(0) > 0$. При этом, предел $\lim\limits_{d\to\infty} Z_2(d) = 1-2\mu < 0$ а следовательно, уравнение $Z_2(d) = 0$ имеет единственный корень d_2. Таким образом, в данной задаче выполняется условие однократного пересечения и нет необходимости пользоваться теоремой 2.3.

Найдём значение числителя в правой части уравнения (2.23):

$$f'_s(x,s) = e^{-s}G(d)$$
$$f''_{xs}(x,s) = -e^{-s}g(d)$$
$$f'_s(g(s),s)\Lambda^{-1}(g(s),s) + f''_{xs}(g(s),s) = \frac{e^{-s}}{1-e^{-2\mu d}}\big(2\mu G(d) - (1-e^{-2\mu d})g(d)\big)$$

Обозначив $Z_1(d) = 2\mu G(d) - (1-e^{-2\mu d})g(d)$, напишем уравнение для функции $d(s) = s - g(s)$:

$$d' = 1 + \frac{e^{-d}}{1-e^{-2\mu d}} \cdot \frac{Z_1}{Z_2}. \tag{2.41}$$

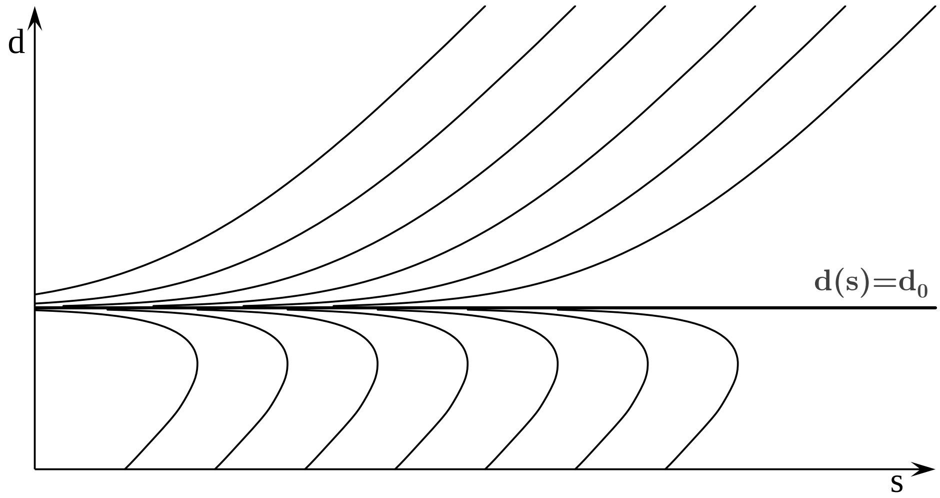
На рисунке 2.2 показано, как выглядит семейство решений такого уравнения.

Приравняв к нулю правую часть уравнения (2.41), получим $Z(d) = Z_2(d)(1 - e^{-2\mu d}) + e^{-d}Z_1(d) = 0$. Производная этого выражения равна $-e^{-d}Z_1(d) + 2\mu e^{-2\mu d}Z_2(d) < 0$ при $Z_2 > 0$. Далее, поскольку $Z(d_2) = e^{-d_2}Z_1(d_2) > 0$, а $\lim\limits_{d\to\infty} Z(d) = 1 - 2\mu < 0$, то у уравнения (2.41) есть единственное постоянное решение $d = d_0$, где $d_0 > d_2$.

Таким образом, решения уравнения (2.41) в области $d > d_2$ разбиваются на три группы:

- Убывающие решения, находящиеся ниже прямой $d = d_0$, пересекающие прямую $d = d_2$.

Рисунок 2.2: Общий вид решений уравнения (2.41) при $\mu = 0.6$, $\varepsilon = 1$. Несложно убедиться, что все решения, располагающиеся ниже некой горизонтальной прямой, попадают в область $D_1(f, \mu)$.



· Решение $d = d_0$

· Возрастающие решения, находящиеся выше прямой $d = d_0$

Следовательно, решение $g(s) = s - d_0$ является максимальным допустимым решением рассматриваемой задачи, откуда следует, что оптимальный момент остановки имеет вид $\tau_* = \inf\{t : M_t - X_t \geqslant d_0\}$. $\square$

Глава 3

Общая задача на конечном интервале

3.1 Введение.

Пусть задана произвольная однородная во времени диффузия X_t, удовлетворяющая стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t\,, \tag{3.1}$$

и процесс текущего максимума $M_t = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$. Также рассмотрим функцию $h(x,s)$, принадлежащую $C^{2,1}$ на множестве всех значений, которые может принимать двухмерный процесс (X_t, M_t).

Представляют интерес задачи вида

$$V_*(x,s,t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} \mathbf{E}_{xst}\, h(X_\tau, M_T) \tag{3.2}$$

и

$$V_*(x,s,t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T-t} \mathbf{E}_{xst}\, h(X_\tau, M_{\tau+t})\,, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{E}_{xst}$ – математическое ожидание при условии $X_t = x$, $M_t = s$. Как правило, функция $h(x,s)$ оценивает «близость» значения процесса в момент остановки к значению абсолютного максимума.

Отметим, что обе задачи (3.2) и (3.3) – частный случай задачи

$$V_*(x,s,t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} \mathbf{E}_{xst}\, f(X_\tau, M_\tau, \tau), \ \text{ где } (f'_s(x,s,t))|_{x=s} = 0 \text{ для любых } s \text{ и } t\,, \tag{3.4}$$

для функции

$$f(X_\tau, M_\tau, \tau) = \mathbf{E}(h(X_\tau, M_T)|X_\tau, M_\tau, \tau) \tag{3.5}$$

или

$$f(X_\tau, M_\tau, \tau) = \mathbf{E}(h(X_\tau, M_{\tau+t})|X_\tau, M_\tau, \tau) \tag{3.6}$$

соответственно.

Можно рассмотреть, по аналогии с работой [11], соответствующие задачи для процесса $m_t = \min\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_t$ и задачи поиска инфимума по всем возможным моментам остановки. Однако они тоже очевидным образом сводятся к задаче (3.4), поэтому далее в статье мы будем в основном рассматривать именно эту задачу как наиболее общую.

3.2 Остановка на диагонали.

Аналогично предыдущей главе, нам понадобится тот факт, что не оптимально останавливаться в точках, где

$$f''_{xx}(x,s,t) + 2\mu(x) f'_x(x,s,t) + f'_t(x,s,t) > 0\,. \tag{3.7}$$

Если для точек, где $x < s$, это следует из общей теории, то для точек на диагонали необходимо провести подробное доказательство. Идея доказательства аналогична лемме 2.1: на диагонали не определён характеристический оператор процесса — в его определении значение предела зависит от конкретной последовательности вложенных окрестностей. Возможно подобрать последовательность окрестностей таким образом, что предел окажется положительным, что и будет означать необходимость продолжения наблюдений.

Определим

$$\tau_\delta = \begin{cases} \inf\{t : X_t \geqslant x + d\}, & \text{для d>0} \\ \inf\{t : X_t \leqslant x + d\}, & \text{для d<0.} \end{cases}$$

Для произвольных $k, \delta > 0$ положим $\tau^* = \min(\tau_\delta, \tau_{-k\delta})$. Наконец, определим

$$\overline{\tau} = \begin{cases} \tau^*, & \text{если } X_\tau = M_\tau = x \\ \tau, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Мы покажем, что при выполнении условия (3.7) для некоторых k и δ имеет место

$$\mathbf{E}_{xst}\, f(X_{\overline{\tau}}, M_{\overline{\tau}}, \overline{\tau}) \geqslant \mathbf{E}_{xst}\, f(X_\tau, M_\tau, \tau)\,, \tag{3.8}$$

причём равенство имеет место только в случае $\overline{\tau} = \tau$ п.н.

Лемма 3.1. *Имеет место* $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\mathbf{E}\,\tau^*}{\delta^2} = \frac{k}{\sigma^2}$.

Доказательство. Обозначим $p_\delta = \mathsf{P}(X_{\tau^*} = x - k\delta)$. Тогда, применив характеристический оператор процесса X_t к функции $f(y) = (y-x)^2$, можем записать для последовательности сужающихся окрестностей $(x - k\delta, x + \delta)$:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta^2(1-p_\delta) + k^2\delta^2 p_\delta}{\mathbf{E}\,\tau^*} = \mathcal{A}f(x) = \sigma^2. \tag{3.9}$$

Учитывая, что $p_\delta \to \frac{1}{k+1}$ при $\delta \to 0$, можем переписать (3.9):

$$\frac{1}{\sigma^2} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathbf{E}\,\tau^*}{\delta^2 + (k^2-1)\delta^2 p_\delta} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathbf{E}\,\tau^*}{k\delta^2},$$

откуда получаем требуемое утверждение. □

Лемма 3.2. *Предположим, что выполнено*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(x,x,t) > 0\,. \tag{3.10}$$

Тогда для некоторого k существуют d и c такие, что при $\delta < d$ выполнено $R(\delta) = \mathbf{E}\, f(X_{\tau^*}, M_{\tau^*}, \tau^*) - f(x,x,t) > \frac{c}{\delta^2}$.

Доказательство. Обозначим

$$R^0(\delta) = \mathbf{E}\, f(X_{\tau^*}, x, \tau^*) - f(x, x, t)$$

Применив характеристический оператор процесса $\widetilde{X}_t = (X_t, t)$ к функции $\tilde{f}(y,t) = f(y,x,t)$, мы получим, что

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{R^0(\delta)}{\mathbf{E}\,\tau^*} = \mathbb{L}_{\widetilde{X}} \tilde{f}(x,t) = \mathbb{L}_{\widetilde{X}} f(x,x,t) > 0.$$

Воспользовавшись леммой 3.1, получим, что

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{R^0(\delta)}{k\delta^2} = \frac{\mathbb{L}_{\widetilde{X}} f(x,x,t)}{\sigma^2(x)} > 0. \tag{3.11}$$

С другой стороны, обозначив для некоторого $\varepsilon > 0$ $D_\varepsilon = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (x, x+\varepsilon) \times [0,T]$, $C_1 = \max\limits_{(x,s,t)\in D_\delta} |f_s s(x,s,t)|$, $C_2 = \max\limits_{(x,s,t)\in D_\delta} |f_x s(x,s,t)|$. Будем далее полагать, что $\delta < \varepsilon/k$.

Введём следующие обозначения: $\Phi^l(\theta,\delta) = P(\tau^* = \tau_{-k\delta} \leqslant \theta)$, $\Phi^h(\theta,\delta) = P(\tau^* = \tau_\delta \leqslant \theta)$, φ^l и φ^h – производные этих функций по θ.

Обозначим $S(\delta) = \big|R(\delta) - R^0(\delta)\big|$. По формуле полной вероятности

$$S(\delta) \leqslant \int\limits_0^\infty |f(x-k\delta, x+r(\delta,\theta),\theta) - f(x-k\delta, x, \theta)|\, \varphi^l(\theta,\delta) d\theta + \int\limits_0^\infty |f(x+ \delta, x+\delta,\theta),\theta) - f(x+\delta, x, \theta)|\, \varphi^h(\theta,\delta) d\theta \leqslant \delta \left(\int\limits_0^\infty |f_s'(x-k\delta, x+ \alpha(\delta,\theta),\theta)|\, \varphi^l(\theta,\delta) d\theta + \int\limits_0^\infty |f_s'(x+\delta, x+\beta(\delta,\theta),\theta),\theta)|\, \varphi^h(\theta,\delta) d\theta \right),$$

где при всех δ и θ имеем $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \delta$. Поскольку $f_s(x,x) = 0$, то

$$\begin{aligned} &|f_s'(x-k\delta, x+\alpha(\delta,\theta),\theta)| \leqslant \delta(C_1 + kC_2), \\ &|f_s'(x+\delta, x+\beta(\delta,\theta),\theta)| \leqslant \delta(C_1 + C_2). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Заметим, наконец, что при $\delta \to 0$ имеет место $\int\limits_0^\infty \varphi^l(\theta,\delta)d\theta \to \frac{1}{k+1}$ и $\int\limits_0^\infty \varphi^h(\theta,\delta)d\theta \to \frac{k}{k+1}$. Следовательно, $\limsup\limits_{\delta\to 0} \frac{S(\delta)}{\delta^2} \leqslant C_1 + 2C_2$.

Отсюда следует, что

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{R(\delta)}{k\delta^2} \geqslant \frac{\mathbb{L}_{\widetilde{X}} f(x,x,t)}{\sigma^2(x)} - \frac{C_1 + 2C_2}{k}, \tag{3.13}$$

что больше 0 при достаточно большом k. Следовательно, $R(\delta) > 0$ при некоторых k и δ, что и требовалось доказать. □

Теорема 3.1. *Предположим что $f'_s(x,x,t) = 0$. Тогда, если выполнено (3.10), то останавливаться в точке (x,x,t) не оптимально.*

Доказательство. В соответствии с леммой 3.2, достаточно доказать, что

$$M_1(\delta) = \mathbf{E}\,(f(X_{\tau^*}, M_{\tau^*}, \tau^*) - f((X_{\tau^* \wedge T}, M_{\tau^* \wedge T}, \tau^* \wedge T)) = o(\delta^2)\,.$$

Но $|M_1(\delta)| \leqslant C(k+2)\delta\,\mathsf{P}(\tau^* > T)$, где

$$C = \max f_x(y,s,T) \vee \max f_s(y,s,T), \quad y \in [x - kd, x + d],\, s \in [x, x + d].$$

Остаётся заметить, что $\mathsf{P}(\tau^* > T) \leqslant T\,\mathbf{E}\,\tau^* = O(\delta^2)$. □

3.3 Решение задачи.

3.3.1 Дифференциальное уравнение для граничной поверхности.

В случае, если при некотором s верно $V_*(s,s) = f(s,s)$, то есть в точке (s,s) на диагонали необходимо сразу останавливаться, вопрос нахождения $V_*(x,s)$ для всех $x < s$ сводится к задаче для одномерного процесса X_t, для которой известен способ решения. Интерес, следовательно, представляют те случаи, когда при $M_t = s$ необходимо останавливаться при достижении процессом X_t некоторого уровня $g_*(s,t) < s$ (при этом, опять-таки, для $x < g_*(s)$ вопрос нахождения $V_*(x,s)$ сводится к одномерной задаче). Далее мы выведем дифференциальное уравнение для оптимальной границы $g_*(s,t)$.

Чтобы найти уравнение для $g_*(s,t)$ (в случае, если области остановки и продолжения наблюдений действительно имеют описанный вид), запишем следующую систему дифференциальных уравнений для $V(x,s,t)$ (задачу Стефана):

$$V_t' + \mathbb{L}_X V = 0 \qquad g(s) < x < s \tag{3.14}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial s}(x,s,t)\right|_{x=s-} = 0 \qquad \text{(нормальное отражение)} \tag{3.15}$$

$$V(x,s,t)|_{x=g(s)+} = f(x,s,t) \qquad \text{(мгновенная остановка)} \tag{3.16}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}(x,s,t)\right|_{x=g(s)+} = f_x'(x,s,t) \qquad \text{(гладкое склеивание.)} \tag{3.17}$$

В уравнениях (3.16) и (3.17) подставим $g(s,t)$ вместо x, получим, соответственно,

$$V(x,s,t)|_{x=g(s,t)+} = f(g(s,t),s,t) = H(s,t) \tag{3.18}$$

и

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}(x,s,t)\right|_{x=g(s)+} = f_x'(g(s,t),s,t) = F(s,t)\,. \tag{3.19}$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится доказать, что правая производная функции V по s существует и удовлетворяет уравнению, аналогичному (3.14).

Теорема 3.2. $V_s'(x,s+,t)$ *существует и на множестве продолжения наблюдений C удовлетворяет уравнению*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) V_s'(x,s+,t) = 0\,. \tag{3.20}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку (x_0,s_0,t_0) и докажем в ней требуемое утверждение. В силу открытости множества C можем выбрать $\delta > 0$ так, что $\{(x,s,t)\} \in C$ при $s_0 \leqslant s \leqslant s_0+\delta$. Рассмотрим для произвольной границы $g = g(t)$ момент остановки $\bar\tau_g = \inf\{\theta > t : X_\theta \geqslant s_0$ или $X_\theta \leqslant g(\theta)\}$.

Определим функцию выплат

$$W(x,s,t) = \begin{cases} V(s_0,s,t), & \text{если } x = s_0 \\ f(x,s,t), & \text{если } x < s_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Наконец, положим $w(x,s,t,g) = \mathbf{E}_{xt}\,W(X_{\bar\tau_g}, s, \bar\tau_g)$. Заметим, что, поскольку $V_s'(s_0, s+, t)|_{s=s_0}$ существует для любых t, то W дифференцируема, а значит, существует и w_s'. В силу того, что граница g (а значит, и $\bar\tau_g$) не зависит от s, верно также, что

$$w_s'(x,s,t,g) = \mathbf{E}_{xt}\,W_s'(X_{\bar\tau_g}, s, \bar\tau_g)\,. \tag{3.22}$$

Отсюда следует, что w удовлетворяет уравнению $w''_{st} + \mathbb{L}_X w_s = 0$.

Далее, при $s_0 \leqslant s \leqslant s_0 + \delta$ верно $w(x_0,s,t,g) \leqslant V_*(x_0,s,t_0)$, при этом равенство достигается при $g(\theta) = g_*(s,\theta)$.

Обозначим $\mathbf{X}$ замыкание семейства распределений $(X_{\bar\tau_g}, M_{\bar\tau_g}, \bar\tau_g)$ при всех возможных $\bar\tau_g$. Оно плотно, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ для достаточно большого M случайная величина принадлежит компакту $[x_0 - M, x_0 + M] \times [s_0, s_0 + M] \times [0,T]$ с вероятностью, большей $1-\varepsilon$. Следовательно, по теореме Прохорова, $\mathbf{X}$ компактно (в топологии слабой сходимости). Далее, W, а значит, и w полунепрерывна сверху, что, вместе с непрерывностью w_s', позволяет применить теорему 2.2. Отсюда получаем, что $V_*(x,s,t) = w(x,s,t,g_*)$ дифференцируема по s справа и производная удовлетворяет (3.20). $\square$

Введём моменты остановки $\tau_g = \inf\{t > 0 : X_t \leqslant g(M_t,t)\}$, $\tau_0 = \inf\{t > 0 : X_t = M_t\}$ и $\tau_{g0} = \tau_g \wedge \tau_0$. Обозначим

$$V_g(x,s,t) = \mathbf{E}_{xst}\,f(X_{\tau_g}, M_{\tau_g}, \tau_g)\,.$$

Также обозначим $V_g^0(s,t) = V_g(s,s,t)$.

Следующая лемма утверждает, что склеивание является гладким не только по x, но и по s и t:

Лемма 3.3. *В точках, где существует производная $g_s(s,t)$, имеет место*

$$V_s'(g(s,t),s,t) = f_s'(g(s,t),s,t) \tag{3.23}$$
$$V_t'(g(s,t),s,t) = f_t'(g(s,t),s,t) \tag{3.24}$$

Доказательство. Продифференцируем (3.16) по s:

$$g_s'(s,t)V_x'(g(s,t),s,t) + V_s'(g(s,t),s,t) = g_s'(s,t)f_x'(g(s,t),s,t) + f_s'(g(s,t),s,t)\ ,$$

откуда с помощью (3.17) получаем (3.23). Доказательство (3.24) аналогично.

□

Наконец, обозначим Y_t процесс X_t, остановленный в момент пересечения диагонали, т.е. $Y_t = X_{t\wedge\tau_0}$ и положим

$$\Psi(x,y,t) = \mathsf{P}(Y_t \leqslant y | X_0 = x)\,. \tag{3.25}$$

Теорема 3.3. *Если выполнены условия (3.14)-(3.17), то $g(s,t)$ в точках, где $g(s,t) < s$, удовлетворяет уравнению*

$$g_s'(s,t) = \frac{\sigma^2(g(s,t))}{2} \cdot \frac{\int\limits_t^T f_s'(g(s,\theta),s,\theta)d\psi(s,t,\theta) - f_{xs}''(g(s,t),s,t)}{\left(f_t' + \mathbb{L}_X f\right)(g(s,t),s,t)}\ , \tag{3.26}$$

где $\psi(s,t,\theta)$ – функция, удовлетворяющая уравнению Вольтерры

$$\Psi_x'(g(s,t),g(s,r),r) = \int\limits_t^r \Psi(g(s,\theta),g(s,r),r-\theta)d\psi(s,t,\theta) \tag{3.27}$$

для всех $t < r \leqslant T$.

Доказательство. Применив формулу Ито к функции $V_s'(x,s,t)$, получаем, что

$$
\begin{aligned}
V_s'(X_{\tau_{g0}}, s, \tau_{g0}) &= V_s(x,s,t) + \int\limits_t^{\tau_{g0}} \frac{\partial V_s}{\partial x}(X_r,s,r)dX_r + \frac{1}{2}\int\limits_t^{\tau_{g0}} \frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}(X_r,s,r)d\langle X,X\rangle_r \\
&= V_s(x,s,t) + \int\limits_t^{\tau_{g0}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) V_s(X_r,s,r)dr \\
&+ \int\limits_t^{\tau_{g0}} \sigma(X_r)\frac{\partial V_s}{\partial x}(X_r,s,r)dB_r
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Процесс $M_s = \int\limits_t^s \sigma(X_r)\frac{\partial V_s'}{\partial x}(X_r,s,r)dB_r$ является непрерывным локальным мартингалом. Выберем для него локализующую последовательность моментов остановки σ_n. Тогда $\mathbf{E}\, V_s'(X_{\tau_{g0}\wedge\sigma_n}, s, \tau_{g0}\wedge\sigma_n) = V_s'(x,s,t)$. Устремив $n\to\infty$ и воспользовавшись леммой Фату, получим

$$
V_s'(x,s,t) = \mathbf{E}\, V_s'(X_{\tau_{g0}}, s, \tau_{g0}) \tag{3.29}
$$

или

$$
V_s'(x,s,t) = \int\limits_t^T V_s'(s,s,\theta)d\Phi^h(x,s,\theta) + \int\limits_t^T V_s'(g(s,\theta),s,\theta)d\Phi^l(x,s,\theta)\,. \tag{3.30}
$$

Первое слагаемое равно 0 в силу (3.15).

Воспользовавшись (3.23), получаем уравнение

$$
V_s(x,s,t) = \int\limits_t^T f_s(g(s,\theta),s,\theta)d\Phi^l(x,s,\theta) \tag{3.31}
$$

Продифференцируем по x в точке $x = g(s,t)$

$$
V_{xs}(g(s,t),s,t) = \int\limits_t^T f_s(g(s,\theta),s,\theta)d(\Phi^l)_x'(g(s,t),s,\theta)\,. \tag{3.32}
$$

С другой стороны, продифференцируем (3.17) по s:

$$
\begin{aligned}
&V_{xs}(g(s,t),s,t) + g_s(s,t)V_{xx}(g(s,t),s,t) \\
&\qquad = f_{xs}(g(s,t),s,t) + g_s(s,t)f_{xx}(g(s,t),s,t)\,.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

В силу (3.14) и гладкости склеивания ((3.17) и (3.24)) выполнено

$$V''_{xx}(g(s,t),s,t) = -2\mu(g(s,t))V'_x(g(s,t),s,t) - \frac{1}{\sigma^2(g(s,t))}V'_t(g(s,t),s,t)$$
$$= -2\mu(g(s,t))f'_x(g(s,t),s,t) - \frac{1}{\sigma^2(g(s,t))}f'_t(g(s,t),s,t)\,.$$

Отсюда

$$V''_{xs}(g(s,t),s,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(g(s,t),s,t)\cdot g'_s(s,t) + f''_{xs}(g(s,t),s,t)\,. \quad (3.34)$$

В совокупности с (3.32) это даёт нам уравнение (3.26) для $\psi(\theta,s,t) = (\Phi^l)'_x(g(s,t),s,\theta)$.

По формуле полной вероятности для любых y и r таких, что $t < r \leqslant T$ и $y < g(r)$ выполнено

$$\Psi(x,y,r) = \int\limits_t^r \Psi(g(s,\theta),y,r-\theta)d\Phi^l(x,s,\theta)\,. \quad (3.35)$$

Устремив $y \to g(s,r)+$, получим

$$\Psi(x,g(s,r),r) = \int\limits_t^r \Psi(g(s,\theta),g(s,r),r-\theta)d\Phi^l(x,s,\theta)\,. \quad (3.36)$$

Наконец, продифференцировав это уравнение по x в точке $x = g(t,s)$, получаем (3.27). $\square$

Таким образом, нами получено уравнение Вольтерры второго типа для функции $(\Phi^l)'_x(g(s,t),s,\theta)$, участвующей в уравнении (3.26). Зная функцию Ψ (зависящую только от процесса X), можем построить численное решение (3.26) при заданных начальных условиях.

Процесс Y_t также является однородной диффузией. Он удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dY_t = b(Y_t)I(Y_t < s)dt + \sigma(Y_t)I(Y_t < s)dB_t\,. \quad (3.37)$$

Таким образом, переходную вероятность Ψ можно найти как решение обратного уравнения Колмогорова $\left(\mathbb{L}_Y - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = 0$ (существование и единственность решения доказаны, например, в работе [48]). В диссертации [49] содержится обзор методов вычисления переходных вероятностей для однородных диффузий, а также оценки для плотности распределения момента пересечения произвольной границы.

Помимо решения интегрального уравнения, альтернативным способом поиска функции $\Phi^l(x, s, \theta)$ является аппроксимация границы g кусочно-линейной кривой. Впервые этот метод был предложен в работе [50]: построив две кусочно-линейные границы, одна из которых строго больше g, а другая — меньше, возможно получить, соответственно, нижнюю и верхнюю оценки для $\Phi^l(x, s, \theta)$. Вопросам точности такого метода, то есть вычислению разности между построенными оценками, посвящена работа [51], затем полученные результаты улучшены в [52].

Отметим, что уравнение (3.27) при различных t задаёт различные уравнения Вольтерры, и при построении границы приходится решать их все. Тем не менее, в случае, если исходная задача имеет вид (3.2), или иными словами, для некоторой $h(x, s) \in C^{2,1}$ выполнено (3.5), систему (3.26) и (3.27) возможно упростить.

Теорема 3.4. *Если в условиях теоремы 3.3 имеет место* (3.5) *и существует предел* $H(s) = \lim\limits_{t\to T} h'_s(g(s, T), s)$, *то* $g(s, t)$ *в точках, где* $g(s, t) < s$ *удовлетворяет следующему уравнению:*

$$g'_s(s, t) = \frac{\sigma^2(g(s, t))}{2} \cdot \frac{I(s, t) - f''_{xs}(g(s, t), s, t)}{\left(f'_t + \mathbb{L}_X f\right)(g(s, t), s, t)}\,, \tag{3.38}$$

где

$$I(s, t) = \int_t^T \chi(r)\Psi_x(x, g(s, r), r)dr + H(s)\Psi_x(g(s, t), s, T - t)\,, \tag{3.39}$$

а $\chi(r)$ – решение уравнения Вольтерры

$$f'_s(g(s,\theta),s,\theta) - H(s)\Psi(g(\theta,s),s,T-\theta) = \int_\theta^T \chi(r)\Psi(g(s,\theta),g(r,s),r-\theta)dr, \quad \forall\theta \in [t,T] \tag{3.40}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что $f'_s(x,s,t) = h'_s(x,s)P_{xt}(X_T \leqslant s)$. С другой стороны, $\Psi(x,s,T-t) = P_{xt}(X_T \leqslant s)$. Обозначим

$$\gamma(\theta,s) = f'_s(g(s,\theta),s,\theta) - H(s)\Psi(g(\theta,s),s,T-\theta)\,. \tag{3.41}$$

В силу равенств выше, эта функция непрерывным образом продолжается на прямую $\theta = T$ и в точке (T,s) равна 0.

Далее, для любой функции $\chi(r)$, для которой существует интеграл в левой части,

$$\begin{aligned}\int\limits_t^T \chi(r)\Psi_x(x,g(s,r),r)dr &= \int\limits_t^T\int\limits_t^r \chi(r)\Psi(g(s,\theta),g(r,s),r-\theta)\psi(x,s,\theta)d\theta dr \\ &= \int\limits_t^T \psi(x,s,\theta)\int\limits_\theta^T \chi(r)\Psi(g(s,\theta),g(r,s),r-\theta)drd\theta\,.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Выберем функцию $\chi(r)$, являющуюся решением уравнения Вольтерры второго рода

$$\gamma(\theta,s) = \int\limits_\theta^T \chi(r)\Psi(g(s,\theta),g(r,s),r-\theta)dr, \quad \forall\theta\in[t,T]\,. \tag{3.43}$$

Учитывая (3.43) и (3.42), интеграл $I(s,t) = \int\limits_t^T f'_s(g(s,\theta),s,\theta)\psi(s,t,\theta)d\theta$ в уравнении (3.26) можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned}I(s,t) &= \int\limits_t^T \gamma(\theta,s)\psi(s,t,\theta)d\theta + h'_s(s,s)\int\limits_t^T \Psi(g(\theta,s),s,T-\theta)\psi(s,t,\theta)d\theta \\ &= \int\limits_t^T \chi(r)\Psi_x(x,g(s,r),r)dr + H(s)\Psi_x(g(s,t),s,T-t)\,.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Подставляя в (3.26), получаем требуемое. □

В такой формулировке $\chi(r)$ не зависит от выбранного t, что значительно упрощает численное решение или исследование свойств границы $g(s,t)$.

3.3.2 Верификационная теорема.

Схема дальнейших рассуждений аналогична главе 2. Нам понадобится аналог леммы 2.2

Лемма 3.4. *Пусть $\varphi(x,s,t) \in C^{2,1,1}(\mathcal{J})$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{M}_X(\varphi)$, причём $\tau_1 \leqslant \tau_2$ и $M_{\tau_1} = M_{\tau_2}$. Тогда, если $\mathbb{L}_X\varphi(X_r, M_r, r) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(X_r, M_r, r) \geqslant 0$ при $\tau_1 \leqslant r \leqslant \tau_2$, то*

$$\mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_2}, M_{\tau_2}, \tau_2) \geqslant \mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_1}, M_{\tau_1}, \tau_1) \tag{3.45}$$

Доказательство. Применим формулу Ито к процессу $\varphi(X_t, M_t, t)$:

$$\begin{aligned}\varphi(X_{\tau_2}, M_{\tau_2}, \tau_2) = \varphi(x,s,t) + \int_0^{\tau_2} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_r, M_r, r)dX_r + \int_0^{\tau_2} \frac{\partial\varphi}{\partial s}(X_r, M_r, r)dM_r \\ + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(X_r, M_r, r)d\langle X, X\rangle_r\end{aligned} \tag{3.46}$$

Записав аналогичное представление для τ_1 и вычитая одно из другого:

$$\begin{aligned}\varphi(X_{\tau_2}, M_{\tau_2}, \tau_2) - \varphi(X_{\tau_1}, M_{\tau_1}, \tau_1) = \varphi(x,s,t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}dX_r \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2}(\mathbb{L}_X + \frac{\partial}{\partial x})\varphi dr + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}dM_r\end{aligned} \tag{3.47}$$

Интеграл по M_r равен 0, процесс $\int_0^t = \sigma(X_r)\frac{\partial}{\partial\psi}x(X_r, M_r, r)dB_r$ является локальным мартингалом. Для локализующей последовательности моментов остановки $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ с помощью (3.47) получаем, что

$$\mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_2\wedge\sigma_n}, M_{\tau_2\wedge\sigma_n}, \tau_2\wedge\sigma_n) \geqslant \mathbf{E}\,\varphi(X_{\tau_1\wedge\sigma_n}, M_{\tau_1\wedge\sigma_n}, \tau_1\wedge\sigma_n)\,, \tag{3.48}$$

откуда при переходе к пределу при $n \to \infty$ с помощью теоремы Фату-Лебега получаем (3.45). □

Так же, как и в предыдущей главе, обозначим I^0 интервал I вместе со своей левой границей, т.е. $I^0 \cup \{l_I\}$.

Определение 2. *Назовём границу* $g : I \times [0, T) \to I^0, g(s,t) \leqslant s$ *допустимой, если*

i) $g(s,t)$ *полунепрерывна снизу,*

ii) В точках, где $l_I < g(s,t) < s$, $g(s,t)$ *является решением уравнения* (2.23)*,*

iii) Для всех (s,t)*, где* $g(s,t) > l_I$*, выполнено* $\mathbb{L}_X f(g(s,t), s, t) \leqslant 0$.

Далее будем считать выполненным аналог условия однократного пересечения:

Условие 4. *Для каждого* s *в интервале* I *существует граница* $\underline{x}(s,t)$ *такая, что* $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(x,s,t) \geqslant 0$ *при* $x > \underline{x}(s,t)$ *и* $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(x,s,t) \leqslant 0$ *при* $x < \underline{x}(s,t)$.

По всей видимости, для произвольных функций f, достаточно «хорошо» ведущих себя при приближении к границам множества $I \times I \times [0, T]$, возможно по аналогии с 2.3 свести задачу к аналогичной для функции $\hat{f}$, удовлетворяющей условию однократного пересечения. Вместе с тем, подавляющее большинство «естественных» функций h в задаче 3.2 приводят к функциям f, для которых условие 4 верно.

Определим $V_g(x,s,t)$ как решение задачи Коши:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) V_g(x,s,t) = 0 \tag{3.49a}$$

$$V_g(g(s,t), s, t) = f(g(s,t), s, t) \tag{3.49b}$$

$$\frac{\partial V_g}{\partial x}(g(s,t), s, t) = f'_x(g(s,t), s, t) \tag{3.49c}$$

$$V_g(x, s, T) = f(x, s, T), \quad s \geqslant x \geqslant g(s,T). \tag{3.49d}$$

Лемма 3.5. *Пусть $g(s,t)$ – любое допустимое решение (3.26). Тогда процесс $V_g(X_t, M_t, t)$ является локальным супермартингалом.*

Доказательство. Заметим, что функция $V_g(x,s,t)$ удовлетворяет (3.14)–(3.17), в частности, выполнение принципа нормального отражения следует из допустимости $g(s,t)$. Следовательно, можем записать, применив формулу Ито к процессу $V_g(X_t, M_t)$:

$$\begin{aligned} V_g(X_t, M_t, t) = V_g(x,s,0) &+ \int_0^t \frac{\partial V_g}{\partial x}(X_r, M_r, r)dX_r \\ &+ \int_0^t \frac{\partial V_g}{\partial s}(X_r, M_r, r)dM_r + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 V_g}{\partial x^2}(X_r, M_r, r)d\langle X, X\rangle_r \\ = V_g(x,s,0) &+ \int_0^t \sigma(X_r)\frac{\partial V_g}{\partial x}dB_r + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right)V_g dr\,, \end{aligned} \tag{3.50}$$

где интеграл по dM_r равен 0 в силу принципа нормального отражения.

Процесс Q, определённый формулой

$$Q_t = \int_0^t \sigma(X_r)\frac{\partial V_g}{\partial x}(X_r, M_r)dB_r\,,$$

является непрерывным локальным мартингалом. Введём процесс

$$P_t = \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right)V_g(X_r, M_r, r)\mathbb{I}_{(X_r \leqslant g(M_r, r))}dr\,,$$

являющийся невозрастающим в силу условия 4, и запишем

$$V_g(X_t, M_t, t) = V_g(x,s,0) + Q_t + P_t\,. \tag{3.51}$$

Отсюда следует, что $V_g(X_t, M_t, t)$ – локальный супермартингал. □

Теорема 3.5. *Пусть $g(s,t)$ – произвольное допустимое решение и $\tau_g \in \mathfrak{M}_X(f)$ – соответствующий ему момент остановки. Тогда*

1. *Для любого момента остановки* $\tau \in \mathfrak{M}_X(f)$ *верно*

$$\mathbf{E}_{xst}\, f(X_\tau, M_\tau, \tau) \leqslant V_g(x, s, t). \tag{3.52}$$

2. *Если* $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(g(s, r), s, r) < 0$ *для* $\forall s, r$, *и* $\tau \in \mathfrak{M}_X(f)$ *– оптимальный момент остановки, то* $P_{xst}(\tau \neq \tau_g) = 0$

Доказательство. Выберем в представлении (3.51) локализующую последовательность моментов остановки σ_n для процесса M. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{xst}\, f(X_{\tau\wedge\sigma_n}, M_{\tau\wedge\sigma_n}, \tau\wedge\sigma_n) \leqslant \mathbf{E}_{xst}\, V_g(X_{\tau\wedge\sigma_n}, M_{\tau\wedge\sigma_n}, \tau\wedge\sigma_n)&\\ \leqslant V_g(x, s, t) + \mathbf{E}_{xst}\, M_{\tau\wedge\sigma_n} = V_g(x, s, t)&\ ,\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и снова пользуясь теоремой Фату-Лебега, получаем (3.52).

Утверждение 2 следует из того, что представление (3.54) имеет место для любого момента остановки $\tau_1 \in \mathfrak{M}_X(f)$ (а не только для моментов достижения допустимых границ – нам не требуется условие гладкого склеивания для τ_1).

□

Перейдём к вопросу о выборе конкретного допустимого решения. Нам понадобится, по аналогии с леммой 2.4, свойство монотонности V_g как функции от g:

Лемма 3.6. *Если при всех* s *и* t *выполнено* $g_1(s, t) \leqslant g_2(s, t)$, *то* $V_{g_1}(x, s, t) \geqslant V_{g_2}(x, s, t)$.

Доказательство. В соответствии с (3.51) существуют локальные мартингалы Q^1_r и Q^2_r, а также невозрастающие процессы P^1_r, P^2_r, такие, что для V_{g_1} и V_{g_2} имеет место следующее представление:

$$V_{g_1}(X_r, M_r, r) = V_{g_1}(x, s, t) + Q^1_r + P^1_r \tag{3.53a}$$
$$V_{g_2}(X_r, M_r, r) = V_{g_2}(x, s, t) + Q^2_r + P^2_r\,. \tag{3.53b}$$

Вычтем одно равенство из другого. Процесс $Q_r^2 - Q_r^1$ является локальным мартингалом, возьмём локализующую последовательность моментов остановки σ_n и запишем:

$$(V_{g_2} - V_{g_1})(X_{\tau_1 \vee \sigma_n}, M_{\tau_1 \vee \sigma_n}, \tau_1 \vee \sigma_n) = V_{g_2}(x,s,t) - V_{g_1}(x,s,t) + (Q^2 - Q^1)_{\tau_1 \vee \sigma_n} + (P^2 - P^1)_{\tau_1 \vee \sigma_n}, \tag{3.54}$$

где τ_1 – момент достижения g_1. Заметим, что последнее слагаемое равно

$$P_t = \int\limits_{\tau_2 \vee \sigma_n}^{\tau_1 \vee \sigma_n} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X \right) V_{g_2}(X_r, M_r, r) dr \geqslant 0\,.$$

При $n \to \infty$ выражение в левой части стремится к $V_{g_2}(X_{\tau_1}, M_{\tau_1}, \tau_1) - V_{g_1}(X_{\tau_1}, M_{\tau_1}, \tau_1) = f(X_{\tau_1}, M_{\tau_1}, \tau_1) - f(X_{\tau_1}, M_{\tau_1}, \tau_1) = 0$. Воспользовавшись леммой Фату, получаем, что $V_{g_2}(x,s,t) - V_{g_1}(x,s,t) \leqslant 0$, что и требовалось показать. □

Теорема 3.6. *Существует максимальная допустимая граница $g_*(s,t)$.*

Доказательство. Здесь, в отличие от случая бесконечного временного горизонта, вид уравнения для границы достаточно сложен, чтобы показать существование максимального решения напрямую. Вместо этого заметим, что достаточно показать существование допустимого решения, имеющего минимальную из всех функцию $(s,t) \mapsto V_g(s,s,t)$.

Действительно, предположим, что $g_1(s,t)$ и $g_2(s,t)$ – две допустимых границы и пусть для всех $s \in I$ и $t \in [0,T]$ выполнено $V_{g_1}(s,s,t) \leqslant V_{g_2}(s,s,t)$. Тогда

$$V_{g_1}(g_1(s,t),s,t) = f(g_1(s,t),s,t) \leqslant V_{g_2}(g_1(s,t),s,t) \tag{3.55}$$

в силу теоремы 3.5. Обозначим $C_1 = \{(x,s,t) : s > x > g_1(s,t)\}$. Тогда в силу (3.55) и сделанного предположения

$$V_{g_2}(x,s,t) - V_{g_1}(x,s,t) \geqslant 0, \;\; (x,s,t) \in \partial C_1\,. \tag{3.56}$$

Поскольку при этом $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{L}_X\right)V_{g_1}=0$ внутри C_1, то в силу условия однократного пересечения 4 внутри C_1 имеет место $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{L}_X\right)(V_{g_2}-V_{g_1})\leqslant 0$. Вместе с (3.56) это означает, что $V_{g_2}-V_{g_1}\geqslant 0$ на C_1. При этом вне C_1, по аналогии с (3.55), имеем

$$V_{g_1}(x,s,t)=f(x,s,t)\leqslant V_{g_2}(x,s,t)\,. \tag{3.57}$$

Итак, показано, что если для некоторой допустимой g_* для всех (s,t) выполнено $V_{g_*}(s,s,t)=\inf\limits_{g\in\mathcal{G}}V_g(s,s,t)$ (где мы обозначили множество всех допустимых границ $\mathcal{G}$), то для всех (x,s,t) имеет место

$$V_{g_*}(x,s,t)=\inf_{g\in\mathcal{G}}V_g(x,s,t)\,. \tag{3.58}$$

Предположим теперь, что для некоторой допустимой g и некоторых s и t имеет место $g(s,t)>g_*(s,t)$. Тогда $V_g(g(s,t),s,t)=f(g(s,t),s,t)<V_{g_*}(g(s,t),s,t)$, а это противоречит (3.58).

Осталось показать существование g_*, минимизирующего $V_g(s,s,t)$. Рассмотрим функцию $\widehat{V}(s,t)=\inf\limits_{g\in\mathcal{G}}V_g(s,s,t)$. Здесь инфимум определен, поскольку значения ограничены снизу величиной $f(s,s,t)$.

Наконец, определим $\widehat{V}(x,s,t)$ как решение следующей задачи Коши с условиями, заданными на диагонали $x=s$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbb{L}_X\right)\widehat{V}(x,s,t)&=0\\ \widehat{V}(x,s,t)\Big|_{x=s}&=\widehat{V}(s,t)\\ \frac{\partial}{\partial x}\widehat{V}(x,s,t)\Big|_{x=s}&=\frac{\partial}{\partial s}\widehat{V}(s,t)\,.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Поверхность $\widehat{V}(x,s,t)$ пересечёт $f(x,s,t)$ по некоторой кривой $g_*(s,t)$, которая будет допустимой в силу того, что решение задачи Коши непрерывным образом зависит от начальных условий ([45, теорема 2.1, глава 5]). □

Наконец, окончательный ответ на вопрос о выборе решения (3.26) даёт следующая

Теорема 3.7. *Обозначим $g_*(s,t)$ максимальное допустимое решение. Тогда, если для момента остановки $\tau_* = \inf\{t > 0 : X_t \leqslant g_*(M_t,t)\}$ выполнено $\mathbf{E}\, f(X_\tau, M_\tau, \tau) < \infty$, то он является оптимальным в задаче (3.4).*

Доказательство. Пусть τ – произвольный момент остановки для процесса X. Выберем в представлении (3.51) локализующую последовательность моментов остановки σ_n для Q. Тогда

$$\mathbf{E}_{xst}\, f(X_{\tau\wedge\sigma_n}, M_{\tau\wedge\sigma_n}, \tau\wedge\sigma_n) \leqslant \mathbf{E}_{xst}\, V_g(X_{\tau\wedge\sigma_n}, M_{\tau\wedge\sigma_n}, \tau\wedge\sigma_n) \leqslant V_g(x,s,t) \\ + \mathbf{E}_{xst}\, Q_{\tau\wedge\sigma_n} = V_g(x,s)\,.$$

Устремив $n \to \infty$ и воспользовавшись леммой Фату, получим

$$\mathbf{E}_{xs}\, f(X_\tau, M_\tau) \leqslant V_g(x,s)\,. \tag{3.60}$$

Взяв супремум по всем возможным τ и инфимум по всем допустимым g, получим

$$V_*(x,s) \leqslant \inf_g V_g(x,s) = V_{g_*}(x,s)\,, \tag{3.61}$$

равенство имеет место в силу того, что

$$V_{g_*}(x,s) = \mathbf{E}_{xst}\, f(X_{\tau_*}, M_{\tau_*})\,.$$

$\square$

3.4 Частный случай: минимизация отношения к максимуму.

Рассмотрим следующую задачу для процесса $X_t = B_t + \mu t$:

$$V_* = \inf_{\tau\leqslant T} \frac{X_t}{M_T} \tag{3.62}$$

Обозначим $G(x,t)$ функцию распределения величины M_{T-t}, а $\rho(x,t)$ – плотность этого распределения. Как показано в [53], эти функции имеют следующий вид:

$$G(x,t) = \Phi\left(\frac{x-\mu(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{-x-\mu(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)$$
$$\rho(x,t) = \frac{2}{\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{x-\mu(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - 2\mu e^{2\mu x}\Phi\left(\frac{-x-\mu(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Несложно проверить, что функция $G(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}G''_{xx}(x,t) - \mu G'_x(x,t) + G'_t(x,t) = 0\,. \qquad (3.63)$$

Нам понадобится следующее неравенство для этого распределения:

Лемма 3.7. *При $x > 0$ имеет место*

$$\left(\frac{\rho(x,t)}{G(x,t)}\right)'_x > 0 \qquad (3.64)$$

Доказательство. С учётом (3.63) неравенство (3.64) эквивалентно

$$\left(\frac{\rho(x,t)}{G_t(x,t)}\right)'_x > 0$$

Запишем последнее неравенство в явном виде, обозначив $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$ и $\delta = \mu\sqrt{t}$:

$$\left[\frac{1}{z}\left(\delta\frac{1-\Phi(z+\delta)}{\varphi(z+\delta)} - 1\right)\right]'_z > 0\,.$$

Дифференцируя, получаем, что последнее неравенство эквивалентно

$$\frac{\varphi^2(z+\delta)}{\delta} > z\varphi^2(z+\delta) + (z^2+\delta z)\left(1-\Phi(z+\delta)\right)\varphi(z+\delta)\,,$$

или

$$(1-z\delta)\frac{\varphi(z+\delta)}{1-\Phi(z+\delta)} > \delta(1-z\delta-z^2)\,.$$

В случае, если $1 - z\delta > 0$, это следует из того, что $\frac{\varphi(z+\delta)}{1-\Phi(z+\delta)} > z + \delta \geqslant \delta$. Если же $1 - z\delta < 0$, то воспользуемся следующим известным неравенством, доказанным в [54]:

$$\frac{1-\Phi(y)}{\varphi(y)} > \frac{y}{y^2+1}\,. \qquad (3.65)$$

С учётом этого неравенства, необходимо показать, что

$$\frac{(z+\delta)^2+1}{z+\delta} < \delta + \frac{z^2\delta}{z\delta - 1}\,. \tag{3.66}$$

Последнее неравенство легко проверить непосредственно. $\square$

Итак, можем записать представление для f:

$$f(x,s,t) = -\int_0^\infty \frac{x}{s \vee (x+y)} \rho(y,t)dy\,. \tag{3.67}$$

Найдём значения производных:

$$f'_x = -\frac{1}{s} - \int_{s-x}^\infty \left(\frac{y}{(x+y)^2} - \frac{1}{s}\right) \rho(y,t)dy \tag{3.68a}$$

$$f''_{xx} = \frac{x\rho(s-x,t)}{s^2} + 2\int_{s-x}^\infty \frac{y\rho(y,t)}{(x+y)^3} dy\,, \tag{3.68b}$$

откуда можем записать

$$\mathbb{L}_X f(x,s,t) = \frac{x\rho(s-x,t) - 2\mu s}{2s^2} + \int\limits_{s-x}^{\infty} \left[\frac{\mu}{s} - \frac{y(\mu(x+y)-1)}{(x+y)^3}\right] \rho(y,t)dy\,. \tag{3.69}$$

Воспользовавшись (3.63) и обозначив $h(x,y) = \frac{x}{s\vee(x+y)}$, получим

$$f'_t = -\int\limits_0^\infty h(x,y)\rho'_t(y,t)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty h(x,y)\rho''_{yy}(y,t)dy - \mu\int\limits_0^\infty h(x,y)\rho'_y(y,t)dy\,. \tag{3.70}$$

Проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^\infty h(x,y)\rho'_y(y,t)dy = -\frac{x}{s}\rho(0,t) + \int\limits_{s-x}^\infty \frac{x}{(x+y)^2}\rho(y,t) \tag{3.71}$$

и

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty h(x,y)\rho''_{yy}(y,t)dy &= -\frac{x}{s}\rho'_y(0,t) + \int\limits_{s-x}^\infty \frac{x}{(x+y)^2}\rho'_y(y,t) \\ &= -\frac{x}{s}\rho'_y(0,t) - \frac{x}{s^2}\rho(s-x,t) + \int\limits_{s-x}^\infty \frac{2x}{(x+y)^3}\rho(y,t)\,.\end{aligned} \tag{3.72}$$

Таким образом, используя (3.69) и (3.70)– (3.72),

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(x,s,t) = -\frac{\mu}{s} + \int\limits_{s-x}^{\infty} \left[\frac{\mu}{s} - \frac{\mu(x+y)-1}{(x+y)^2}\right] \rho(y,t)dy \qquad (3.73)$$

.

Обозначим эту функцию $\mathcal{L}(x,s,t)$ и запишем:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,s,t) &= -\frac{\mu}{s} + \mathbf{E}\left(\left(\frac{\mu}{s} - \frac{\mu M_T - 1}{M_T^2}\right) I(M_T > s) \middle| X_t = x, M_t = s\right) \\ &= -\frac{\mu}{s} + \mathbf{E}\left(u(M_T)|X_t = x, M_t = s\right),\end{aligned} \qquad (3.74)$$

где мы обозначили $u(y) = \left(\frac{\mu}{s} - \frac{(\mu y - 1)}{y^2}\right) I(y > s)$. Далее, заметим, что

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) \mathbf{E}\left(u(M_T)|X_t = x, M_t = s\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{E}_{xst}\left(\mathbf{E}(u(M_T)|\mathcal{F}_{t+\varepsilon})\right) - \mathbf{E}_{xst}\, u(M_T)}{\varepsilon} = 0\,.\end{aligned} \qquad (3.75)$$

Итак, доказано, что $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) \mathcal{L}(x,s,t) = 0$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{L}(x,s,t) = \mathbf{E}\, \mathcal{L}(X_{\tau_0 \vee T}, s, \tau_0 \vee T)\,. \qquad (3.76)$$

Теорема 3.8. *1. Если $\mu \leqslant 0$, то оптимальным (причём единственным) моментом остановки в задаче 3.62 является $\tau_* = T$.*

2. Если $\mu > 0$, то функция $f(x,s,t)$ удовлетворяет условию однократного пересечения. В этом случае оптимальный момент остановки имеет вид $\tau_* = \inf\{t : X_t \leqslant g(S_t,t)\}$, где $g(s,t)$ – единственное решение системы (3.26)-(3.27) с начальным условием $g(s,T) = s$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\mu \leqslant 0$. Найдём значение $\mathcal{L}$ при $x = s$:

$$\mathcal{L}(s,s,t) = -\frac{\mu}{s} + \int\limits_0^{\infty} \left[\frac{\mu}{s} - \frac{\mu(s+y)-1}{(s+y)^2}\right] \rho(y,t)dy = \int\limits_0^{\infty} \frac{1-\mu(s+y)}{(s+y)^2} \rho(y,t)dy > 0\,. \qquad (3.77)$$

С другой стороны, при $t \to T$ имеем $\mathcal{L}(x,s,t) \to -\frac{\mu}{s} \geqslant 0$, и из (3.76) следует, что $\mathcal{L}(x,s,t) > 0$ при $t < T$, а значит, оптимальным (причём единственным) моментом остановки является $\tau = T$.

Перейдём к утверждению 2. Проверим сначала условие однократного пересечения, для чего предположим обратное. Это означает, что в некоторой точке выполнено одновременно $\mathcal{L}(x,s,t) = 0$ и $\mathcal{L}'_x(x,s,t) < 0$. Запишем:

$$\frac{\mu}{s}G(s-x) + \int_s^\infty \frac{\mu y - 1}{y^2}\rho(y-x,t)dy = 0 \tag{3.78a}$$

$$\frac{\mu}{s}\rho(s-x) + \int_s^\infty \frac{\mu y - 1}{y^2}\rho'_x(y-x,t)dy < 0\,. \tag{3.78b}$$

Проинтегрируем по частям, умножим первое равенство на произвольное α и сложим:

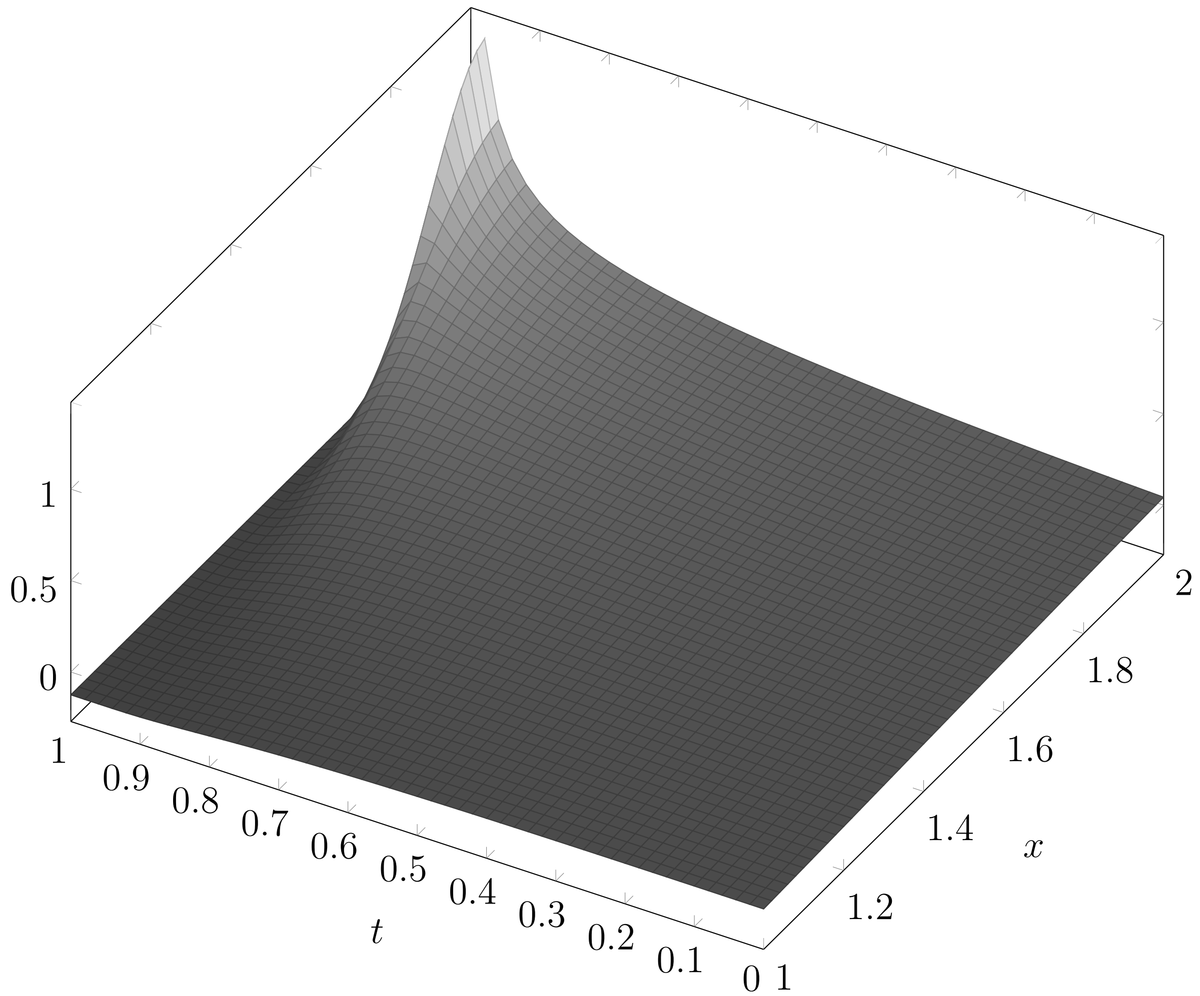
$$\frac{\mu}{s}[\alpha G(s-x) + \rho(s-x)] - \int_s^\infty \frac{\mu y - 2}{y^3}[\alpha G(y-x,t) + \rho(y-x,t)]dy < 0\,. \tag{3.79}$$

Отметим теперь, что знак функции $(\mu y - 2)/y^3$ совпадает со знаком $y - 2/\mu$. Если $s \geqslant 2/\mu$, то приходим к противоречию с тем, что $\mathcal{L}(x,s,t) = 0$. В случае, если $s < 2/\mu$, возьмём $\alpha = -\rho(2/\mu - x,t)/G(2/\mu - x,t)$. Тогда, в силу логарифмической выпуклости функции $G(x,t)$, функция $\rho(x,t)/G(x,t)$ является невозрастающей по x, а значит, знак функции $\alpha G(y-x,t)+\rho(y-x,t)$ совпадает со знаком $2/\mu - y$, откуда следует, что подынтегральная функция отрицательна (за исключением $y = 2/\mu$, где она обращается в 0), а $\frac{\mu}{s}[\alpha G(s-x) + \rho(s-x)] > 0$. Получили противоречие с (3.79), таким образом, лемма доказана. $\square$

Вид поверхности $\mathcal{L}(x,s,t)$ для конкретных значений μ и s показан на рисунке 3.1.

Таким образом, можем воспользоваться теоремой 1 для того, чтобы найти решение задачи. Найдём выражение для функции Ψ, воспользовавшись, по

Рисунок 3.1: Вид поверхности $\mathcal{L}(x,s,t)$ в задаче (3.62), $\mu = 0.25$, $T = 1$, $s = 2$



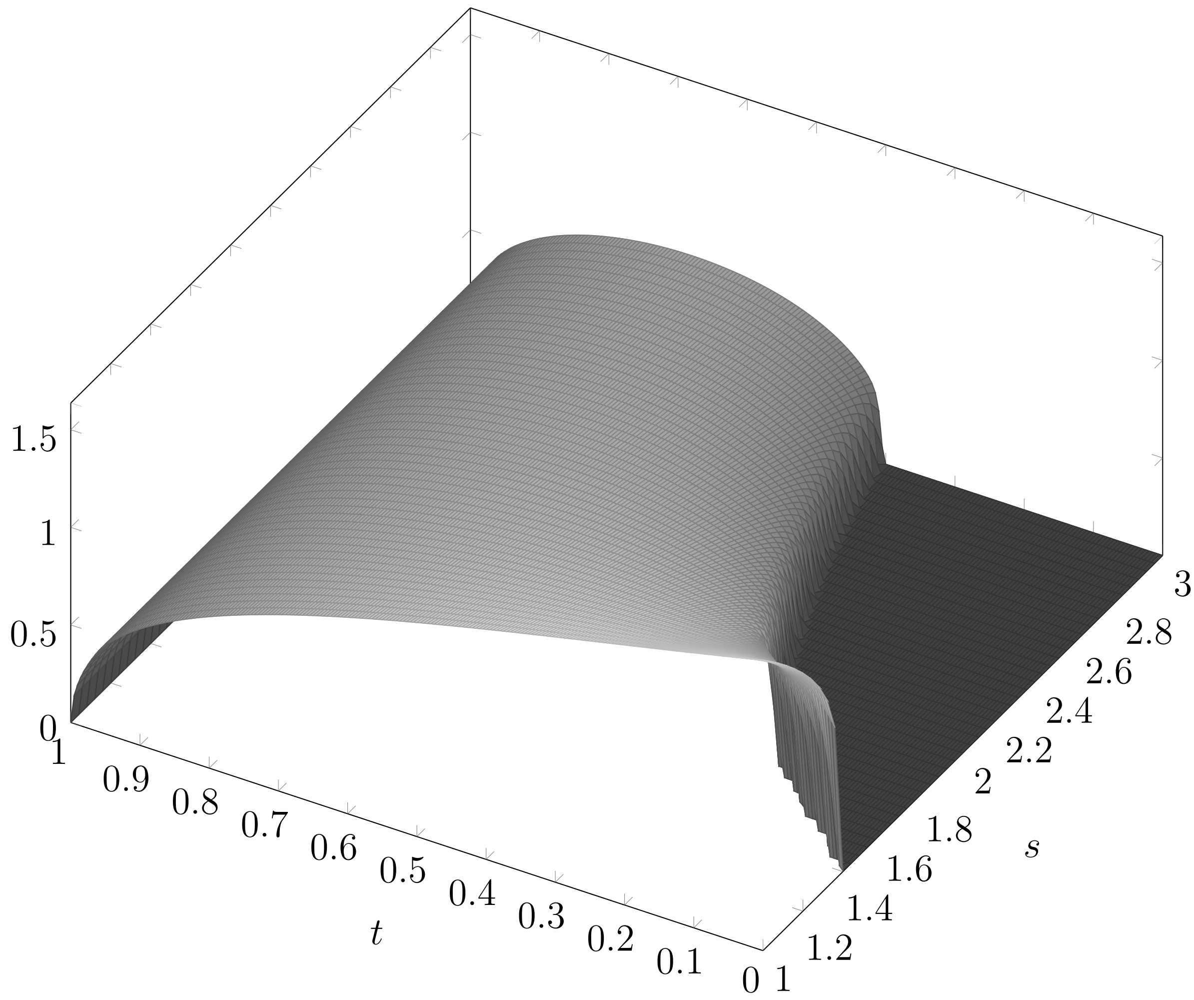
аналогии с работой [53], теоремой Гирсанова и принципом отражения для броуновского движения:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_x(Y_t \leqslant y) &= \mathsf{P}_x(X_t \leqslant y) - \mathsf{P}_x(X_t \leqslant y, M_t > s) \\
&= \Phi\left(\frac{y - x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - \mathbf{E}_x\, e^{\mu B_t - \frac{\mu^2 T}{2}} I(\sup_{r\leqslant t} B_r > s, B_t \leqslant y) \\
&= \Phi\left(\frac{y - x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\, \mathbf{E}_x\, e^{-\mu B_t - \frac{\mu^2 T}{2}} I(\sup_{r\leqslant t} B_r > s, B_t \leqslant y) \\
&= \Phi\left(\frac{y - x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\, \mathsf{P}_x(B_t - \mu t \geqslant 2s - y) \\
&= \Phi\left(\frac{y - x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y} \Phi\left(\frac{-2s + y + x - \mu t}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что $\lim\limits_{t} \to T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X\right) f(x,s,t) \leqslant 0$ для любых x и s, а значит, можем в качестве начальных условий для границы взять $g(s,T) = s$. Построенная таким образом граница окажется (в силу леммы 3.6) максимальной, и в силу теоремы 3.7 момент её достижения процессом будет оптимальным в поставленной задаче.

Итак, решая уравнение (3.38) с использованием явного вида функции Ψ для $H(s) = \frac{1}{s}$, получаем поверхность, показанную на рисунке 3.2.

Рисунок 3.2: Решение уравнения (3.26) в задаче (3.62), $\mu = 0.25$, $T = 1$



Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Решена задача об оптимальной остановке для «русского опциона» в модели Башелье. Показано, что единственным оптимальным моментом остановки является момент первого достижения разностью значения процесса и его текущего максимума некоторой границы, являющейся непрерывной функцией от времени. Найдено уравнение Вольтерры, которому удовлетворяет указанная граница.

2. Для упомянутой задачи о «русском опционе» найдена асимптотика решения в случаях временного горизонта, стремящегося к нулю и бесконечности. В частности, показано, что граница оптимальной области остановки сходится к значению, являющемуся решением поставленной задачи в случае бесконечного временного горизонта, причем скорость сходимости является экспоненциальной.

3. Разработан метод решения задачи об оптимальной остановке однородной диффузии относительно её максимума на бесконечном временном горизонте для произвольной функции оценки расстояния между текущим и максимальными значениями, удовлетворяющей определенным естественным условиям гладкости, а также поведения на бесконечности. Найдено дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять

оптимальная граница в данном случае, а также показано, что в данной задаче справедлив «принцип максимума»

4. Рассмотрена задача об оптимальной остановке однородной диффузии относительно её абсолютного максимума на конечном временном горизонте. Исследован вопрос о дифференцируемости функции цены по значению текущего максимума. С использованием методов, в основном, применяющихся в эконометрике, доказано существование обеих односторонних производных. Также доказан важный для дальнейшего исследования факт о том, что указанная производная является гармонической функцией, то есть удовлетворяет уравнению теплопроводности.

5. Разработан метод решения указанной задачи для конечного временного горизонта. Получена система из дифференциального и интегрального уравнений, которому должна удовлетворять граница оптимальной области остановки. Вид этой системы достаточно простой — она основана на уравнении Вольтерры второго рода. Это позволяет численно решить полученное уравнение и, таким образом, найти оптимальный момент остановки в исходной задаче.

6. Предложен способ упрощения полученной системы уравнений. Создана программная реализация разработанного алгоритма на языке C# с использованием библиотеки «Math.NET Numerics». В качестве частного случая решена известная задача об инвестиционной стратегии «покупай и держи» в модели Башелье.

Список рисунков

Литература

1. Shepp L., Shiryaev A. N. The Russian option: reduced regret // The Annals of Applied Probability. 1993. Vol. 3, no. 3. P. 631–640.

2. Shepp L. A., Shiryaev A. N. A New Look at Pricing of the «Russian Option» // Theory of Probability & Its Applications. 1994. Vol. 39, no. 1. P. 103–119.

3. Shepp L. A., Shiryaev A. N., Sulem A. A barrier version of the Russian option // Advances in Finance and Stochastics. Springer, 2002. P. 271–284.

4. Peskir G. The Russian option: Finite horizon // Finance and Stochastics. 2005. Apr. Vol. 9, no. 2. P. 251–267.

5. Duistermaat J., Kyprianou A., van Schaik K. Finite expiry Russian options // Stochastic Processes and their Applications. 2005. Apr. Vol. 115, no. 4. P. 609–638.

6. Conze A. et al. Path dependent options: The case of lookback options // The Journal of Finance. 1991. Vol. 46, no. 5. P. 1893–1907.

7. Musiela M., Rutkowski M. Martingale Methods in Financial Modelling. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2006.

8. Guo X., Shepp L. Some optimal stopping problems with nontrivial boundaries for pricing exotic options // Journal of Applied Probability. 2001. Vol. 38, no. 3. P. 647–658.
9. Shiryaev A., Xu Z., Zhou X. Y. Thou shalt buy and hold // Quantitative Finance. 2008. Vol. 8, no. 8. P. 765–776.
10. du Toit J., Peskir G. Selling a stock at the ultimate maximum // The Annals of Applied Probability. 2009. Jun. Vol. 19, no. 3. P. 983–1014.
11. Buy Low and Sell High / M. Dai, H. Jin, Y. Zhong et al. // Contemprorary quantitative finance. 2010. Vol. 1. P. 317–333.
12. Graversen S. E., Peskir G., Shiryaev A. N. Stopping Brownian motion without anticipation as close as possible to its ultimate maximum // Theory of Probability & Its Applications. 2001. Vol. 45, no. 1. P. 41–50.
13. du Toit J., Peskir G. The trap of complacency in predicting the maximum // Annals of Probability. 2007. Vol. 35, no. 1. P. 340–365.
14. Pedersen J. L. Optimal prediction of the ultimate maximum of Brownian motion // Stochastics and Stochastic Reports. 2003. Vol. 75, no. 4. P. 205–219.
15. du Toit J., Peskir G. Predicting the time of the ultimate maximum for Brownian motion with drift // Mathematical Control Theory and Finance. Springer, 2008. P. 95–112.
16. Shiryaev A., Novikov A. A. On a stochastic version of the trading rule “buy and hold”. // Stat. Decis. 2008. Vol. 26, no. 4. P. 289–302.
17. Ano K., Ivanov R. On predicting the ultimate maximum for exponential Lévy processes // Electronic Communications in Probability. 2012. Vol. 17.

18. Peskir G. Optimal stopping of the maximum process: the maximality principle // The Annals of Probability. 1998. Vol. 26, no. 4. P. 1614–1640.

19. Pedersen J. L. Discounted optimal stopping problems for the maximum process // Journal of applied probability. 2000. Vol. 37, no. 4. P. 972–983.

20. Ott C. Optimal Stopping Problems for the Maximum Process. Ph.D. thesis: University of Bath. 2013.

21. Lalescu T., Picard É. Introduction à la théorie des équations intégrales. A. Hermann & Fils, 1912.

22. Burton T. A. Volterra Integral and Differential Equations, Second Edition. Elsevier Science, 2005.

23. Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et al. Cambridge University Press, 2007.

24. Jaimungal S., Kreinin A., Valov A. Integral Equations and the First Passage Time of Brownian Motions // Pre-print. 2009.

25. Valov A. First Passage Times: Integral Equations, Randomization and Analytical Approximations. Canadian theses. Library and Archives Canada = Bibliothèque et Archives Canada, 2009.

26. Milgrom P., Segal I. Envelope Theorems for Arbitrary Choice Sets // Econometrica. 2002. Vol. 70, no. 2. P. 583–601.

27. Strulovici B. H., Szydlowski M. On the Smoothness of Value Functions // SSRN Electronic Journal. 2012.

28. Øksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications (Universitext). Springer, 2014.

29. Itō K., McKean H. P. J. Diffusion Processes and their Sample Paths: Reprint of the 1974 Edition (Classics in Mathematics). Springer, 1996.

30. Karatzas I., Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1991.

31. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. Теория вероятностей и математическая статистика. Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1963.

32. Bachelier L. Théorie de la spéculation. Gauthier-Villars, 1900.

33. Revuz D., Yor M. Continuous martingales and Brownian motion. Springer, 1999. Vol. 293.

34. Graversen S. E., Shiryaev A. N. An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion with drift // Bernoulli. 2000. P. 615–620.

35. Ekström E. Russian options with a finite time horizon // Journal of applied probability. 2004. Vol. 41, no. 2. P. 313–326.

36. Bian B., Dai X., Yuan G. Asymptotic analysis and numerical computation of American option when expiry date runs to infinity. (Chinese) // Tongji Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban (J. Tongji Univ.). 2005. Vol. 33, no. 4. P. 545–549.

37. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. Фазис, 1998.

38. Peskir G., Shiryaev A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems (Lectures in Mathematics. ETH Zürich (closed)). Birkhäuser, 2006.

39. Angelis T. D. A note on the continuity of free-boundaries in finite-horizon optimal stopping problems for one dimensional diffusions. 2013.

40. Øksendal B., Hu Y. Optimal Stopping with Advanced Information Flow: Selected Examples // Pre-print. 2007.

41. Bayraktar E., Zhou Z. On an Optimal Stopping Problem of an Insider // Pre-print. 2013.

42. Rogers L. C. G., Williams D. Diffusions, Markov Processes and Martingales: Volume 2, Itō Calculus (Cambridge Mathematical Library). Cambridge University Press, 2000.

43. Quah J. K.-H., Strulovici B. Aggregating the Single Crossing Property // Econometrica. 2012. Vol. 80, no. 5. P. 2333–2348.

44. Dayanik S., Karatzas I. On the optimal stopping problem for one-dimensional diffusions // Stochastic Processes and their Applications. 2003. Vol. 107, no. 2. P. 173 – 212.

45. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мир, 1970.

46. Lerche H. R. Boundary crossing of Brownian motion. Springer, 1986.

47. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1963.

48. Ikeda Y. The Cauchy problem of linear parabolic equations with discontinuous and unbounded coefficients // Nagoya Mathematical Journal. 1971. Vol. 41. P. 33–42.

49. Downes A. N. Boundary Crossing Probabilities for Diffusion Processes and Related Problems. Ph.D. thesis: The University of Melbourne. 2008.

50. Wang L., Pötzelberger K. Crossing Probabilities for Diffusion Processes with Piecewise Continuous Boundaries // Methodol Comput Appl Probab. 2007. Mar. Vol. 9, no. 1. P. 21–40.

51. Pötzelberger K., Wang L. Boundary crossing probability for Brownian motion // Journal of Applied Probability. 2001. Mar. Vol. 38, no. 1. P. 152–164.

52. Borovkov K., Novikov A. Explicit bounds for approximation rates of boundary crossing probabilities for the Wiener process // J. Appl. Probab. 2005. Mar. Vol. 42, no. 1. P. 82–92.

53. Shiryaev A. N. On martingale methods in the boundary crossing problems for Brownian motion // Sovremennye Problemy Matematiki. 2007. Vol. 8. P. 3–78.

54. Gordon R. D. Values of Mills' Ratio of Area to Bounding Ordinate and of the Normal Probability Integral for Large Values of the Argument // The Annals of Mathematical Statistics. 1941. 09. Vol. 12, no. 3. P. 364–366.