МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Музычка Степан Андреевич

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МАРКОВСКИЕ СИСТЕМЫ НА ПРЯМОЙ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2014

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Малышев Вадим Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Рыбко Александр Николаевич Институт проблем передачи информации РАН ведущий научный сотрудник
	кандидат физико-математических наук Анулова Светлана Владимировна Институт проблем управления В. А. Трапезникова РАН старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Московское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 3 октября 2014 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8 этаж) и на сайте механико-математического факультета: http://mech.math.msu.su.

Автореферат разослан   2014 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор   В. Н. Сорокин.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Настоящая работа посвящена изучению нескольких многочастичных моделей на прямой. В первой главе изучается система с локальным взаимодействием, которая является простейшей моделью твердого тела, а в последующих двух главах рассматриваются системы частиц, приводящие к нелинейным марковским процессам.

Для математических моделей равновесной статистической физики необходима устойчивость, то есть конечность статистической суммы в конечном объеме. Условие устойчивости дает хорошее приближение для многих явлений в газах, жидкостях и даже твердых телах. Однако, например, исследование моделей расширения или разрушения твердых тел упирается в то, что объем не фиксирован, и часто необходимо рассматривать конечное число частиц в бесконечном объеме. При реалистических взаимодействиях (когда взаимодействие исчезает на бесконечности) такая система не является устойчивой с точки зрения распределения Гиббса. При этом говорят, что система является метастабильной[1].

Для конечного числа частиц необходимо тогда доказывать, что система не выходит из определенной области фазового пространства (не распадается на части). Так как эта область зависит от всех параметров модели, то при большом числе частиц удобно применять прием, который в физике называют иногда двойным скейлингом (double scaling limit), например, где все параметры зависят от числа частиц. Тогда можно устремлять число частиц к бесконечности и получать точные асимптотические оценки в таком термодинамическом пределе.

В первой части первой главы мы рассматриваем одномерную систему из N частиц (молекул) одинаковой массы m, причем в начальный момент $t = 0$

$$0 = z_0(0) < z_1(0) = a < z_2(0) = 2a < \ldots < z_{N-1}(0) = (N-1)a \qquad (1)$$

для некоторого $a > 0$. Предполагается, что одна из частиц z_0 постоянно закреплена в нуле, а на z_{N-1} действует постоянная внешняя сила $f > 0$. Дина-

[1] *O. Penrose. Statistical mechanics of nonlinear elasticity.* Markov Processes and Random Fields, 2002, 8, no. 2, 351-364.

мика этой системы определяется гамильтонианом

$$H(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{k=1}^{N-1} V(z_k - z_{k-1}) - f z_{N-1}, \tag{2}$$

где $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_{N-1})$, $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_{N-1})$, и $V(z)$ — потенциал взаимодействия между соседними частицами. На $V(z)$, как правило, налагают следующие условия: $V(z) \to \infty$ при $z \to 0$, $V(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $V(z)$ выпукла на интервале $(0, b)$ и вогнута на (b, ∞), $V(z)$ имеет единственный минимум $V(a) < 0$ в точке $a > 0$, причем $a < b < \infty$.

Заметим, что при наложенных условиях меры Гиббса

$$p_{\text{Gibbs}}(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \frac{\exp(-\beta H(\mathbf{z}, \mathbf{p}))}{Z}, \ \beta > 0,$$

с гамильтонианом (2) не существует. Система не является устойчивой, а потому для исследования температурного и упругого расширения в условиях равновесия мы не можем использовать стандартную гиббсовскую идеологию.

Существует два пути для решения возникшей проблемы:

1. изменить $V(z)$ при больших z так, чтобы $V(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ (см. [2]).
2. искать окрестность $O(a)$ точки минимума такую, что при начальных данных (1) траектория никогда не выходит из $O(a)$. После чего ограничиться рассмотрением меры Гиббса в соответствующем многомерном компакте.

Мы здесь идем по второму пути, предполагая дополнительно, что в некоторой окрестности точки a потенциал имеет квадратичный вид

$$V(z) = \frac{\kappa}{2}(z - a)^2.$$

Теперь скажем точнее. Нетрудно вычислить растяжение такой цепочки в статической ситуации (при нулевой температуре), а именно, найти единственную неподвижную точку динамики. Однако логично исследовать также динамику системы частиц во времени и получить хорошие оценки для функционала

$$A = A(N, l, f, \kappa, m) = \sup_{t \in (0,\infty)} \max_{0 \le k, k+l \le N-1} |z_{k+l}(t) - z_k(t)|$$

[2] *V.A. Malyshev. One-dimensional mechanical networks and crystals.* Moscow Mathematical Journal, 2006, v, 6, No. 2, 353-358.

для больших N и различных $l > 0$. Несмотря на очевидную простоту модели, основной результат — оценка максимума (по всему бесконечному интервалу времени) отклонений от исходной «кристаллической» структуры — нетривиален и использует теоретико-числовые оценки. Дело в том, что хотя в нашей модели есть очевидная неподвижная точка, но, так как модель гамильтонова, то никакой сходимости к этой точке нет. Отсюда задача — оценить, насколько далеко траектория отходит от этой неподвижной точки. Мы начинаем с фиксированного числа N частиц и находим окрестность, из которой система никогда не выходит. Затем, устремляя $N \to \infty$, и делая скейлинг параметров, мы обнаруживаем, что есть фазовый переход, разделяющий область, где кристаллическая структура мало меняется на протяжении всего бесконечного времени, и область, где супремум растет с ростом N.

Во второй части первой главы мы рассматриваем случай, когда на незакрепленную цепочку гармонических осцилляторов воздействует слабое случайное возмущение $f = \varepsilon \dot{w}_t$, где $\varepsilon > 0$ — параметр возмущения, а $\dot{w}_t$ — белый гауссовский шум[3]. Хорошо известно[4], что в этом случае в системе не наблюдается сходимости к инвариантному распределению. Среднее энергии линейно растет с ростом времени, и как следствие, с вероятностью 1 в какой-то момент времени происходит разрыв — цепочка рвется. Здесь мы, наподобии результатов теории Вентцеля-Фрейдлина[5], оцениваем время разрыва τ^ε, а именно утверждается, что при $\varepsilon \to 0$ $\tau^\varepsilon/\varepsilon^2$ слабо сходится к времени выхода $2(N-1)$-мерного броуновского движения из определенной области в $\mathbb{R}^{2(N-1)}$. Отметим, что несмотря на то, что здесь мы считаем цепочку незакрепленной с обоих концов, аналогичные результаты могут быть доказаны и для случая, когда один из концов цепочки остается неподвижным на всем протяжении времени.

Перейдем к обзору второй и третьей глав. Нелинейные марковские процессы (т.е. процессы, чьи переходные функции зависят не только от текущего состояния частицы, но также и от текущего распределения процесса) естественным образом возникают при рассмотрении динамики большого числа

---

[3] *Ю. А. Розанов. Стационарные случайные процессы,* М.: ФИЗМАТЛИТ, 1990. - 272 с. 2-е изд.

[4] *Gitterman M. The noisy oscillator.* Singapore. World Scientific Publishing Co. Re. Ltd, 2005.

[5] *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.* М.: Наука, 1979.

слабо взаимодействующих частиц. Хотя впервые эти процессы возникли в некоторых задачах математической физики, в настоящее время они находят применения во многих других областях, включая коммуникационные сети[6], биологию[7] и нейронные сети[8].

Впервые процессы рассматриваемого типа появляются в работе[9] в связи с некоторыми проблемами статистической механики, связанными со строгим выводом кинетических уравнений Больцмана. Общие определения были даны Г. Маккином[10] при рассмотрении моделей электронного газа, описывающих плазму[11]. Впоследствии множество авторов изучало нелинейные марковские процессы. В частности для ряда моделей был установлен закон больших чисел[12], утверждающий, что эмпирическое распределение соответствующей многокомпонентной системы с ростом числа частиц сходится к распределению нелинейного марковского процесса. Отметим, что задачи указанного типа тесно связаны с понятием propagation of chaos, утверждающего, что любые k частиц N-частичной системы с ростом N становятся независимыми[13].

Классическим примером нелинейного марковского процесса являются стохастические уравнения Маккина-Власова[10]

$$\mathrm{d}x_t = b(x_t, \mu_t)\mathrm{d}t + \sigma(x_t, \mu_t)\mathrm{d}w_t, \quad \mu_t = \mathrm{Law}(x_t), \tag{3}$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$, а w_t — n-мерный винеровский процесс. Коэффициенты сноса и диффузии часто выбирают зависящими от распределения процесса следую-

[6] *N. Antunes, C. Fricker, P. Robert, and D. Tibi. Stochastic networks with multiple stable points.* Ann. Probab., 36(1):255278, 2008.

[7] *S. Pirogov, A. Rybko, A. Kalinina, M. Gelfand, Recombination processes and non-linear Markov chains,* arXiv:1312.7653.

[8] *S. N. Laughton and A. C. Coolen. Macroscopic Lyapunov functions for separable stochastic neural networks with detailed balance.* J. Statist. Phys., 80(1-2):375387, 1995.

[9] *M. Kac. Foundations of kinetic theory.* Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statist. Probability 3, 171-197 (1956).

[10] *McKean, H.P. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA 56, 1907-1911 (1966).

[11] *А. А. Власов. О вибрационных свойствах элекроноого газа.* Журнал теоретической и эксперементальной физики. 1938. 8 (3): 291.

[12] *Р. Л. Добрушин. Уравнения Власова.* Функциональный анализ и его приложения, 13:2 (1979), 48–58.

[13] *M. Nagasawa, H. Tanaka. On the Propogation of Chaos for Diffusion Processes with Drift Coefficients Not of Average Form.* Tokyo J. Math. Vol. 10, No. 2, 1987.

щим образом

$$b(x,\mu) = b_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} b_2(x,y)\mu(\mathrm{d}y), \quad \sigma(x,\mu) \equiv 1, \tag{4}$$

где $b_1 : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b_2 : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — некоторые измеримые функции.

В частности в работах[14,15] рассматривался одномерный случай уравнений Маккина-Власова (3)-(4) с

$$b_1(x) = 0, \ b_2(x,y) = \beta(y-x),$$

где $\beta(\cdot)$ — некоторая нечетная неубывающая функция. Уравнение (3) в данном случае принимает вид

$$\mathrm{d}x_t = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y - x_t)\mu_t(\mathrm{d}y) \cdot \mathrm{d}t + \mathrm{d}w_t. \tag{5}$$

При определенных условиях на $\beta(\cdot)$ доказывались теоремы существования и единственности решения (5), изучались инвариантные меры решения, а также сходимость к ним.

Мы же изучаем нелинейный марковский процесс на $\mathbb{Z}$, в некотором смысле являющийся дискретным аналогом указанной модели, а именно, рассматривается случайное блуждание на $\mathbb{Z}$ с интенсивностями перехода, зависящими от текущего распределения процесса следующим образом

$$\begin{aligned} n \to n+1 : \lambda_n[\mathbf{p}(t)] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t) F(k-n); \\ n \to n-1 : \mu_n[\mathbf{p}(t)] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t) F(n-k), \end{aligned}$$

где $F : \ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ — некоторая функция, а $\mathbf{p}(t) = \{\mathbf{p}_k(t)\}$ — распределение процесса в момент времени t. Показывается, что при определенных условиях на функцию F процесс существует и обладает некоторыми свойствами, отсутствующими в линейном случае: наличие интегралов движения, однопараметрическое семейство инвариантных мер и пр.

Известно, что для нелинейных марковских цепей даже в том случае, ко-

[14] *Benachour, S.; Roynette, B.; Talay, D.; Vallois, P. Nonlinear selfstabilizing processes. I: Existence, invariant probability, propagation of chaos.* Stochastic Processes Appl. 75, No.2, 173-201 (1998).

[15] *Benachour, S.; Roynette, B.; Vallois, P. Nonlinear self-stabilizing processes. II: Convergence to invariant probability.* Stochastic Processes Appl. 75, No.2, 203-224 (1998).

гда они являются неразложимыми, может иметься несколько инвариантных мер, а потому возникает вопрос их описания, а также вопрос о сходимости к какой-либо из них. Утверждается, что в модели соответствующей уравнениям (5) типичной ситуацией является наличие однопараметрического семейства инвариантных мер, причем к одной из них имеется сходимость (в зависимости от начального распределения процесса). При этом в доказательстве сходимости существенным допущением[15] является выпуклость β при $x \geq 0$. В работах[16,17] удается в некотором смысле снять это ограничение, а именно, рассматривается случай

$$\beta(x) = x + \beta_0(x),$$

где $\beta_0(x)$ — ограниченная липшицева функция. Однако, при этом утверждается, что здесь могут возникать дополнительные эффекты, отсутствующие в работах[14,15]. В частности, для конкретного случая

$$\beta(x) = x + \alpha \sin x, \ \alpha > 0,$$

показано, что при достаточно больших $\alpha > 0$ множество неподвижных точек системы может представлять из себя два несвязанных однопараметрических семейства инвариантных мер. Во второй главе для нашей дискретной модели также приводится несколько явно вычислимых примеров, из которых следует, что типичной ситуацией по-прежнему является наличие однопараметрического семейства инвариантных мер, однако могут присутствовать эффекты, отсутствующие в непрерывном случае (5). В частности, приводится пример, когда множество неподвижных точек оказывается двухпараметрическим.

Третья глава посвящена доказательству сходимости к инвариантной мере. При этом мы используем метод, развиваемый в [18] и позволяющий одновременно показать, что соответствующая N-частичная система равномерно по всем $t \geq 0$ аппроксимирует предельный нелинейный марковский процесс (т.е. убедиться в справедливости закона больших чисел). Похожая техника использовалась и в [16], однако в нашем случае в силу дискретности фазового

[16] *П. Н. Ярыкин. Устойчивость нелинейного стохастического процесса, аппроксимирующего систему взаимодействующих частиц.* — Теория вероятн. и ее примен. 51:2 (2006), 400–409.

[17] *П. Н. Ярыкин. Поведение нелинейного случайного процесса в окрестности его стационарных распределений.* УМН, 61:4(370) (2006), 199–200.

[18] *A. Yu. Veretennikov. On ergodic measures for McKean-Vlasov stochastic equations.* Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo methods. pp. 471-486. Springer. 2006.

пространства непосредственное применение рассматриваемого метода не приводит к требуемому результату. Здесь мы используем модифицированный метод, определенным образом подправляя векторное поле аппроксимирующей N-частичной системы. Отметим, что существуют и другие способы доказательства сходимости. Так, например, в работе[19] это делается при помощи функции свободной энергии, которая при некотором выборе коэффициентов является функцией Ляпунова для уравнений Маккина-Власова. Также в [20] конструируется такое семейство нелинейных марковских цепей с конечным фазовым пространством, что для них вдоль траектории движения убывает относительная энтропия. При определенных параметрах системы, метод функции Ляпунова может быть использован и в нашем случае, а именно, мы показываем, что здесь в качестве функции Ляпунова может выступать расстояние Кульбака-Лейблера от текущего распределения до любой инвариантной меры.

Цель и задачи исследования. Целью настоящей диссертации является исследование линейных гамильтоновых систем под действием различных возмущающих факторов (рассмотрены случаи постоянной внешней силы и белого гауссовского шума). Также целью является изучение определенного класса нелинейных марковских процессов на дискретной прямой.

Научная новизна полученных результатов. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. В случае постоянной внешней силы, воздействующей на закрепленную цепочку гармонических осцилляторов, получена точная оценка амплитуды колебаний между частицами. Установлено, при каких скейлингах на параметры системы кристаллическая структура мало меняется на протяжении всего времени, и при каких — супремум растет с ростом числа элементов.

2. В случае возмущения незакрепленной цепочки гармонических осцилляторов белым гауссовским шумом получена асимптотика времени дости-

[19] *Y. Tamura. Free energy and the convergence of distributions of diusion processes of McKean type.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., 34 (2):443484, 1987.

[20] *P. Dupuis, M. Fischery. On the construction of Lyapunov functions for nonlinear Markov processes via relative entropy.* Preprint.

жения определенного уровня. Доказано, что распределение этого времени совпадает с распределением выхода броуновского движения из многомерной компактной области.

3. Для определенных нелинейных марковских процессов доказаны теоремы существования и единственности. Показано, что для процессов рассматриваемого вида имеются свойства, отсутствующие в классическом марковском случае (интегралы движения, неединственность инвариантного распределения и прочее). Установлена аппроксимация многочастичными марковскими цепями. Доказана теорема о сходимости к инвариантной мере.

Методы исследования. В работе применяются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, стохастического исчисления, а также функционального анализа и теории чисел.

Теоретическая значимость полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в области теории вероятностей и математической физики.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академика РАН, проф. А. Н. Ширяева (Москва, несколько докладов, 2012 и 2014 гг.).

2. Семинаре Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН (Москва, несколько докладов, 2012 и 2013 гг.).

3. Семинаре «Многокомпонентные случайные системы и математическая физика» лаборатории больших случайных систем МГУ имени М. В. Ломоносова (под руководством научного руководителя Малышева В. А.) (Москва, 2011-2014 гг. неоднократно).

4. Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в МГУ (Москва, несколько докладов, 2011, 2013 и 2014 гг.).

Публикации. Полный список опубликованных работ автора по теме диссертации приведён в конце автореферата. Четыре работы опубликованы в журналах из списка ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введния, трех глав, основных обозначений и списка литературы. Полный объём 126 страниц, из них 8 страниц занимает список литературы (88 наименований).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается краткое описание диссертации. Делается небольшой исторический обзор существующих результатов, а также приводятся основные определения и конструкции, возникающие при рассмотрении линейных гамильтоновых систем, а также нелинейных марковских процессов.

В главе 1 исследуется линейная гамильтонова система осцилляторов, являющаяся простейшей моделью твердого тела, под действием различных возмущающих факторов, а именно, рассматриваются случаи постоянной внешней силы и белого гауссовского шума.

Рассмотрим одномерную систему из N частиц (молекул) одинаковой массы m, причем в начальный момент $t = 0$

$$0 = z_0(0) < z_1(0) = a < z_2(0) = 2a < \ldots < z_{N-1}(0) = (N-1)a \tag{6}$$

для некоторого $a > 0$. Динамика этой системы определяется квадратичным гамильтонианом

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{k=1}^{N-1} V(z_k - z_{k-1}) - f z_{N-1}, \text{ где } V(z) = \frac{\kappa(z-a)^2}{2}. \tag{7}$$

Предполагается, что одна из частиц z_0 постоянно закреплена в нуле, а на z_{N-1} действует постоянная внешняя сила $f > 0$. Вводя отклонения $x_k(t) = z_k(t) - ka$, $k = 0, \ldots, N-1$, имеем гамильтонову систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x}_0(t) &= 0; \\ \ddot{x}_k(t) &= \omega_0^2(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}), \quad k = 1, \ldots, N-2; \\ \ddot{x}_{N-1}(t) &= \omega_0^2(-x_{N-2} + x_{N-1}) + f_0, \end{cases} \tag{8}$$

с начальными данными $x_k(0) = 0$, и $v_k(0) = \dot{x}_k(0) = 0$, $k = 0, \ldots, N-1$. Здесь мы обозначили через $\omega_0^2 = \kappa/m$ — собственную частоту осцилляторов, и $f_0 = f/m$.

Определим следующую вспомогательную функцию:

$$F_N(x) = x \ln \frac{N}{x}, x > 0, \tag{9}$$

и введем наш основной параметр $\sigma = f/\kappa = f_0/\omega_0^2$.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ — произвольное число, тогда для всех $k, l \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию*

$$\varepsilon N \le k < k + l \le (1-\varepsilon)N, \tag{10}$$

имеют место неравенства

$$\sigma(l + c_1 F_N(l)) \le \sup_{t \ge 0} (x_{k+l}(t) - x_k(t)) \le \sigma(l + c_2 F_N(l)), \tag{11}$$

$$\sigma(l - c_3 F_N(l)) \le \inf_{t \ge 0} (x_{k+l}(t) - x_k(t)) \le \sigma(l - c_4 F_N(l)) \tag{12}$$

для некоторых $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, независящих от N, l, f_0, ω_0 и a, причем c_1, c_3 могут зависеть от ε.

Далее мы используем процедуру, которая в физике иногда называется «double scaling limit». А именно, мы положим $a = 1/N$ и будем рассматривать различные скейлинги $l = l(N)$ и $\sigma = \sigma(N)$.

Здесь и далее мы используем следующее обозначение: для положительных функций $f(x) \simeq g(x)$, если существуют такие $c_1, c_2 > 0$, что на всей области определения $c_1 g(x) \le f(x) \le c_2 g(x)$.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1

$$\sup_{t \ge 0} |x_{k+l}(t) - x_k(t)| \simeq \sigma(N) l \ln \frac{N}{l}.$$

В качестве показателя фазового перехода рассмотрим максимальное относительное удлинение для $l = 1$

$$\frac{A}{a} = NA, \text{ где } A = \sup_{t \ge 0} \max_{\varepsilon N \le k \le (1-\varepsilon)N} |z_{k+1} - z_k|,$$

под действием действием силы f. При этом

$$a^{-1}A \to 1, \text{ если } \sigma(N)N\ln N \to 0, \tag{13}$$

$$a^{-1}A \to \infty, \text{ если } \sigma(N)N\ln N \to \infty. \tag{14}$$

Во второй части первой главы мы рассматриваем всё ту же цепочку гармонических осцилляторов, однако на этот раз предполагаем, что цепочка не закреплена, и на частицу с номером 0 воздействует случайная сила $f_\varepsilon(t) = \varepsilon\dot{w}(t)$, где $\dot{w}(t)$ – стандартный белый гауссовский шум, а $\varepsilon > 0$ — параметр возмущения. Динамика системы определяется уравнениями

$$\begin{cases} \ddot{x}_0(t) = & \omega_0^2(x_1 - x_0) + \varepsilon_0\dot{w}(t), \\ \ddot{x}_k(t) = & \omega_0^2(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}),\ k = 1,\dots,N-2; \\ \ddot{x}_{N-1}(t) = & \omega_0^2(x_{N-2} - x_{N-1}) \end{cases} \tag{15}$$

с нулевыми начальными условиями. Здесь $x_k = z_k - ka$ — отклонения частиц от состояния равновесия, $\omega_0^2 = \kappa/m$ — собственная частота осцилляторов, и $\varepsilon_0 = \varepsilon/m$. Отметим, что эти уравнения, как и все последующие, будут пониматься в смысле теории гауссовских возмущений динамических систем. В частности, $x_k(t) \in \mathbb{C}^1([0,\infty))$.

Хорошо известно, что, в случае, когда на линейную гамильтонову систему без диссипации воздействует белый гауссовский шум, в системе не наблюдается сходимости к инвариантному распределению. Среднее энергии линейно растет с ростом времени, и как следствие, с вероятностью 1 в какой-то момент времени происходит разрыв — цепочка рвется. Наша задача заключается в оценке времени достижения некоторого уровня h разности $\Delta_i^{\varepsilon_0} = z_{i+1} - z_i - a = x_{i+1} - x_i$

$$\tau_i^{\varepsilon_0} = \inf\left\{t \geq 0 :\ |\Delta_i^{\varepsilon_0}| > h)\right\},\ i = 0,\dots,N-2,$$

в зависимости от параметров $i, h, \omega_0, \varepsilon_0$ и N.

Обозначим через $\tau^d(D, W^d)$ — момент выхода стандартного d-мерного броуновского движения W^d из области D. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для любых* $N \geq 2$, $i = 0, 1, \dots, N-2$,

$$\varepsilon_0^2\tau_i^{\varepsilon_0} \textit{ слабо сходится к } \tau_i := \tau^{2(N-1)}(D_{i,N,h}, W^{2(N-1)}) \textit{ при } \varepsilon_0 \to 0,$$

где $D_{i,N,h}$ — множество всех $2(N-1)$-мерных векторов

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, y_1, \ldots, x_{N-1}, y_{N-1}),$$

удовлетворяющих неравенству

$$J_{i,N}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sqrt{2}}{N} \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\gamma_{m,i}}{\omega_m} \left(x_m \cos(\omega_m s) + y_m \sin(\omega_m s) \right) \right| \le h, \tag{16}$$

$$\omega_m = 2\omega_0 \sin\left(\pi m/2N\right), \;\; \gamma_{m,i} = \sin\left(\pi m/N\right) \sin\left(\pi m \left(i+1\right)/N\right).$$

Причем $D_{i,N,h}$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{2(N-1)}$, и для всех $i = 0, 1, \ldots, N-2$, τ_i и τ_{N-i-2} распределены одинаково.

Замечание 4. Таким образом, несмотря на то, что сила действует только на крайнюю левую частицу, асимптотика времени разрыва имеет тот же характер и с другой стороны.

В главе 2 рассматривается многочастичная марковская система на дискретной прямой, приводящая к нелинейному марковскому процессу, т.е. такому, чьи вероятности (интенсивности) переходов зависят не только от текущего состояния системы, но и от всего распределения процесса в целом. Изучаются свойства предельного процесса. В частности доказывается теорема существования и единственности, приводится несколько примеров, позволяющих в явном виде выписать все инвариантные меры рассматриваемого процесса.

Пусть $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ — произвольная функция. Рассмотрим две частицы $x^1(t), x^2(t)$ на дискретной прямой $\mathbb{Z}$. Будем предполагать, что $x^1(0), x^2(0)$ — независимые одинаково распределенные величины. Зададим взаимодействие между ними следующим образом: в любой момент времени $t \ge 0$ каждая из двух частиц независимо от другой совершает скачки:

$$\begin{aligned}
x^1(t) &\to x^1(t) + 1 \text{ с интенсивностью } F(x^2(t) - x^1(t)),\\
x^1(t) &\to x^1(t) - 1 \text{ с интенсивностью } F(x^1(t) - x^2(t)),\\
x^2(t) &\to x^2(t) + 1 \text{ с интенсивностью } F(x^1(t) - x^2(t)),\\
x^2(t) &\to x^2(t) - 1 \text{ с интенсивностью } F(x^2(t) - x^1(t)).
\end{aligned}$$

Таким образом, при $n \ge 0$ $F(n)$ выражает интенсивность притягивания между частицами, и при $n < 0$ — интенсивность отталкивания.

Обобщим рассмотренную модель на систему из большего числа частиц, а именно, рассмотрим N, $N \in \mathbb{N}$, частиц $x^{1,N}(t), x^{2,N}(t), \ldots, x^{N,N}(t)$ на дискретной прямой $\mathbb{Z}$. Как и ранее, будем считать, что $x^{i,N}(0)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что каждая пара частиц $(x^{i,N}(t), x^{j,N}(t))$, $1 < i < j < N$, независимо от остальных пар взаимодействует друг с другом по выше описанному правилу. Более конкретно, в каждый момент времени $t \geq 0$ n-ая частица независимо от остальных совершает скачки следующего вида

$$x^{n,N}(t) \to x^{n,N}(t) + 1 \text{ с интенсивностью } \lambda^{n,N}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k \neq n} F(x^{k,N}(t) - x^{n,N}(t)),$$

$$x^{n,N}(t) \to x^{n,N}(t) - 1 \text{ с интенсивностью } \mu^{n,N}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k \neq n} F(x^{n,N}(t) - x^{k,N}(t)).$$

(Множитель $1/N$ перед суммой в последних двух формулах является нормировочным). Обозначим через $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ стандартный базис N-мерного пространства. С формальной точки зрения мы имеем счетную цепь Маркова на $\mathbb{Z}^N$

$$\mathbf{x}^N(t) = (x^{1,N}(t), x^{2,N}(t), \ldots, x^{N,N}(t)) \tag{17}$$

с непрерывным временем и интенсивностями скачков

$$\mathbf{x}^N(t) \to \mathbf{x}^N(t) + e_n \text{ с интенсивностью } \lambda^{n,N}(t), \tag{18}$$

$$\mathbf{x}^N(t) \to \mathbf{x}^N(t) - e_n \text{ с интенсивностью } \mu^{n,N}(t). \tag{19}$$

Нас будет интересовать поведение одной частицы $x^{1,N}(t)$ при $N \to \infty$. Обозначив через $\mathbf{p}^N(t) = \left\{\mathbf{p}_n^N(t)\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\mathbf{p}_n^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} I_{\{x^{k,N}(t)=n\}}$$

эмпирическое распределения системы частиц, мы можем переписать выражения для интенсивностей скачков $x^{1,N}(t)$ в виде

$$n \to n+1: \ \lambda^{n,N}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k^N(t) F(k-n) - \frac{1}{N} F(0), \tag{20}$$

$$n \to n-1: \ \mu^{n,N}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k^N(t) F(n-k) - \frac{1}{N} F(0). \tag{21}$$

По аналогии с выводом уравнений Маккина-Власова естественно ожидать, что при $N \to \infty$ $\mathbf{p}^N(t)$ в некотором смысле должно быть близко к $\mathrm{Law}(x^{1,N}(t))$, а потому в пределе мы должны получить случайное блуждание $x(t)$ на $\mathbb{Z}$ с интенсивностями скачков $\lambda_n[\mathbf{p}(t)] : \ n \to n+1$ и $\mu_n[\mathbf{p}(t)] : \ n \to n-1$, зависящими от текущего в данный момент времени распределения $\mathbf{p}(t) = \mathrm{Law}(x(t)) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ процесса $x(t)$, следующим образом,

$$\lambda_n[\mathbf{p}(t)] := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t) F(k-n), \tag{22}$$

$$\mu_n[\mathbf{p}(t)] := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t) F(n-k). \tag{23}$$

Целью второй главы является изучение полученного нелинейного марковского блуждания $x(t)$. В частности первый вопрос, который здесь возникает — это условия при которых $x(t)$ корректно определен.

Заметим, что $x(t)$ соответствуют следующие уравнения Колмогорова

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{p}(t) H[\mathbf{p}(t)], \tag{24}$$

где $H[\mathbf{p}]$ — соответствующий нелинейный генератор процесса. С формальной точки зрения мы изучаем систему уравнений (24) относительно $\mathbf{p}(t)$, и при определенных условиях доказываем теоремы существования и единственности решения. Для того, чтобы это сделать, нам потребуется ввести несколько определений.

Пусть B_1 и B_2 — два банаховых пространства с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Пусть B_1 вкладывается в B_2 как линейное подпространство.

Определение 5. Будем говорить, что $f: (a,b) \to B_1$ имеет B_2-производную $f'(t) \in B_2$ в точке $t \in (a,b)$, если

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} \left(f(t+\Delta t) - f(t) \right) - f'(t) \right\|_2 = 0.$$

Определение 6. Пусть $x_0 \in B_1$ и $G: \ B_1 \to B_2$ — произвольная функция. Будем говорить, что система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G(\mathbf{x}(t)), \ \mathbf{x}(0) = x_0,$$

имеет (B_1, B_2)-решение $\mathbf{x}(t)$ на интервале $(a, b) \ni \{0\}$, если

1. Для любого $t \in (a, b)$ $\mathbf{x}(t) \in B_1$.
2. Для любого $t \in (a, b)$ B_2-производная $\mathbf{x}(t)$ в точке t равна $G(\mathbf{x}(t))$.

Рассмотрим семейство банаховых пространств B_β, $\beta > 0$, состоящих из бесконечных последовательностей $\{x_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, с нормой

$$\|x\|_\beta = \sum_k \beta^{|k|} |x_k|.$$

Отметим, что для любых $\beta_1 > \beta_2 > 0$ $B_{\beta_1} \subset B_{\beta_2}$ (как линейное пространство). В частности это свойство позволит нам рассматривать $(B_{\beta_1}, B_{\beta_2})$-решения системы (24) при подходящих β_1 и β_2.

Далее через const мы будем обозначать произвольное положительное число. Имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть $F(\cdot)$ удовлетворяет условиям*

$$F(n) \le \mathrm{const} \ \textit{при} \ n < 0;$$
$$F(n) \le \mathrm{const} \cdot \alpha^n \ \textit{при} \ n \ge 0$$

для некоторого $\alpha > 1$, тогда для любых $p_0 \in B_{\beta_{in}}$, $\beta_{in} > \alpha^3$ и $1 \le \beta_{out} < \beta_{in}\alpha^{-1}$ система (24) с начальным условием $\boldsymbol{p}(0) = p_0$ имеет единственное $(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$-решение, определенное на $[0, \infty)$. Кроме того, если $p_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, то для всех $t \ge 0$ $\boldsymbol{p}(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Для всех $p_0 \in B_{\beta_{in}} \cap \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ существует и единственен марковский процесс $x(t) = x(t, p_0) \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, \infty)$, такой, что $\boldsymbol{p}(t) \in B_{\beta_{out}}$, и его начальное распределение совпадает с p_0, а интенсивности перехода в момент времени $t \ge 0$ $\lambda_n(t)$ и $\mu_n(t)$ зависят от текущего распределения процесса $x(t)$ в соответствии с формулами (22) и (23).

Следующее предложение показывает, что у рассматриваемой системы имеется интеграл движения, и как следствие, процесс не может обладать обычными эргодическими свойствами, присущими классическим марковским цепям: существование ровно одной инвариантной вероятностной меры, к которой при $t \to \infty$ имеется сходимость.

Предложение 8. *В условиях теоремы 7 математическое ожидание*

$$\mathsf{E}[\boldsymbol{p}(t)] = \sum_k k\boldsymbol{p}_k(t)$$

не меняется с течением времени t. Таким образом, траектория $\boldsymbol{p}(t)$ лежит на поверхности $\Pi(\mathsf{E}[\boldsymbol{p}(0)])$, где

$$\Pi(E) = \left\{ p = \{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}} : \quad \mathsf{E}[p] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} kp_k = E \equiv \mathrm{const} \right\}.$$

Рассмотрим конкретный пример выбора функции $F(\cdot)$. Положим

$$F(k) = e^k. \tag{25}$$

Определение 9. Пусть $p = \{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $q = \{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — две вероятностные меры на $\mathbb{Z}$. Расстоянием Кульбака-Лейблера (относительной энтропией) между p и q называется следующая величина:

$$\mathsf{D}(p||q) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i \ln \frac{p_i}{q_i}.$$

Теорема 10. *Пусть $F(\cdot)$ задается выражением (25), и $p_0 = \boldsymbol{p}(0) \in B_{\beta_{in}}$, $\beta_{in} > e^3$, тогда соответствующий уравнениям (24) марковский процесс $x(t)$ существует, и имеет однопараметрическое семейство инвариантных мер $\pi(s) = \{\pi_k(s)\}$, $s \in \mathbb{R}$, следующего вида:*

$$\pi_k(s) = \frac{1}{\Xi(s)} e^{-(k-s)^2}, \ \text{где } \Xi(s) = \sum_k e^{-(k-s)^2} \text{ - нормирующий фактор.} \tag{26}$$

$s \in \mathbb{R}$ — параметр, однозначно задаваемый интегралом движения $E = \mathsf{E}[p_0]$. Для любого $s \in \mathbb{R}$ выполнено следующее неравенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathsf{D}\left(\boldsymbol{p}(t)||\pi(s)\right) \leq 0, \tag{27}$$

причем равенство достигается только при $\boldsymbol{p}(t) \in \{\pi(s),\ s \in \mathbb{R}\}$.

В главе 3 изучается сходимость к инвариантному распределению для нелинейного случайного блуждания $x(t)$. Основным результатом здесь является следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *$p_0 \in B_\beta$, где $\beta > 1$ — произвольное число.*
2. *$F(\cdot)$ — выпуклая возрастающая функция.*
3. *Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место следующее неравенство*

$$F(n) \leq \text{const} \cdot (1 + |n|).$$

Тогда $\boldsymbol{p}(t)$, двигаясь по гиперплоскости $\Pi(\mathsf{E}[p_0])$, при $t \to \infty$ слабо сходится к единственной неподвижной точке $\pi(\mathsf{E}[p_0]) \in \Pi(\mathsf{E}[p_0]) \cap \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Метод, который мы используем для доказательства теоремы 11, основан на работе[18]. В частности из него следует сходимость соответствующего аппроксимирующего N-частичного процесса $\mathbf{x}^N(t)$ к предельному нелинейному марковскому процессу $x(t)$.

Пусть $\gamma_+, \gamma_-(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — две произвольные неотрицательные функции. Рассмотрим марковскую цепь с непрерывным временем и фазовым пространством $\mathbb{Z}^N$

$$\mathbf{x}^N(t) = (x^{1,N}(t), x^{2,N}(t), \ldots, x^{N,N}(t))$$

с переходами, задаваемыми следующими соотношениями

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^N(t) \to& \mathbf{x}^N(t) + e_n \text{ с интенсивностью } \widetilde{\lambda}^{n,N}(t) = \lambda^{n,N}(t) + \gamma_+(\bar{x}^N(t) - \mathsf{E}[p_0]) \\
\mathbf{x}^N(t) \to& \mathbf{x}^N(t) - e_n \text{ с интенсивностью } \widetilde{\mu}^{n,N}(t) = \mu^{n,N}(t) + \gamma_-(\bar{x}^N(t) - \mathsf{E}[p_0]),
\end{aligned}$$

где через $\bar{x}^N(t)$ обозначено среднее $\mathbf{x}^N(t)$

$$\bar{x}^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x^{n,N}(t),$$

а $\lambda^{n,N}(t)$ и $\mu^{n,N}(t)$ задаются соотношениями (20) и (21). Заметим, что при $\gamma_+ = \gamma_- \equiv 0$ указанная марковская цепь в точности совпадает с аппроксимирующей N-частичной марковской цепью, задаваемой соотношениями (17)-(19).

Определение 12. Пусть (S, d) — метрическое пространство с метрикой d; μ, ν — две вероятностные меры на $(S, \mathcal{B}(S))$. Обозначим через $\mathcal{M}(\mu, \nu)$ — множество мер m на $S \times S$, т.ч.

$$m(A \times S) = \mu(A), \quad m(S \times A) = \nu(A)$$

для всех борелевских множеств $A \in \mathcal{B}(S)$. Тогда для любого $p \geq 1$

$$d_p(\mu, \nu) = \left(\inf_{m \in \mathcal{M}(\mu,\nu)} \int_{(x,y) \in S \times S} d^p(x, y) m(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \right)^{1/p}$$

называется L_p-расстоянием Канторовича-Рубинштейна.

Далее через $\mathrm{const}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ мы будем обозначать произвольную неотрицательную функцию от своих аргументов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 13. *Пусть выполнены условия* 1-3*;* $x^{1,N}(0), x^{2,N}(0), \ldots, x^{N,N}(0)$ *— независимые* p_0*-распределенные величины,* $\gamma_+ = \gamma_- \equiv 0$*, и* $T > 0$ *— произвольное положительное число, тогда для любого* $0 < \gamma < 1$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} d_2(\mathrm{Law}(x(t)), \mathrm{Law}(x^{1,N}(t))) \leq \mathrm{const}(p_0, T) \cdot N^{-\gamma/2}.$$

Также при доказательстве теоремы 11 мы существенно опираемся на следующий результат, имеющий самостоятельное значение.

Теорема 14. *Пусть выполнены условия* 1-3*;* $x^{1,N}(0), x^{2,N}(0), \ldots, x^{N,N}(0)$ *— независимые* p_0*-распределенные величины, и*

$$\gamma_+(x) = -xI_{\{x \leq 0\}}, \ \gamma_-(x) = xI_{\{x \geq 0\}}, \tag{28}$$

тогда для любого $0 < \gamma < 1$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{t \geq 0} d_2(\mathrm{Law}(x(t)), \mathrm{Law}(x^{1,N}(t))) \leq \mathrm{const}(p_0) \cdot N^{-\gamma/2}.$$

Благодарности Автор очень признателен профессору В. А. Малышеву и профессору К. Л. Ванинскому за постановку задач, помощь в работе, многолетнюю поддержку, ценные советы и неизменное внимание, а также профессорам А. Ю. Веретенникову, М.Я. Кельберту и доценту А. Д. Маните за

полезные обсуждения.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] А. А. Лыков, В. А. Малышев, С. А. Музычка. Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием. Теория вероятностей и ее применения, 57:4, стр. 794 – 799, 2012.

Постановка задачи принадлежит Малышеву. Теорема 1 доказана Лыковым. Теорема 2 пункт 1 доказан Малышевым. Пункт 2 теоремы 2 доказан Музычкой.

[2] С. А. Музычка. Среднее время до разрыва цепочки из $N = 2, 3, 4$ осцилляторов. Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика, стр. 46-51, 2013.

[3] В. А. Малышев. С. А. Музычка. Динамический фазовый переход в простейшей модели цепочки молекул. Теоретическая и математическая физика, т. 179, № 1, стр. 123-133, 2014.

Постановка задачи принадлежит Малышеву. Все остальные результаты установлены Музычкой.

[4] S. Muzychka, K. Vaninsky. A class of nonlinear random walks related to the Ornstein-Uhlenbeck process. Markov Processes and Related Fields, vol. 17, num. 2, pp. 277-304, 2012.

Постановка задачи принадлежит Ванинскому. Остальные результаты принадлежат Музычке.

[5] С. А. Музычка. Класс нелинейных марковских процессов, допускающих явное описание. Депонировано в ВИНИТИ 21.01.2014, №25-В2014.