Московский Государственный Университет
им. М.В.Ломоносова
Механико-Математический Факультет

На правах рукописи

Музычка Степан Андреевич

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МАРКОВСКИЕ СИСТЕМЫ НА ПРЯМОЙ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
д.ф.-м.н. В. А. Малышев

Москва, 2014

Оглавление

Список основных обозначений

$:=$ — «положить по определению».

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

$\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел.

$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел.

$\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных целых чисел.

$\mathcal{B}(E)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств метрического пространства E.

$\mathcal{P}(E)$ — множество всех вероятностных мер на $(E, \mathcal{B}(E))$.

$\mathcal{L}(V)$ — множество непрерывных операторов, действующих на линейном пространстве V.

$\mathcal{L}(V_1, V_2)$ — множество непрерывных линейных отображений, действующих из одного векторного пространства V_1 в другое — V_2.

$\mathbb{C}(X)$ — множество непрерывных действительнозначных функций на топологическом пространстве X.

$\mathbb{C}(X, Y)$ — множество непрерывных функций, отображающих топологическое пространство X в топологическое пространство Y.

$a \wedge b = \min(a, b)$ — минимум из двух чисел a и b.

$a \vee b = \max(a, b)$ — максимум из двух чисел a и b.

$[a] = \lfloor a \rfloor$ — нижняя целая часть числа a.

$\lceil a \rceil$ — верхняя целая часть числа a.

$\{a\}$ — дробная часть числа a.

$\mathsf{E}\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ.

$\mathsf{D}\xi$ — дисперсия случайной величины ξ.

δ_{ij} — символ Кронекера.

const — произвольное положительное число.

$\mathrm{const}(a_1, \ldots, a_n)$ — произвольная неотрицательная функция, неубывающая по каждому из своих аргументов a_i.

Введение

Настоящая работа посвящена изучению нескольких многочастичных моделей на прямой. В первой главе изучается система с локальным взаимодействием, которая является простейшей моделью твердого тела, а в последующих двух главах рассматриваются системы частиц, приводящие к нелинейным марковским процессам.

Для математических моделей равновесной статистической физики необходима устойчивость, то есть конечность статистической суммы в конечном объеме. Условие устойчивости дает хорошее приближение для многих явлений в газах, жидкостях и даже твердых телах. Однако, например, исследование моделей расширения или разрушения твердых тел упирается в то, что объем не фиксирован, и часто необходимо рассматривать конечное число частиц в бесконечном объеме. При реалистических взаимодействиях (когда взаимодействие исчезает на бесконечности) такая система не является устойчивой с точки зрения распределения Гиббса. При этом говорят, что система является метастабильной (см. [51]).

Для конечного числа частиц необходимо тогда доказывать, что система не выходит из определенной области фазового пространства (не распадается на части). Так как эта область зависит от всех параметров модели, то при большом числе частиц удобно применять прием, который в физике называют иногда двойным скейлингом (double scaling limit), например, где все параметры зависят от числа частиц. Тогда можно устремлять число частиц к бесконечности и получать точные асимптотические оценки в таком термодинамическом пределе.

В первой части первой главы мы рассматриваем одномерную систему из

N частиц (молекул) одинаковой массы m, причем в начальный момент $t = 0$

$$0 = z_0(0) < z_1(0) = a < z_2(0) = 2a < \ldots < z_{N-1}(0) = (N-1)a \qquad (0.0.1)$$

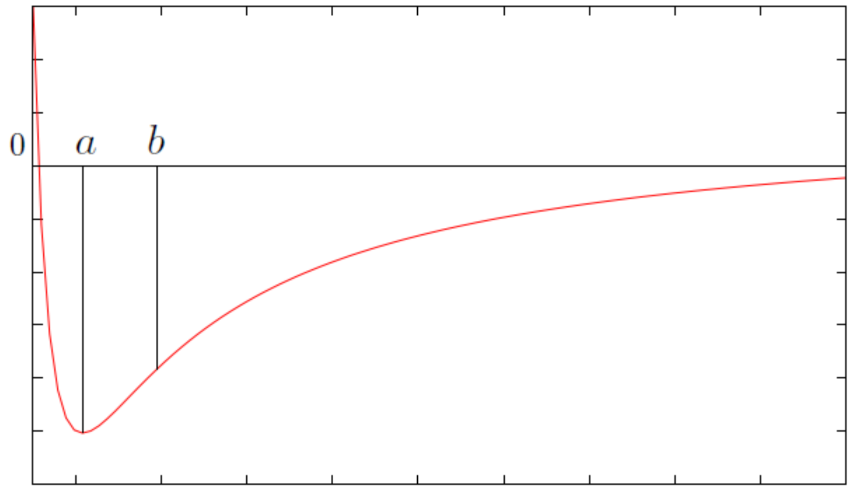
для некоторого $a > 0$. Предполагается, что одна из частиц z_0 постоянно закреплена в нуле, а на z_{N-1} действует постоянная внешняя сила $f > 0$. Динамика этой системы определяется гамильтонианом

$$H(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{k=1}^{N-1} V(z_k - z_{k-1}) - f z_{N-1}, \qquad (0.0.2)$$

где $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_{N-1})$, $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_{N-1})$, и $V(z)$ — потенциал взаимодействия между соседними частицами. На $V(z)$, как правило, налагают следующие условия:

1. $V(z) \to \infty$ при $z \to 0$;
2. $V(z) \to 0$ при $z \to \infty$;
3. $V(z)$ выпукла на интервале $(0, b)$ и вогнута на (b, ∞);
4. $V(z)$ имеет единственный минимум $V(a) < 0$ в точке $a > 0$, причем $a < b < \infty$.

Соответствующий график приведен на следующем рисунке.



Отметим, что на практике чаще всего используется так называемый потенциал Леннард-Джонса (см. [79, стр. 9]):

$$V(z) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{z} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{z} \right)^{6} \right] \tag{0.0.3}$$

(здесь ε — глубина потенциальной ямы, а σ — расстояние, на котором энергия взаимодействия становится равной нулю). Указанный потенциал достаточно реалистично передаёт свойства реального взаимодействия сферических неполярных молекул и поэтому широко используется в расчётах и при компьютерном моделировании.

Заметим, что при наложенных условиях меры Гиббса (см. [79, стр. 16])

$$p_{\mathrm{Gibbs}}(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \frac{\exp(-\beta H(\mathbf{z}, \mathbf{p}))}{Z}, \ \beta > 0,$$

с гамильтонианом (0.0.2) не существует. Система не является устойчивой, а потому для исследования температурного и упругого расширения в условиях равновесия мы не можем использовать стандартную гиббсовскую идеологию.

Существует два пути для решения возникшей проблемы:

1. изменить $V(z)$ при больших z так, чтобы $V(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ (этот метод используется в [35]).

2. искать окрестность $O(a)$ точки минимума такую, что при начальных данных (0.0.1) траектория никогда не выходит из $O(a)$. После чего ограничиться рассмотрением меры Гиббса в соответствующем многомерном компакте.

Мы здесь идем по второму пути, предполагая дополнительно, что в некоторой окрестности точки a потенциал имеет квадратичный вид

$$V(z) = \frac{\kappa}{2}(z - a)^2.$$

Теперь скажем точнее. Нетрудно вычислить растяжение такой цепочки в статической ситуации (при нулевой температуре), а именно, найти единственную неподвижную точку динамики. Однако логично исследовать также динамику системы частиц во времени и получить хорошие оценки для функционала

$$A = A(N, l, f, \kappa, m) = \sup_{t\in(0,\infty)} \max_{0\le k, k+l\le N-1} |z_{k+l}(t) - z_k(t)|$$

для больших N и различных $l > 0$. Несмотря на очевидную простоту модели, основной результат — оценка максимума (по всему бесконечному интервалу времени) отклонений от исходной «кристаллической» структуры — нетривиален и использует теоретико-числовые оценки. Дело в том, что хотя в нашей модели есть очевидная неподвижная точка, но, так как модель гамильтонова, то никакой сходимости к этой точке нет. Отсюда задача — оценить, насколько далеко траектория отходит от этой неподвижной точки. Мы начинаем с фиксированного числа N частиц и находим окрестность, из которой система никогда не выходит. Затем, устремляя $N \to \infty$, и делая скейлинг параметров, мы обнаруживаем, что есть фазовый переход, разделяющий область, где кристаллическая структура мало меняется на протяжении всего бесконечного времени, и область, где супремум растет с ростом N.

Во второй части первой главы мы рассматриваем случай, когда на незакрепленную цепочку гармонических осцилляторов воздействует слабое случайное возмущение $f = \varepsilon\dot{w}_t$, где $\varepsilon > 0$ — параметр возмущения, а $\dot{w}_t$ — белый гауссовский шум (см. [84]). Хорошо известно (см. [23, 77]), что в этом случае в системе не наблюдается сходимости к инвариантному распределению. Среднее энергии линейно растет с ростом времени, и как следствие, с вероятностью 1 в какой-то момент времени происходит разрыв — цепочка рвется. Здесь мы, наподобии результатов теории Вентцеля-Фрейдлина (см. [68]), оцениваем время разрыва τ^ε, а именно утверждается, что при $\varepsilon \to 0$ $\tau^\varepsilon/\varepsilon^2$ слабо сходится к времени выхода $2(N-1)$-мерного броуновского движения из определенной области в $\mathbb{R}^{2(N-1)}$. Отметим, что несмотря на то, что здесь мы считаем цепочку незакрепленной с обоих концов, аналогичные результаты могут быть доказаны и для случая, когда один из концов цепочки остается неподвижным на всем протяжении времени. Дополнительным результатом для рассматриваемого нами случая является то, что при $\varepsilon \to 0$ распределения времени выхода с левого и правого концов цепочки совпадают, несмотря на то, что возмущение действует только с одного края.

Наконец скажем, что есть много работ, посвященных другим задачам для одномерных моделей. Одни из наиболее известных — модели Ферми-Паста-Улама [22] и модель Френкеля-Конторовой [66]. Кроме того, имеется целая серия работ посвященных выводу макроскопических уравнений упругости твердого тела из микродинамики (см. [9, 11, 12, 62, 63]).

Перейдем к обзору второй и третьей глав. Нелинейные марковские процессы (т.е. процессы, чьи переходные функции зависят не только от текущего состояния частицы, но также и от текущего распределения процесса) естественным образом возникают при рассмотрении динамики большого числа слабо взаимодействующих частиц. Хотя впервые эти процессы возникли в некоторых задачах математической физики (см. [29]), в настоящее время они находят применения во многих других областях, включая коммуникационные сети (см. [1, 7, 14, 19, 37, 57]), экономику (см. [16]), биологию (см. [52]) и нейронные сети (см. [47]).

Впервые процессы рассматриваемого типа появляются в работе [29] в связи с некоторыми проблемами статистической механики, связанными со строгим выводом кинетических уравнений Больцмана. В статье рассматривается «игрушечная» N-частичная модель идеального газа и предельным переходом по N устанавливается сходимость к распределению, описываемому интегральным уравнением типа уравнения Больцмана. Общие определения были даны Г. Маккином (см. [38]) при рассмотрении моделей электронного газа, описывающих плазму (см. [70, 71]), а также возможному выводу уравнений Бюргерса (см. [8, 13]). Впоследствии множество авторов изучало нелинейные марковские процессы. В частности для ряда моделей был установлен закон больших чисел (см. [10, 45, 49, 73] и пр.), утверждающий, что эмпирическое распределение соответствующей многокомпонентной системы с ростом числа частиц сходится к распределению нелинейного марковского процесса. Отметим, что задачи указанного типа тесно связаны с понятием propagation of chaos, утверждающего, что любые k частиц N-частичной системы с ростом N становятся независимыми (см. [24, 26, 45] и пр.). Изучаются флуктуации отклонений многокомпонентной системы от предельного распределения (функциональная предельная теорема) (см. [53]) и оценки теории больших уклонений (см. [18]). Существует несколько монографий, посвященных процессам рассматриваемого вида (см. [31, 54]).

Рассмотрим произвольное измеримое пространство $(X, \mathcal{B})$. Динамика нелинейного марковского процесса описывается парой величин. Одна из них — это частица $x_t \in X$, имеющая случайную траекторию, а вторая — вероятностная мера $\mu_t = \mathrm{Law}(x_t)$, детерминированно меняющаяся с течением времени. Предполагается, что вероятности перехода (а в случае непрерывного времени – интенсивности) x_t некоторым образом зависят от его же собственного распределения μ_t. И потому, в то время как сам процесс x_t не является марковским, пара (x_t, μ_t) уже является таковой.

Классическим примером нелинейного марковского процесса являются стохастические уравнения Маккина-Власова (см. [38])

$$\mathrm{d}x_t = b(x_t, \mu_t)\mathrm{d}t + \sigma(x_t, \mu_t)\mathrm{d}w_t, \tag{0.0.4}$$

$$\mu_t = \mathrm{Law}(x_t), \tag{0.0.5}$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$, а w_t — n-мерный винеровский процесс. Коэффициенты сноса и диффузии часто выбирают зависящими от распределения процесса следующим образом

$$b(x, \mu) = b_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} b_2(x, y)\mu(\mathrm{d}y), \tag{0.0.6}$$

$$\sigma(x, \mu) \equiv 1, \tag{0.0.7}$$

где $b_1, b_2 : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — некоторые измеримые функции. В этом случае обосновать логичность уравнений (0.0.4)-(0.0.5) можно следующим образом. Рассмотрим N $(N \in \mathbb{N})$ частиц в n-мерном пространстве

$$(x_t^{1,N}, x_t^{2,N}, \ldots, x_t^{N,N}), \ x_t^{i,N} \in \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что в момент времени $t = 0$ $x_t^{i,N}$ независимы и имеют одинаковое распределение $p_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Зададим взаимодействие между частицами следующей N-мерной системой стохастических дифференциальных уравнений

$$\mathrm{d}x_t^{i,N} = b_1(x_t^{i,N})\mathrm{d}t + \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i} b_2(x_t^{i,N}, x_t^{j,N})\mathrm{d}t + \mathrm{d}w_t^i,\ i \in \{1,2,\ldots,N\} \tag{0.0.8}$$

(здесь w_t^i — независимые винеровские процессы). Обозначив через

$$\mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_t^{i,N}}$$

эмпирическое распределение системы, уравнения (0.0.8) можно переписать в виде

$$\mathrm{d}x_t^{i,N} = b_1(x_t^{i,N})\mathrm{d}t - \frac{1}{N-1} b_2(x_t^{i,N}, x_t^{i,N})\mathrm{d}t + \frac{N}{N-1}\int_{\mathbb{R}^n} b_2(x_t^{i,N}, y)\mu_t^N(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t + \mathrm{d}w_t^i,$$

а потому логично ожидать, что при $N \to \infty$ пара $(x_t^{1,N}, \mu_t^N)$ в некотором смысле сходится к решению уравнений (0.0.4)-(0.0.5). Строгий вывод указанных уравнений можно найти в [54].

Наконец, стоит отметить, что впервые уравнения Маккина-Власова были рассмотрены в работе [38] в связи с изучением некоторых моделей плазмы. Здесь функции $b_1(x)$ и $b_2(x,y)$ имели физический смысл градиента внешнего поля (внешнего по отношению к системе частиц) и силы взаимодействия частиц. Впоследствии большое число авторов изучало процессы указанного типа (см. [34, 59, 60] и пр.).

В частности в работах [5, 6] рассматривался одномерный случай уравнений Маккина-Власова (0.0.4)-(0.0.6) с

$$b_1(x) = 0,\ b_2(x,y) = \beta(y-x),$$

где $\beta(\cdot)$ — некоторая нечетная неубывающая функция. Уравнение (0.0.4) в данном случае принимает вид

$$\mathrm{d}x_t = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y - x_t)\mu_t(\mathrm{d}y)\cdot \mathrm{d}t + \mathrm{d}w_t. \tag{0.0.9}$$

При определенных условиях на $\beta(\cdot)$ доказывались теоремы существования и единственности решения (0.0.9), изучались инвариантные меры решения, а также сходимость к ним.

Мы же изучаем нелинейный марковский процесс на $\mathbb{Z}$, в некотором смысле являющийся дискретным аналогом указанной модели, а именно рассматривается случайное блуждание на $\mathbb{Z}$ с интенсивностями перехода, зависящими от текущего распределения процесса следующим образом

$$n \to n+1 : \lambda_n[\mathbf{p}(t)] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t)F(k-n);$$
$$n \to n-1 : \mu_n[\mathbf{p}(t)] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t)F(n-k),$$

где $F: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ — некоторая функция, а $\mathbf{p}(t) = \{\mathbf{p}_k(t)\}$ — распределение процесса в момент времени t. Показывается, что при определенных условиях на функцию F процесс существует и обладает некоторыми свойствами, отсутствующими в линейном случае: наличие интегралов движения, однопараметрическое семейство инвариантных мер и пр.

Известно, что для нелинейных марковских цепей даже в том случае, когда они являются неразложимыми, может иметься несколько инвариантных мер, а потому возникает вопрос их описания, а также вопрос о сходимости к какой-либо из них. Утверждается, что в модели соответствующей уравнениям (0.0.9) типичной ситуацией является наличие однопараметрического семейства инвариантных мер, причем к одной из них имеется сходимость (в зависимости от начального распределения процесса). При этом в доказательстве сходимости существенным допущением в [6] является выпуклость β при $x \geq 0$. В работах [87, 88] удается в некотором смысле снять это ограничение, а именно, рассматривается случай

$$\beta(x) = x + \beta_0(x),$$

где $\beta_0(x)$ — ограниченная липшицева функция. Однако, при этом утверждается, что здесь могут возникать дополнительные эффекты, отсутствующие в [5, 6]. В частности, для конкретного случая

$$\beta(x) = x + \alpha \sin x,\ \alpha > 0,$$

показано, что при достаточно больших $\alpha > 0$ множество неподвижных точек системы может представлять из себя два несвязанных однопараметрических семейства инвариантных мер. Во второй главе для нашей дискретной модели также приводится несколько явно вычислимых примеров, из которых следует, что типичной ситуацией по-прежнему является наличие однопараметрического семейства инвариантных мер, однако могут присутствовать эффекты, отсутствующие в непрерывном случае (0.0.9). В частности, приводится пример, когда множество неподвижных точек оказывается двухпараметрическим.

Третья глава посвящена доказательству сходимости к инвариантной мере. При этом мы используем метод, развиваемый в [59] и позволяющий одновременно показать, что соответствующая N-частичная система равномерно по всем $t \geq 0$ аппроксимирует предельный нелинейный марковский процесс (т.е. убедиться в справедливости закона больших чисел). Похожая техника использовалась и в [87], однако в нашем случае в силу дискретности фазового пространства непосредственное применение рассматриваемого метода не приводит к требуемому результату. Здесь мы используем модифицированный метод, определенным образом подправляя векторное поле аппроксимирующей N-частичной системы. Отметим, что существуют и другие способы доказательства сходимости. Так, например, в работах [55, 56] это делается при помощи функции свободной энергии, которая при некотором выборе коэффициентов является функцией Ляпунова для уравнений Маккина-Власова. Также в [20] конструируется такое семейство нелинейных марковских цепей с конечным фазовым пространством, что для них вдоль траектории движения убывает относительная энтропия. При определенных параметрах системы, метод функции Ляпунова может быть использован и в нашем случае, а именно, мы показываем, что здесь в качестве функции Ляпунова может выступать расстояние Кульбака-Лейблера от текущего распределения до любой инвариантной меры.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора: [43, 77, 78, 80, 81].

Благодарности Автор очень признателен профессору В. А. Малышеву и профессору К. Л. Ванинскому за постановку задач, помощь в работе, многолетнюю поддержку, ценные советы и неизменное внимание, а также профессорам А. Ю. Веретенникову, М.Я. Кельберту и доценту А. Д. Маните за полезные обсуждения.

Глава 1

Анализ системы гармонических осцилляторов с локальным взаимодействием

В данной главе изучается цепочка гармонических осцилляторов под действием различных возмущающих факторов. Глава состоит из семи параграфов. В первом из них рассматривается случай закрепленной с одного края цепочки, на другой конец которой действует постоянная внешняя сила. Целью здесь является оценка максимума отклонений частиц от положения равновесия на всем бесконечном интервале времени. Основные результаты автора содержатся в теоремах 1.1 и 1.2. Во втором параграфе главы рассматривается случай незакрепленной цепочки, на один из концов которой действует малый возмущающий фактор в виде белого гауссовского шума. Рассматривается задача об оценке времени выхода системы из определенной области фазового пространства. Основными результатами данного параграфа являются теоремы 1.3 и 1.4. В третьем параграфе сформулированы необходимые определения и утверждения, необходимые для доказательств основных теорем. Наконец в оставшихся четырех параграфах приведены доказательства соответствующих утверждений.

1.1 Динамический фазовый переход в простейшей модели цепочки молекул

Случай квадратичного потенциала и основной результат В данном разделе мы рассматриваем одномерную систему из N частиц (молекул) одинаковой массы m, причем в начальный момент $t = 0$

$$0 = z_0(0) < z_1(0) = a < z_2(0) = 2a < \ldots < z_{N-1}(0) = (N-1)a \qquad (1.1.1)$$

для некоторого $a > 0$. Динамика этой системы определяется квадратичным гамильтонианом

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{k=1}^{N-1} V(z_k - z_{k-1}) - f z_{N-1}, \text{ где} \qquad (1.1.2)$$

$$V(z) = \frac{\kappa(z-a)^2}{2}. \qquad (1.1.3)$$

Предполагается, что одна из частиц z_0 постоянно закреплена в нуле, а на z_{N-1} действует постоянная внешняя сила $f > 0$. Вводя отклонения $x_k(t) = z_k(t) - ka$, $k = 0, \ldots, N-1$, имеем гамильтонову систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x}_0(t) & = 0; \\ \ddot{x}_k(t) & = \omega_0^2(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}), \quad k = 1, \ldots, N-2; \\ \ddot{x}_{N-1}(t) & = \omega_0^2(-x_{N-2} + x_{N-1}) + f_0, \end{cases} \qquad (1.1.4)$$

с начальными данными $x_k(0) = 0$, и $v_k(0) = \dot{x}_k(0) = 0$, $k = 0, \ldots, N-1$. Здесь мы обозначили через $\omega_0^2 = \kappa/m$ — собственную частоту осцилляторов, и $f_0 = f/m$.

Определим следующую вспомогательную функцию:

$$F_N(x) = x \ln \frac{N}{x}, x > 0, \qquad (1.1.5)$$

и введем наш основной параметр $\sigma = f/\kappa = f_0/\omega_0^2$. Условимся, что константы, обозначаемые далее c, c_i, const, не зависят от N, l, f_0, ω_0 и a, а $\mathrm{const}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — произвольная неотрицательная функция, неубывающая по каждому из своих аргументов a_i. Основная оценка такова (см. [78]).

Теорема 1.1. *Пусть* $\varepsilon \in (0,1)$ — *произвольное число, тогда для всех* $k, l \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих условию*

$$\varepsilon N \le k < k + l \le (1-\varepsilon)N, \tag{1.1.6}$$

имеют место неравенства

$$\sigma(l + c_1 F_N(l)) \le \sup_{t\ge 0} (x_{k+l}(t) - x_k(t)) \le \sigma(l + c_2 F_N(l)), \tag{1.1.7}$$

$$\sigma(l - c_3 F_N(l)) \le \inf_{t\ge 0} (x_{k+l}(t) - x_k(t)) \le \sigma(l - c_4 F_N(l)) \tag{1.1.8}$$

для некоторых $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, *причем* c_1, c_3 *могут зависеть от* ε.

Далее мы используем процедуру, которая в физике иногда называется «double scaling limit». А именно, мы положим $a = 1/N$ и будем рассматривать различные скейлинги $l = l(N)$ и $\sigma = \sigma(N)$.

Здесь и далее мы используем следующее обозначение: для положительных функций $f(x) \simeq g(x)$, если существуют такие $c_1, c_2 > 0$, что на всей области определения $c_1 g(x) \le f(x) \le c_2 g(x)$.

Следствие 1.1. *В условиях теоремы* 1.1

$$\sup_{t\ge 0} |x_{k+l}(t) - x_k(t)| \simeq \sigma(N) l \ln \frac{N}{l}.$$

В качестве показателя фазового перехода рассмотрим максимальное относительное удлинение для $l = 1$

$$\frac{A}{a} = NA, \text{ где } A = \sup_{t\ge 0} \max_{\varepsilon N \le k \le (1-\varepsilon)N} |z_{k+1} - z_k|,$$

под действием действием силы f. При этом

$$a^{-1}A \to 1, \text{ если } \sigma(N) N \ln N \to 0, \tag{1.1.9}$$

$$a^{-1}A \to \infty, \text{ если } \sigma(N) N \ln N \to \infty. \tag{1.1.10}$$

Сравнение с фазовым переходом в состоянии равновесия В случае квадратичного гамильтониана (1.1.3) неподвижная точка всегда существует и единственна, причем для всех k будет $z_k - z_{k-1} = h = a + \sigma$. Поэтому здесь

$$a^{-1}h \to 1, \text{ если } \sigma N \to 0, \tag{1.1.11}$$

$$a^{-1}h \to \infty, \text{ если } \sigma N \to \infty. \tag{1.1.12}$$

Сравнивая (1.1.9)-(1.1.10) с (1.1.11)-(1.1.12), мы приходим к выводу, что различие между динамическим и статическим фазовым переходом определяется логарифмическим множителем.

Аналогичный факт имеет место и для более общих взаимодействий. А именно, обычно взаимодействие берется в виде

$$V(r) = -\frac{c_n}{r^n} + \frac{c_m}{r^m},\ 0 < n < m,\ c_n > 0,\ c_m > 0 \tag{1.1.13}$$

(классическим примером здесь является потенциал Леннард-Джонса (0.0.3), однако часто рассматривают случай произвольных m и n). Заметим, что введенная функция $V(r)$ удовлетворяет условиям, сформулированным во введении, и имеет место следующая картина. Если $\max_{a<h\le b} \mathrm{d}V(h)/\mathrm{d}h \ge f$, то гамильтонова динамика (1.1.2) имеет неподвижную точку, для которой все $z_k - z_{k-1} = h > a > 0$, а значение h определяется из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}V(h)}{\mathrm{d}h} = f. \tag{1.1.14}$$

Если же $\max_{a<h\le b} \mathrm{d}V(h)/\mathrm{d}h < f$, то неподвижной точки не существует, и под действием силы f цепочка распадается. Следующее утверждение касается статического фазового перехода для взаимодействий (1.1.13) (см. [78]).

Теорема 1.2. *Если $a = 1/N$, то неподвижная точка существует тогда и только тогда, когда*

$$\sigma = \frac{f}{\kappa} \le \frac{C}{N},$$

где

$$\kappa = V''(a),\ \ C = C(n,m) = \frac{1}{m-n}\left(\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{m-n}} - \left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{-\frac{m+1}{m-n}}\right).$$

Замечание 1.1. Если температура ненулевая, то, в предположении, что $V(r) \to$

∞ при $r \to \infty$, распределение Гиббса существует. При этом существование температурного и упругого расширения в равновесном случае зависит от вида V в окрестности минимума, (см. [35]).

1.2 Асимптотика времени разрыва цепочки под действием белого шума

В данном разделе мы рассматриваем всё ту же цепочку гармонических осцилляторов, однако на этот раз предполагаем, что цепочка не закреплена, и на частицу с номером 0 воздействует случайная сила $f_\varepsilon(t) = \varepsilon \dot{w}(t)$, где $\dot{w}(t)$ – стандартный белый гауссовский шум, а $\varepsilon > 0$ — параметр возмущения. Динамика системы определяется уравнениями

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = & \omega_0^2(x_1 - x_0) + \varepsilon_0 \dot{w}(t), \\ \ddot{x}_i = & \omega_0^2(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}),\ i = 1, \ldots, N-2; \\ \ddot{x}_{N-1} = & \omega_0^2(x_{N-2} - x_{N-1}) \end{cases} \tag{1.2.1}$$

с нулевыми начальными условиями. Здесь $x_k = z_k - ka$ — отклонения частиц от состояния равновесия, $\omega_0^2 = \kappa/m$ — собственная частота осцилляторов, и $\varepsilon_0 = \varepsilon/m$. Отметим, что эти уравнения, как и все последующие, будут пониматься в смысле теории гауссовских возмущений динамических систем (см. [68, гл. 4]). В частности, $x_i(t) \in \mathbb{C}^1([0, \infty))$.

Как было сказано во введении, в случае, когда на линейную гамильтонову систему без диссипации воздействует белый гауссовский шум, в системе не наблюдается сходимости к инвариантному распределению. Среднее энергии линейно растет с ростом времени, и как следствие, с вероятностью 1 в какой-то момент времени происходит разрыв — цепочка рвется.

Более строго, выполнено следующее утверждение (см. [77]).

Теорема 1.3. *Рассмотрим линейную гамильтонову систему* $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$, $q_k, p_k \in \mathbb{R}$, *вида*

$$\mathrm{d}q_k(t) = p_k(t)\mathrm{d}t, \tag{1.2.2}$$

$$\mathrm{d}p_k(t) = -\sum_{l=1}^{N} V(k,l)q_l(t)\mathrm{d}t + \varepsilon_0\delta_{kN}\mathrm{d}w(t), \tag{1.2.3}$$

где V — произвольная неотрицательно определенная симметрическая матрица. Предположим, что $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{p}(0) \equiv 0$. Тогда среднее энергии

$$H(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} p_k^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N} V(k,l)q_k q_l(t)$$

имеет вид

$$\mathsf{E}H(t) = \frac{\varepsilon_0^2 t}{2}.$$

Наша задача заключается в оценке времени достижения некоторого уровня h разности $\Delta_i^\varepsilon = z_{i+1} - z_i - a = x_{i+1} - x_i$

$$\tau_i^\varepsilon = \inf\left\{t \geq 0 : \ |\Delta_i^\varepsilon| > h)\right\}, \ i = 0, \ldots, N-2,$$

в зависимости от параметров i, h, ε и N. Совсем нетрудно доказать, что в случае $N = 2$ (обычный гармонический осциллятор) $\varepsilon^2\tau_0^\varepsilon$ слабо сходится к некоторой случайной величине (см. [23, гл. 4,5]). Таким образом, величина τ_0^ε имеет порядок ε^{-2}.

Обозначим через $\tau^d(D, W^d)$ — момент выхода стандартного d-мерного броуновского движения W^d из области D. Здесь мы доказываем следующую теорему (см. [80]).

Теорема 1.4. *Для любых $N \geq 2$, $i = 0, 1, \ldots, N-2$,*

$$\varepsilon^2\tau_i^\varepsilon \text{ слабо сходится к } \tau_i := \tau^{2(N-1)}(D_{i,N,h}, W^{2(N-1)}) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $D_{i,N,h}$ — множество всех $2(N-1)$-мерных векторов

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, y_1, \ldots, x_{N-1}, y_{N-1}),$$

удовлетворяющих неравенству

$$J_{i,N}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sqrt{2}}{N} \sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\gamma_{m,i}}{\omega_m} \left(x_m \cos(\omega_m s) + y_m \sin(\omega_m s) \right) \right| \le h, \tag{1.2.4}$$

$$\omega_m = 2\omega \sin\left(\pi m/2N\right), \ \gamma_{m,i} = \sin\left(\pi m/N\right) \sin\left(\pi m \left(i+1\right)/N\right).$$

Причем $D_{i,N,h}$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{2(N-1)}$, и для всех $i = 0, 1, \ldots, N-2$, τ_i и τ_{N-i-2} распределены одинаково.

Замечание 1.2. Таким образом, несмотря на то, что сила действует только на крайнюю левую частицу, асимптотика времени разрыва имеет тот же характер и с другой стороны.

1.3 Необходимые сведения

Дискретное преобразование Фурье В данном параграфе мы формулируем несколько определений, а затем проверяем одно простое предложение, которое будет нам полезно при доказательстве теорем 1.1 и 1.4.

Определение 1.1. (см. [65, стр. 34]) Пусть $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ — произвольная последовательность из N действительных чисел. Прямым дискретным преобразованием Фурье называется последовательность

$$\widehat{\mathbf{x}} = \{\widehat{x}_k\}_{k=0}^{N-1}, \text{ где } \widehat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ikn}{N}} x_k. \tag{1.3.1}$$

Обратным дискретным преобразованием Фурье называется последовательность

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \{\widetilde{x}_k\}_{k=0}^{N-1}, \text{ где } \widetilde{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi ikn}{N}} x_k. \tag{1.3.2}$$

Теорема 1.5. *(см. [65, стр. 34]) Прямое и обратное преобразования Фурье* (1.3.1)*-*(1.3.2) *связаны между собой соотношением*

$$\widetilde{\widehat{\boldsymbol{x}}} = \widehat{\widetilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{x}.$$

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на окружности

$$\ddot{x}_n = \omega^2(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}) + f_n,\ n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}\,,\ N \in \mathbb{N}, \tag{1.3.3}$$

(т.е. сложение и вычитание индексов у функций ведется по модулю N), где $\omega \neq 0$, и $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ — произвольная последовательность из N действительных чисел.

Предложение 1.1. *Система уравнений (1.3.3) с нулевыми начальными условиями $x_n(0) = \dot{x}_n(0) = 0,\ n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ имеет решение*

$$x_n(t) = \frac{\widehat{f}_0 t^2}{2N} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} e^{-\frac{2\pi ikn}{N}} \frac{\widehat{f}_k}{\omega_{k,N}^2}\left(1 - \cos\omega_{k,N}t\right),$$

где $\omega_{k,N} = 2\omega\sin(\pi k/N)$, и $\widehat{f}_k$ — прямое дискретное преобразование Фурье последовательности $\boldsymbol{f} = \{f_n\}_{n=0}^{N-1}$.

Доказательство. Во-первых заметим, что для любых $\alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$ система дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}(t) + \alpha^2 x(t) = \beta$$

с нулевыми начальными условиями $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ имеет решение

$$x(t) = \frac{\beta}{\alpha^2}\left(1 - \cos\alpha t\right) \text{ при } \alpha \neq 0, \tag{1.3.4}$$

$$x(t) = \frac{\beta t^2}{2} \text{ при } \alpha = 0. \tag{1.3.5}$$

Во-вторых, для прямого дискретного преобразования Фурье имеем

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\widehat{x}_k(t) = \omega^2 \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ikn}{N}} (x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}) + \widehat{f}_k =$$
$$= \omega^2 \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ikn}{N}} x_{n-1} - 2\omega^2 \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ikn}{N}} x_n + \omega^2 \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi ikn}{N}} x_{n+1} + \widehat{f}_k =$$
$$= \omega^2 e^{\frac{2\pi ik}{N}} \widehat{x}_k - 2\omega^2 \widehat{x}_k + \omega^2 e^{-\frac{2\pi ik}{N}} \widehat{x}_k + \widehat{f}_k =$$
$$= -\omega_{k,N}^2 \cdot \widehat{x}_k + \widehat{f}_k.$$

Таким образом,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\widehat{x}_k(t) + \omega_{k,N}^2 \widehat{x}_k(t) = \widehat{f}_k.$$

Остается воспользоваться (1.3.4)-(1.3.5) и сделать обратное дискретное преобразование Фурье.

Слабая сходимость вероятностных мер на пространстве $\mathbb{C}([0,\infty),\mathbb{R}^d)$

Всюду далее в этой главе мы будем рассматривать только процессы с траекториями из $\mathbb{C}([0,\infty),\mathbb{R}^d)$. Напомним, что $\mathbb{C}([a,b],\mathbb{R}^d)$, $a<b$, является польским (полным, метрическим, сепарабельным) пространством со стандартной метрикой ρ. Саму евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^d$ будем обозначать через $|\cdot|$. Нам потребуются следующие определения:

Определение 1.2. (см. [72, с. 478, 479]) Последовательность процессов $\xi_n(t)$ слабо сходится к процессу $\xi(t)$ на отрезке $[0,T]$, $T>0$, если для любого непрерывного и ограниченного на $\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ функционала φ имеет место сходимость

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \lim_{n\to\infty}\int \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x),$$

где через μ_n и μ обозначены соответствующие распределения $\xi_n(t)$ и $\xi(t)$ на пространстве $\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$.

Определение 1.3. Последовательность процессов $\xi_n(t)$ слабо сходится к процессу $\xi(t)$ (мы будем использовать обозначение $\xi_n \underset{w}{\to} \xi$) на полуинтервале $[0,\infty)$, если для любых $T>0$ ограничение ξ_n на $[0,T]$: $\xi_n|_{[0,T]}$ слабо сходится к ограничению $\xi|_{[0,T]}$ в смысле определения 1.2.

Определение 1.4. (см. [21, с. 96]) Пусть (S, d) — сепарабельное метрическое пространство с метрикой d. Пусть μ, ν — две вероятностные меры на S. Обозначим через $\mathcal{M}(\mu, \nu)$ — множество мер m на $S \times S$, т.ч. $m(A \times S) = \mu(A)$, $m(S \times A) = \nu(A)$ для всех борелевских множеств $A \subseteq S$. Тогда

$$\rho_{\mathrm{P}}(\mu, \nu) = \inf_{m \in \mathcal{M}(\mu,\nu)} \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \ m\left((x, y) : \ d(x, y) \geq \varepsilon\right) \leq \varepsilon \right\}$$

называется метрикой Прохорова.

Также мы будем использовать следующие утверждения

Теорема 1.6. *(см. [72, стр. 485]) Пусть $T > 0$; конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$, и существуют такие $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $H > 0$, что для всех $t_1, t_2 \in [a, b]$ и всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathsf{E}\left|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)\right|^{\alpha} \leq H|t_1 - t_2|^{1+\beta},$$

тогда $\xi_n(t)$ слабо сходится к $\xi(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Теорема 1.7. *(см. [21, стр. 108]) Пусть (S, d) — сепарабельное метрическое пространство с метрикой d; $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, μ — вероятностные меры на S, тогда следующие утверждения равносильны*

1. *μ_n слабо сходится к μ.*

2. *$\rho_{\mathrm{P}}(\mu_n, \mu) \to 0$.*

Наконец, при доказательстве теоремы 1.4, нам понадобится следующая теорема

Теорема 1.8. *(см. [76, стр. 55]) Пусть w_t — одномерное броуновское движение, тогда для всех $T \geq 0$*

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{\substack{t_2 - t_1 = \varepsilon \downarrow 0 \\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T}} \frac{|w_{t_2} - w_{t_1}|}{\sqrt{2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)}} = 1 \right) = 1.$$

1.4 Доказательство теоремы 1.1

Вспомогательные утверждения В данном параграфе мы доказываем несколько вспомогательных утверждений, необходимых при доказательстве основной теоремы 1.1.

Предложение 1.2. *Система уравнений (1.1.4) имеет решение*

$$x_n(t) = \sigma \left[n - \frac{1}{(2N-1)} \sum_{m=1}^{2N-2} \gamma_{m,N,n} \cos \omega_m t \right], \tag{1.4.1}$$

где

$$\gamma_{m,N,n} = \sin^{-2} \frac{\pi m}{4N-2} \sin \frac{\pi m}{2} \cos \frac{\pi m}{4N-2} \sin \frac{\pi n m}{2N-1},\ \omega_m = 2\omega_0 \sin \frac{\pi m}{4N-2}. \tag{1.4.2}$$

Доказательство. Сравнивая (1.3.3) с (1.1.4) возникает желание воспользоваться дискретным преобразованием Фурье, однако сделать это напрямую не представляется возможным, поэтому здесь мы используем следующий технический прием. Рассмотрим вспомогательную систему из $4N-2$ уравнений на окружности:

$$\ddot{y}_n = \omega_0^2(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + f_0(\delta_{n,N-1} + \delta_{n,N} - \delta_{n,3N-2} - \delta_{n,3N-1}),\ n = 0, \ldots, 4N-3, \tag{1.4.3}$$

(т.е. сложение и вычитание индексов у функций ведется по модулю $4N-2$) с нулевыми начальными условиями. Мы утверждаем, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$x_n(t) \equiv y_n(t),\ n = 0, \ldots, N-1.$$

Действительно, во-первых, из симметричности уравнений следует, что

$$y_n = y_{2N-1-n} = -y_{-n} = -y_{2N-1+n},\ n = 0, \ldots, N-1.$$

Таким образом,

$$\ddot{y}_0 = \omega_0^2(y_{-1} - 2y_0 + y_1) = -2\omega_0^2 y_0,$$

откуда, учитывая нулевые начальные условия следует, что $y_0(t) = x_0(t) \equiv 0$.

Далее, при $n = 1, \ldots, N-2$

$$\ddot{y}_n = \omega_0^2(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}).$$

И наконец, при $n = N-1$:

$$\ddot{y}_{N-1} = \omega_0^2(y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_N) + f_0 = \omega_0^2(y_{N-2} - y_{N-1}) + f_0.$$

Таким образом, системы дифференциальных уравнений для x_n и y_n полностью совпадают, откуда следует требуемое утверждение.

В свою очередь система уравнений (1.4.3) решается при помощи преобразования Фурье в точности по аналогии с выкладками, приведенными в предложении 1.1:

$$x_n = y_n = \frac{1}{4N-2} \sum_{m=0}^{4N-3} \alpha_m e^{-2\pi inm/(4N-2)}, \tag{1.4.4}$$

где

$$\alpha_m = \sum_{n=0}^{4N-3} y_n e^{2\pi inm/(4N-2)}$$

является решением соответствующей системы дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_m + \omega_m^2 \alpha_m &= f_0 \left(e^{\frac{2\pi im(N-1)}{4N-2}} + e^{\frac{2\pi imN}{4N-2}} - e^{\frac{2\pi im(-N+1)}{4N-2}} - e^{-\frac{2\pi imN}{4N-2}} \right) = \\ &= f_0 \left(e^{\frac{\pi im}{2}} - e^{-\frac{\pi im}{2}} \right) \left(e^{\frac{\pi im}{4N-2}} + e^{-\frac{\pi im}{4N-2}} \right) = 4if_0 \cos\frac{\pi m}{4N-2} \sin\frac{\pi m}{2}. \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Отсюда следует, что при $m = 0$ $\alpha_m(t) = 0$, а при $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \alpha_m(t) &= \frac{4if_0}{\omega_m^2} \cos\frac{\pi m}{4N-2} \sin\frac{\pi m}{2}(1 - \cos\omega_m t) = \\ &= \frac{if_0}{\omega_0^2} \sin^{-2}\frac{\pi m}{4N-2} \cos\frac{\pi m}{4N-2} \sin\frac{\pi m}{2}(1 - \cos\omega_m t). \end{aligned}$$

Т.к. $y_n = -y_{-n}$, то $\alpha_m = -\alpha_{-m}$, поэтому

$$x_n = y_n = \frac{1}{4N-2} \sum_{m=0}^{2N-2} \alpha_m \left(e^{-2\pi i n m/(4N-2)} - e^{2\pi i n m/(4N-2)} \right) = \qquad (1.4.6)$$

$$= -\frac{2i}{4N-2} \sum_{m=1}^{2N-2} \alpha_m \sin \frac{\pi n m}{2N-1}.$$

В итоге, имеем формулу:

$$y_n = \sigma \frac{1}{(2N-1)} \sum_{m=1}^{2N-2} \gamma_{m,N,n} (1 - \cos \omega_m t).$$

Для того, чтобы завершить доказательство остается проверить, что

$$\frac{1}{(2N-1)} \sum_{m=1}^{2N-2} \gamma_{m,N,n} = n.$$

Рассмотрим всё ту же систему (1.4.3), но с другими начальными условиями:

$$y_n = y_{2N-1-n} = n\sigma, \ n = -N+1, \ldots, N-1.$$

Нетрудно проверить, что в данном случае система находится в состоянии равновесия: $y_n(t) \equiv y_n(0)$. Как следствие, $\alpha_m(t)$ также не меняется во времени. Из (1.4.5) следует, что такое возможно, только при

$$\alpha_m(0) = \frac{4 i f_0}{\omega_m^2} \cos \frac{\pi m}{4N-2} \sin \frac{\pi m}{2} = i\sigma \sin^{-2} \frac{\pi m}{4N-2} \cos \frac{\pi m}{4N-2} \sin \frac{\pi m}{2},$$

и потому из (1.4.6) вытекает

$$n\sigma = x_n(0) = -\frac{2i}{4N-2} \sum_{m=1}^{2N-2} \alpha_m(0) \sin \frac{\pi n m}{2N-1} = \frac{\sigma}{2N-1} \sum_{m=1}^{2N-2} \gamma_{m,N,n},$$

откуда следует требуемое утверждение.

Прямая подстановка формулы (1.4.1) показывает, что имеет место следующее тождество

$$I_{N,k,l}(t) := \sigma^{-1}\left(x_{k+l}(t) - x_k(t) - \sigma\cdot l\right) = -\frac{2}{(2N-1)}\sum_{m=1}^{2N-2} a_m b_m \cos\omega_m t, \tag{1.4.7}$$

где

$$a_m = \sin^{-2}\frac{\pi m}{4N-2}\sin\frac{\pi m}{2}\cos\frac{\pi m}{4N-2}\sin\frac{\pi m l}{4N-2}, \quad b_m = \cos\frac{\pi m(k+l/2)}{2N-1}. \tag{1.4.8}$$

Проверим несколько вспомогательных фактов относительно a_m и b_m, которые нам понадобятся впоследствии:

Предложение 1.3. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $|b_m| \le 1$ для всех $m \in \mathbb{Z}$;
2. $a_m = 0$ для всех четных m;
3. $|a_m| \le \mathrm{const}\cdot N^2/m^2$ для всех $1 \le m \le 2N$;
4. $|a_m| \simeq Nl/m$ для всех нечетных $1 \le m \le N/l$;
5. $|b_m|/m + |b_{m+2}|/(m+2) \ge \mathrm{const}(\varepsilon^{-1})/m$ для всех $m > 0$.

Доказательство. Первое и второе утверждения очевидны. Третье вытекает из выкладки:

$$|a_m| \le \sin^{-2}\frac{\pi m}{4N-2} \le \mathrm{const}\cdot\frac{N^2}{m^2},$$

а четвертое из того, что при $1 \le m \le N/l$

$$\sin\frac{\pi m}{4N-2} \simeq \frac{m}{N},\ \cos\frac{\pi m}{4N-2} \simeq 1,\ \sin\frac{\pi m l}{4N-2} \simeq \frac{ml}{N}.$$

Для проверки пятого неравенства проверим, что существует такое $c > 0$, что для любого $m \in \mathbb{Z}$ по крайней мере одно из двух чисел $|b_m|,\ |b_{m+2}|$ не меньше c. Из условия (1.1.6) следует, что

$$2\varepsilon N \le 2k + l \le 2(k+l) \le 2(1-\varepsilon)N \Rightarrow \varepsilon \le \frac{\pi(2k+l)}{2N-1} \le \pi(1-\varepsilon),$$

а потому функция

$$g(x) = \max\left(|\cos x|, \left|\cos\left(x + \frac{\pi(2k+l)}{2N-1}\right)\right|\right)$$

не обращается в ноль при всех $x \in \mathbb{R}$, откуда из ее периодичности следует, что $\inf_x g(x) = \mathrm{const}(\varepsilon^{-1})$. Но

$$\max(|b_m|, |b_{m+2}|) = g\left(\frac{\pi m(k+l/2)}{2N-1}\right) \geq \inf_x g(x) = \mathrm{const}(\varepsilon^{-1}),$$

откуда следует требуемое утверждение. В результате для всех $m > 0$ имеем

$$\frac{|b_m|}{m} + \frac{|b_{m+2}|}{m+2} \geq \frac{\inf_x g(x)}{m+2} \geq \frac{\mathrm{const}(\varepsilon^{-1})}{m}.$$

Определение 1.5. (См. [82, стр. 66]) Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ рационально независимы, если не существует таких $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, одновременно не равных нулю, что $\sum_{i=1}^n a_i x_i = a_0$.

При доказательстве следующего предложения нам понадобятся следующие факты из теории чисел.

Теорема 1.9. *(см. [48, глава 3]) Алгебраическая степень числа $e^{2\pi i/n}$, $n \in \mathbb{N}$, равна $\varphi(n)$, где $\varphi(\cdot)$ — функция Эйлера.*

Теорема 1.10. *([27, т. 328, стр. 267]) Имеет место следующая асимптотика*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(n) \ln\ln n}{n} = e^{-\gamma},$$

где γ — постоянная Эйлера-Маскерони.

Предложение 1.4. *Существует такое $c > 0$, что для всех $N \in \mathbb{N}$ при*

$$M = M(N, c) = \lfloor cN/\ln\ln N \rfloor \tag{1.4.9}$$

числа

$$\omega_1/2\omega_0, \omega_2/2\omega_0, \ldots, \omega_M/2\omega_0$$

рационально независимы.

Доказательство. Предположим противное. Положив $z = e^{\pi i/(4N-2)}$, условие рациональной зависимости переписывается в виде

$$\frac{1}{2i}\sum_{m=1}^{M} a_m(z^m - z^{-m}) = a_0 \Rightarrow \left(\sum_{m=1}^{M} a_m(z^m - z^{-m})\right)^2 + 4a_0^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\sum_{m=1}^{M} a_m(z^{M+m} - z^{M-m})\right)^2 + 4a_0^2 z^{2M} = 0.$$

Поскольку в левой части полученного тождества стоит многочлен степени не больше $4M$, то алгебраическая степень числа z не превосходит $4cN/\ln\ln N$. В тоже время из рассмотренных выше двух фактов (теоремы 1.9 и 1.10) следует, что существует такое $c' > 0$, что алгебраическая степень z не меньше $c'N/\ln\ln N$. Откуда, в силу произвольности c, получаем противоречие.

Следствие 1.2. *В условиях предложения* 1.4 *для любых* $a_1, \ldots, a_M \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t\geq 0}\sum_{m=1}^{M} a_m \cos\omega_m t = -\inf_{t\geq 0}\sum_{m=1}^{M} a_m \cos\omega_m t = \sum_{m=1}^{M} |a_m|.$$

Доказательство. Из предложения 1.4, а также леммы 1 в [82, стр. 68], следует, что траектория $(\omega_1 t, \omega_2 t, \ldots, \omega_M t)$ всюду плотна на соответствующем M-мерном торе T, откуда следует требуемое утверждение.

Доказательство теоремы Здесь мы проверим только (1.1.7). (1.1.8) проверяется аналогично.

Оценка снизу Разобьем сумму в (1.4.7) на две части

$$I_{N,k,l}(t) = I^1_{N,k,l}(t) + I^2_{N,k,l}(t) := \sum_{m\leq M(N)} + \sum_{m>M(N)}$$

и оценим каждую из них по отдельности, предполагая, что N достаточно велико.

1) Из следствия 1.2 следует, что (ниже $\lceil\cdot\rceil$ означает верхнюю целую часть,

$\wedge$ означает минимум, $\vee$ — максимум)

$$\sup_{t\geq 0} I^1_{N,k,l}(t) = \frac{2}{(2N-1)} \sum_{m=1, m-\text{нечет.}}^{M(N)} |a_m b_m| \geq \frac{2}{(2N-1)} \sum_{m=1, m-\text{нечет.}}^{M(N)\wedge\lceil N/l\rceil} |a_m b_m| \geq$$

$$\geq \text{const}\cdot l \cdot \sum_{m=1, m-\text{нечет.}}^{M(N)\wedge\lceil N/l\rceil} \frac{|b_m|}{m} \geq \text{const}\cdot l \cdot \sum_{m=1}^{\lceil (M(N)\wedge\lceil N/l\rceil)/4\rceil} \left(\frac{|b_{4m+1}|}{4m+1} + \frac{|b_{4m+3}|}{4m+3}\right) \geq$$

$$\geq \text{const}(\varepsilon^{-1})\cdot l \cdot \sum_{m=1}^{\lceil (M(N)\wedge\lceil N/l\rceil)/4\rceil} \frac{1}{m} \geq \text{const}(\varepsilon^{-1})\cdot l \ln\left(\frac{1}{4}(M(N)\wedge\lceil N/l\rceil)\right) \geq$$

$$\geq \text{const}(\varepsilon^{-1})\cdot l \ln\left(\text{const}\cdot\frac{N}{l\vee\ln\ln N}\right) \geq \text{const}(\varepsilon^{-1})\cdot F_N(l).$$

Здесь в первом неравенстве мы заменили сумму с одним числом слагаемых, на сумму с меньшим числом слагаемых. Во втором воспользовались утверждением 4, а в третьем применили утверждение 5 предложения 1.3. В четвертом неравенстве мы воспользовались тем, что

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \simeq \ln n, \;\; n\in\mathbb{N}. \tag{1.4.10}$$

Пятое следует из определения функции $M(N)$ (1.4.9). А шестое неравенство получается из рассмотрения двух отдельных случаев: при $l \geq \ln\ln N$ левая часть неравенства в точности совпадает с правой, а при $l < \ln\ln N$

$$l\ln\left(\text{const}\cdot\frac{N}{\ln\ln N}\right) = l\cdot(\text{const} + \ln N - \ln\ln\ln N) \simeq l\ln N \geq F_N(l).$$

2) Имеем

$$\sup_{t\geq 0} |I^2_N(k,l)| \leq \text{const}\cdot N\cdot \sum_{m=M(N)+1}^{2N-1} \frac{1}{m^2} \leq \text{const}\cdot N \int_{M(N)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} =$$

$$= \text{const}\cdot\frac{N}{M(N)} \leq \text{const}\cdot\ln\ln N.$$

Здесь в первом неравенстве мы воспользовались утверждениями 1 и 3 предложения 1.3. Второе следует из хорошо известного факта, что при $n \to \infty$

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \simeq \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \simeq \frac{1}{n}, \tag{1.4.11}$$

а в последнем неравенстве мы подставили определение функции $M(N)$ (1.4.9).

Объединяя полученные выкладки имеем

$$\sup_{t\geq 0} I_{N,k,l}(t) \geq \sup_{t\geq 0} I^1_{N,k,l}(t) - \sup_{t\geq 0} |I^2_{N,k,l}(t)| \geq$$
$$\geq \mathrm{const}(\varepsilon^{-1}) \cdot F_N(l) - \mathrm{const} \cdot \ln\ln N \geq \mathrm{const}(\varepsilon^{-1}) \cdot F_N(l).$$

Оценка сверху Теперь разобьем сумму в (1.4.7) по другому

$$I_{N,k,l}(t) = J^1_{N,k,l}(t) + J^2_{N,k,l}(t) := \sum_{m\leq N/l} + \sum_{m>N/l}$$

и оценим каждое из полученных слагаемых по отдельности.

1) Имеем,

$$\sup_{t\geq 0} |J^1_{N,k,l}(t)| \leq \frac{\mathrm{const}}{N} \sum_{m\leq N/l} \frac{Nl}{m} = \mathrm{const}{\cdot} l \sum_{m\leq N/l} \frac{1}{m} \leq \mathrm{const}{\cdot} l \ln \frac{N}{l} = \mathrm{const}{\cdot} F_N(l).$$

Здесь в первом неравенстве мы воспользовались утверждениями 1, 2 и 4 предложения 1.3, а в третьем (1.4.10).

2) Имеем,

$$\sup_{t\geq 0} |J^2_{N,k,l}(t)| \leq \mathrm{const}{\cdot} N {\cdot} \sum_{m=[N/l]}^{2N-1} \frac{1}{m^2} \leq \mathrm{const}{\cdot} N \int_{[N/l]}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq \mathrm{const}{\cdot} l \leq \mathrm{const}{\cdot} F_N(l).$$

Здесь в первом неравенстве мы воспользовались утверждением 3 предложения 1.3, во втором — (1.4.11), а в последнем — определением функции (1.1.5). Объединяя полученные выкладки имеем оценку сверху

$$\sup_{t\geq 0} |I_{N,k,l}(t)| \leq \sup_{t\geq 0} |J^1_{N,k,l}(t)| + \sup_{t\geq 0} |J^2_{N,k,l}(t)| \leq \mathrm{const} \cdot F_N(l).$$

1.5 Доказательство теоремы 1.2

Имеем три уравнения для потенциала в точке $a = 1/N$

$$V(a) = -c_n N^n + c_m N^m, \tag{1.5.1}$$

$$V'(a) = 0 = nc_n N^{n+1} - mc_m N^{m+1}, \tag{1.5.2}$$

$$V''(a) = \kappa = -n(n+1)c_n N^{n+2} + m(m+1)c_m N^{m+2}. \tag{1.5.3}$$

При этом в первом уравнении значение $V(a) < 0$ неизвестно. Из (1.5.1) и (1.5.2) имеем

$$c_m = \frac{nN^{-m}V(a)}{n-m}, c_n = \frac{mN^{-n}V(a)}{n-m}, \tag{1.5.4}$$

а из (1.5.2) и (1.5.3)

$$c_m = \frac{\kappa}{m(m-n)}N^{-2-m}, c_n = \frac{\kappa}{n(m-n)}N^{-2-n}. \tag{1.5.5}$$

Отсюда можно найти

$$V(a) = \frac{\kappa}{N^2 mn}.$$

Однако нам нужна точка перегиба $b > a > 0$, которую мы найдем из условия

$$V''(b) = -n(n+1)c_n b^{-(n+2)} + m(m+1)c_m b^{-(m+2)} = 0, \tag{1.5.6}$$

откуда имеем

$$b = \frac{1}{N}\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{\frac{1}{m-n}},$$

и

$$V'(b) = nc_n b^{-n-1} - mc_m b^{-m-1}.$$

Используя (1.5.2) вместе с уравнением (1.1.14) для $h = b$, мы найдем $\sigma(N) = f/\kappa$. Из (1.5.6) имеем,

$$\frac{f}{\kappa} = \frac{C}{N},\ C = C(n,m) = \frac{1}{m-n}\left(\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{m-n}} - \left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{-\frac{m+1}{m-n}}\right).$$

1.6 Доказательство теоремы 1.3

Обозначив через $\psi(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, систему уравнений (1.2.2)–(1.2.3) можно переписать в виде

$$\mathrm{d}\psi(t) = A\psi(t)\mathrm{d}t + \varepsilon_0 g_N \mathrm{d}w_t,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & 0 \end{pmatrix}, \ g_N = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{2N-1}, 1)^T.$$

Мы получили линейную систему дифференциальных уравнений, которая имеет следующее решение

$$\psi(t) = \varepsilon_0 e^{tA} \int_0^t e^{-sA} g_N \mathrm{d}w_s.$$

Учитывая внешний вид матрицы A, отсюда имеем

$$\mathbf{q}(t) = \varepsilon_0 V^{-1/2} \int_0^t \sin\left(V^{1/2}(t-s)\right) e_N \mathrm{d}w_s,$$
$$\mathbf{p}(t) = \varepsilon_0 \int_0^t \cos\left(V^{1/2}(t-s)\right) e_N \mathrm{d}w_s.$$

Используя формулу Ито (см. [85, 67, гл 8]), имеем

$$\mathsf{E}\mathbf{p}^T(t)\mathbf{p}(t) = \varepsilon_0^2 \int_0^T e_N^T \cos^2\left(V^{1/2}(t-s)\right) e_N \mathrm{d}s,$$
$$\mathsf{E}\mathbf{q}^T(t)V\mathbf{q}(t) = \varepsilon_0^2 \int_0^T e_N^T \sin^2\left(V^{1/2}(t-s)\right) e_N \mathrm{d}s.$$

В итоге имеем

$$\mathsf{E}H(t) = \frac{1}{2}\mathsf{E}\mathbf{p}^T(t)\mathbf{p}(t) + \frac{1}{2}\mathsf{E}\mathbf{q}^T(t)V\mathbf{q}(t) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}\int_0^t e_N^T e_N \mathrm{d}s = \frac{\varepsilon_0^2 t}{2}.$$

1.7 Доказательство теоремы 1.4

Вспомогательные утверждения При доказательстве теоремы 1.4 мы будем использовать следующие технические утверждения.

Предложение 1.5. *Пусть* $\alpha_m^\varepsilon(t)$, $m = 1, \ldots, N-1$ *являются решениями* *следующих дифференциальных уравнений*

$$\ddot{\alpha}_m^{\varepsilon} + \omega_m^2 \alpha_m^{\varepsilon} = \varepsilon \dot{w}_t \tag{1.7.1}$$

с начальными условиями

$$\alpha_m^{\varepsilon}(0) = \dot{\alpha}_m^{\varepsilon}(0) = 0, \tag{1.7.2}$$

где $\omega_m = 2\omega \sin\left(\pi m/2N\right)$, *тогда*

$$\Delta_i^{\varepsilon}(t) = -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N-1} \gamma_{m,i} \cdot \alpha_m^{\varepsilon},$$

где $\gamma_{m,i} = \sin\left(\pi m/N\right) \sin\left(\pi m\left(i+1\right)/N\right)$.

Доказательство. Решим систему (1.2.1) по аналогии с выкладками, приведенными в предложении 1.2. Для этого рассмотрим систему из $2N$ уравнений на окружности (т.е. сложение и вычитание индексов у функций ведется по модулю $2N$):

$$\begin{aligned}
&\ddot{y}_k(t) = \omega^2(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) + \delta_{0,k} f_{\varepsilon}(t), \quad k = -N, \ldots, N-1;\\
&y_k(0) = 0, \quad \dot{y}_k(0) = 0.
\end{aligned}$$

Отметим, что эту систему очень просто решить, используя дискретное преобразование Фурье, а именно,

$$y_k = \frac{1}{2N}\sum_{m=-N}^{N-1} \alpha_m^{\varepsilon} e^{-\frac{\pi i k m}{N}},$$

где α_m удовлетворяют уравнениям (1.7.1), (1.7.2). Прямая подстановка показывает, что уравнения (1.2.1) имеют следующее решение:

$$x_k(t) = y_k(t) + y_{-1-k}(t).$$

Остается заметить, что, поскольку $y_k = y_{-k}$ для $k = 1, \ldots, N-1$, для всех

$n = 0, \ldots, N-2$ выполнено

$$\Delta_n^\varepsilon = x_{n+1} - x_n = y_{n+1} + y_{-n-2} - y_n - y_{-n-1} = y_{n+2} - y_n =$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} \alpha_m^\varepsilon e^{-\frac{\pi i n m}{N}} \left(e^{-\frac{2\pi i m}{N}} - 1 \right) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \alpha_m^\varepsilon \left(\cos \frac{\pi(n+2)m}{N} - \cos \frac{\pi n m}{N} \right) =$$

$$= -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \alpha_m^\varepsilon \sin \frac{\pi m}{N} \sin \frac{\pi m(n+1)}{N}.$$

Предложение 1.6. *Пусть* $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, y_1, \ldots, x_{N-1}, y_{N-1})$ *— произвольный* $2(N-1)$*-одномерный вектор,*

$$g(\boldsymbol{r}, s) = \sum_{m=1}^{N-1} a_m \left(x_m \cos(\omega_m s) + y_m \sin(\omega_m s) \right), \ a_m \in \mathbb{R}. \tag{1.7.3}$$

Тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ *существует такое* $\varepsilon_2 > 0$, *что для любых* $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{2(N-1)}$ *и* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено неравенство*

$$(1 - \varepsilon_1) \sup_{s \in \mathbb{R}} |g(\boldsymbol{r}, s)| \leq \max_{s \in [t - \varepsilon_2^{-1}, t + \varepsilon_2^{-1}]} |g(\boldsymbol{r}, s)| \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |g(\boldsymbol{r}, s)|.$$

Доказательство. Сразу заметим, что верхняя оценка предложения очевидна, поэтому достаточно проверить только нижнюю. Рассмотрим $(N-1)$-одномерный тор $\mathbb{T}^{N-1} = [0, 2\pi)^{N-1}$ и введем вспомогательную функцию $G : \mathbb{R}^{2(N-1)} \times \mathbb{T}^{N-1} \to \mathbb{R}$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \sum_{m=1}^{N-1} a_m \left(x_m \cos z_m + y_m \sin z_m \right), \ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2(N-1)}, \ \mathbf{z} \in \mathbb{T}^{N-1}.$$

Наделим $\mathbb{T}^{N-1}$ метрикой

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{N-1} \min \left\{ \left(|x_m - y_m| \bmod 2\pi \right), 2\pi - \left(|x_m - y_m| \bmod 2\pi \right) \right\},$$

превращающей его в компактное метрическое пространство. Также рассмотрим следующее однопараметрическое семейство автоморфизмов на $\mathbb{T}^{N-1}$

$$T^s \mathbf{z} = \left((\mathbf{z}_1 + \omega_1 s) \bmod 2\pi, (\mathbf{z}_2 + \omega_2 s) \bmod 2\pi, \ldots, (\mathbf{z}_{N-1} + \omega_{N-1} s) \bmod 2\pi \right).$$

Совсем нетрудно проверить, что $g(\mathbf{r}, s) = G(\mathbf{r}, T^s\mathbf{z}_0)$, где через $\mathbf{z}_0$ обозначена нулевая точка $\mathbb{T}^{N-1}$. Обозначим через $S = \{T^s\mathbf{z}_0,\ s \geq 0\}$ соответствующую обмотку тора, а через $\bar{S}$ — замыкание S. Также рассмотрим вспомогательные функции

$$G^*(\mathbf{r}, z) = \sup_{s\in\mathbb{R}} |G(\mathbf{r}, T^s z)|,\ G^*(\mathbf{r}, z, t) = \sup_{s\in[-t,t]} |G(\mathbf{r}, T^s z)|,$$
$$\tau(z, \varepsilon) = \inf\left\{t \geq 0 :\ \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2(N-1)}\ G^*(\mathbf{r}, z, t) \geq (1-\varepsilon)G^*(\mathbf{r}, z)\right\}.$$

Утверждение предложения равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{z\in S} \tau(z, \varepsilon) < \infty. \tag{1.7.4}$$

Для того, чтобы проверить (1.7.4), нам потребуется убедиться в справедливости следующих неравенств

$$\mathrm{const} \cdot \|\mathbf{r}\| \leq G^*(\mathbf{r}, z) \leq \mathrm{const} \cdot \|\mathbf{r}\|, \tag{1.7.5}$$
$$|G^*(\mathbf{r}, z_1) - G^*(\mathbf{r}, z_2)| \leq \mathrm{const} \cdot \|\mathbf{r}\| \cdot \rho(z_1, z_2), \tag{1.7.6}$$
$$|G^*(\mathbf{r}, z_1, t) - G^*(\mathbf{r}, z_2, t)| \leq \mathrm{const} \cdot \|\mathbf{r}\| \cdot \rho(z_1, z_2). \tag{1.7.7}$$

Для доказательства (1.7.5) заметим, что

$$G^*(\mathbf{r}, z) = \|\mathbf{r}\| G^*\left(\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}, z\right),$$

поэтому

$$\inf_{\mathbf{r}\in S^{2N-3}} G^*(\mathbf{r}, z) \cdot \|\mathbf{r}\| \leq G^*(\mathbf{r}, z) \leq \sup_{\mathbf{r}\in S^{2N-3}} G^*(\mathbf{r}, z) \cdot \|\mathbf{r}\|,$$

где S^{2N-3} — соответствующая $(2N-3)$-мерная сфера. Таким образом, требуемое неравенство следует из непрерывности $G^*(\mathbf{r}, z)$ и компактности сферы. Неравенства (1.7.6), (1.7.7) доказываются аналогично.

Перейдем к доказательству неравенства (1.7.4). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует такое $\rho_0 > 0$, что для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{T}^{N-1}$

$$\rho(z_1, z_2) \leq \rho_0 \Rightarrow \tau(z_2, \varepsilon) \leq \tau(z_1, \varepsilon/2). \tag{1.7.8}$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
&G^*(\mathbf{r}, z_2, \tau(z_1, \varepsilon/2)) \ge \\
&\ge G^*(\mathbf{r}, z_1, \tau(z_1, \varepsilon/2)) - \text{const} \cdot \|\mathbf{r}\| \cdot \rho(z_1, z_2) \ge \\
&\ge (1-\varepsilon/2) G^*(\mathbf{r}, z_1) - \text{const} \cdot \|\mathbf{r}\| \cdot \rho(z_1, z_2) \ge \\
&\ge (1-\varepsilon/2) G^*(\mathbf{r}, z_2) - \text{const} \cdot \|\mathbf{r}\| \cdot \rho(z_1, z_2) \ge \\
&\ge (1-\varepsilon/2) G^*(\mathbf{r}, z_2) - \text{const} \cdot G^*(\mathbf{r}, z_2) \cdot \rho(z_1, z_2) = \\
&= (1-\varepsilon/2 - \text{const} \cdot \rho(z_1, z_2)) G^*(\mathbf{r}, z_2).
\end{aligned}
$$

Здесь в первом неравенстве мы воспользовались (1.7.6), во втором определением функции τ, в третьем снова — (1.7.6), и, наконец, в четвертом — (1.7.5). Из доказанного неравенства следует, что при достаточно маленьких $\rho(z_1, z_2)$

$$G^*(\mathbf{r}, z_2, \tau(z_1, \varepsilon/2)) \ge (1-\varepsilon) G^*(\mathbf{r}, z_2).$$

Откуда следует требуемое утверждение. Рассмотрим множество открытых шаров $B_z = \left\{z_1 : \rho(z, z_1) \le \rho_0\right\}, \ z \in \mathbb{T}^{N-1}$. Это множество является покрытием компакта $\bar{S}$, поэтому из него можно выбрать конечное покрытие $B_{z_1}, B_{z_2}, \ldots, B_{z_m}$. Учитывая (1.7.8), будем иметь

$$\sup_{z \in S} \tau(z, \varepsilon) \le \max_{i \in [1,m]} \tau(z_i, \varepsilon/2).$$

Предложение 1.7. *Пусть $g(\boldsymbol{r}, s)$ задается тождеством (1.7.3), тогда относительно $g^*(\boldsymbol{r}) = \sup_{s \in \mathbb{R}} g(\boldsymbol{r}, s)$ выполнено*

1. *$g^*(\boldsymbol{r})$ — непрерывная функция.*
2. *Для любого $h \ge 0$ множество $\left\{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{2(n-1)} : \ g^*(\boldsymbol{r}) \le h\right\}$ является непустым выпуклым компактом в $\mathbb{R}^{2(n-1)}$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства выпуклости во втором утверждения достаточно проверить, что если $g^*(\mathbf{r}_1) \le h$

и $g^*(\mathbf{r}_2) \le h$, то для любого $\alpha \in (0,1)$ $g^*(\alpha\mathbf{r}_1 + (1-\alpha)\mathbf{r}_2) \le h$. Имеем

$$g^*(\alpha\mathbf{r}_1 + (1-\alpha)\mathbf{r}_2) = \sup_{s\in\mathbb{R}} g(\alpha\mathbf{r}_1 + (1-\alpha)\mathbf{r}_2, s) \le$$
$$\le \alpha g^*(\mathbf{r}_1) + (1-\alpha) g^*(\mathbf{r}_2) \le h.$$

Наконец, компактность множества $\left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2(n-1)} :\ g^*(\mathbf{r}) \le h\right\}$ вытекает из определения функции $g(\mathbf{r}, s)$.

Предложение 1.8. *При $N = 3, 4$ числа*

$$(\omega_1/2\omega, \omega_2/2\omega, \dots, \omega_{N-1}/2\omega)$$

рационально независимы.

Доказательство. При $N = 3$

$$\frac{\omega_1}{2\omega} = \sin\frac{\pi}{6},\ \frac{\omega_2}{2\omega} = \sin\frac{\pi}{3},$$

и потому утверждение очевидно. При $N = 4$

$$\frac{\omega_1}{2\omega} = \sin\frac{\pi}{8},\ \frac{\omega_2}{2\omega} = \sin\frac{\pi}{4},\ \frac{\omega_3}{2\omega} = \cos\frac{\pi}{8},$$

и потому предположив, что условие предложения не выполнено, получим

$$a_1 \sin\frac{\pi}{8} + a_2 \cos\frac{\pi}{8} + \frac{a_3}{\sqrt{2}} = a_0$$

для некоторых $a_i \in \mathbb{Q}$. Домножив обе части уравнения на $2\sin(\pi/8)$, и воспользовавшись стандартными тригонометрическими формулами, получим

$$a_1 \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) + a_2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \left(\sqrt{2}a_0 - a_3\right)\sin\frac{\pi}{8}.$$

Учитывая то, что $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 2^{-1/2}$, полученное тождество нетрудно преобразовать к виду

$$b_1 + b_2\sqrt{2} = \sin\frac{\pi}{8},$$

где $b_i \in \mathbb{Q}$. Как следствие, алгебраическая степень числа $\sin(\pi/8)$ не превышает 2, что дает противоречие с теоремой 3.9 на стр. 37 в [48].

Для системы возмущенных гармонических осцилляторов, задаваемой уравнениями (1.7.1), определим следующие вспомогательные случайные величины:

1. $\beta_m^\varepsilon(t) = \omega_m^{-1}\dot{\alpha}_m^\varepsilon(t)$ ($\beta_m^\varepsilon(t)$ определено, поскольку $\alpha_m^\varepsilon(t) \in \mathbb{C}^1([0,\infty))$, как оговаривалось выше);
2. $A_m^\varepsilon(t) = \sqrt{(\alpha_m^\varepsilon)^2 + (\beta_m^\varepsilon)^2}$ — амплитуда системы $(\alpha_m^\varepsilon, \beta_m^\varepsilon)$;
3. $\varphi_m^\varepsilon(t) = \operatorname{Arctg}(\beta_m^\varepsilon(t)/\alpha_m^\varepsilon(t)) + \omega_m t,\ t > 0$ (мы предполагаем, что ветвь арктангенса в каждый момент времени выбирается таким образом, чтобы траектории $\varphi_m^\varepsilon(t)$ были непрерывны).

Заметим, что в частности имеют место следующие тождества

$$\begin{aligned} \alpha_m^\varepsilon(t) &= A_m^\varepsilon(t)\cos(\varphi_m^\varepsilon(t) - \omega_m t), \\ \beta_m^\varepsilon(t) = \omega_m^{-1}\dot{\alpha}_m^\varepsilon(t) &= A_m^\varepsilon(t)\sin(\varphi_m^\varepsilon(t) - \omega_m t). \end{aligned} \tag{1.7.9}$$

Докажем следующее техническое утверждение.

Предложение 1.9. *Пусть*

$$X_i^\varepsilon = \sqrt{2}\omega_i A_i^\varepsilon \cos\varphi_i^\varepsilon,\ Y_i^\varepsilon = \sqrt{2}\omega_i A_i^\varepsilon \sin\varphi_i^\varepsilon, \tag{1.7.10}$$

тогда при $\varepsilon \to 0$

$$r^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) := (X_1^\varepsilon, Y_1^\varepsilon, \ldots, X_{N-1}^\varepsilon, Y_{N-1}^\varepsilon)\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \underset{w}{\to} W^{2(N-1)},$$

где $W^{2(N-1)}$ *— стандартное* $2(N-1)$*-мерное броуновское движение.*

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} A_m^\varepsilon \cos\varphi_m^\varepsilon \\ A_m^\varepsilon \sin\varphi_m^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_m t & -\sin\omega_m t \\ \sin\omega_m t & \cos\omega_m t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_m^\varepsilon \\ \beta_m^\varepsilon \end{pmatrix},\ m = 1, \ldots, N-1.$$

Прямая выкладка показывает, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} A_m^\varepsilon \cos\varphi_m^\varepsilon \\ A_m^\varepsilon \sin\varphi_m^\varepsilon \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega_m}\begin{pmatrix} -\sin\omega_m t \\ \cos\omega_m t \end{pmatrix}\dot{w}_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_m^\varepsilon \cos\varphi_m^\varepsilon \\ A_m^\varepsilon \sin\varphi_m^\varepsilon \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega_m}\int_0^t \begin{pmatrix} -\sin\omega_m t \\ \cos\omega_m t \end{pmatrix}\mathrm{d}w_t,$$

откуда вытекают следующие утверждения:

1. r^ε — процесс с независимыми приращениями и нулевым математическим ожиданием.

2. Для всех m и n при $\varepsilon \to 0$

$$\mathsf{cov}\left(X_m^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), X_n^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) = t\delta_{m,n} + O(\varepsilon^2), \tag{1.7.11}$$

$$\mathsf{cov}\left(Y_m^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), Y_n^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) = t\delta_{m,n} + O(\varepsilon^2), \tag{1.7.12}$$

$$\mathsf{cov}\left(X_m^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), Y_n^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) = O(\varepsilon^2). \tag{1.7.13}$$

   Здесь мы воспользовались свойствами стохастических интегралов (см. [85, 67, гл 8]).

3. Для всех $\varepsilon > 0$ и $t_1, t_2 \geq 0$

$$\mathsf{E}|r^\varepsilon\left(t_1\varepsilon^{-2}\right) - r^\varepsilon\left(t_2\varepsilon^{-2}\right)|^4 \leq \mathrm{const}(N)\cdot|t_1 - t_2|^2. \tag{1.7.14}$$

Действительно, первое утверждение очевидно. Формула (1.7.11) проверяется прямой выкладкой:

$$\mathsf{cov}\left(X_m^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), X_n^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) = 2\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\sin\omega_m t\sin\omega_n t\mathrm{d}t =$$

$$= \varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\left(\cos(\omega_m - \omega_n)t - \cos(\omega_m + \omega_n)t\right)\mathrm{d}t =$$

$$= t\delta_{mn} + O(\varepsilon^2).$$

Тождества (1.7.12) и (1.7.13) доказываются аналогично. Наконец, неравенство (1.7.14) проверяется следующим образом: пусть $0 \leq t_1 \leq t_2$ — произвольные числа, тогда

$$\mathsf{E}|r^\varepsilon\left(t_1\varepsilon^{-2}\right)-r^\varepsilon\left(t_2\varepsilon^{-2}\right)|^4\leq \mathrm{const}(N)\cdot\mathsf{E}|X_m^\varepsilon\left(t_1\varepsilon^{-2}\right)-X_m^\varepsilon\left(t_2\varepsilon^{-2}\right)|^4+$$
$$+\mathrm{const}(N)\cdot\mathsf{E}|Y_m^\varepsilon\left(t_1\varepsilon^{-2}\right)-Y_m^\varepsilon\left(t_2\varepsilon^{-2}\right)|^4.$$

$X_m^\varepsilon\left(t_1\varepsilon^{-2}\right)-X_m^\varepsilon\left(t_2\varepsilon^{-2}\right)$ является гауссовской случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной

$$\mathsf{D}\left(X_m^\varepsilon\left(t_1\varepsilon^{-2}\right)-X_m^\varepsilon\left(t_2\varepsilon^{-2}\right)\right)=2\varepsilon^2\int_{t_1\varepsilon^{-2}}^{t_2\varepsilon^{-2}}\sin^2\omega_m t\mathrm{d}t=O(t_2-t_1).$$

Как следствие,

$$\mathsf{E}|X_m^\varepsilon\left(t_1\varepsilon^{-2}\right)-X_m^\varepsilon\left(t_2\varepsilon^{-2}\right)|^4=O(|t_2-t_1|^2).$$

Аналогичная оценка справедлива и для $\mathsf{E}|Y_m^\varepsilon\left(t_1\varepsilon^{-2}\right)-Y_m^\varepsilon\left(t_2\varepsilon^{-2}\right)|^4$, откуда вытекает требуемое утверждение.

Таким образом, утверждение предложения является следствием теоремы 1.6.

Замечание 1.3. Поясним смысл доказанного предложения. Нетрудно проверить, что траектории движения невозмущенной системы $\left(\alpha_m^0,\beta_m^0\right)$ (т.е. при $\varepsilon=0$) представляют собой вращение в двухмерной плоскости с равномерной скоростью по окружностям $H_m^0=(\alpha_m^0)^2+(\beta_m^0)^2=\mathrm{const}$. Таким образом, если перейти к соответствующим «вращающимся» координатам, то в них траектория невозмущенной системы будет представлять из себя неподвижную точку. Логично предположить, что в этих координатах траектория возмущенной системы будет задаваться некоторым диффузионным процессом. Предложение 1.9 утверждает, что этот диффузионный процесс является обычным двухмерным броуновским движением.

Определение 1.6. Пусть $f:\ U\to\mathbb{R}^n$ — произвольная функция на множестве $U\in\mathbb{R}$; $[a,b]$ — отрезок, содержащийся в области определения U. Модулем непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$ называется

$$\omega_f(\theta,[a,b])=\sup_{\substack{t_1,t_2:\ a\leq t_1,t_2\leq b\\ |t_1-t_2|\leq\theta}}\left|f\left(t_1\right)-f\left(t_2\right)\right|,\ \theta\geq 0.$$

Предложение 1.10. *Для любого $T \geq 0$ $\omega_{r^\varepsilon(t\varepsilon^{-2})}(2\varepsilon,[0,T])$ слабо сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. Пусть $\gamma > 0$ — произвольное действительное число. Из определения 1.4 и теоремы 1.7 следует, что при достаточно малых ε можно построить такой винеровский процесс $W^{2(N-1)}$, что с вероятностью не меньшей $1-\gamma$ для всех $t \in [0,T]$

$$|r^\varepsilon(t\varepsilon^{-2}) - W^{2(N-1)}(t)| \leq \gamma.$$

Таким образом, с вероятностью не меньшей $1-\gamma$ для всех $t \in [0,T]$

$$\omega_{r^\varepsilon(t\varepsilon^{-2})}(2\varepsilon,[0,T]) \leq \omega_{W^{2(N-1)}}(2\varepsilon,[0,T]) + 2\gamma.$$

Из теоремы 1.8 следует, что при достаточно маленьких ε $\omega_{W^{2(N-1)}}(2\varepsilon,[0,T]) \leq \gamma$, а потому

$$\omega_{r^\varepsilon(t\varepsilon^{-2})}(2\varepsilon,[0,T]) \leq 3\gamma.$$

Как следствие, из определения 1.4 следует, что при достаточно маленьких ε,

$$\rho_{\mathrm{P}}(\omega_{r^\varepsilon(t\varepsilon^{-2})}(2\varepsilon,[0,T]),0) \leq 3\gamma.$$

В результате, в силу произвольности γ, из теоремы 1.7 следует требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 1.4 Заметим, что

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2\tau_i^\varepsilon =& \varepsilon^2 \min\left\{t \geq 0 :\ \frac{2}{N}\left|\sum_{m=1}^{N-1}\gamma_{m,i}\cdot\alpha_m^\varepsilon(t)\right| \geq h\right\} = \\
=& \varepsilon^2 \min\left\{t \geq 0 :\ \max_{s\in[t-\varepsilon^{-1},t+\varepsilon^{-1}]}\frac{2}{N}\left|\sum_{m=1}^{N-1}\gamma_{m,i}\cdot\alpha_m^\varepsilon(s)\right| \geq h\right\} + \underbrace{\kappa(\varepsilon)}_{|\kappa(\varepsilon)|\leq\varepsilon} = \\
=& \min\left\{t \geq 0 :\ v_{i,N}^\varepsilon(t) \geq h\right\} + \kappa(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{1.7.15}$$

где через $v_{i,N}^{\varepsilon}(t)$ мы обозначили следующий вспомогательный процесс:

$$v_{i,N}^{\varepsilon}(t)=\frac{2}{N}\max_{s\in[-\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-1}]}\left|\sum_{m=1}^{N-1}\gamma_{m,i}\cdot\alpha_m^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}+s\right)\right|,\ i=0,\ldots,N-2.$$

В силу того, что

$$\begin{aligned}\alpha_m^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}+s\right)=&A_m^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}+s\right)\cos\left(\varphi_m\left(t\varepsilon^{-2}+s\right)-\omega_m\left(t\varepsilon^{-2}+s\right)\right)=\\=&\frac{1}{\sqrt{2}\omega_m}X_m^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}+s\right)\cos\omega_m\left(t\varepsilon^{-2}+s\right)+\\+&\frac{1}{\sqrt{2}\omega_m}Y_m^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}+s\right)\sin\omega_m\left(t\varepsilon^{-2}+s\right),\end{aligned}$$

имеем

$$v_{i,N}^{\varepsilon}(t)=\frac{2}{N}U_{i,N}^{\varepsilon}(t)+\kappa_1^{\varepsilon}(t),$$

где

$$U_{i,N}^{\varepsilon}(t)=\max_{s\in\left[\frac{t}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\right]}\left|\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\gamma_{m,i}}{\sqrt{2}\omega_m}\cdot\left(X_m^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}\right)\cos\left(\omega_m s\right)+Y_m^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}\right)\sin\left(\omega_m s\right)\right)\right|,$$

$$|\kappa_1^{\varepsilon}(t)|\le\mathrm{const}(N)\cdot\max_{s\in[-\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-1}]}\left|r^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}+s\right)-r^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}\right)\right|.$$

Во-первых, из предложения 1.10 следует, что для любого $T>0$ $\sup_{t\in[0,T]}|\kappa_1^{\varepsilon}(t)|$ слабо сходится к нулю. Кроме того, из предложения 1.6 вытекает, что для любого ε' при достаточно маленьких ε

$$(1-\varepsilon')J_{i,N}\left(r^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}\right)\right)\le\frac{2}{N}U_{i,N}^{\varepsilon}(t)\le J_{i,N}\left(r^{\varepsilon}\left(t\varepsilon^{-2}\right)\right).$$

Как следствие,

$$v_{i,N}^{\varepsilon}(t)=(1-\kappa_2^{\varepsilon}(t))J_{i,N}(r^{\varepsilon}(t\varepsilon^{-2}))+\kappa_1^{\varepsilon}(t),\tag{1.7.16}$$

где $\kappa_2^{\varepsilon}(t)$ равномерно по t сходится к нулю при $\varepsilon\to0$. Используя предложения 1.7 и 1.9, нетрудно проверить, что

$$J_{i,N}(r^{\varepsilon}(t\varepsilon^{-2}))\underset{w}{\to}J_{i,N}(W^{2(N-1)}(t)).$$

Пусть $\gamma > 0$, $T > 0$ — произвольные действительные числа. Из определения 1.4 и теоремы 1.7 следует, что при достаточно малых ε можно построить такой винеровский процесс $W^{2(N-1)}$, что с вероятностью не меньшей $1-\gamma$ для всех $t \in [0, T]$

$$|J_{i,N}(r^\varepsilon(t\varepsilon^{-2})) - J_{i,N}(W^{2(N-1)}(t))| \le \gamma,$$

откуда, учитывая (1.7.16), следует, что (при достаточно маленьких ε) с вероятностью не меньшей $1-2\gamma$ для всех $t \in [0, T]$

$$|v^\varepsilon_{i,N}(t) - J_{i,N}(W^{2(N-1)}(t))| \le 2\gamma.$$

Далее, T можно выбрать настолько большим, что

$$\mathsf{P}\left(\tau^{2(N-1)}(D_{i,N,h+2\gamma}, W^{2(N-1)}) \ge T\right) \le 1-\gamma,$$

откуда следует, что с вероятностью не меньшей $1-3\gamma$ выполнено

$$\tau^{2(N-1)}(D_{i,n,h-2\gamma}, W^{2(N-1)}) \le \min\left\{t \ge 0: \ v^\varepsilon_{i,N}(t) \ge h\right\} \le$$
$$\le \tau^{2(N-1)}(D_{i,n,h+2\gamma}, W^{2(N-1)}).$$

Поскольку на границе $D_{i,N,\cdot}$ нет сингулярных точек (см. [69, гл. 13]), для любого $\gamma' > 0$ при достаточно маленьких $\gamma > 0$ с вероятностью не меньшей $1-\gamma'$ выполнено

$$|\tau^{2(N-1)}(D_{i,n,h+2\gamma}) - \tau^{2(N-1)}(D_{i,n,h-2\gamma})| \le \gamma'.$$

Как следствие, с вероятностью не меньшей $1-3\gamma-\gamma'$

$$|\tau^{2(N-1)}(D_{i,n,h}) - \min\left\{t \ge 0: \ v^\varepsilon_{i,N}(t) \ge h\right\}| \le \gamma',$$

откуда в силу произвольности γ и γ', следует, что

$$\min\left\{t \ge 0: \ v^\varepsilon_{i,N}(t) \ge h\right\} \underset{w}{\to} \tau^{2(N-1)}(D_{i,n,h})$$

при $\varepsilon \to 0$ (здесь мы воспользовались определением 1.4 и теоремой 1.7). В результате имеем требуемое утверждение.

Заметим, что

$$\frac{\gamma_{m,i}}{\omega_m} = \frac{\sin\frac{\pi m}{N}\sin\frac{\pi m(i+1)}{N}}{2\omega\sin\frac{\pi m}{2N}} = \frac{\cos\frac{\pi m}{2N}\sin\frac{\pi m(i+1)}{N}}{\omega} = (-1)^{m+1}\frac{\gamma_{m,N-i-2}}{\omega_m}.$$

откуда, учитывая (1.2.4), вытекает, что $\varepsilon^2\tau_i^\varepsilon$ и $\varepsilon^2\tau_{N-i-2}^\varepsilon$ слабо сходятся к одной и той же случайной величине.

Замечание 1.4. Отметим, что множество, задаваемое неравенством (1.2.4) довольно сложно анализировать при больших N, т.к. в этом случае непонятно, как избавиться от sup в формуле. Однако, как следует из предложения 1.8, при $N = 2, 3, 4$ можно несколько упростить выражение (1.2.4) и в явном виде выписать соответствующие многомерные области.

А именно, имеют место следующие предложения

Предложение 1.11. *При $N = 2$ $\varepsilon^2\tau_0^\varepsilon$ слабо сходится к моменту выхода стандартного двухмерного броуновского движения из круга радиуса*

$$R = 2\omega h$$

с центром в точке 0.

Предложение 1.12. *При $N = 3, 4$ для всех $0 \le i \le N-2$*

$$\varepsilon^2\tau_i^\varepsilon \underset{w}{\to} \tau^{2(N-1)}(D_{i,N,h}, W^{2(N-1)}) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $D_{i,N,h}$ — множество всех $2(N-1)$-мерных векторов

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, y_1, \ldots, x_{N-1}, y_{N-1}),$$

удовлетворяющих неравенству

$$J_{i,N}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sqrt{2}}{\omega N}\sum_{m=1}^{N-1}\left|\cos\frac{\pi m}{2N}\sin\frac{\pi m(i+1)}{N}\right| \cdot \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \le h.$$

Глава 2

Класс нелинейных марковских процессов, допускающих явное описание: существование процесса и примеры

Данная глава посвящена изучению дискретной версии модели уравнений Маккина-Власова, рассмотренной в [5, 6, 87, 88]. Глава состоит из 7 параграфов. В первом из них дается описание модели, и формулируется теорема существования и единственности соответствующего нелинейного марковского процесса. Основной целью здесь является доказательство теоремы 2.1. Во втором параграфе приводятся необходимые сведения из теории операторных полугрупп. Сформулированные здесь утверждения понадобятся также и в главе 3. В третьем параграфе главы рассматриваются конкретные примеры нелинейных марковских блужданий, показывающие, каким образом может быть устроено множество инвариантных мер в рассматриваемой модели. Основными результатами здесь являются теоремы 2.2, 2.3 и 2.4. Наконец в оставшихся 4 параграфах приведены доказательства соответствующих утверждений.

2.1 Описание модели и теорема существования и единственности

Мотивация и описание модели Пусть $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ — произвольная функция. Рассмотрим две частицы $x^1(t), x^2(t)$ на дискретной прямой $\mathbb{Z}$. Будем предполагать, что $x^1(0), x^2(0)$ — независимые одинаково распределенные величины. Зададим взаимодействие между ними следующим образом: в любой момент времени $t \geq 0$ каждая из двух частиц независимо от другой совершает скачки:

$$\begin{aligned}
x^1(t) &\to x^1(t) + 1 \text{ с интенсивностью } F(x^2(t) - x^1(t)),\\
x^1(t) &\to x^1(t) - 1 \text{ с интенсивностью } F(x^1(t) - x^2(t)),\\
x^2(t) &\to x^2(t) + 1 \text{ с интенсивностью } F(x^1(t) - x^2(t)),\\
x^2(t) &\to x^2(t) - 1 \text{ с интенсивностью } F(x^2(t) - x^1(t)).
\end{aligned}$$

Таким образом, при $n \geq 0$ $F(n)$ выражает интенсивность притягивания между частицами, и при $n < 0$ — интенсивность отталкивания.

Обобщим рассмотренную модель на систему из большего числа частиц, а именно, рассмотрим N, $N \in \mathbb{N}$, частиц $x^{1,N}(t), x^{2,N}(t), \ldots, x^{N,N}(t)$ на дискретной прямой $\mathbb{Z}$. Как и ранее, будем считать, что $x^{i,N}(0)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что каждая пара частиц $(x^{i,N}(t), x^{j,N}(t))$, $1 \leq i < j \leq N$, независимо от остальных пар взаимодействует друг с другом по выше описанному правилу. Более конкретно, в каждый момент времени $t \geq 0$ n-ая частица независимо от остальных совершает скачки следующего вида

$$\begin{aligned}
x^{n,N}(t) &\to x^{n,N}(t) + 1 \text{ с интенсивностью } \lambda^{n,N}(t) = \frac{1}{N}\sum_{k \neq n} F(x^{k,N}(t) - x^{n,N}(t)),\\
x^{n,N}(t) &\to x^{n,N}(t) - 1 \text{ с интенсивностью } \mu^{n,N}(t) = \frac{1}{N}\sum_{k \neq n} F(x^{n,N}(t) - x^{k,N}(t)).
\end{aligned}$$

(Множитель $1/N$ перед суммой в последних двух формулах является нормировочным). Обозначим через $\{e_n\}_{n=1}^N$ стандартный базис N-мерного пространства. С формальной точки зрения мы имеем счетную цепь Маркова на $\mathbb{Z}^N$

$$\mathbf{x}^N(t) = (x^{1,N}(t), x^{2,N}(t), \ldots, x^{N,N}(t)) \qquad (2.1.1)$$

с непрерывным временем и интенсивностями скачков

$$\mathbf{x}^N(t) \to \mathbf{x}^N(t) + e_n \text{ с интенсивностью } \lambda^{n,N}(t), \tag{2.1.2}$$

$$\mathbf{x}^N(t) \to \mathbf{x}^N(t) - e_n \text{ с интенсивностью } \mu^{n,N}(t). \tag{2.1.3}$$

Нас будет интересовать поведение одной частицы $x^{1,N}(t)$ при $N \to \infty$. Обозначив через $\mathbf{p}^N(t) = \left\{\mathbf{p}_n^N(t)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\mathbf{p}_n^N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} I_{\{x^{k,N}(t)=n\}}$$

эмпирическое распределения системы частиц, мы можем переписать выражения для интенсивностей скачков $x^{1,N}(t)$ в виде

$$n \to n+1: \ \lambda_n^N(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k^N(t) F(k-n) - \frac{1}{N}F(0), \tag{2.1.4}$$

$$n \to n-1: \ \mu_n^N(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k^N(t) F(n-k) - \frac{1}{N}F(0). \tag{2.1.5}$$

По аналогии с выводом уравнений Маккина-Власова (см. введение) естественно ожидать, что при $N \to \infty$ $\mathbf{p}^N(t)$ в некотором смысле должно быть близко к $\mathrm{Law}(x^{1,N}(t))$, а потому в пределе мы должны получить случайное блуждание $x(t)$ на $\mathbb{Z}$ с интенсивностями скачков $\lambda_n[\mathbf{p}(t)]: \ n \to n+1$ и $\mu_n[\mathbf{p}(t)]: \ n \to n-1$, зависящими от текущего в данный момент времени распределения $\mathbf{p}(t) = \mathrm{Law}(x(t)) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ процесса $x(t)$, следующим образом,

$$\lambda_n[\mathbf{p}(t)] := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t) F(k-n), \tag{2.1.6}$$

$$\mu_n[\mathbf{p}(t)] := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t) F(n-k). \tag{2.1.7}$$

Целью данной главы является изучение полученного нелинейного марковского блуждания $x(t)$. В частности первый вопрос, который здесь возникает — это условия при которых $x(t)$ корректно определен. Ниже мы приводим соответствующую теорему существования и единственности.

В следующей главе будут сформулированы точные определения и теоремы, позволяющие сделать приводимые здесь рассуждения об N-частичной аппроксимации процесса математически строгими.

Теорема о существовании предельного процесса Указанному процессу $x(t)$ соответствуют следующие уравнения Колмогорова

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{p}(t)H[\mathbf{p}(t)], \tag{2.1.8}$$

где

$$H[\mathbf{p}] = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \mu_{n-1}[\mathbf{p}] & -\lambda_{n-1}[\mathbf{p}] - \mu_{n-1}[\mathbf{p}] & \lambda_{n-1}[\mathbf{p}] & & \cdots \\ \cdots & & \mu_n[\mathbf{p}] & -\lambda_n[\mathbf{p}] - \mu_n[\mathbf{p}] & \lambda_n[\mathbf{p}] & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

С формальной точки зрения мы изучаем систему уравнений (2.1.8) относительно $\mathbf{p}(t)$, и при определенных условиях доказываем теоремы существования и единственности решения. Для того, чтобы это сделать, нам потребуется ввести несколько определений.

Пусть B_1 и B_2 — два банаховых пространства с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Пусть B_1 вкладывается в B_2 как линейное подпространство.

Определение 2.1. Будем говорить, что $f:\ (a,b) \to B_1$ имеет B_2-производную $f'(t) \in B_2$ в точке $t \in (a,b)$, если

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{1}{\Delta t}\left(f(t+\Delta t) - f(t)\right) - f'(t) \right\|_2 = 0.$$

Определение 2.2. (См. [17, стр. 81-84]). Пусть $x_0 \in B_1$ и $G:\ B_1 \to B_2$ — произвольная функция. Будем говорить, что система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G(\mathbf{x}(t)),\ \mathbf{x}(0) = x_0,$$

имеет (B_1, B_2)-решение $\mathbf{x}(t)$ на интервале $(a,b) \ni \{0\}$, если

1. Для любого $t \in (a,b)$ $\mathbf{x}(t) \in B_1$.

2. Для любого $t \in (a,b)$ B_2-производная $\mathbf{x}(t)$ в точке t равна $G(\mathbf{x}(t))$.

Рассмотрим семейство банаховых пространств B_β, $\beta > 0$, состоящих из бесконечных последовательностей $\{x_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, с нормой

$$\|x\|_\beta = \sum_k \beta^{|k|} |x_k|.$$

Отметим, что для любых $\beta_1 > \beta_2 > 0$ $B_{\beta_1} \subset B_{\beta_2}$ (как линейное пространство). В частности это свойство позволит нам рассматривать $(B_{\beta_1}, B_{\beta_2})$-решения системы (2.1.8) при подходящих β_1 и β_2.

Мы доказываем следующую теорему (см. [43, 81]):

Теорема 2.1. *Пусть $F(\cdot)$ удовлетворяет условиям*

$$F(n) \leq \text{const} \textit{ при } n < 0;$$
$$F(n) \leq \text{const} \cdot \alpha^n \textit{ при } n \geq 0$$

для некоторого $\alpha > 1$, тогда для любых $p_0 \in B_{\beta_{in}}$, $\beta_{in} > \alpha^3$ и $1 \leq \beta_{out} < \beta_{in}\alpha^{-1}$ система (2.1.8) с начальным условием $\boldsymbol{p}(0) = p_0$ имеет единственное $(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$-решение, определенное на $[0, \infty)$. Кроме того, если $p_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, то для всех $t \geq 0$ $\boldsymbol{p}(t) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Для всех $p_0 \in B_{\beta_{in}} \cap \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ существует и единственен марковский процесс $x(t) = x(t, p_0) \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, \infty)$, такой, что $\boldsymbol{p}(t) \in B_{\beta_{out}}$, и его начальное распределение совпадает с p_0, а интенсивности перехода в момент времени $t \geq 0$ $\lambda_n(t)$ и $\mu_n(t)$ зависят от текущего распределения процесса $x(t)$ в соответствии с формулами (2.1.6) и (2.1.7).

Замечание 2.1. Сложность при доказательстве теоремы вызывает то, что инфитиземальный оператор процесса $H[\cdot]$ может быть неограниченным. В частности, применить стандартные теоремы существования и единственности решения ОДУ в банаховых пространствах здесь не удается. (Например, см. [17, стр. 390-394]).

Замечание 2.2. Локальное существование и единственность решения (2.1.8) справедливо и при $\beta_{in} > \alpha^2$. Условие $\beta_{in} > \alpha^3$ используется только при доказательстве существования и единственности решения на всей полупрямой.

2.2 Примеры

В данном разделе мы приводим несколько конкретных способов выбора функции F, для которых можно в явном виде найти все инвариантные меры рассматриваемого процесса. Отметим, что для нелинейных марковских процессов описание множества инвариантных мер (и сходимость к ним) не является тривиальной задачей. В частности следующее предложение, которое можно проверить простой выкладкой, показывает, что у рассматриваемой системы имеется интеграл движения, и как следствие, процесс не может обладать обычными эргодическими свойствами, присущими классическим марковским цепям: существование ровно одной инвариантной вероятностной меры, к которой при $t \to \infty$ имеется сходимость.

Предложение 2.1. *В условиях теоремы* 2.1 *математическое ожидание*

$$\mathsf{E}[\boldsymbol{p}(t)] = \sum_k k\boldsymbol{p}_k(t)$$

не меняется с течением времени t. *Таким образом, траектория* $\boldsymbol{p}(t)$ *лежит на поверхности* $\Pi(\mathsf{E}[\boldsymbol{p}(0)])$, *где*

$$\Pi(E) = \left\{ p = \{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}} : \quad \mathsf{E}[p] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} kp_k = E \equiv \mathrm{const} \right\}.$$

Пример 1. Пусть

$$F(k) = e^k. \tag{2.2.1}$$

Из теоремы 2.1 вытекает, что соответствующий нелинейный марковский процесс $x(t)$ существует при $p_0 \in B_{\beta_{in}}, \ \beta_{in} > e^3$.

Определение 2.3. (см. [32, стр. 114]) Пусть $p = \{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $q = \{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — две вероятностные меры на $\mathbb{Z}$. Расстоянием Кульбака-Лейблера (относительной энтропией) между p и q называется следующая величина:

$$\mathsf{D}(p||q) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i \ln \frac{p_i}{q_i}.$$

Имеет место следующая теорема (см. [43, 81])

Теорема 2.2. *Пусть $F(\cdot)$ задается выражением (2.2.1), и $p_0 = \boldsymbol{p}(0) \in B_{\beta_{in}}$, $\beta_{in} > e^3$, тогда соответствующий уравнениям (2.1.8) марковский процесс $x(t)$ существует, и имеет однопараметрическое семейство инвариантных мер $\pi(s) = \{\pi_k(s)\}$, $s \in \mathbb{R}$, следующего вида:*

$$\pi_k(s) = \frac{1}{\Xi(s)} e^{-(k-s)^2}, \text{ где } \Xi(s) = \sum_k e^{-(k-s)^2} \text{ - нормирующий фактор.} \tag{2.2.2}$$

$s \in \mathbb{R}$ — параметр, однозначно задаваемый интегралом движения $E = \mathsf{E}[p_0]$. Для любого $s \in \mathbb{R}$ выполнено следующее неравенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathsf{D}\left(\boldsymbol{p}(t) || \pi(s)\right) \leq 0, \tag{2.2.3}$$

причем равенство достигается только при $\boldsymbol{p}(t) \in \{\pi(s),\ s \in \mathbb{R}\}$.

Для произвольных (необязательно вероятностных) мер на $\mathbb{Z}$ p и q определим обобщенное расстояние Кульбака-Лейблера $\widetilde{\mathsf{D}}(p||q)$ следующим образом:

$$\widetilde{\mathsf{D}}(p||q) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i \ln \frac{p_i}{q_i} - \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i + \sum_{i \in \mathbb{Z}} q_i. \tag{2.2.4}$$

(см. [2, 3]). Нетрудно проверить, что $\widetilde{\mathsf{D}}(p||q) \geq 0$, и в случае вероятностных мер обобщенное расстояние совпадает с классическим. Интересным фактом с точки зрения информационной геометрии может являться следующее предложение (см. [2, 3]).

Предложение 2.2. *Кривая, задаваемая семейством ненормированных инвариантных мер*

$$\widetilde{\pi}(s) = \{\widetilde{\pi}_k(s)\},\ \widetilde{\pi}_k(s) = e^{-k^2 + 2ks},$$

является “формальной” ψ^*-геодезической в метрике, соответствующей обобщенному расстоянию Кульбака-Лейблера (2.2.4) (см. [2, 3]). Описанная кривая пересекает плоскости $\Pi(E)$, $E \in \mathbb{R}$ под прямым углом.

Замечание 2.3. В предложении 2.2 употребляются термины “формальная”, поскольку в рассматриваемом нами случае мы имеем дело с множеством всех мер, определенных на $\mathbb{Z}$, которое, вообще говоря, не является конечномерным многообразием. Как следствие, мы не можем использовать понятия метрического тензора g_{ij} или символов Кристофеля Γ_{ij}^{k}, определенных в [2, 3]. Тем не менее, формальная выкладка показывает, что кривая $\widetilde{\pi}(r)$ удовлетворяет всем требуемым уравнениям, и потому ее логично называть геодезической.

Пример 2. Зададим F следующим образом

$$\begin{aligned} &0 < F(n) \le \mathrm{const} \cdot \alpha^n, \ (\alpha > 1) \text{ для всех } n > 0; \\ &F(n) = 0 \text{ при } n \le 0. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Имеет место следующая теорема (см. [81])

Теорема 2.3. *Пусть $F(\cdot)$ задается выражениями (2.2.5), и $p_0 = \boldsymbol{p}(0) \in B_{\beta_{in}}$, $\beta_{in} > \alpha^3$, тогда $x(t)$ существует и имеет однопараметрическое семейство инвариантных мер $\pi(s) = \{\pi_k(s)\}$, $s \in \mathbb{R}$, следующего вида:*

$$\pi_k(s) = \begin{cases} 1 - \{s\}, & k = [s], \\ \{s\}, & k = [s] + 1, \\ 0, & \text{\textit{в противном случае.}} \end{cases} \tag{2.2.6}$$

(Отметим, что $\sum_k k\pi_k(s) = s$). Вдоль траектории движения меры $\boldsymbol{p}(t)$ выполняется следующее неравенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{D}[\boldsymbol{p}(t)] \le 0, \tag{2.2.7}$$

где $\mathsf{D}[p] = \sum_k k^2 p_k - \left(\sum_k k p_k\right)^2$ — дисперсия распределения p. Причем равенство нулю в (2.2.7) достигается только при $\boldsymbol{p}(t) \in \{\pi(s),\ s \in \mathbb{R}\}$.

Следующий пример показывает, что множество инвариантных мер может иметь и более сложную структуру, чем в рассмотренных примерах 1 и 2.

Пример 3. Зададим F следующим образом,

$$F(k) = e^k I\left\{k - \text{нечетное}\right\}. \tag{2.2.8}$$

Следующее простое предложение показывает, что в этом случае у процесса имеется еще один интеграл движения.

Предложение 2.3. *Пусть $F(\cdot)$ задается выражением (2.2.8), и $p_0 = \boldsymbol{p}(0) \in B_{\beta_{in}}$, $\beta_{in} > e^3$, тогда соответствующий уравнениям (2.1.8) марковский процесс $x(t)$ существует, и функция*

$$S[\boldsymbol{p}(t)] = \sum_{k-\text{нечет.}} \boldsymbol{p}_k(t)$$

не меняется с течением времени t.

Мы доказываем следующее утверждение

Теорема 2.4. *В условиях предложения 2.3 множество инвариантных мер процесса $x(t)$ представляется в виде объединения трех множеств*

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3,$$

где

$$\Pi_1 = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid S[p] = 0\},$$
$$\Pi_2 = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid S[p] = 1\},$$

а Π_3 — двухпараметрическое семейство инвариантных мер $\pi(s,u) = \{\pi_k(s,u)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}_+$, следующего вида:

$$\pi_k(s,u) = \frac{1}{\Xi(s,u)} e^{-(k-s)^2} \cdot \begin{cases} 1, & k - \text{четное}; \\ u, & k - \text{нечетное}, \end{cases} \tag{2.2.9}$$

($\Xi(s,u)$ — нормирующий множитель). Для любых $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}_+$ выполнено следующее неравенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathsf{D}\left(\boldsymbol{p}(t) || \pi(s,u)\right) \le 0. \tag{2.2.10}$$

Причем равенство в (2.2.10) достигается только при $\boldsymbol{p}(t) \in \Pi$.

2.3 Необходимые сведения из функционального анализа

В данном разделе мы вводим необходимые определения и обозначения, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы 2.1, а также некоторых утверждений главы 3.

Определение 2.4. (см. [21, стр. 8]) Линейным оператором A на линейном нормированном пространстве B называется линейное отображение $A:\ D(A) \to B$, где $D(A) \subseteq B$ — линейное подпространство B, называемое областью определения A.

Определение 2.5. (см. [31, стр. 44]) Пусть B_1, B_2 — линейные нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Нормой линейного отображения $A:\ B_1 \to B_2$ называется величина

$$\|A\|_{B_1 \to B_2} = \sup_{x \in B_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Определение 2.6. $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ — множество всех линейных отображений из одного линейного нормированного пространства B_1 в другое линейное нормированное пространство B_2 с конечной нормой $\|\cdot\|_{B_1 \to B_2}$ ($\mathcal{L}(B_1, B_2)$ само по себе является линейным нормированным пространством с нормой $\|\cdot\|_{B_1 \to B_2}$).

Определение 2.7. Нормой линейного оператора $A:\ B \to B$ на линейном нормированном пространстве с нормой $\|\cdot\|$ называется величина

$$\|A\| = \sup_{x \in B \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Определение 2.8. $\mathcal{L}(B)$ — множество всех линейных операторов на линейном нормированном пространстве B с конечной нормой $\|\cdot\|$ ($\mathcal{L}(B)$ само по себе является линейным нормированным пространством с нормой $\|\cdot\|$).

Определение 2.9. (см. [31, стр. 48]) Пусть B — произвольное банахово пространство. Двухпараметрическое семейство ограниченных операторов

$$U_{s,t}:\ B \to B,\ 0 \le s \le t < \infty$$

называется полугруппой, если

$$\text{для любых } t \geq 0 \ U_{t,t} = \mathrm{Id},$$
$$\text{для любых } 0 \leq s \leq r \leq t \ U_{s,r}U_{r,t} = U_{s,t}.$$

Определение 2.10. (см. [31, стр. 48]) В условиях определения 2.9 полугруппа $U_{s,t}$ называется сильно непрерывной, если для любого $x \in B$ $U_{s,t}x$ является непрерывной функцией от параметров s и t.

Определение 2.11. (см. [31, стр. 48]) Пусть $U_{s,t}$ — сильно непрерывная полугруппа операторов на банаховом пространстве B; $D \subseteq B$ — плотное линейное подпространство B. Семейство операторов $A_t : \ D \to B$, $t > 0$, называется генератором полугруппы $U_{s,t}$, если для любых $0 < s < t$, $x \in D$,

$$\frac{U_{s,t+\Delta t}x - U_{s,t}x}{\Delta t} \to U_{s,t}A_t x, \ \Delta t \to 0$$
$$\frac{U_{s+\Delta s,t}x - U_{s,t}x}{\Delta s} \to -A_s U_{s,t}x, \ \Delta s \to 0.$$

Определение 2.12. (см. [64, стр. 189]) Пусть $(S, \mathcal{B}, m)$ — измеримое пространство с мерой m; B — некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$; $f : \ S \to B$ — простая функция вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I\left\{x \in B_i\right\}, \ x_i \in B, \ B_i \in \mathcal{B}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{2.3.1}$$

тогда интегралом Бохнера от функции f называется следующая величина

$$\int_S f(x)m(\mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^{n} x_i m(B_i).$$

Определение 2.13. (см. [64, стр. 189]) В условиях определения 2.12 измеримая функция $f : \ S \to B$ является интегрируемой по Бохнеру, если для нее существует последовательность простых функций f_n вида (2.3.1), удовлетворяющих условию

$$\int_S \|f - f_n\| m(\mathrm{d}x) \to 0, \ n \to \infty.$$

Интегралом Бохнера от функции f в данном случае называется

$$\int_S f(x)m(\mathrm{d}x) = \lim_{n\to\infty}\int_S f_n(x)m(\mathrm{d}x). \tag{2.3.2}$$

Замечание 2.4. (см. [64, стр. 189-190]) Определение 2.13 корректно в том смысле, что предел (2.3.2) не зависит от выбора последовательности f_n.

Предложение 2.4. *(см. [64, стр. 191]) В условиях определения* 2.13 *имеет место неравенство*

$$\left\|\int_S f(x)m(\mathrm{d}x)\right\| \leq \int_S \|f(x)\|m(\mathrm{d}x).$$

Предложение 2.5. *(см. [21, стр. 9]) Пусть* $f:\ [a,b]\to B$ *— некоторая непрерывная функция на отрезке* $[a,b]$, *принимающая значения в банаховом пространстве* B. *Пусть для всех* $t\in(a,b)$ *определена* B*-производная* $f'(t)$, *являющаяся непрерывной функцией от* t, *тогда*

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b)-f(a).$$

(Интеграл в последней формуле понимается в смысле определения 2.13*).*

Ключевым утверждением при доказательстве теоремы 2.1 является следующая теорема из теории возмущений линейных операторов.

Теорема 2.5. *(см. [31, стр. 49]) Пусть в условиях определения* 2.11 D *является банаховым пространством с нормой* $\|\cdot\|_D$, *причем для любых* $0\leq s\leq t$ $U_{s,t}$ *является ограниченным оператором, действующим из* D *в* D. *Пусть* L_t, $t\geq 0$, *— однопараметрическое семейство операторов, принадлежащих одновременно и* $\mathcal{L}(B)$, *и* $\mathcal{L}(D)$. *Пусть также* L_t *является непрерывной* $\mathcal{L}(B)$*-значной функцией. Тогда двухпараметрическое семейство операторов*

$$\Phi_{s,t} = U_{s,t} + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Delta_k(s,t)}\Gamma_k^{s,t}(s_1,\ldots,s_k)\mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_k,\ 0\leq s\leq t, \tag{2.3.3}$$

где

$$\Gamma_k^{s,t}(s_1,\ldots,s_k) := U_{s,s_1}L_{s_1}U_{s_1,s_2}\ldots L_{s_k}U_{s_k,t},$$
$$\Delta_k(s,t) = \left\{(s_1,\ldots,s_k)\in\mathbb{R}^k:\ s\le s_1\le\ldots\le s_k\le t\right\}$$

(интеграл понимается в смысле определения 2.13*, а сходимость ряда — в смысле операторной нормы в пространстве* B*) является сильно непрерывной полугруппой в* B*, причем* A_t+L_t *является генератором полугруппы* $\Phi_{s,t}$ *с областью определения* D*.*

В случае марковских полугрупп формуле (2.3.3) можно придать определенный смысл в терминах суммирования по путям. А именно, рассмотрим произвольную неоднородную марковскую цепь $\xi(t)$ с непрерывным временем и конечным фазовым пространством S. Обозначим через H_t — матрицу интенсивностей скачков, и через $P_{s,t}$ — матрицу переходных вероятностей $\xi(t)$:

$$P_{s,t}(i,j) = \mathsf{P}(\xi(t)=j|\xi(s)=i),\ i,j\in S;$$
$$H_t(i,j) = \begin{cases}\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1}P_{t,t+\Delta t}(i,j) & ,\ i\neq j,\\ -\sum_{j\neq i}H_t(i,j), & i=j.\end{cases}$$

Заметим, что $P_{s,t}$, действуя на вектора справа, образует полугруппу на $l_1(S)$ с генератором H_t, причем если обозначить через $p(t)$ распределение процесса $\xi(t)$ в момент времени t, то для любых $0\le s\le t$

$$p(t) = p(s)P_{s,t}. \tag{2.3.4}$$

Обозначим через $G_k(i,j)$, $i,j\in S$, множество всех последовательностей вида

$$(x_1,x_2,\ldots,x_k),\ x_l\in S,\ x_1=i,\ x_k=j,\ x_l\neq x_{l+1}.$$

Представив оператор H_t в виде суммы диагональной и внедиагональной компонент

$$H_t = H_t^0 + V_t,$$

а затем применив формулу (2.3.3) к уравнению (2.3.4), получим

$$\mathsf{P}(\xi(t)=j)=\mathsf{P}(\xi(s)=i)\left\{e^{\int_s^t H_r^0(i,i)\mathrm{d}r}\cdot I\{i=j\}+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\gamma\in G_k(i,j)}\mathsf{P}(\gamma,s,t)\right\},\tag{2.3.5}$$

где в последней формуле

$$\mathsf{P}(\gamma,s,t)=\int_{\Delta_{k-1}(s,t)}e^{\int_s^{s_1}H_r^0(x_1,x_1)\mathrm{d}r}V_{s_1}(x_1,x_2)e^{\int_{s_1}^{s_2}H_r^0(x_2,x_2)\mathrm{d}r}\times\ldots\times$$
$$\times\, e^{\int_{s_{k-1}}^t H_r^0(x_k,x_k)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\ldots\mathrm{d}s_{k-1}$$

интерпретируется как условная вероятность того, что в течение интервала времени от s до t $\xi(t)$ последовательно совершает серию скачков

$$x_1\to x_2, x_2\to x_3,\ldots,x_{k-1}\to x_k.$$

При доказательстве теоремы 2.1 нам потребуется следующее утверждение, называемое принципом сжимающих отображений.

Теорема 2.6. *Пусть* (M,ρ) *— полное метрическое пространство с метрикой* ρ; $F: M\to M$ *— некоторое отображение пространства* M *в себя, удовлетворяющее условию: существует такое* $0\le\alpha<1$, *что для любых* $x,y\in M$

$$\rho(F(x),F(y))\le\alpha\rho(x,y).$$

Тогда $F(\cdot)$ *имеет единственную неподвижную точку* x^*, *т.е. такую, что*

$$F(x^*)=x^*.$$

Также, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, называемое леммой Гронуолла.

Теорема 2.7. *(см. [68, стр. 68]) Пусть* $m(t)$, $t\in[0,T]$, $T>0$, *— неотрицательная функция, удовлетворяющая соотношению*

$$m(t)\le C+\alpha\int_0^t m(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,T],$$

где $C, \alpha > 0$ — некоторые константы. Тогда для всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$m(t) \leq Ce^{\alpha t}.$$

Наконец, при доказательстве оценки (2.4.2) мы будем использовать следующее простое утверждение.

Теорема 2.8. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ объем k-мерного симплекса*

$$\Delta_k = \big\{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k : \ 0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_k \leq 1\big\}$$

равен

$$\mathrm{vol}_k(\Delta_k) = \frac{1}{k!}.$$

2.4 Доказательство теоремы 2.1

Доказательство теоремы можно разбить на несколько последовательных пунктов:

1. Построение полугруппы по семейству инфитиземальных операторов $H[\mathbf{p}(t)]$. Последнее позволит переписать уравнения (2.1.8) в интегральной форме, пригодной для использования принципа сжимающих отображений.
2. Доказательство существования и единственности решения в окрестности нуля.
3. Построение решения на всей числовой прямой.

Построение полугруппы

Всюду далее (если не оговорено противного) мы будем предполагать, что все операторы действуют на вектора справа.

Определение 2.14. Полугруппу $P_{s,t}$, действующую на пространстве B_β, $\beta > 0$, будем называть стохастической, если

$$\begin{aligned}&\text{для любых } i, j \in \mathbb{Z} \ P_{s,t}(i,j) \geq 0;\\ &\text{для любого } i \in \mathbb{Z} \ \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_{s,t}(i,j) = 1.\end{aligned}$$

Цель данного подраздела доказать следующую лемму

Лемма 2.1. *Пусть* $\boldsymbol{p}(t)$ *— непрерывная* B_α*-значная функция, определенная на отрезке* $[0,T]$, $T \geq 0$, *тогда для всех* $u_0 \in B_{\beta_{in}}$, *где*

$$\beta_{in} > \alpha,\ 1 \leq \beta_{out} < \beta_{in}\alpha^{-1},$$

система

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u}(t)H[\boldsymbol{p}(t)],\ \boldsymbol{u}(0) = u_0, \tag{2.4.1}$$

имеет единственное $(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$*-решение, определенное на* $[0,T]$. *Решение задается сильно непрерывной, стохастической полугруппой в* B_β ($\beta \geq 1$ *— произвольное действительное число) операторов* $P_{s,t}[\boldsymbol{p}]$, $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(s)P_{s,t}[\boldsymbol{p}].$$

Имеет место следующая оценка

$$\|P_{s,t}[\boldsymbol{p}]\|_\beta \leq \exp\left\{\mathrm{const}\cdot\beta(t-s)\sup_{r\in[s,t]}\|\boldsymbol{p}(r)\|_\alpha\right\},\ \beta \geq 1, \tag{2.4.2}$$

и кроме того, если рассматривать $P_{s,t}[\boldsymbol{p}]$ *как семейство операторов действующих из* $B_{\beta_{in}}$ *в* $B_{\beta_{out}}$, *то равномерно по всем* $t \in [0,T)$

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}\left(P_{t,t+\Delta t}[\boldsymbol{p}] - \boldsymbol{Id}\right) - H[\boldsymbol{p}(t)]\right\|_{\beta_{in}\to\beta_{out}} \to 0,\ \Delta t \to 0. \tag{2.4.3}$$

Замечание 2.5. В частности из (2.4.3) следует, что если рассматривать $P_{s,t}$ как полугруппу на $B_{\beta_{out}}$, то $P_{s,t}$ имеет генератор $H[\mathbf{p}(t)]$ с областью определения $B_{\beta_{in}}$.

План доказательства Представим оператор $H[\mathbf{p}(t)]$, $t \in [0, T]$, в виде суммы двух $H[\mathbf{p}(t)] = V[\mathbf{p}(t)] + H_0[\mathbf{p}(t)]$:

$$H_0[\mathbf{p}(t)] = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -I_{-2} & I_{-2} & & & \\ & -I_{-1} & I_{-1} & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & & I_1 & -I_1 & \\ & & & I_2 & -I_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$V[\mathbf{p}(t)] = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{-2} & 0 & -\mu_{-2} & & & & \\ & \mu_{-1} & 0 & -\mu_{-1} & & & \\ & & \mu_0 & -I_0 & \lambda_0 & & \\ & & & -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 & \\ & & & & -\lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

где

$$I_k[\mathbf{p}(t)] = \lambda_k[\mathbf{p}(t)] + \mu_k[\mathbf{p}(t)].$$

Мы утверждаем, что требуемая полугруппа может быть сконструирована, используя формулу (2.3.3), а именно,

$$P_{s,t}[\mathbf{p}] = P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}] + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k(s,t)} \Gamma_k^{s,t}(s_k, \dots, s_1) \mathrm{d}s_k \dots \mathrm{d}s_1, \text{ где} \tag{2.4.4}$$

$$\Gamma_k^{s,t}(s_k, \dots, s_1) := P_{s,s_k}^{H_0}[\mathbf{p}] V[\mathbf{p}(s_k)] P_{s_k,s_{k-1}}^{H_0}[\mathbf{p}] \dots V[\mathbf{p}(s_1)] P_{s_1,t}^{H_0}[\mathbf{p}],$$

и через $P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}]$ обозначена полугруппа, соответствующая операторозначной функции $H_0[\mathbf{p}(t)]$. Однако, для того, чтобы это сделать, необходимо проверить все условия теоремы 2.5.

Вспомогательные утверждения В данном разделе мы доказываем некоторые технические утверждения, которые нам понадобятся впоследствии.

Предложение 2.6. *Пусть $p \in B_\alpha$, тогда имеют место следующие неравенства*

$$\begin{aligned}
\textit{при } n > 0 \quad & |\lambda_n[p]| \le \mathrm{const} \cdot \|p\|_\alpha; \\
& |\mu_n[p]| \le \mathrm{const} \cdot \alpha^{|n|} \|p\|_\alpha; \\
\textit{при } n \le 0 \quad & |\lambda_n[p]| \le \mathrm{const} \cdot \alpha^{|n|} \|p\|_\alpha; \\
& |\mu_n[p]| \le \mathrm{const} \cdot \|p\|_\alpha.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для $n > 0$ имеем

$$|\lambda_n[p]| \le \sum_{k=-\infty}^{n-1} |p_k| F(k-n) + \sum_{k=n}^{\infty} |p_k| F(k-n) \le \mathrm{const} \cdot \sum_{k=-\infty}^{n} |p_k| +$$

$$+\mathrm{const} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} |p_k| \alpha^{k-n} \le \mathrm{const} \cdot \|p\|_\alpha;$$

$$|\mu_n[p]| \le \sum_{k=-\infty}^{n} |p_k| F(n-k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} |p_k| F(n-k) \le \mathrm{const} \cdot \alpha^n \sum_{k=-\infty}^{n} |p_k| \alpha^{-k} +$$

$$+\mathrm{const} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} |p_k| \le \mathrm{const} \cdot \alpha^{|n|} \|p\|_\alpha.$$

Оценки для $n \le 0$ доказываются точно также.

По аналогии доказывается следующее утверждение:

Предложение 2.7. *Пусть $p^1, p^2 \in B_\alpha$, и*

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_n[p^1, p^2] &:= \lambda_n[p^1] - \lambda_n[p^2], \\
\Delta\mu_n[p^1, p^2] &:= \mu_n[p^1] - \mu_n[p^2],
\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
\textit{при } n > 0 \quad & |\Delta\lambda_n[p^1, p^2]| \le \mathrm{const} \cdot \|p^1 - p^2\|_\alpha; \\
& |\Delta\mu_n[p^1, p^2]| \le \mathrm{const} \cdot \alpha^{|n|} \|p^1 - p^2\|_\alpha; \\
\textit{при } n \le 0 \quad & |\Delta\lambda_n[p^1, p^2]| \le \mathrm{const} \cdot \alpha^{|n|} \|p^1 - p^2\|_\alpha; \\
& |\Delta\mu_n[p^1, p^2]| \le \mathrm{const} \cdot \|p^1 - p^2\|_\alpha.
\end{aligned}$$

Следующее простое утверждение очевидным образом следует из оценок предложений 2.6 и 2.7.

Предложение 2.8. *Пусть $\boldsymbol{p}(t)$ — непрерывная B_α-значная функция, определенная на отрезке $[0,T]$, $T \geq 0$. Тогда для любого $\beta \geq 1$ $V[\boldsymbol{p}(t)]$ является непрерывной $\mathcal{L}(B_\beta)$-значной функцией на отрезке $[0,T]$. Причем,*

$$\|V[\boldsymbol{p}(t)]\|_\beta \leq \mathrm{const} \cdot \beta \|\boldsymbol{p}(t)\|_\alpha,\ t \in [0,T],$$
$$\|V[\boldsymbol{p}(t_1)] - V[\boldsymbol{p}(t_2)]\|_\beta \leq \mathrm{const} \cdot \beta \|\boldsymbol{p}(t_1) - \boldsymbol{p}(t_2)\|_\alpha,\ t_1, t_2 \in [0,T].$$

Предложение 2.9. *Пусть $p^1, p^2 \in B_\alpha$, и*

$$\beta_{in} \geq \alpha,\ 1 \leq \beta_{out} \leq \beta_{in}\alpha^{-1},$$

тогда операторы

$$H_0[p^1],\ H[p^1] \text{ и } \Delta H[p^1,p^2] = H[p^1] - H[p^2]$$

принадлежат $\mathcal{L}(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$, причем имеют место оценки

$$\|H[p^1]\|_{\beta_{in}\to\beta_{out}} \leq \mathrm{const} \cdot \beta_{out} \|p^1\|_\alpha;$$
$$\|H_0[p^1]\|_{\beta_{in}\to\beta_{out}} \leq \mathrm{const} \cdot \beta_{out} \|p^1\|_\alpha;$$
$$\|\Delta H[p^1,p^2]\|_{\beta_{in}\to\beta_{out}} \leq \mathrm{const} \cdot \beta_{out} \|p^1 - p^2\|_\alpha;$$
$$\|\Delta H_0[p^1,p^2]\|_{\beta_{in}\to\beta_{out}} \leq \mathrm{const} \cdot \beta_{out} \|p^1 - p^2\|_\alpha.$$

Доказательство. Проверим справедливость утверждения только для $\Delta H[p^1,p^2]$. Пусть $n > 0$. Обозначив, $e_n = \{\delta_{nl}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ из предложения 2.7 следует

$$\frac{\|e_n \Delta H[p^1,p^2]\|_{\beta_{out}}}{\|e_n\|_{\beta_{in}}} \leq$$
$$\leq \beta_{in}^{-n} \cdot |\Delta\mu_n[p^1,p^2]| \cdot \beta_{out}^{|n-1|} + \beta_{in}^{-n} \cdot |\Delta\lambda_n[p^1,p^2]| \cdot \beta_{out}^{|n+1|} +$$
$$+ \beta_{in}^{-n} \cdot \left|\Delta\mu_n[p^1,p^2] + \Delta\lambda_n[p^1,p^2]\right| \cdot \beta_{out}^{|n|} \leq$$
$$\leq \mathrm{const} \cdot \frac{\alpha^n \beta_{out}^{n+1}}{{\beta_{in}}^n} \cdot \|p^1 - p^2\|_\alpha \leq \mathrm{const} \cdot \beta_{out} \cdot \|p^1 - p^2\|_\alpha.$$

Аналогичные оценки можно провести и для $n \leq 0$, откуда следует

$$\|\Delta H[p^1, p^2]\|_{\beta_{in} \to \beta_{out}} \leq \text{const} \cdot \beta_{out} \|p^1 - p^2\|_{\alpha}.$$

Оставшиеся утверждения доказываются по аналогии, и мы пропускаем выкладки.

Следствие 2.1. *Пусть $\boldsymbol{p}(t)$ — непрерывная B_α-значная функция, определенная на отрезке $[0, T]$, и*

$$\beta_{in} \geq \alpha, \ 1 \leq \beta_{out} \leq \beta_{in} \alpha^{-1}.$$

Тогда $H_0[\boldsymbol{p}(t)]$ и $H[\boldsymbol{p}(t)]$ являются непрерывными $\mathcal{L}(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$-значными функциями на отрезке $[0, T]$.

Предложение 2.10. *Пусть $\boldsymbol{p}(t)$ — непрерывная B_α-значная функция, определенная на отрезке $[0, T]$, $T \geq 0$. Тогда существует сильно непрерывная, стохастическая полугруппа операторов*

$$P_{s,t}^{H_0}[\boldsymbol{p}], \ 0 \leq s \leq t \leq T,$$

действующая одновременно во всех пространствах B_β, $\beta \geq 1$, причем для любых $\beta \geq 1$, $0 \leq s \leq t$

$$\|P_{s,t}^{H_0}[\boldsymbol{p}]\|_\beta \leq 1. \tag{2.4.5}$$

Кроме того, для любых

$$\beta_{in} > \alpha, \ 1 \leq \beta_{out} < \beta_{in} \alpha^{-1}$$

равномерно по всем $t \in [0, T)$ имеет место сходимость

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \left(P_{t,t+\Delta t}^{H_0}[\boldsymbol{p}] - \boldsymbol{Id} \right) - H_0[\boldsymbol{p}(t)] \right\|_{\beta_{in} \to \beta_{out}} \to 0. \tag{2.4.6}$$

В частности, если рассматривать $P_{s,t}^{H_0}$ как полугруппу на $B_{\beta_{out}}$, то $P_{s,t}^{H_0}$ имеет генератор $H_0[\boldsymbol{p}(t)]$ с областью определения $B_{\beta_{in}}$.

Доказательство. Заметим, что $H_0[\mathbf{p}(t)]$ является инфитиземальным оператором для неоднородной марковской цепи с интенсивностями перехода:

$$
\begin{aligned}
n > 0: &\quad n \to n-1 \text{ с интенсивностью } I_n[\mathbf{p}(t)];\\
n < 0: &\quad n \to n+1 \text{ с интенсивностью } I_n[\mathbf{p}(t)],
\end{aligned}
$$

поэтому логично определить $P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}]$ следующим образом: пусть $n \geq 0$, тогда (для $n \leq 0$ определение аналогично)

$$
(P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}])_{n,m} = \begin{cases} z_{s,n,m}(t), & m \in [0,n],\\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}
$$

где $z_{s,n,m}(t)$ являются решением конечной системы дифференциальных уравнений на отрезке $[s,t]$

$$
\begin{cases}
\dot{z}_{s,n,0}(t) = I_1[\mathbf{p}(t)] z_{s,n,1}(t),\\
\dot{z}_{s,n,m}(t) = -I_m[\mathbf{p}(t)] z_{s,n,m}(t) + I_{m+1}[\mathbf{p}(t)] z_{s,n,m+1}(t), \quad 0 < m < n\ ,\\
\dot{z}_{s,n,n}(t) = -I_n[\mathbf{p}(t)] z_{s,n,n}(t),
\end{cases} \tag{2.4.7}
$$

с начальными условиями $z_{s,n,m}(s) = \delta_{m,n}$ (для $n = 0$ $z_{s,0,0}(t) \equiv 1$).

Поскольку $\mathbf{p}(t)$ непрерывна, из оценок предложения 2.7 следует, что $I_n[\mathbf{p}(t)]$ также непрерывны, и указанная система имеет единственное решение. Полугрупповое свойство и стохастичность проверяется прямой выкладкой, и мы это пропускаем. Далее для любого $\beta \geq 1$

$$
\|P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}]\|_\beta \leq 1,
$$

т.к. для всех $n \geq 0,\ 0 \leq s \leq t \leq T$,

$$
\frac{\|e_n P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}]\|_\beta}{\|e_n\|_\beta} = \beta^{-n} \sum_{k=0}^{n} \beta^k \left(P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}]\right)_{n,k} \leq \sum_{k=0}^{n} \left(P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}]\right)_{n,k} = 1.
$$

(Аналогичные оценки справедливы и для $n < 0$).

Для проверки сильной непрерывности $P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}]$, достаточно убедиться в том, что для любого $\pi \in B_\beta$ равномерно по всем $t \in [0,T]$

$$\|\pi P^{H_0}_{t,t+\Delta t}[\mathbf{p}] - \pi\|_\beta \to 0,\ \Delta t \to 0,\ t \in [0,T).$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$ и $0 \le \Delta t \le T - t$, тогда

$$\|\pi P^{H_0}_{t,t+\Delta t}[\mathbf{p}] - \pi\|_\beta \le \sum_{k=-N}^{N} |\pi_k| \cdot \|e_k \left(P^{H_0}_{t,t+\Delta t}[\mathbf{p}] - \mathrm{Id}\right)\|_\beta + 2\sum_{k \ge N} |\pi_k| \cdot \beta^{|k|} := I_1 + I_2,$$

где $e_k = \{\delta_{nk}\}$ — k-ый элемент стандартного базиса. Для любого $\varepsilon \ge 0$ при достаточных больших N

$$I_2 \le \varepsilon/2.$$

В то же время I_1 равномерно по всем $t \in [0,T]$ стремится к нулю при $\Delta t \to 0$ (т.к. действие полугруппы на e_k задается обычными $k \times k$-матрицами). Таким образом, при достаточно малых Δt равномерно по всем $t \in [0,T]$

$$\|\pi P^{H_0}_{t,t+\Delta t}[\mathbf{p}] - \pi\|_\beta \le \varepsilon,$$

откуда следует требуемое утверждение.

Для доказательства (2.4.6) мы должны проверить, что равномерно по всем $t \in [0,T)$ и $u \in B_{\beta_{in}}$, $u \ne 0$, имеет место следующая сходимость

$$\frac{1}{\|u\|_{\beta_{in}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{out}^{|n|} \left| \frac{1}{\Delta t} \left(\left(u P^{H_0}_{t,t+\Delta t}[\mathbf{p}] \right)_n - u_n \right) - (uH_0[\mathbf{p}(t)])_n \right| = \\ = \sum_{n>0} + \sum_{n \le 0} \to 0.$$

при $\Delta t \to 0$. Заметив, что при $n > 0$

$$\left(u P^{H_0}_{s,t}[\mathbf{p}] \right)_n = \sum_{k \ge n} u_k z_{s,k,n}(t),\ 0 \le s \le t \le T, \tag{2.4.8}$$

(ряд сходится, т.к. $|z_{s,k,n}| \le 1$ и $u \in B_{\beta_{in}}$) имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n>0} = \frac{1}{\|u\|_{\beta_{in}}} \sum_{n>0} \beta_{out}^n \left| \frac{1}{\Delta t} \sum_{k\ge n} u_k \left(z_{t,k,n}(t+\Delta t) - z_{t,k,n}(t)\right) - \sum_{k\ge n} u_k \dot z_{t,k,n}(t) \right| = \\
= \frac{1}{\|u\|_{\beta_{in}}} \sum_{n>0} \beta_{out}^n \left| \sum_{k\ge n} u_k \left(\dot z_{t,k,n}(t+\theta_{t,k,n}\Delta t) - \dot z_{t,k,n}(t)\right)\right| = \\
\le \frac{1}{\|u\|_{\beta_{in}}} \sum_{0<n<N} \beta_{out}^n \left| \sum_{n\le k\le M} u_k \left(\dot z_{t,k,n}(t+\theta_{t,k,n}\Delta t) - \dot z_{t,k,n}(t)\right)\right| + \\
+ \frac{1}{\|u\|_{\beta_{in}}} \sum_{0<n<N} \beta_{out}^n \left| \sum_{k>M} u_k \left(\dot z_{t,k,n}(t+\theta_{t,k,n}\Delta t) - \dot z_{t,k,n}(t)\right)\right| + \\
+ \frac{1}{\|u\|_{\beta_{in}}} \sum_{n\ge N} \beta_{out}^n \left| \sum_{k\ge n} u_k \left(\dot z_{t,k,n}(t+\theta_{t,k,n}\Delta t) - \dot z_{t,k,n}(t)\right)\right| := I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

где $0 \le \theta_{t,k,n} \le 1$, а $N,\ M$ — произвольные натуральные числа. Из (2.4.7), оценок предложения 2.6, а также из того, что $|z_{s,k,n}| \le 1$, следует, что

$$|\dot z_{s,k,n}| \le \mathrm{const} \cdot \sup_{r\in[0,T]} \|\mathbf{p}(r)\|_\alpha \cdot \alpha^{n+1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
I_2 \le & \mathrm{const} \cdot \|u\|_{\beta_{in}}^{-1} \cdot \sup_{r\in[0,T]} \|\mathbf{p}(r)\|_\alpha \cdot \sum_{0<n<N} \beta_{out}^n \alpha^{n+1} \sum_{k>M} |u_k| \le \\
\le & \mathrm{const} \cdot \sup_{r\in[0,T]} \|\mathbf{p}(r)\|_\alpha \cdot \left(\sum_{0<n<N} \beta_{out}^n \alpha^{n+1} \right) \cdot \beta_{in}^{-M}; \\
I_3 \le & \mathrm{const} \cdot \|u\|_{\beta_{in}}^{-1} \cdot \sup_{r\in[0,T]} \|\mathbf{p}(r)\|_\alpha \cdot \sum_{n\ge N} \beta_{out}^n \alpha^{n+1} \sum_{k\ge n} |u_k| \le \\
\le & \mathrm{const} \cdot \|u\|_{\beta_{in}}^{-1} \cdot \sup_{r\in[0,T]} \|\mathbf{p}(r)\|_\alpha \cdot \alpha \cdot \sum_{n\ge N} \left(\frac{\beta_{out}\alpha}{\beta_{in}} \right)^n \cdot \sum_{k\ge N} |u_k| \beta_{in}^k \le \\
\le & \mathrm{const} \cdot \sup_{r\in[0,T]} \|\mathbf{p}(r)\|_\alpha \cdot \alpha \cdot \sum_{n\ge N} \left(\frac{\beta_{out}\alpha}{\beta_{in}} \right)^n.
\end{aligned}$$

В результате, при достаточно больших N, M (равномерно по t и u) I_2 и I_3 меньше любого наперед заданного числа. В то же время I_1 равномерно по t стремится к нулю при $\Delta t \to 0$. В результате равномерно по Δt $\sum_{n>0} \to 0$.

Аналогичным образом оценивается $\sum_{n\leq 0}$, что влечет требуемое утверждение.

Построение полугруппы $P_{s,t}$ Теперь, когда вспомогательные утверждения доказаны, мы можем доказать существование полугруппы $P_{s,t}$. Во-первых, в предложении 2.10 была сконструирована сильно непрерывная полугруппа $P_{s,t}^{H_0}$, действующая на пространстве $B_{\beta_{out}}$ и имеющая генератор $H_0[\mathbf{p}(t)]$ с областью определения $B_{\beta_{in}}$. Кроме того, для всех $0 \leq s \leq t$ $P_{s,t}^{H_0}$ является ограниченным оператором, действующем на $B_{\beta_{in}}$. Наконец, из предложения 2.8 следует, что $V[\mathbf{p}(t)]$ является непрерывным семейством ограниченных операторов и в пространстве $B_{\beta_{in}}$, и в пространстве $B_{\beta_{out}}$. Таким образом, все условия теоремы 2.5 выполнены, и используя формулу (2.4.4) мы можем определить сильно непрерывную полугруппу $P_{s,t}$, определенную на пространстве $B_{\beta_{out}}$, и имеющую генератор $H[\mathbf{p}(t)]$ с областью определения $B_{\beta_{in}}$.

Проверка неравенства (2.4.2) Используя неравенство (2.4), а также формулу объема симплекса, мы можем оценить каждое слагаемое в ряду (2.4.2) следующим образом,

$$\left\| \int_{\Delta_k(s,t)} \Gamma_k^{s,t}(s_1,\dots,s_k)\mathrm{d}s_1\dots\mathrm{d}s_k \right\|_\beta \leq \int_{\Delta_k(s,t)} \|\Gamma_k^{s,t}(s_1,\dots,s_k)\|_\beta \mathrm{d}s_1\dots\mathrm{d}s_k \leq \tag{2.4.9}$$

$$\leq \mathrm{vol}_k(\Delta_k(s,t)) \cdot \left(\sup_{0\leq s\leq T} \|V[\mathbf{p}(s)]\|_\beta \right)^k \cdot \left(\sup_{0\leq s\leq t\leq T} \|P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}]\|_\beta \right)^k \leq$$

$$\leq \left(\mathrm{const}\cdot\beta \sup_{r\in[s,t]} \|\mathbf{p}(r)\|_\beta \right)^k \cdot \frac{(t-s)^k}{k!}.$$

Откуда следует требуемое утверждение.

Проверка равенств (2.4.1) **и** (2.4.3) Заметим, что (2.4.1) вытекает из (2.4.3). Для проверки (2.4.3) зафиксируем произвольное $\pi \in B_{\beta_{in}}$, и распишем ряд (2.4.4) с точностью до второго члена:

$$\pi P_{t,t+\Delta t}[\mathbf{p}] = \pi P^{H_0}_{t,t+\Delta t}[\mathbf{p}] + \int_t^{t+\Delta t} \pi P^{H_0}_{t,s}[\mathbf{p}] V[\mathbf{p}(s)] P^{H_0}_{s,t+\Delta t}[\mathbf{p}] \mathrm{d}s + R(\Delta t) =$$
$$= \pi + \pi H[\mathbf{p}(t)]\Delta t + \left(\pi P^{H_0}_{t,t+\Delta t}[\mathbf{p}] - \pi - \pi H_0[\mathbf{p}(t)]\Delta t\right) +$$
$$+ \int_t^{t+\Delta t} \left(\pi P^{H_0}_{t,s}[\mathbf{p}] V[\mathbf{p}(s)] P^{H_0}_{s,t+\Delta t}[\mathbf{p}] - \pi V[\mathbf{p}(t)]\right) \mathrm{d}s + R(\Delta t) :=$$
$$:= \pi + \pi H[\mathbf{p}(t)]\Delta t + I_1 + I_2 + R(\Delta t).$$

Из предложения 2.10 следует, что

$$\|I_1\|_{\beta_{out}} = \bar{o}(\Delta t)$$

(равномерно по t), а из предложений 2.4, 2.8, 2.10 и формулы (2.4.3) вытекает, что

$$\|I_2\|_{\beta_{out}} = \bar{o}(\Delta t)$$

(также равномерно по t). Наконец, из (2.4.4) и (2.4.9) следует, что

$$\|R(\Delta t)\|_{\beta_{out}} \le \|R(\Delta t)\|_{\beta_{in}} = \bar{o}(\Delta t).$$

В результате имеем (равномерно по t)

$$\|\pi P^{H_0}_{t,t+\Delta t}[\mathbf{p}] - \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t) H[\mathbf{p}(t)]\Delta t\|_{\beta_{out}} = \bar{o}(\Delta t),$$

откуда следует требуемое утверждение.

Единственность решения (2.4.1) Для доказательства единственности нам потребуется следующее вспомогательное утверждение

Предложение 2.11. *Пусть*

$$\beta_{in} > \alpha,\ 1 \le \beta_{out} < \beta_{in}\alpha^{-1},$$

и $\boldsymbol{u}(z)$ *— какое-либо* $(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$*-решение* (2.4.1)*. Тогда для любого* $z \in [0,t)$ *функция*

$$\boldsymbol{v}(z) = \boldsymbol{u}(z) P^{H_0}_{z,t}[\boldsymbol{p}],\ 0 \le t \le T, \tag{2.4.10}$$

(принимающая значения в $B_{\beta_{in}}$) имеет $B_{\beta_{out}}$-производную $\dot{\boldsymbol{v}}(z)$, равную

$$\dot{\boldsymbol{v}}(z) = \boldsymbol{u}(z)V[\boldsymbol{p}(z)]P^{H_0}_{z,t}[\boldsymbol{p}]. \tag{2.4.11}$$

Доказательство. Прямой выкладкой нетрудно проверить, что при $\Delta z > 0$

$$\begin{gathered}
\mathbf{v}(z+\Delta z) - \mathbf{v}(z) = \mathbf{u}(z+\Delta z)P^{H_0}_{z+\Delta z,t}[\mathbf{p}] - \mathbf{u}(z)P^{H_0}_{z,t}[\mathbf{p}] = \\
= \mathbf{u}(z)V[\mathbf{p}(z)]P^{H_0}_{z,t}[\mathbf{p}]\Delta z + \\
+ \left[(\mathbf{u}(z+\Delta z) - \mathbf{u}(z) - \mathbf{u}(z)H[\mathbf{p}(z)]\Delta z)\right] P^{H_0}_{z+\Delta z,t}[\mathbf{p}] + \\
+ \left[\mathbf{u}(z)V[\mathbf{p}(z)]\left(P^{H_0}_{z+\Delta z,t}[\mathbf{p}] - P^{H_0}_{z,t}[\mathbf{p}]\right)\right]\Delta z + \\
+ \left[\mathbf{u}(z) - \mathbf{u}(z)P^{H_0}_{z,z+\Delta z}[\mathbf{p}] + \mathbf{u}(z)H_0[\mathbf{p}(z)]\Delta z\right] P^{H_0}_{z+\Delta z,t}[\mathbf{p}] := \\
:= \mathbf{u}(z)V[\mathbf{p}(z)]P^{H_0}_{z,t}[\mathbf{p}]\Delta z + I_1 + I_2 + I_3.
\end{gathered}$$

Используя предложения 2.8, 2.10, и (2.4.3), нетрудно получить, что

$$\|I_{1,2,3}\|_{\beta_{out}} = \bar{o}(\Delta t).$$

Аналогичные выкладки справедливы и при $\Delta z < 0$, откуда следует требуемое утверждение.

Поскольку $\dot{\mathbf{v}}(z)$ является непрерывной $B_{\beta_{out}}$-значной функцией, то из предложения 2.5 вытекает, что

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{u}(z)V[\mathbf{p}(z)]P^{H_0}_{z,t}[\mathbf{p}]\mathrm{d}z.$$

Подставив в полученное выражение (2.4.10), имеем

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0)P^{H_0}_{s,t}[\mathbf{p}] + \int_0^t \mathbf{u}(z)V[\mathbf{p}(z)]P^{H_0}_{z,t}[\mathbf{p}]\mathrm{d}z.$$

Итерируя эту формулу n, $n \in \mathbb{N}$, раз, получим

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0)P^{H_0}_{0,t}[\mathbf{p}] + \\
+ \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k(0,t)} \mathbf{u}(s)P^{H_0}_{0,s_k}[\mathbf{p}]V[\mathbf{p}(s_k)]P^{H_0}_{s_k,s_{k-1}}[\mathbf{p}]\dots V[\mathbf{p}(s_1)]P^{H_0}_{s_1,t}[\mathbf{p}]\mathrm{d}s_k\dots\mathrm{d}s_1 + R_n,
\end{gathered}$$

где

$$R_n = \int_{\Delta_{n+1}(0,t)} \mathbf{u}(s_{n+1}) V[\mathbf{p}(s_{n+1})] \dots V[\mathbf{p}(s_1)] P^{H_0}_{s_1,t}[\mathbf{p}] \mathrm{d}s_{n+1} \dots \mathrm{d}s_1.$$

Используя оценку (2.4.9), получаем

$$\|R_n\|_{\beta_{out}} \to 0.$$

Откуда имеем требуемое утверждение.

Проверка стохастичности Всюду в данном подразделе мы будем считать, что все операторы действуют на вектора слева. Во-первых, заметим, что определенные выше операторы $V[\mathbf{p}(t)]$, $t \in [0, T]$, и $P^{H_0}_{s,t}[\mathbf{p}]$ являются ограниченными в пространстве B_β, $0 < \beta < 1$. Действительно, для произвольного $n > 0$ имеем

$$\frac{\|V[\mathbf{p}(t)]e_n\|_\beta}{\|e_n\|_\beta} = \lambda_{n-1}[\mathbf{p}(t)]\beta^{-1} + \lambda_{n+1}[\mathbf{p}(t)]\beta \leq$$
$$\leq \mathrm{const} \cdot \beta^{-1} \|\mathbf{p}(t)\|_\beta \leq \mathrm{const} \cdot \beta^{-1} \sup_{r \in [0,T]} \|\mathbf{p}(r)\|_\beta.$$

(Здесь мы воспользовались оценками предложения 2.6). Из (2.4.5) следует, что для любых $i, j \in \mathbb{Z}$

$$0 \leq P^{H_0}_{s,t}[\mathbf{p}](i,j) \leq 1,$$

а потому

$$\frac{\|P^{H_0}_{s,t}[\mathbf{p}]e_n\|_\beta}{\|e_n\|_\beta} = \frac{\sum_{k \geq n} P^{H_0}_{s,t}[\mathbf{p}](k,n)\beta^k}{\beta^n} \leq \sum_{l=0}^{\infty} \beta^l = \frac{1}{1-\beta}.$$

Аналогичные оценки справедливы и для $n \leq 0$, откуда получаем

$$\|V[\mathbf{p}(t)]\|_\beta \leq \mathrm{const} \cdot \beta^{-1} \sup_{r \in [0,T]} \|\mathbf{p}(r)\|_\beta;$$
$$\|P^{H_0}_{s,t}[\mathbf{p}]\|_\beta \leq \frac{1}{1-\beta},\ 0 < \beta < 1.$$

Как следствие, определенную в формуле (2.4.4) полугруппу $P_{s,t}[\mathbf{p}]$ можно рассматривать как семейство ограниченных операторов, действующих на B_β, $0<\beta<1$, справа (проверка корректности определения ряда (2.4.4) для этого случая аналогична рассуждениям, проделанным ранее и потому опускается).

Обозначим через $\vec{\mathbf{1}} \in B_\beta$ вспомогательный вектор, все компоненты которого равны 1. С учетом доказанного, условие стохастичности можно переписать в виде

$$P_{s,t}[\mathbf{p}]\vec{\mathbf{1}} = \vec{\mathbf{1}}.$$

Определим обрезанный марковский процесс, как ограничение рассматриваемого процесса на отрезок $[-N,N]$, $N \in \mathbb{N}$. Более формально, мы рассмотрим марковский процесс на $\mathbb{Z}$ с интенсивностями перехода

$$\begin{aligned} &n \to n+1 \text{ с интенсивностью } \lambda_n[\mathbf{p}(t)], \quad -N \le n \le N-1;\\ &n \to n-1 \text{ с интенсивностью } \mu_n[\mathbf{p}(t)], \quad -N+1 \le n \le N. \end{aligned}$$

По аналогии с формулой (2.4.4) для него определены инфитиземальный оператор $H^N[\mathbf{p}(t)]$, который раскладывается в сумму двух:

$$H^N[\mathbf{p}(t)] = V^N[\mathbf{p}(t)] + H_0^N[\mathbf{p}(t)],$$

а также соответствующие полугруппы: $P^N_{s,t}[\mathbf{p}]$ и $P^{H_0^N}_{s,t}[\mathbf{p}]$. Поскольку рассматриваемый процесс является обычной неоднородной цепью Маркова с конечным фазовым пространством, $P^N_{s,t}[\mathbf{p}]$ — сильно непрерывная стохастическая полугруппа. Таким образом,

$$P^N_{s,t}[\mathbf{p}]\vec{\mathbf{1}} = \vec{\mathbf{1}}.$$

Кроме того, выполнено разложение, аналогичное формуле (2.4.4)

$$\begin{aligned} P^N_{s,t}[\mathbf{p}] = P^{H_0^N}_{s,t}[\mathbf{p}] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k(s,t)} P^{H_0^N}_{s,s_k}[\mathbf{p}] V^N[\mathbf{p}(s_k)] P^{H_0^N}_{s_k,s_{k-1}}[\mathbf{p}] \dots V^N[\mathbf{p}(s_1)] P^{H_0^N}_{s_1,t}[\mathbf{p}] \mathrm{d}s_k \dots \mathrm{d}s_1. \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число; A_k и A_k^N — k-ые члены в разложениях (2.4.4) и (2.4.12) соответственно. Учитывая формулу объема симплекса, а также ограниченность $\|V[\mathbf{p}(t)]\|_\beta$ и $\|V^N[\mathbf{p}(t)]\|_\beta$, нетрудно получить, что существует такое $K \in \mathbb{N}$, что

$$\left\|\sum_{k\geq K} A_k\vec{\mathbf{1}}\right\|_\beta \leq \varepsilon/3, \text{ и } \left\|\sum_{k\geq K} A_k^N\vec{\mathbf{1}}\right\|_\beta \leq \varepsilon/3.$$

Кроме того, можно проверить, что

$$\begin{gathered}\|P_{s,t}^{H_0}[\mathbf{p}]\vec{\mathbf{1}} - P_{s,t}^{H_0^N}[\mathbf{p}]\vec{\mathbf{1}}\|_\beta \to 0,\\ \sup_{s\in[0,T]} \|V^N[\mathbf{p}(s)]\vec{\mathbf{1}} - V[\mathbf{p}(s)]\vec{\mathbf{1}}\|_\beta \to 0\end{gathered}$$

при $N \to \infty$, откуда нетрудно вывести, что при всех достаточно больших $N \in \mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{k=0}^{K-1}(A_k^N - A_k)\vec{\mathbf{1}}\right\|_\beta \leq \varepsilon/3.$$

Таким образом,

$$\|P_{s,t}[\mathbf{p}]\vec{\mathbf{1}}-\vec{\mathbf{1}}\|_\beta \leq \left\|\sum_{k=0}^{K-1}(A_k^N - A_k)\vec{\mathbf{1}}\right\|_\beta + \left\|\sum_{k\geq K} A_k\vec{\mathbf{1}}\right\|_\beta + \left\|\sum_{k\geq K} A_k^N\vec{\mathbf{1}}\right\|_\beta \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε мы получаем требуемое утверждение.

Локальные существование и единственность решения

Предложение 2.12. *Пусть*

$$\beta_{in} > \alpha^2,\ 1 \leq \beta_{out} < \beta_{in}\alpha^{-1},$$

$p_0 \in B_{\beta_{in}}$, $\boldsymbol{p}^1(t)$, $\boldsymbol{p}^2(t)$ *— две непрерывные B_α-значные функции на отрезке* $[0, T]$, *тогда*

$$p_0P_{0,T}[\boldsymbol{p}^1] - p_0P_{0,T}[\boldsymbol{p}^2] = \int_0^T p_0P_{0,s}[\boldsymbol{p}^1]\left(H[\boldsymbol{p}^1(s)] - H[\boldsymbol{p}^2(s)]\right)P_{s,T}[\boldsymbol{p}^2]\mathrm{d}s.$$

Интеграл берется по непрерывной $B_{\beta_{out}}$-значной функции.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\mathbf{v}(s) = p_0P_{0,s}[\mathbf{p}^1]P_{s,T}[\mathbf{p}^2],\ 0 \leq s \leq T.$$

Заметим, что при всех $s \in [0,T]$ $\mathbf{v}(s) \in B_{\beta_{in}}$. Сначала проверим, что для всех $s \in (0,T)$ $\mathbf{v}(s)$ имеет $B_{\beta_{out}}$-производную, задаваемую выражением

$$\dot{\mathbf{v}}(s) = p_0 P_{0,s}[\mathbf{p}^1] \left(H[\mathbf{p}^1(s)] - H[\mathbf{p}^2(s)] \right) P_{s,t}[\mathbf{p}^2]. \qquad (2.4.13)$$

Прямой выкладкой нетрудно проверить, что при $0 \le \Delta s \le T - s$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}(s+\Delta s) - \mathbf{v}(s) = p_0 P_{0,s+\Delta s}[\mathbf{p}^1] P_{s+\Delta s,T}[\mathbf{p}^2] - p_0 P_{0,s}[\mathbf{p}^1] P_{s,T}[\mathbf{p}^2] = \\
&= p_0 P_{0,s}[\mathbf{p}^1] \left(H[\mathbf{p}^1(s)] - H[\mathbf{p}^2(s)] \right) P_{s,T}[\mathbf{p}^2] \Delta s + \\
&+ p_0 P_{0,s}[\mathbf{p}^1] \left\{ \left(P_{s,s+\Delta s}[\mathbf{p}^1] - \mathbf{Id} \right) - H[\mathbf{p}^1(s)] \Delta s \right\} P_{s+\Delta s,T}[\mathbf{p}^2] + \\
&+ p_0 P_{0,s}[\mathbf{p}^1] \left\{ \left(\mathbf{Id} - P_{s,s+\Delta s}[\mathbf{p}^2] \right) + H[\mathbf{p}^2(s)] \Delta s \right\} P_{s+\Delta s,T}[\mathbf{p}^2] + \\
&+ p_0 P_{0,s}[\mathbf{p}^1] \left(H[\mathbf{p}^1(s)] - H[\mathbf{p}^2(s)] \right) \left(P_{s+\Delta s,T}[\mathbf{p}^2] - P_{s,T}[\mathbf{p}^2] \right) \Delta s \equiv \\
&\equiv p_0 P_{0,s}[\mathbf{p}^1] \left(H[\mathbf{p}^1(s)] - H[\mathbf{p}^2(s)] \right) P_{s,T}[\mathbf{p}^2] \Delta s + I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

В силу утверждений леммы 2.1 и предложения 2.9 имеем

$$\|I_{1,2,3}\|_{\beta_{out}} = \bar{o}(\Delta s),$$

откуда вытекает (2.4.13) (аналогичные оценки справедливы и при $\Delta s < 0$). Нетрудно проверить, что $\dot{\mathbf{v}}(s)$ непрерывна в $B_{\beta_{out}}$. Таким образом, требуемое утверждение вытекает из предложения 2.5.

Предложение 2.13. *Пусть*

$$\beta_{in} > \alpha^2, \; 1 \le \beta_{out} < \beta_{in} \alpha^{-1},$$

$p_0 \in B_{\beta_{in}}$, *тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что уравнение* (2.1.8) *имеет единственное* $(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$*-решение с начальным условием* $\boldsymbol{p}(0) = p_0$ *на полуинтервале* $[0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $R, T > 0$ произвольные положительные числа. Рассмотрим полное метрическое пространство

$$B(T,R) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{C}([0,T], B_\alpha) \mid \mathbf{p}(0) = p_0, \; \sup_{r \in [0,T]} \|\mathbf{p}(r) - \mathbf{p}(0)\|_\alpha \le R \right\},$$

наделенное естественной sup-метрикой

$$d(x,y) = \sup_{t\in[0,T]} \|y(t) - x(t)\|_\alpha.$$

Покажем, что при достаточно малых T отображение

$$Z:\ \mathbf{p} \to p_0 P_{0,t}[\mathbf{p}]$$

является сжимающим в $B(T,R) \to B(T,R)$, т.е. существует такое $0 \le \gamma < 1$, что для любых $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2 \in B(T,R)$ имеет место неравенство

$$d\left(Z(\mathbf{p}^1), Z(\mathbf{p}^2)\right) \le \gamma d\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2\right).$$

Действительно, из леммы 2.1, а также предложений 2.9 и 2.12, для любых $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2 \in B(T,R)$ получаем

$$\|p_0 P_{0,t}[\mathbf{p}^1] - p_0 P_{0,t}[\mathbf{p}^2]\|_\alpha = \left\| p_0 \int_0^t P_{0,s}[\mathbf{p}^1] \left(H[\mathbf{p}^1(s)] - H[\mathbf{p}^2(s)] \right) P_{s,t}[\mathbf{p}^2] \mathrm{d}s \right\|_\alpha \le$$
$$\le \int_0^T \|p_0 P_{0,s}[\mathbf{p}^1]\|_{\beta_{in}} \cdot \|H[\mathbf{p}^1(s)] - H[\mathbf{p}^2(s)]\|_{\beta_{in}\to\alpha} \cdot \|P_{s,t}[\mathbf{p}^2]\|_\alpha \mathrm{d}s \le$$
$$\le \mathrm{const} \cdot T \cdot \|p_0\|_{\beta_{in}} \exp\left\{\mathrm{const} \cdot \beta_{in} T \left(\|p_0\|_\alpha + R\right)\right\} \cdot \alpha \sup_{0\le s\le T} \|\mathbf{p}^1(s) - \mathbf{p}^2(s)\|_\alpha =$$
$$= \mathrm{const}\left(T, R, \beta_{in}, \alpha, p_0\right) \cdot T \cdot d\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2\right).$$

И потому,

$$d\left(Z(\mathbf{p}^1), Z(\mathbf{p}^2)\right) \le \sup_{t\in[0,T]} \|p_0 P_{0,t}[\mathbf{p}^1] - p_0 P_{0,t}[\mathbf{p}^2]\|_\alpha \le$$
$$\le \mathrm{const}\left(T, R, \beta_{in}, \alpha, p_0\right) \cdot T \cdot d\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2\right).$$

Откуда следует требуемое утверждение. Таким образом, из теоремы 2.6 вытекает, что в некоторой окрестности нуля $U = [0, \varepsilon)$ существует и единственна функция $\mathbf{p} \in \mathbb{C}(U, B_\alpha)$, для которой выполнено

$$\mathbf{p}(0) = p_0;\ \mathbf{p}(t) = p_0 P_{0,t}[\mathbf{p}].$$

Однако, поскольку $p_0 \in B_{\beta_{in}}$, из утверждения леммы 2.1 вытекает, что для всех $t \in U$ $\mathbf{p}(t)$ является $(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$-решением (2.1.8).

Замечание 2.6. Отметим, что для доказательства локального существования и единственности решения мы требуем только, чтобы $\beta_{in} > \alpha^2$, в то время как в условии теоремы фигурирует $\beta_{in} > \alpha^3$. Последнее требуется для доказательства глобального существования решения.

Глобальное существование решения

Для доказательства существования решения на всей числовой оси достаточно проверить, что $\|\mathbf{p}(t)\|_{\beta_{in}}$, $\beta_{in} > \alpha^3$, не "убегает на бесконечность", однако прежде чем доказать соответствующее утверждение, нам понадобится убедиться в справедливости нескольких вспомогательных предложений.

Предложение 2.14. *В условиях теоремы* 2.1 $\|\boldsymbol{p}(t)\|_{\alpha^2}$ *является дифференцируемой функцией. Соответствующий ряд*

$$\|\boldsymbol{p}(t)\|_{\alpha^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{2|n|}\boldsymbol{p}_n(t) \tag{2.4.14}$$

сходится, и его можно почленно дифференцировать.

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[a, b]$, попадающий в область определения $\mathbf{p}(t)$. Очевидно, что ряд (2.4.14) сходится на $[a, b]$. Кроме того, учитывая уравнения (2.1.8), оценки предложения 2.6 и то, что

$$\mathbf{p}_n(t) \le \|\mathbf{p}(t)\|_{\beta_{in}}\beta_{in}^{-|n|},$$

имеем для всех $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_n(t)\right| &= |\lambda_{n-1}\mathbf{p}_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)\mathbf{p}_n + \mu_{n+1}\mathbf{p}_{n+1}| \le \\ &\le \mathrm{const}\cdot\alpha^{|n|+1}\cdot\beta_{in}^{-|n|+1}\cdot\|\mathbf{p}(t)\|_{\alpha}\cdot\|\mathbf{p}(t)\|_{\beta_{in}} \le \\ &\le \mathrm{const}\cdot\alpha\beta_{in}\left(\sup_{s\in[0,t]}\|\mathbf{p}(s)\|_{\beta_{in}}\right)^2\left(\frac{\alpha}{\beta_{in}}\right)^{|n|}.\end{aligned}$$

Откуда, в силу того, что $\beta_{in} > \alpha^3$, ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{2|n|}\dot{\mathbf{p}}_n(t)$$

также равномерно сходится на $[a,b]$, откуда, учитывая соответствующую теорему математического анализа, следует требуемое утверждение.

Предложение 2.15. *Пусть $p \in B_\alpha$, тогда*

$$\begin{aligned} &\textit{при } n > 0: \quad \lambda_n[p] \le \mathrm{const}\left(1 + \alpha^{-|n|}\|p\|_\alpha\right); \\ &\textit{при } n \le 0: \quad \mu_n[p] \le \mathrm{const}\left(1 + \alpha^{-|n|}\|p\|_\alpha\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Для $n > 0$ и $p \in B_\alpha$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda_n[p] &\le \mathrm{const}\cdot\sum_{k=-\infty}^{n}|p_k| + \mathrm{const}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}|p_k|\alpha^{k-n} \le \\ &\le \mathrm{const}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}|p_k| + \mathrm{const}\cdot\alpha^{-n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|p_k|\alpha^{|k|} = \\ &= \mathrm{const}\left(1 + \alpha^{-n}\|p\|_\alpha\right). \end{aligned}$$

(Аналогичные оценки справедливы и для $\mu_n[p]$).

Предложение 2.16. *Пусть $p \in B_{\alpha^2}$, тогда*

$$\|p\|_\alpha^2 \le \|p\|_{\alpha^2}\|p\|_1. \tag{2.4.15}$$

Доказательство. Подставив

$$a_n = \sqrt{|p_n|}\alpha^{|n|},\ b_n = \sqrt{|p_n|}$$

в числовое неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sum_n a_n b_n\right)^2 \le \sum_n a_n^2 \sum_n b_n^2,$$

получим требуемое утверждение.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основное утверждение.

Предложение 2.17. *В условиях теоремы* 2.1 *выполнено неравенство*

$$\|\boldsymbol{p}(t)\|_{\alpha^2} \leq \|p_0\|_{\alpha^2} \cdot \exp\left(\mathrm{const} \cdot \|p_0\|_1 \cdot \alpha^2 t\right). \tag{2.4.16}$$

Доказательство. Имеем,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{p}(t)\|_{\alpha^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{2|n|}\dot{\mathbf{p}}_n(t) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{2|n|}\left[\lambda_{n-1}\mathbf{p}_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)\,\mathbf{p}_n(t) + \mu_{n+1}\mathbf{p}_{n+1}(t)\right] :=$$
$$:= \sum_{n>0} + \sum_{n\leq 0}.$$

Первое слагаемое можно оценить следующим образом

$$\sum_{n>0} = \alpha^2\lambda_0\mathbf{p}_0(t) - \mu_1\mathbf{p}_1(t) + (\alpha^2-1)\sum_{n>0}\alpha^{2n}\lambda_n\mathbf{p}_n(t) +$$
$$+ \underbrace{(\alpha^{-2}-1)}_{<0,\ \text{т.к. } \alpha>1}\sum_{n>0}\alpha^{2n}\mu_n\mathbf{p}_n(t) \leq$$
$$\leq \mathrm{const}\cdot\alpha^2\|\mathbf{p}(t)\|_{\alpha^2} + \mathrm{const}\cdot(\alpha^2-1)\sum_{n>0}\alpha^{2n}\left(1+\alpha^{-n}\|\mathbf{p}(t)\|_{\alpha}\right)\mathbf{p}_n(t) \leq$$
$$\leq \mathrm{const}\cdot\alpha^2\|\mathbf{p}(t)\|_{\alpha^2} + \mathrm{const}\cdot(\alpha^2-1)\|\mathbf{p}(t)\|_{\alpha}^2 \leq$$
$$\leq \mathrm{const}\cdot\alpha^2\|\mathbf{p}(t)\|_{\alpha^2}\cdot\|\mathbf{p}(t)\|_1.$$

(Ряды в первой строчке последней формулы сходятся, поскольку $\beta_{in} > \alpha^3$). Аналогичные неравенства можно написать и для $\sum_{n\leq 0}$. В результате имеем следующую оценку

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{p}(t)\|_{\alpha^2} \leq \mathrm{const}\cdot\alpha^2\|\mathbf{p}(t)\|_{\alpha^2}\cdot\|p_0\|_1.$$

Таким образом, требуемое утверждение вытекает из теоремы 2.7.

Из доказанного предложения, а также леммы 2.1 следует, что для любого $\beta \geq 1$ и $t \geq 0$

$$\|\mathbf{p}(t)\|_{\beta} \leq \|p_0\|_{\beta}\cdot\exp\left\{\mathrm{const}\cdot\beta t\|p_0\|_{\alpha^2}\exp\left\{\mathrm{const}\cdot\alpha^2\|p_0\|_1 t\right\}\right\},$$

откуда вытекает существование решения на всей числовой полупрямой.

Построение соответствующего нелинейного марковского процесса

Для того, чтобы построить случайный процесс $x(t, p_0)$, достаточно указать его конечномерные распределения. Однако по сути это уже было сделано при построении полугруппы $P_{s,t}[\mathbf{p}]$. А именно, для любых $0 \le t_1 \le \ldots \le t_k$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, положим равным по определению

$$\mathsf{P}\left(x(t_1) = n_1, \ldots, x(t_k) = n_k\right) = p_{n_1}(t_1)\left(P_{t_1,t_2}[\mathbf{p}]\right)_{n_1,n_2} \ldots \left(P_{t_{k-1},t_k}[\mathbf{p}]\right)_{n_{k-1},n_k},$$

где $\mathbf{p}$ — соответствующее $(B_{\beta_{in}}, B_{\beta_{out}})$-решение задачи (2.1.8) с начальным условием $\mathbf{p}(0) = p_0$.

2.5 Доказательство теоремы 2.2 и предложения 2.2

Сперва проверим, что $\pi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, задаваемые выражениями (2.2.2), действительно являются неподвижными точками системы. Заметим, что

$$\pi_n \pi_{k+n} e^k = \frac{1}{\Xi^2(s)} e^{-n^2-(k+n)^2+k} = \frac{1}{\Xi^2(s)} e^{-2n^2-k^2-2kn+k} =$$
$$= \frac{1}{\Xi^2(s)} e^{-(n+1)^2-(k+n-1)^2-k+2} = \pi_{n+1}\pi_{k+n-1}e^{-k+2}.$$

Просуммировав по k, мы получим уравнения детального баланса

$$\pi_n \lambda_n[\pi] = \pi_n \sum_k \pi_{k+n} e^k = \pi_{n+1} \sum_k \pi_{k+n-1} e^{-k+2} =$$
$$= \pi_{n+1} \sum_k \pi_{k+n+1} e^{-k} = \pi_{n+1}\mu_{n+1}[\pi],$$

из которых следует инвариантность $\pi(s)$. Отсутствие других инвариантных мер будет следовать из дальнейших рассуждений.

Для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем,

$$\lambda_n[\mathbf{p}(t)] = e^{-n}A[\mathbf{p}(t)], \text{ где } A[p] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k e^k;$$
$$\mu_n[\mathbf{p}(t)] = e^{n}B[\mathbf{p}(t)], \text{ где } B[p] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k e^{-k}.$$

Откуда, введя следующие обозначения

$$\pi^*[p] = \{\pi_k^*[p]\}_{k\in\mathbb{Z}}\,, \text{ где } \pi_k^*[p] = \left(\frac{A[p]}{B[p]}\right)^k e^{-k^2},\ p \in B_\beta\ (\beta > e^3),$$

нетрудно проверить, что $\pi^*[\mathbf{p}(t)]$ является инвариантной (хотя и не вероятностной) обратимой мерой для однородной марковской цепи с интенсивностями перехода

$$\lambda_n = \lambda_n[p], \quad \mu_n = \mu_n[p].$$

Представим $\mathsf{D}(\mathbf{p}(t)||\pi(s))$ в виде

$$\mathsf{D}(\mathbf{p}(t)||\pi(s)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t)\ln\frac{\mathbf{p}_k(t)}{\pi_k(s)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t)\ln\frac{\mathbf{p}_k(t)}{\pi_k^*[\mathbf{p}(t)]} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t)\ln\frac{\pi_k^*[\mathbf{p}(t)]}{\pi_k(s)} :=$$
$$:= I_1(t) + I_2(t).$$

Получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1(t) = \frac{\partial I_1(t)}{\partial \mathbf{p}(t)}\dot{\mathbf{p}}(t) + \frac{\partial I_1(t)}{\partial \pi}\dot{\pi} =$$
$$= \sum_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_k}\left(\mathbf{p}_k(t)\ln\frac{\mathbf{p}_k(t)}{\pi_k^*[\mathbf{p}(t)]}\right)\dot{\mathbf{p}}_k(t) + \sum_k \frac{\partial}{\partial \pi_k^*}\left(\mathbf{p}_k(t)\ln\frac{\mathbf{p}_k(t)}{\pi_k^*[\mathbf{p}(t)]}\right)\dot{\pi}_k^*(t)$$

(возможность почленного дифференцирования соответствующих рядов проверяется аналогично выкладкам, проведенным в предложении 2.14, и потому мы это опускаем). Первое слагаемое в правой части выражения представляет производную относительной энтропии при фиксированной инвариантной мере $\pi^*[\mathbf{p}(t)]$, а потому оно не больше 0 (см. [32, стр. 115] или [64, стр. 538]).

Таким образом,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_1(t) \leq -\sum_k \mathbf{p}_k(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\ln \pi_k^*[\mathbf{p}(t)] \right) =$$
$$= -\sum_k k\mathbf{p}_k(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\ln \frac{A[\mathbf{p}(t)]}{B[\mathbf{p}(t)]} \right) = -E \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\ln \frac{A[\mathbf{p}(t)]}{B[\mathbf{p}(t)]} \right).$$

Далее,

$$I_2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t) \ln \left(\Xi(s) \left(\frac{A[\mathbf{p}(t)]}{B[\mathbf{p}(t)]} \right)^k e^{-k^2 + (k-s)^2} \right) =$$
$$= \ln \Xi(s) + E \ln \frac{A[\mathbf{p}(t)]}{B[\mathbf{p}(t)]} - 2sE + s^2.$$

Откуда получаем,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_2(t) = E \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\ln \frac{A[\mathbf{p}(t)]}{B[\mathbf{p}(t)]} \right).$$

Складывая полученные неравенства, имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathsf{D}(\mathbf{p}(t) || \pi(s)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_1(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_2(t) \leq 0.$$

Анализируя доказательство, мы видим, что равенство в (2.2.3) возможно только тогда, когда

$$\frac{\partial I_1(t)}{\partial \mathbf{p}(t)} \dot{\mathbf{p}}(t) = 0,$$

т.е. при $\mathbf{p}(t) \in \{\pi(s)\}$, $s \in \mathbb{R}$. Откуда в свою очередь следует, что помимо $\{\pi(s)\}$, $s \in \mathbb{R}$ инвариантных мер больше нет.

Доказательство предложения 2.2

Прямая выкладка показывает, что обобщенное расстояние Кульбака-Лейблера $\mathsf{D}(p||q)$ совпадает с метрикой Брегмана $\mathsf{D}_\psi(p||q)$ при $\psi(z) = \sum_i z_i \ln z_i$. Таким образом, как следует из уравнения ([2], 57) , естественные и двойственные координаты z и z^* связаны между собой посредством соотношения

$$z_i^* = \frac{\partial \psi(z)}{\partial z_i} = 1 + \ln z_i. \tag{2.5.1}$$

Зафиксируем произвольное $s \in \mathbb{R}$ и рассмотрим точку $x \in \Pi(s)$. Как следует из уравнения ([2], 69), нормаль к $\Pi(s)$, проведенная в точке x имеет z^*-координаты: $z_k^* = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, соответствующая ψ^*-геодезическая, перпендикулярная к $\Pi(s)$ и проходящая через x, задается уравнением $z_k^*(t) = x_k^* + kt$, или, учитывая (2.5.1), в z-координатах

$$z_k(t) = x_k e^{kt}.$$

Положив $x = \widetilde{\pi}(0)$, получим требуемое утверждение.

2.6 Доказательство теоремы 2.3

Инвариантность семейства распределений $\{\pi(s),\ s \in \mathbb{R}\}$, задаваемых (2.2.6), проверяется простой выкладкой, и мы ее опускаем. Аналогично рассуждениям проведенным в предложении 2.14, ряд задаваемый $\mathsf{D}[\mathbf{p}(t)]$, можно дифференцировать почленно, и потому

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{D}[\mathbf{p}(t)] = \sum_k k^2 \left(\lambda_{k-1}\mathbf{p}_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)\mathbf{p}_k(t) + \mu_{k+1}\mathbf{p}_{k+1}(t)\right) = \\
&= \sum_k k^2 \sum_{i>0} F(i) \left(\mathbf{p}_{k-1+i}(t)\mathbf{p}_{k-1}(t) - \mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k+i}(t)\right) + \\
&+ \sum_k k^2 \sum_{i>0} F(i) \left(-\mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k-i}(t) + \mathbf{p}_{k+1}(t)\mathbf{p}_{k+1-i}(t)\right) = \\
&= \sum_{i>0} F(i) \sum_k \big((k+1)^2\mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k+i}(t) - k^2\mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k+i}(t)\big) + \\
&+ \sum_{i>0} F(i) \sum_k \big(-k^2\mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k-i}(t) + (k-1)^2\mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k-i}(t)\big) = \\
&= \sum_{i>0} F(i) \sum_k \left((2k+1)\mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k+i}(t) + (-2k+1)\mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k-i}(t)\right) = \\
&= \sum_{i>0} F(i) \sum_k \left((2k+1)\mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k+i}(t) + (-2k-2i+1)\mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k+i}(t)\right) = \\
&= -2\sum_{i>0}(i-1)F(i) \sum_k \mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_{k+i}(t) = \\
&= -2 \sum_{(i,j):\ i<j} (j-i-1)F(j-i)\mathbf{p}_i(t)\mathbf{p}_j(t) \le 0.
\end{aligned}$$

Равенство нулю возможно только при $\mathbf{p}(t) = \pi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, откуда следует единственность однопараметрического семейства инвариантных мер $\{\pi(s),\ s \in \mathbb{R}\}$.

2.7 Доказательство предложения 2.3 и теоремы 2.4

Доказательство предложения 2.3 Имеем

$$\frac{\mathrm{d}S[\mathbf{p}(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k-\text{нечет.}} \mathbf{p}_k(t) =$$

$$= \sum_{k-\text{нечет.}} \left(\lambda_{k-1}\mathbf{p}_{k-1}(t) - \lambda_k \mathbf{p}_k(t) - \mu_k \mathbf{p}_k(t) + \mu_{k+1}\mathbf{p}_{k+1}(t)\right) =$$

$$= \sum_{k-\text{чет.}} \left(\lambda_k + \mu_k\right) \mathbf{p}_k(t) - \sum_{k-\text{нечет.}} \left(\lambda_k + \mu_k\right) \mathbf{p}_k(t) =$$

$$= \sum_{\substack{k-\text{чет.}\\ l-\text{нечет.}}} \mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_l(t)\mathrm{ch}(l-k) - \sum_{\substack{k-\text{нечет.}\\ l-\text{чет.}}} \mathbf{p}_k(t)\mathbf{p}_l(t)\mathrm{ch}(k-l) = 0.$$

Откуда следует требуемое утверждение (возможность почленного дифференцирования соответствующих рядов здесь и далее проверяется аналогично выкладкам, проведенным в предложении 2.14, и потому мы это опускаем).

Доказательство теоремы 2.4 Во-первых, заметим, что для любых $n \in \mathbb{Z}$ и $p \in B_\beta$, $\beta \geq 1$,

$$\lambda_{2n}[p] = \sum_{k-\text{нечет.}} p_k e^{k-2n} = A[p]e^{-2n},\ \text{где } A[p] = \sum_{k-\text{нечет.}} p_k e^k; \tag{2.7.1}$$

$$\lambda_{2n+1}[p] = \sum_{k-\text{чет.}} p_k e^{k-(2n+1)} = B[p]e^{-(2n+1)},\ \text{где } B[p] = \sum_{k-\text{чет.}} p_k e^k; \tag{2.7.2}$$

$$\mu_{2n}[p] = \sum_{k-\text{нечет.}} p_k e^{-k+2n} = C[p]e^{2n},\ \text{где } C[p] = \sum_{k-\text{нечет.}} p_k e^{-k}; \tag{2.7.3}$$

$$\mu_{2n+1}[p] = \sum_{k-\text{чет.}} p_k e^{-k+(2n+1)} = D[p]e^{2n+1},\ \text{где } D[p] = \sum_{k-\text{чет.}} p_k e^k, \tag{2.7.4}$$

а потому

$$\lambda_n[p] = e^{-n} \cdot \left(A[p] \cdot I\{n - \text{чет.}\} + B[p] \cdot I\{n - \text{нечет.}\}\right); \tag{2.7.5}$$

$$\mu_n[p] = e^{n} \cdot \left(C[p] \cdot I\{n - \text{чет.}\} + D[p] \cdot I\{n - \text{нечет.}\}\right). \tag{2.7.6}$$

Рассмотрим вспомогательную однородную цепь Маркова на $\mathbb{Z}$ с интенсивностями перехода

$$
\begin{aligned}
n \to n+1: &\ \lambda_n[p];\\
n \to n-1: &\ \mu_n[p].
\end{aligned}
$$

Указанная цепь является эргодической, и ее инвариантная мера $\nu^*[p]$ удовлетворяет уравнениям детального баланса

$$
\lambda_n[p]\nu_n^*[p] = \mu_{n+1}[p]\nu_{n+1}^*[p]. \tag{2.7.7}
$$

Имеется три возможности. Либо $p \in \Pi_1$, и тогда любая $\nu^*[p] \in \Pi_1$ является инвариантной, либо $p \in \Pi_2$, и тогда любая $\nu^*[p] \in \Pi_2$ является инвариантной, либо $p \notin \Pi_1 \cup \Pi_2$. В третьем случае из уравнений (2.7.1) – (2.7.4) следует, что

$$
A[p], B[p], C[p], D[p] \neq 0,
$$

а потому

$$
\begin{gathered}
\nu_{n+1}^*[p] = \nu_n^*[p] \cdot \frac{\lambda_n[\pi]}{\mu_{n+1}[\pi]} = \\
= \nu_n^*[p] \cdot e^{-2n-1} \cdot \left(\frac{A[p]}{D[p]} \cdot I\{n - \text{чет.}\} + \frac{B[p]}{C[p]} \cdot I\{n - \text{нечет.}\} \right).
\end{gathered}
$$

Откуда прямой выкладкой получаем, что

$$
\nu_n^*[p] = \nu_0^*[p] \cdot \pi_n^*[p],
$$

где

$$
\pi_n^*[p] = e^{-n^2} \left(\frac{A[p]C[p]}{B[p]D[p]} \right)^{n/2} \cdot \left(I\{n - \text{чет.}\} + \left(\frac{A[p]B[p]}{C[p]D[p]} \right)^{1/2} \cdot I\{n - \text{нечет.}\} \right)
$$

является ненормированной инвариантной мерой рассматриваемой марковской цепи.

Зафиксируем произвольную $\pi(s,u) \in \Pi_3$, и предположим, что $\mathbf{p}(t) \notin \Pi_1 \cup \Pi_2$. По аналогии с доказательством теоремы 2.2 имеем

$$\mathsf{D}(\mathbf{p}(t)||\pi(s,u)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t)\ln\frac{\mathbf{p}_k(t)}{\pi_k(s,u)} =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t)\ln\frac{\mathbf{p}_k(t)}{\pi_k^*[\mathbf{p}(t)]} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t)\ln\frac{\pi_k^*[\mathbf{p}(t)]}{\pi_k(s,u)} := I_1[\mathbf{p}(t)] + I_2[\mathbf{p}(t)].$$

Прямой выкладкой нетрудно проверить, что

$$\ln\frac{\pi_k^*[\mathbf{p}(t)]}{\pi_k(s,u)} = \frac{k}{2}\ln\frac{A[\mathbf{p}(t)]C[\mathbf{p}(t)]}{B[\mathbf{p}(t)]D[\mathbf{p}(t)]} + \frac{1}{2}I\{k - \text{нечет.}\}\ln\frac{A[\mathbf{p}(t)]B[\mathbf{p}(t)]}{C[\mathbf{p}(t)]D[\mathbf{p}(t)]} -$$
$$-2ks + s^2 + \ln\Xi(u,s) - \ln u\cdot I\{k - \text{нечет.}\},$$

поэтому

$$I_2[\mathbf{p}(t)] = \frac{E}{2}\ln\frac{A[\mathbf{p}(t)]C[\mathbf{p}(t)]}{B[\mathbf{p}(t)]D[\mathbf{p}(t)]} + \frac{S}{2}\ln\frac{A[\mathbf{p}(t)]B[\mathbf{p}(t)]}{C[\mathbf{p}(t)]D[\mathbf{p}(t)]} -$$
$$-2sE + s^2 + \ln\Xi(u,s) - \ln u\cdot S,$$

и как следствие,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_2[\mathbf{p}(t)] = \frac{E}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{A[\mathbf{p}(t)]C[\mathbf{p}(t)]}{B[\mathbf{p}(t)]D[\mathbf{p}(t)]} + \frac{S}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{A[\mathbf{p}(t)]B[\mathbf{p}(t)]}{C[\mathbf{p}(t)]D[\mathbf{p}(t)]}.$$

Далее,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1[\mathbf{p}(t)] = \frac{\partial I_1[\mathbf{p}(t)]}{\partial \mathbf{p}(t)}\dot{\mathbf{p}}(t) + \frac{\partial I_1[\mathbf{p}(t)]}{\partial \pi}\dot{\pi}.$$

Первое слагаемое, как и в теореме 2.2, не превосходит нуля, а для второго имеем

$$\frac{\partial I_1[\mathbf{p}(t)]}{\partial \pi}\dot{\pi} = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_k(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\pi_k^*[\mathbf{p}(t)] =$$
$$= -\frac{E}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{A[\mathbf{p}(t)]C[\mathbf{p}(t)]}{B[\mathbf{p}(t)]D[\mathbf{p}(t)]} - \frac{S}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{A[\mathbf{p}(t)]B[\mathbf{p}(t)]}{C[\mathbf{p}(t)]D[\mathbf{p}(t)]}.$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{D}(\mathbf{p}(t)||\pi(s,u)) \le 0.$$

Равенство нулю в последнем выражении возможно только при $\mathbf{p}(t) \in \Pi_3$. Теорема доказана.

Глава 3

Класс нелинейных марковских процессов, допускающих явное описание: сходимость к инвариантной мере

Данная глава посвящена изучению сходимости к инвариантному распределению для ранее описанной модели нелинейного случайного блуждания. Глава состоит из трех параграфов. В первом из них формулируется основное утверждение о сходимости к неподвижной точке, а также утверждения об аппроксимации соответствующими N-частичными моделями на конечном и бесконечном интервалах времени. Основными результатами здесь являются теоремы 3.1,3.4 и 3.6. Наконец, во втором и третьем параграфах приведены доказательства соответствующих утверждений.

3.1 N-частичная аппроксимация и сходимость процесса

Из рассмотренных в предыдущей главе примеров 1 и 2 следует, что типичной для $x(t)$ ситуацией является наличие однопараметрического семейства инвариантных мер (на каждой гиперплоскости, задаваемой интегралом движения по одной), причем при $t \to \infty$ $\mathbf{p}(t)$ должно сходиться к одной из них в зависимости от начального распределения. Данная глава главным образом посвящена проверке этого наблюдения в случае произвольной функции $F(\cdot)$.

При этом всюду далее мы будем предполагать выполненными следующие условия:

1. $p_0 \in B_\beta$, где $\beta > 1$ — произвольное число.

2. $F(\cdot)$ — выпуклая возрастающая функция.

3. Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место следующее неравенство

$$F(n) \leq \mathrm{const} \cdot (1 + |n|).$$

Основная цель главы — доказать следующую теорему (см. [81])

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* 1-3, *тогда* $\boldsymbol{p}(t)$, *двигаясь по гиперплоскости* $\Pi(\mathsf{E}[p_0])$, *при* $t \to \infty$ *слабо сходится к единственной неподвижной точке* $\pi(\mathsf{E}[p_0]) \in \Pi(\mathsf{E}[p_0]) \cap \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Метод, который мы используем для доказательства теоремы 3.1, основан на работе [59]. В частности из приводимых ниже выкладок будет следовать сходимость соответствующего аппроксимирующего N-частичного процесса $\mathbf{x}^N(t)$ к предельному нелинейному марковскому процессу $x(t)$ (см. введение к предыдущей главе).

Для того, чтобы сформулировать соответствующие утверждения, нам потребуется ввести несколько вспомогательных определений.

Определение 3.1. (см. [61]) Пусть (S, d) — метрическое пространство с метрикой d; μ, ν — две вероятностные меры на $(S, \mathcal{B}(S))$. Обозначим через $\mathcal{M}(\mu, \nu)$ — множество мер m на $S \times S$, т.ч.

$$m(A \times S) = \mu(A), \quad m(S \times A) = \nu(A)$$

для всех борелевских множеств $A \in \mathcal{B}(S)$. Тогда для любого $p \geq 1$

$$d_p(\mu, \nu) = \left(\inf_{m \in \mathcal{M}(\mu,\nu)} \int_{(x,y) \in S \times S} d^p(x, y) m(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \right)^{1/p}$$

называется L_p-расстоянием Канторовича-Рубинштейна.

Теорема 3.2. *(см. [74, стр. 315]) Пусть* (S, d) *— сепарабельное метрическое пространство с метрикой* d. *Тогда* $d_1(\cdot, \cdot)$ *является метрикой на про-*

странстве $\mathcal{P}(S)$, *причем сходимость по этой метрике равносильна слабой сходимости вероятностных мер.*

Пусть $\gamma_+, \gamma_-(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — две произвольные неотрицательные функции. Рассмотрим марковскую цепь с непрерывным временем и фазовым пространством $\mathbb{Z}^N$

$$\mathbf{x}^N(t) = (x^{1,N}(t), x^{2,N}(t), \dots, x^{N,N}(t))$$

с переходами, задаваемыми следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^N(t) \to & \mathbf{x}^N(t) + e_n \text{ с интенсивностью } \widetilde{\lambda}^{n,N}(t) = \lambda^{n,N}(t) + \gamma_+(\bar{x}^N(t) - \mathsf{E}[p_0]) \\ \mathbf{x}^N(t) \to & \mathbf{x}^N(t) - e_n \text{ с интенсивностью } \widetilde{\mu}^{n,N}(t) = \mu^{n,N}(t) + \gamma_-(\bar{x}^N(t) - \mathsf{E}[p_0]), \end{aligned}$$

где через $\bar{x}^N(t)$ обозначено среднее $\mathbf{x}^N(t)$

$$\bar{x}^N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x^{n,N}(t),$$

а $\lambda^{n,N}(t)$ и $\mu^{n,N}(t)$ задаются соотношениями (2.1.4) и (2.1.5). Заметим, что при $\gamma_+ = \gamma_- \equiv 0$ указанная марковская цепь в точности совпадает с аппроксимирующей N-частичной марковской цепью, задаваемой соотношениями (2.1.1)-(2.1.3). Обозначим через

$$\mathbf{p}^N(t) = \left\{\mathsf{P}\left(x^{1,N}(t) = n_1, x^{2,N}(t) = n_2, \dots, x^{N,N}(t) = n_N\right),\ n_k \in \mathbb{Z},\ k = 1, \dots, N\right\}$$

распределение $\mathbf{x}^N(t)$ в момент времени $t \geq 0$. Мы доказываем следующие утверждения

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* 1-3; $x^{1,N}(0), x^{2,N}(0), \dots, x^{N,N}(0)$ — *независимые* p_0*-распределенные величины, и*

$$\gamma_+(x) = \gamma_-(x) \equiv 0, \tag{3.1.1}$$

тогда для любого $t \geq 0$ *существует такое* $\beta(t) > 1$, *что*

$$\boldsymbol{p}^N(t) \in B_{\beta(t)} \times B_{\beta(t)} \times \dots \times B_{\beta(t)}. \tag{3.1.2}$$

Теорема 3.4. *Пусть $T > 0$ — произвольное положительное число, тогда в условиях предыдущей теоремы для любого $0 < \gamma < 1$ имеет место неравенство*

$$\sup_{0 \le t \le T} d_2(\mathrm{Law}(x(t)), \mathrm{Law}(x^{1,N}(t))) \le \mathrm{const}(p_0, T) \cdot N^{-\gamma/2}.$$

При доказательстве теоремы 3.1 мы существенно опираемся на следующие результаты, имеющие самостоятельное значение.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия* 1-3*;* $x^{1,N}(0), x^{2,N}(0), \ldots, x^{N,N}(0)$ *— независимые p_0-распределенные величины, и*

$$\gamma_+(x) = -xI_{\{x \le 0\}},\ \gamma_-(x) = xI_{\{x \ge 0\}}, \tag{3.1.3}$$

тогда для любого $t \ge 0$ существует такое $\beta(t) > 1$, что

$$\boldsymbol{p}^N(t) \in B_{\beta(t)} \times B_{\beta(t)} \times \ldots \times B_{\beta(t)}. \tag{3.1.4}$$

Теорема 3.6. *В условиях предыдущей теоремы для любого $0 < \gamma < 1$ имеет место неравенство*

$$\sup_{t \ge 0} d_2(\mathrm{Law}(x(t)), \mathrm{Law}(x^{1,N}(t))) \le \mathrm{const}(p_0) \cdot N^{-\gamma/2}.$$

3.2 Доказательство теорем 3.3 и 3.5

Вспомогательные утверждения В данном небольшом разделе мы доказываем некоторые вспомогательные предложения, необходимые при доказательстве теорем 3.3 и 3.5.

Предложение 3.1. *Пусть η_t — пуассоновский процесс с интенсивностью $\nu > 0$, тогда для любых $t \ge 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$\mathsf{P}\left(\eta_t \ge n\right) \le \frac{\nu^n t^n}{n!}.$$

Доказательство. Поскольку η_t имеет распределение Пуассона с параметром νt, имеем

$$\mathsf{P}(\eta_t \geq n) \leq e^{-\nu t} \sum_{k \geq n} \frac{\nu^k t^k}{k!} \leq e^{-\nu t} \frac{\nu^n t^n}{n!} \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k t^k n!}{(k+n)!} \leq$$
$$\leq e^{-\nu t} \frac{\nu^n t^n}{n!} \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k t^k}{k!} = \frac{\nu^n t^n}{n!}.$$

Предложение 3.2. *Пусть ξ_t — случайное блуждание на $\mathbb{Z}_+$ с непрерывным временем и интенсивностями скачков*

$$\nu_n : \; n \to n+1.$$

Предположим, что для всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\nu_n \leq \nu, \;\; \nu > 0,$$

тогда для любых $t \geq 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathsf{P}(\xi_t - \xi_0 \geq n) \leq \frac{\nu^n t^n}{n!}.$$

Доказательство. Между ξ_t и η_t можно построить естественный каплинг, а именно, рассмотрим случайное блуждание $(\widetilde{\xi}_t, \widetilde{\eta}_t)$ на $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ с интенсивностями скачков

$$(x, y) \to (x+1, y+1) \text{ с интенсивностью } \nu_n;$$
$$(x, y) \to (x, y+1) \text{ с интенсивностью } \nu - \nu_n.$$

Предположим дополнительно, что $\widetilde{\xi}_0 = \widetilde{\eta}_0$ п.н. Нетрудно проверить, что $\widetilde{\xi}_t$ и ξ_t, а также η_t и $\widetilde{\eta}_t$ распределены одинаково, причем $\widetilde{\eta}_t \geq \widetilde{\xi}_t$ п.н. Таким образом, из предложения 3.1 следует, что

$$\mathsf{P}(\xi_t - \xi_0 \geq n) = \mathsf{P}\left(\widetilde{\xi}_t - \widetilde{\xi}_0 \geq n\right) \leq$$
$$\leq \mathsf{P}(\widetilde{\eta}_t - \widetilde{\eta}_0 \geq n) = \mathsf{P}(\eta_t - \eta_0 \geq n) \leq \frac{\nu^n t^n}{n!}.$$

Предложение 3.3. *Пусть ξ_t — случайное блуждание на $\mathbb{Z}_+$ с непрерывным* *временем и интенсивностями скачков*

$$\nu_n: \; n \to n+1.$$

Предположим, что для всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\nu_n \le \nu(n+1), \; \nu > 0,$$

тогда для любых $t \ge 0$ *и* $n \in \mathbb{Z}_+$ *выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\tau_{2n} - \tau_n \le t\right) \le \mathrm{const} \cdot (6\nu t)^n,$$

где через τ_n *обозначен момент достижения точки* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\tau_n = \inf\left\{t \ge 0: \; \xi_t \ge n\right\}.$$

Доказательство. Заметим, что для всех $k \in \{n, n+1, \ldots, 2n\}$ $\nu_k \le 2\nu(n+1)$. Таким образом, из предложения 3.2 следует, что

$$\mathsf{P}\left(\tau_{2n} - \tau_n \le t\right) = \mathsf{P}\left(\xi_t - \xi_0 \ge n | \xi_0 = n\right) \le \frac{(2\nu t(n+1))^n}{n!}.$$

Используя формулу Стирлинга, имеем

$$\mathsf{P}\left(\tau_{2n} - \tau_n \le t\right) \le \mathrm{const} \cdot \frac{(2\nu e n t)^n}{\sqrt{n} \cdot n^n} \le \mathrm{const} \cdot (6\nu t)^n.$$

Предложение 3.4. *В условиях предложения* 3.3 *для любых* $t \ge 0$, $M \in \mathbb{Z}_+$ *и* $n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\frac{6\nu t}{M} < 1, \; n > 2^M,$$

выполнено неравенство

$$\mathsf{P}\left(\xi_t \ge n | \xi_0 \le [2^{-M} n]\right) \le \mathrm{const} \cdot M \cdot \left(\frac{6\nu t}{M}\right)^{2^{-M} n}.$$

Доказательство. Утверждение предложения следует из следующей выкладки

$$\mathsf{P}\left(\xi_t \geq n|\xi_0 \leq [2^{-M}n]\right) \leq \mathsf{P}\left(\tau_n - \tau_{[2^{-M}n]} \leq t\right) \leq$$
$$\leq \mathsf{P}\left(\bigcup_{m=1}^{M}\left\{\tau_{[2^{-m+1}n]} - \tau_{[2^{-m}n]} \leq \frac{t}{M}\right\}\right) \leq \sum_{m=1}^{M}\mathsf{P}\left(\tau_{[2^{-m+1}n]} - \tau_{[2^{-m}n]} \leq \frac{t}{M}\right) \leq$$
$$\leq \mathrm{const}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{6\nu t}{M}\right)^{2^{-m}n} \leq \mathrm{const}\cdot M\cdot\left(\frac{6\nu t}{M}\right)^{2^{-M}n}.$$

(Здесь в третьем неравенстве мы воспользовались предложением 3.3).

Далее через

$$\mathbf{p}_{\xi_t} = \{\mathsf{P}\left(\xi_t = n\right),\ n \in \mathbb{Z}\}$$

мы будем обозначать распределение произвольного целочисленного случайного процесса ξ_t в момент времени t.

Предложение 3.5. *Пусть выполнены условия предложения* 3.3, *и* $\boldsymbol{p}_{\xi_0} \in B_\beta$ *для некоторого* $\beta > 1$, *тогда для любого* $t \geq 0$ *существует такое* $\beta_1 = \beta_1(t) > 1$, *что* $\boldsymbol{p}_{\xi_t} \in B_{\beta_1}$.

Доказательство. Выберем $M \in \mathbb{N}$ настолько большим, что

$$\frac{6\nu t}{M} < 1,$$

и рассмотрим произвольное $n \in \mathbb{N}$, большее 2^M. Расписывая формулу полной вероятности, будем иметь

$$\mathsf{P}\left(\xi_t \geq n\right) = \mathsf{P}\left(\xi_t \geq n|\xi_0 \geq [2^{-M}n]\right)\cdot\mathsf{P}\left(\xi_0 \geq [2^{-M}n]\right) +$$
$$+\mathsf{P}\left(\xi_t \geq n|\xi_0 < [2^{-M}n]\right)\cdot\mathsf{P}\left(\xi_0 < [2^{-M}n]\right) \leq$$
$$\leq \mathsf{P}\left(\xi_0 \geq [2^{-M}n]\right) + \mathsf{P}\left(\xi_t \geq n|\xi_0 < [2^{-M}n]\right).$$

Учитывая то, что $\mathbf{p}_{\xi_0} \in B_\beta$, получим

$$\mathsf{P}\left(\xi_0 \geq [2^{-M}n]\right) \leq \|\mathbf{p}_{\xi_0}\|_\beta\cdot\beta^{2^{-M}n}.$$

Далее, из предложения 3.4 вытекает

$$\mathsf{P}\left(\xi_t \geq n | \xi_0 < [2^{-M} n]\right) \leq \mathrm{const} \cdot M \left(\frac{6\nu t}{M}\right)^n.$$

Таким образом, существует такое $C > 0$, что

$$\mathsf{P}\left(\xi_t \geq n\right) \leq C \cdot \beta_1^{-n}, \text{ где } \beta_1 = \beta^{2^{-M}} \wedge \frac{M}{6\nu t},$$

откуда следует требуемое утверждение.

Обозначим через $\lambda(x, y)$ интенсивность скачка $\mathbf{x}^N(t)$ из точки $x \in \mathbb{Z}$ в точку $y \in \mathbb{Z}$. Также нам потребуется следующее обозначение:

$$\lambda(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \lambda(x, y) \ \text{ -- интенсивность скачка } \mathbf{x}^N(t) \text{ в точке } x.$$

Предложение 3.6. *Как в случае выполнения (*3.1.1*), так и* (3.1.3), *существует такое* $\nu = \nu(N, \mathsf{E}[p_0]) > 0$, *что*

$$\lambda(x) \leq \nu \cdot (1 + \max_{k=1}^{N} |x^k|), \ x \in \mathbb{Z}^N. \tag{3.2.1}$$

Доказательство. Оценка напрямую следует из определений $\widetilde{\lambda}^{n,N}(t)$ и $\widetilde{\mu}^{n,N}(t)$, и ограничения 3 на функцию F.

Доказательство (3.1.2) **и** (3.1.4) Рассмотрим случайное блуждание $\mathbf{x}^N(t)$, и введем еще один вспомогательный процесс

$$m_t = \max_{k=1}^{N} |\mathbf{x}^{k,N}(t)|.$$

Заметим, что имеет место следующая очень грубая оценка

$$\|\mathbf{p}_{m_t}\|_\beta \leq \sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{p}_{\mathbf{x}^{k,N}(t)}\|_\beta \leq N \|\mathbf{p}_{m_t}\|_\beta.$$

(неравенство справедливо для тех β, для которых каждая из указанных норм существует). Действительно, левое неравенство проверяется следующим образом,

$$\|\mathbf{p}_{m_t}\|_\beta \le \mathsf{E}\beta^{m_t} \le \sum_{k=1}^{N} \mathsf{E}\beta^{|\mathbf{x}^{k,N}(t)|} = \sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{p}_{\mathbf{x}^{k,N}(t)}\|_\beta,$$

а правое вытекает из выкладки

$$\sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{p}_{\mathbf{x}^{k,N}(t)}\|_\beta = \sum_{k=1}^{N} \mathsf{E}\beta^{|\mathbf{x}^{k,N}(t)|} \le N\mathsf{E}\beta^{m_t} = N\|\mathbf{p}_{m_t}\|_\beta.$$

Учитывая доказанные оценки, утверждение теоремы можно переформулировать следующим образом: пусть $\mathbf{p}_{m_0} \in B_{\beta_0}$ для некоторого $\beta_0 > 1$, тогда для любого $t \ge 0$ существует такое $\beta_t > 1$, что $\mathbf{p}_{m_t} \in B_{\beta_t}$.

Рассмотрим случайное блуждание ξ_t на $\mathbb{Z}_+$ с непрерывным временем и интенсивностями скачков

$$\nu_n = \nu(1+n): \; n \to n+1.$$

Причем ν выберем настолько большим, чтобы выполнялась оценка (3.2.1). Между $\mathbf{x}^N(t)$ и ξ_t естественным образом можно сконструировать каплинг, а именно, рассмотрим случайное блуждание $(\widetilde{\mathbf{x}}^N(t), \widetilde{\xi}(t))$ на $\mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}_+$ с интенсивностями скачков

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}^N, \xi) \to& (\mathbf{x}^N + e_n, \xi + 1) \text{ с интенсивностью } \widetilde{\lambda}^{n,N}(t)\\
(\mathbf{x}^N, \xi) \to& (\mathbf{x}^N - e_n, \xi + 1) \text{ с интенсивностью } \widetilde{\mu}^{n,N}(t)\\
(\mathbf{x}^N, \xi) \to& (\mathbf{x}^N, \xi + 1) \text{ с интенсивностью } \nu_\xi - \lambda(\mathbf{x}^N).
\end{aligned}$$

Предположим дополнительно, что $\widetilde{\xi}(0) = \max_{k=1}^N |\mathbf{x}^{k,N}(0)|$. Заметим, что $\mathbf{x}^N(t)$ и $\widetilde{\mathbf{x}}^N(t)$, а также $\xi(t)$ и $\widetilde{\xi}(t)$ распределены одинаково, и

$$\xi_t \ge \max_{k=1}^{N} |\widetilde{\mathbf{x}}^{k,N}(t)| := \widetilde{m}(t). \tag{3.2.2}$$

Из предложения 3.5 вытекает, что $\|\mathbf{p}_{\xi_t}\|_{\beta_t} < \infty$ для некоторого $\beta_t > 1$. Остается заметить, что из (3.2.2) вытекает, что

$$\|\mathbf{p}_{\xi_t}\|_{\beta_t} = \mathsf{E}\beta_t^{\xi_t} \ge \mathsf{E}\beta_t^{\widetilde{m}_t} = \|\mathbf{p}_{m_t}\|_{\beta_t}.$$

3.3 Доказательство теорем 3.4 и 3.6

Общие замечания Прежде чем перейти к доказательствам, условимся с обозначениями. Через const мы, как и ранее, будем обозначать некоторое неизвестное положительное число, а через const(...) — произвольную неотрицательную функцию от каких-либо аргументов. Причем в случае выполнения (3.1.3) мы по умолчанию будем считать, что $\mathrm{const}(t, \ldots)$ (t — время) является равномерно ограниченной по t функцией. Последнее соглашение позволит нам провести выкладки, соответствующие выполнению (3.1.1) и (3.1.3), не рассматривая отдельных случаев.

Также всюду при доказательстве теорем мы будем для краткости обозначать $\mathsf{E}[p_0]$ через E.

Наконец, отметим, что корректность приводимых ниже выкладок (а именно, существование всех математических ожиданий, почленное дифференцирование рядов и прочее) вытекает из теорем 3.3 и 3.5 (в силу экспоненциального убывания хвостов распределений $x(t)$ и $\mathbf{x}^N(t)$), а потому далее не комментируется.

Каплинг и план доказательства Рассмотрим N независимых копий соответствующих предельных марковских процессов $x(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^N(t)).$$

Через $\lambda^n(t)$ и $\mu^n(t)$ будем обозначать интенсивности скачков вправо и влево для n-ой частицы x^n в момент времени t. Между $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{x}^N(t)$ естественным образом можно сконструировать каплинг, а именно, мы будем рассматривать конечную неоднородную марковскую цепь

$$(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^N(t)) = (x^1(t), \ldots, x^N(t), x^{1,N}(t), \ldots, x^{N,N}(t))$$

с непрерывным временем и фазовым пространством $\mathbb{Z}^{2N}$, т.ч. $x^{n,N}(0) \equiv x^n(0)$ — независимые (по n) p_0-распределенные случайные величины, а интенсивности переходов задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}, \mathbf{x}^N) \to& (\mathbf{x} + e_n, \mathbf{x}^N + e_n) && \text{с интенсивностью } \lambda^n \wedge \tilde{\lambda}^{n,N}; \\
(\mathbf{x}, \mathbf{x}^N) \to& (\mathbf{x}, \mathbf{x}^N + e_n) && \text{с интенсивностью } \tilde{\lambda}^{n,N} - \lambda^n \wedge \tilde{\lambda}^{n,N}; \\
(\mathbf{x}, \mathbf{x}^N) \to& (\mathbf{x} + e_n, \mathbf{x}^N) && \text{с интенсивностью } \lambda^n - \lambda^n \wedge \tilde{\lambda}^{n,N}; \\
(\mathbf{x}, \mathbf{x}^N) \to& (\mathbf{x} - e_n, \mathbf{x}^N - e_n) && \text{с интенсивностью } \mu^n \wedge \tilde{\mu}^{n,N}; \\
(\mathbf{x}, \mathbf{x}^N) \to& (\mathbf{x}, \mathbf{x}^N - e_n) && \text{с интенсивностью } \tilde{\mu}^{n,N} - \mu^n \wedge \tilde{\mu}^{n,N}; \\
(\mathbf{x}, \mathbf{x}^N) \to& (\mathbf{x} - e_n, \mathbf{x}^N) && \text{с интенсивностью } \mu^n - \mu^n \wedge \tilde{\mu}^{n,N}.
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Пусть

$$\Delta_n(t) = x^n(t) - x^{n,N}(t).$$

Центральным местом при доказательстве теоремы является проверка следующего неравенства, справедливого при достаточно больших $N \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\Delta_1^2 \leq -\mathrm{const} \cdot \min\left(2\mathsf{E}\Delta_1^2, (\mathsf{E}\Delta_1^2)^2\right) + \mathrm{const}(t, p_0) \cdot N^{-\gamma/2} \cdot \left(\sqrt{\mathsf{E}\Delta_1^2} + 1\right), \tag{3.3.2}$$

где $\gamma < 1$ — произвольное положительное число. Действительно, из указанного неравенства следует, что при достаточно больших N и $\delta < \gamma/4$, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\Delta_1^2|_{\mathsf{E}\Delta_1^2 = N^{-\delta}} = -\mathrm{const} \cdot N^{-2\delta} + \mathrm{const}(t, p_0) \cdot N^{-\gamma/2}\left(N^{-\delta/2} + 1\right) \leq \\
\leq -\mathrm{const} \cdot N^{-2\delta} + \mathrm{const}(t, p_0) \cdot N^{-\gamma/2} < 0.
\end{aligned}$$

Откуда, учитывая, что $\mathsf{E}\Delta_1^2|_{t=0} = 0$, нетрудно вывести, что при достаточно больших N

$$\mathsf{E}\Delta_1^2 \leq \mathrm{const}(t, p_0) \cdot N^{-\delta},$$

где $0 < \delta < 1/4$. Остается заметить, что по определению расстояния Канторовича-Рубинштейна

$$d_2^2(\mathrm{Law}(x(t)), \mathrm{Law}(x^{1,N}(t))) \leq \mathsf{E}(x^1(t) - x^{1,N}(t))^2 = \mathsf{E}\Delta_1^2.$$

Вспомогательные результаты Для доказательства (3.3.2) нам потребуется несколько технических результатов.

Предложение 3.7. *Для любых $x, y \in \mathbb{Z}$ имеет место неравенство*

$$(x-y)(F(y)-F(x)) + |F(y)-F(x)| \leq \frac{1}{2}(x-y)(F(y)-F(x))I_{\{|x-y|\neq 1\}}.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что в силу неубывания $F(\cdot)$

$$(x-y)(F(y)-F(x)) = -|x-y|\cdot|F(y)-F(x)|,$$

и потому неравенство можно переписать в виде

$$0 \leq |F(y)-F(x)|\cdot\left(|x-y| - 1 - \frac{1}{2}|x-y|\cdot I_{\{|x-y|\neq 1\}}\right).$$

Остается заметить, что при $|x-y| \in \{0,1\}$ правая часть неравенства обращается в ноль, а при $|x-y| > 1$ неравенство очевидно.

Введем следующую вспомогательную функцию

$$G(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{2}.$$

Предложение 3.8. *Для любых $x, y, z \in \mathbb{Z}$ имеет место следующее неравенство*

$$(x-y)(G(y+z)-G(x+z)) \leq -\mathrm{const}\cdot(x-y)^2.$$

Доказательство. Неравенство напрямую вытекает из того, что $F(\cdot)$ — выпуклая возрастающая функция.

Предложение 3.9. *Предположим, что $f(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — некоторая гладкая функция, удовлетворяющая неравенству*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \leq -\mathrm{const}\cdot f(t) + \mathrm{const}\cdot\sqrt{f(t)} + \mathrm{const},$$

тогда $f(t)$ является ограниченной.

Доказательство. Утверждение напрямую следует из того факта, что при достаточно больших $x \geq 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)|_{f(t)=x} < 0.$$

Предложение 3.10. *Для любых* $k, n \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k \neq n$,

$$\begin{aligned}\lambda^k(t) =& \mathsf{E}\left(F(x^n(t) - x^k(t))|x^k(t)\right);\\ \mu^k(t) =& \mathsf{E}\left(F(x^k(t) - x^n(t))|x^k(t)\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая независимость $x^k(t)$ и $x^n(t)$, имеем

$$\mathsf{E}\left(F(x^n(t) - x^k(t))|x^k(t)\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \mathbf{p}_l(t)F(l - x^k(t)) = \lambda^k(t).$$

Второе тождество доказывается аналогично.

Предложение 3.11. *Для любого* $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ *имеют место следующие неравенства*

$$\begin{aligned}&\sup_{t\geq 0} \mathsf{E}(\lambda^n)^2(t) < \mathrm{const}(p_0);\\ &\sup_{t\geq 0} \mathsf{E}(\mu^n)^2(t) < \mathrm{const}(p_0).\end{aligned}$$

Доказательство. Фиксируем произвольные $k, n \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k \neq n$. Из предложения 3.10 имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\lambda^n)^2(t) = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}(F(x^n(t) - x^k(t))|x^k(t))\right]^2 \leq \mathsf{E}\left[\mathsf{E}(F^2(x^n(t) - x^k(t))|x^k(t))\right] = \\ = \mathsf{E}F^2(x^n(t) - x^k(t)) \leq \mathrm{const} + \mathrm{const}\cdot\mathsf{E}(x^n(t) - x^k(t))^2.\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Таким образом, требуемое утверждение вытекает из предложения 3.12.

Предложение 3.12. *Для любых* $k, n \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k \neq n$, *имеет место следующее неравенство*

$$\sup_{t\geq 0} \mathsf{E}(x^n(t) - x^k(t))^2 < \mathrm{const}(p_0).$$

Доказательство. Без ограничения общности мы будем считать, что $k = 1$,

$n = 2$. Заметим, что

$$x^2 - x^1 \to \begin{cases} x^2 - x^1 + 1 & \text{с интенсивностью } \lambda^2 + \mu^1 \\ x^2 - x^1 - 1 & \text{с интенсивностью } \lambda^1 + \mu^2 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}(x^2 - x^1)^2 = \mathsf{E}\left(2x^2 - 2x^1 + 1\right) \cdot \left(\lambda^2 + \mu^1\right) + \mathsf{E}\left(-2x^2 + 2x^1 + 1\right) \cdot \left(\lambda^1 + \mu^2\right) =$$
$$= 2\mathsf{E}(x^2 - x^1)(\lambda^2 + \mu^1 - \lambda^1 - \mu^2) + \mathsf{E}(\lambda^1 + \mu^1 + \lambda^2 + \mu^2).$$

Далее, учитывая, что

$$\lambda^1(t) = \mathsf{E}\left(F(x^3(t) - x^1(t))|x^1(t)\right);$$
$$\lambda^2(t) = \mathsf{E}\left(F(x^3(t) - x^2(t))|x^2(t)\right);$$
$$\mu^1(t) = \mathsf{E}\left(F(x^1(t) - x^3(t))|x^1(t)\right);$$
$$\mu^2(t) = \mathsf{E}\left(F(x^2(t) - x^3(t))|x^2(t)\right),$$

имеем

$$2\mathsf{E}(x^2 - x^1)(\lambda^2 + \mu^1 - \lambda^1 - \mu^2) = 4\mathsf{E}(x^2 - x^1)(G(x^3 - x^2) - G(x^3 - x^1)) \leq$$
$$\leq -\mathrm{const} \cdot \mathsf{E}(x^2 - x^1)^2$$

(здесь в последнем неравенстве мы воспользовались предложением 3.8), а из формулы (3.3.3) и ее аналога для $\mu^n(t)$ получаем,

$$\mathsf{E}(\lambda^1 + \mu^1 + \lambda^2 + \mu^2) \leq \mathrm{const} + \mathrm{const} \cdot \sqrt{\mathsf{E}(x^2 - x^1)^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}(x^2 - x^1)^2 \leq -\mathrm{const} \cdot \mathsf{E}(x^2 - x^1)^2 + \mathrm{const} \cdot \sqrt{\mathsf{E}(x^2 - x^1)^2} + \mathrm{const},$$

и требуемое утверждение следует из предложения 3.9.

Предложение 3.13. *Имеет место следующее неравенство*

$$\sup_{t \geq 0} \mathsf{E}(\bar{x}(t) - E)^2 < N^{-1} \cdot \mathrm{const}(p_0).$$

Доказательство. Учитывая то, что $x^n(t)$ — независимые случайные величины со средним E, имеем

$$\mathsf{E}(\bar{x}(t) - E)^2 = N^{-1}\mathsf{D}x^1 = N^{-1}(\mathsf{D}x^1 + \mathsf{D}x^2)/2 = N^{-1}\mathsf{D}(x^1 - x^2)/2 =$$
$$= N^{-1}\mathsf{E}(x^1 - x^2)^2/2.$$

Таким образом, требуемое утверждение вытекает из предложения 3.12.

Предложение 3.14. *Существует такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $N \geq N_0$ и любых $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $t \geq 0$ имеют место следующие неравенства*

$$\mathsf{E}(\lambda^{n,N})^2(t) < \mathrm{const}(t, p_0);$$
$$\mathsf{E}(\mu^{n,N})^2(t) < \mathrm{const}(t, p_0).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathsf{E}(\lambda^{n,N})^2 \leq \frac{1}{N^2}\sum_{k,l=1}^{N} \mathsf{E}F(x^{k,N} - x^{n,N})F(x^{l,N} - x^{n,N}) \leq \tag{3.3.4}$$
$$\leq \frac{\mathrm{const}}{N^2}\sum_{k,l=1}^{N} \mathsf{E}(1 + |x^{k,N} - x^{n,N}|) \cdot (1 + |x^{l,N} - x^{n,N}|) \leq$$
$$\leq \mathrm{const} + \mathrm{const} \cdot \mathsf{E}(x^{2,N} - x^{1,N})^2.$$

Аналогичные оценки справедливы и для $\mathsf{E}(\mu^{n,N})^2(t)$, таким образом утверждение следует из предложения 3.15.

Предложение 3.15. *Существует такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $N \geq N_0$ и любых $t \geq 0$, $\gamma \in (0, 1)$ имеют место следующие неравенства*

$$\mathsf{E}(x^{2,N}(t) - x^{1,N}(t))^2 < \mathrm{const}(t, p_0);$$
$$N^{\gamma}\mathsf{E}(\bar{x}^N(t) - E)^2 < \mathrm{const}(t, p_0).$$

Доказательство. Обозначим для краткости $\delta = \bar{x}^N - E$. По аналогии с выкладкой в предложении 3.12 имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})^2 = 2\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})(\tilde\lambda^{2,N}+\tilde\mu^{1,N}-\tilde\lambda^{1,N}-\tilde\mu^{2,N})+ \\ +\mathsf{E}(\tilde\lambda^{1,N}+\tilde\mu^{1,N}+\tilde\lambda^{2,N}+\tilde\mu^{2,N}).$$

Первое слагаемое в правой части полученного тождества можно оценить следующим образом,

$$\begin{gathered} 2\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})(\tilde\lambda^{2,N}+\tilde\mu^{1,N}-\tilde\lambda^{1,N}-\tilde\mu^{2,N}) = \\ = 2\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})(\lambda^{2,N}+\mu^{1,N}-\lambda^{1,N}-\mu^{2,N}) = \\ = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})\big(F(x^{k,N}-x^{2,N})-F(x^{2,N}-x^{k,N})\big) - \\ -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})\big(F(x^{k,N}-x^{1,N})-F(x^{1,N}-x^{k,N})\big) = \\ = \frac{4}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})\big(G(x^{k,N}-x^{2,N})-G(x^{k,N}-x^{1,N})\big) \le \\ \le -\mathrm{const}\cdot\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})^2 \end{gathered}$$

(здесь в последнем неравенстве мы воспользовались оценкой предложения 3.8). Кроме того,

$$\mathsf{E}(\tilde\lambda^{1,N}+\tilde\mu^{1,N}+\tilde\lambda^{2,N}+\tilde\mu^{2,N}) \le \mathsf{E}(\lambda^{1,N}+\mu^{1,N}+\lambda^{2,N}+\mu^{2,N}) + 2\mathsf{E}|\delta| \le \\ \le \mathrm{const}+\mathrm{const}\cdot\sqrt{\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})^2}+\mathrm{const}\cdot\sqrt{\mathsf{E}\delta^2}$$

(здесь мы воспользовались неравенством (3.3.4)). Таким образом,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})^2 \le -\mathrm{const}\cdot\mathsf{E}(x^{2,N}-x^{1,N})^2+\mathrm{const}\cdot\mathsf{E}\delta^2+\mathrm{const}. \tag{3.3.5}$$

Величина δ^2 имеет следующие скачки

$$\delta^2 \to \left(\delta + \frac{1}{N}\right)^2 \text{с интенсивностью } \lambda^\delta = \frac{1}{N}\sum_{(k,n):\ k\neq n}^{N} F(x^{k,N} - x^{n,N}) + N\gamma_+;$$
$$\delta^2 \to \left(\delta - \frac{1}{N}\right)^2 \text{с интенсивностью } \mu^\delta = \frac{1}{N}\sum_{(k,n):\ k\neq n}^{N} F(x^{k,N} - x^{n,N}) + N\gamma_-.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\delta^2 &= \mathsf{E}\lambda^\delta(2\delta N^{-1} + N^{-2}) + \mathsf{E}\mu^\delta(-2\delta N^{-1} + N^{-2}) = \\ &= 2N^{-1}\mathsf{E}\delta(\lambda^\delta - \mu^\delta) + N^{-2}\mathsf{E}(\lambda^\delta + \mu^\delta) \leq \\ &\leq 2\mathsf{E}\delta(\gamma_+ - \gamma_-) + \frac{1}{N}\mathsf{E}(\gamma_+ + \gamma_-) + \frac{\mathrm{const}}{N}\cdot \mathsf{E}F(x^{2,N} - x^{1,N}) \leq \\ &\leq 2\mathsf{E}\delta(\gamma_+ - \gamma_-) + \frac{1}{N}\mathsf{E}(\gamma_+ + \gamma_-) + \frac{\mathrm{const}}{N} + \frac{\mathrm{const}}{N}\cdot\sqrt{\mathsf{E}(x^{2,N} - x^{1,N})^2}.\end{aligned}$$

Далее рассмотрим два отдельных случая.

В случае выполнения (3.1.1),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\delta^2 \leq \frac{\mathrm{const}}{N} + \frac{\mathrm{const}}{N}\cdot\sqrt{\mathsf{E}(x^{2,N} - x^{1,N})^2}. \tag{3.3.6}$$

Складывая (3.3.5) и (3.3.6), получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\mathsf{E}(x^{2,N} - x^{1,N})^2 + N\mathsf{E}\delta^2\right\} \leq \mathrm{const} + \mathrm{const}\cdot\left\{\mathsf{E}(x^{2,N} - x^{1,N})^2 + N\mathsf{E}\delta^2\right\}.$$

Таким образом, требуемое утверждение следует из теоремы 2.7.

В случае выполнения (3.1.3),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\delta^2 &\leq -2\mathsf{E}\delta^2 + \frac{\mathsf{E}|\delta|}{N} + \frac{\mathrm{const}}{N}\cdot\sqrt{\mathsf{E}(x^{2,N} - x^{1,N})^2} + \frac{\mathrm{const}}{N} \leq \\ &\leq -\mathrm{const}\cdot\mathsf{E}\delta^2 + \frac{\mathrm{const}}{N}\cdot\mathsf{E}(x^{2,N} - x^{1,N})^2 + \frac{\mathrm{const}}{N}.\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Складывая (3.3.5) и (3.3.7), получим (при достаточно больших $N \in \mathbb{N}$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\mathsf{E}(x^{2,N} - x^{1,N})^2 + N^\gamma\mathsf{E}\delta^2\right\} \leq -\mathrm{const}\cdot\left\{\mathsf{E}(x^{2,N} - x^{1,N})^2 + N^\gamma\mathsf{E}\delta^2\right\} + \mathrm{const}. \tag{3.3.8}$$

Таким образом, требуемое утверждение следует из предложения 3.9.

Предложение 3.16. *Для любых* $\gamma \in (0,1)$ *и* $t \geq 0$ *имеет место следующее неравенство*

$$N^{\gamma}\mathsf{E}\gamma_{\pm}^{2}(\bar{x}^{N}(t) - E) < \mathrm{const}(t, p_0).$$

Доказательство. Напрямую следует из оценок предложения 3.15 и определения функций γ_+ и γ_-.

Предложение 3.17. *Для любого* $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *имеют место следующие оценки*

$$\mathsf{E}\left\{\lambda^n - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(x^k - x^n)\right\}^2 < \frac{\mathrm{const}(p_0)}{N};$$
$$\mathsf{E}\left\{\mu^n - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(x^k - x^n)\right\}^2 < \frac{\mathrm{const}(p_0)}{N}.$$

Доказательство. Первое неравенство следует из выкладки

$$\mathsf{E}\left\{\lambda^n - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(x^k - x^n)\right\}^2 = \mathsf{E}\left\{\frac{\lambda^n}{N} + \frac{1}{N}\sum_{k\neq n}\bigl(\lambda^n - F(x^k - x^n)\bigr) - \frac{1}{N}F(0)\right\}^2 \leq$$
$$\leq \mathrm{const}\cdot\frac{\mathsf{E}(\lambda^n)^2}{N^2} + \frac{\mathrm{const}}{N^2}\mathsf{E}\left\{\sum_{k\neq n}\bigl(\lambda^n - F(x^k - x^n)\bigr)\right\}^2 + \mathrm{const}\cdot\frac{F^2(0)}{N^2} \leq$$
$$\leq \frac{\mathrm{const}}{N^2}\cdot\mathsf{E}\left\{\sum_{k\neq n}\bigl(\lambda^n - F(x^k - x^n)\bigr)\right\}^2 + \frac{\mathrm{const}(p_0)}{N^2} =$$
$$= \frac{\mathrm{const}}{N}\cdot\mathsf{E}\bigl(\lambda^1 - F(x^2 - x^1)\bigr)^2 + \frac{\mathrm{const}(p_0)}{N^2} \leq$$
$$\leq \frac{\mathrm{const}}{N}\cdot\bigl[\mathsf{E}(\lambda^1)^2 + \mathsf{E}(x^2 - x^1)^2\bigr] + \frac{\mathrm{const}(p_0)}{N^2} \leq \frac{\mathrm{const}(p_0)}{N}$$

(здесь во втором равенстве мы воспользовались предложением 3.11, в следующем равенстве мы воспользовались тем, что $\bigl\{\lambda^n - F(x^k - x^n)\bigr\}_{k\neq n}$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием при условии x^n, и наконец, в последнем неравенстве мы воспользовались предложениями 3.11 и 3.12). Второе неравенство доказывается аналогично.

Предложение 3.18. *Пусть* $m_k \in [0,1]$, $k \in \mathbb{Z}$ *— последовательность случайных величин, дающих в сумме 1:*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k = 1 \text{ п.н.},$$

для которой п.н. определены следующие величины

$$d = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k k^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k m_{k+1}; \quad h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k k^2,$$

тогда имеет место неравенство

$$d \geq \frac{1}{4}\min(h, h^2) \text{ п.н}, \tag{3.3.9}$$

и если определены математические ожидания $\mathsf{E}d$ *и* $\mathsf{E}h$, *то*

$$\mathsf{E}d \geq \mathrm{const}\cdot\min\left(2\mathsf{E}h, (\mathsf{E}h)^2\right). \tag{3.3.10}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$d = \sum_{k\leq -2} m_k(k^2 - m_{k+1}) + (m_{-1}+m_1)(1-m_0) + \sum_{k\geq 2} m_k(k^2 - m_{k-1}).$$

Далее,

$$h = (m_{-1}+m_1) + \left(\sum_{|k|\geq 2} m_k k^2\right),$$

поэтому

$$\text{либо } m_{-1}+m_1 \geq h/2, \text{ либо } \sum_{|k|\geq 2} m_k k^2 \geq h/2.$$

В первом случае:

$$m_{-1}+m_0+m_1 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k = 1 \Rightarrow 1-m_0 \ge m_{-1}+m_1 \ge \frac{h}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d \ge (m_{-1}+m_1)(1-m_0) \ge \frac{h^2}{4}.$$

Во втором:

$$d \ge \sum_{k\le -2} m_k(k^2-m_{k+1}) + \sum_{k\ge 2} m_k(k^2-m_{k-1}) \ge$$
$$\ge \sum_{|k|\ge 2} m_k(k^2-1) \ge \frac{1}{2}\sum_{|k|\ge 2} m_k k^2 \ge \frac{h}{4}.$$

В результате имеем неравенство (3.3.9). Применив (3.3.9), получим

$$\mathsf{E}d \ge \mathrm{const}\cdot\left(\mathsf{E}hI_{\{h>1\}} + \mathsf{E}h^2 I_{\{h\le 1\}}\right) \ge \mathrm{const}\cdot\left(\mathsf{E}hI_{\{h>1\}} + (\mathsf{E}hI_{\{h\le 1\}})^2\right).$$

Поскольку $\mathsf{E}h = \mathsf{E}hI_{\{h>1\}} + \mathsf{E}hI_{\{h\le 1\}}$, то

$$\text{либо } \mathsf{E}hI_{\{h>1\}} \ge \mathsf{E}h/2, \ \text{либо } \mathsf{E}hI_{\{h\le 1\}} \ge \mathsf{E}h/2,$$

откуда имеем (3.3.10).

Доказательство неравенства (3.3.2) Всюду далее $\gamma \in (0,1)$ — некоторое положительное число. Из (3.3.1) вытекает, что Δ_n имеет интенсивности перехода:

$$\Delta_n \to \begin{cases} \Delta_n+1, & \text{с интенсивностью } \lambda^n + \tilde\mu^{n,N} - \lambda^n\wedge\tilde\lambda^{n,N} - \mu^n\wedge\tilde\mu^{n,N}; \\ \Delta_n-1, & \text{с интенсивностью } \tilde\lambda^{n,N} + \mu^n - \lambda^n\wedge\tilde\lambda^{n,N} - \mu^n\wedge\tilde\mu^{n,N}, \end{cases}$$

откуда имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\Delta_n^2 = \mathsf{E}(2\Delta_n+1)(\lambda^n+\tilde{\mu}^{n,N}-\lambda^n\wedge\tilde{\lambda}^{n,N}-\mu^n\wedge\tilde{\mu}^{n,N})+$$
$$+\mathsf{E}(-2\Delta_n+1)(\tilde{\lambda}^{n,N}+\mu^n-\lambda^n\wedge\tilde{\lambda}^{n,N}-\mu^n\wedge\tilde{\mu}^{n,N}) =$$
$$= 2\mathsf{E}\Delta_n(\lambda^n-\mu^n-\tilde{\lambda}^{n,N}+\tilde{\mu}^{n,N})+$$
$$+\mathsf{E}(\lambda^n+\tilde{\lambda}^{n,N}-2\lambda^n\wedge\tilde{\lambda}^{n,N})+\mathsf{E}(\mu^n+\tilde{\mu}^{n,N}-2\mu^n\wedge\tilde{\mu}^{n,N}) =$$
$$= 2\mathsf{E}\Delta_n(\lambda^n-\mu^n-\tilde{\lambda}^{n,N}+\tilde{\mu}^{n,N})+\mathsf{E}|\lambda^n-\tilde{\lambda}^{n,N}|+E|\mu^n-\tilde{\mu}^{n,N}|.$$

Таким образом, учитывая, что распределение $\mathsf{E}\Delta_n^2$ не зависит от n, получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\Delta_1^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\Delta_n^2 =$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathsf{E}\Delta_n(\lambda^n-\mu^n-\tilde{\lambda}^{n,N}+\tilde{\mu}^{n,N})+\mathsf{E}|\lambda^1-\tilde{\lambda}^{1,N}|+\mathsf{E}|\mu^1-\tilde{\mu}^{1,N}| :=$$
$$:= K_1+K_2+K_3.$$

Первое слагаемое оценивается следующим образом,

$$K_1 = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathsf{E}\Delta_n(\lambda^n-\mu^n-\lambda^{n,N}+\mu^{n,N})+2\mathsf{E}\Delta_n\left(-\gamma_+(\bar{x}^N-E)+\gamma_-(\bar{x}^N-E)\right) \leq$$
$$\leq \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathsf{E}\Delta_n(\lambda^n-\mu^n-\lambda^{n,N}+\mu^{n,N})+2\sqrt{\mathsf{E}\Delta_1^2}\cdot\sqrt{\mathsf{E}(\bar{x}^N-E)^2} \leq$$
$$\leq \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathsf{E}\Delta_n(\lambda^n-\mu^n-\lambda^{n,N}+\mu^{n,N})+\mathrm{const}(t,p_0)\cdot N^{-\gamma/2}\sqrt{\mathsf{E}\Delta_1^2}$$

(здесь в первом неравенстве мы воспользовались неравенством Коши, а во втором – предложением 3.15). Для оставшихся двух слагаемых имеем

$$K_2 \leq \mathsf{E}|\lambda^n-\lambda^{n,N}|+\mathsf{E}|\gamma_+(\bar{x}^N-E)| \leq \mathsf{E}|\lambda^n-\lambda^{n,N}|+\mathrm{const}(t,p_0)\cdot N^{-\gamma/2};$$
$$K_3 \leq \mathsf{E}|\mu^n-\mu^{n,N}|+\mathsf{E}|\gamma_-(\bar{x}^N-E)| \leq \mathsf{E}|\mu^n-\mu^{n,N}|+\mathrm{const}(t,p_0)\cdot N^{-\gamma/2}.$$

(здесь мы воспользовались предложением 3.16). Объединяя полученные неравенства, будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\Delta_1^2 \le \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathsf{E}\Delta_n(\lambda^n - \mu^n - \lambda^{n,N} + \mu^{n,N}) + \mathsf{E}|\lambda^n - \lambda^{n,N}| + \mathsf{E}|\mu^n - \mu^{n,N}| +$$
$$+\mathrm{const}(t, p_0)\cdot N^{-\gamma/2}\cdot\left[\sqrt{\mathsf{E}\Delta_1^2} + 1\right].$$

Первое слагаемое в правой части полученного неравенства можно представить в виде

$$I_1 := \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathsf{E}\Delta_n(\lambda^n - \mu^n - \lambda^{n,N} + \mu^{n,N}) =$$
$$= \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\mathsf{E}\Delta_n(F(x^k - x^n) - F(x^n - x^k) - F(x^{k,N} - x^{n,N}) + F(x^{n,N} - x^{k,N}))+$$
$$+\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathsf{E}\Delta_n\left\{\lambda^n - N^{-1}\sum_{k\ne n}F(x^k - x^n)\right\}+$$
$$+\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathsf{E}\Delta_n\left\{N^{-1}\sum_{k\ne n}F(x^n - x^k) - \mu^n\right\}:=$$
$$:= I_{11} + I_{12} + I_{13}.$$

Из предложения 3.17 следует, что

$$I_{12} + I_{13} \le \mathrm{const}(p_0)\cdot N^{-1/2}\cdot\sqrt{\mathsf{E}\Delta_n^2}.$$

Далее, I_{11} можно переписать в виде

$$I_{11} = \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^N\sum_{k=1}^N \mathsf{E}(x^n - x^{n,N})\left(F(x^k - x^n) - F(x^{k,N} - x^{n,N})\right) -$$
$$-\frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^N\sum_{k=1}^N \mathsf{E}(x^n - x^{n,N})\left(F(x^n - x^k) - F(x^{n,N} - x^{k,N})\right) =$$
$$= \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^N\sum_{k=1}^N \mathsf{E}(x^n - x^{n,N})\left(F(x^k - x^n) - F(x^{k,N} - x^{n,N})\right) -$$
$$-\frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^N\sum_{k=1}^N \mathsf{E}(x^k - x^{k,N})\left(F(x^k - x^n) - F(x^{k,N} - x^{n,N})\right) =$$
$$= \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^N\sum_{k=1}^N \mathsf{E}(x^n - x^{n,N} - x^k + x^{k,N})\left(F(x^k - x^n) - F(x^{k,N} - x^{n,N})\right).$$

Таким образом,

$$I_1 \le \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^N\sum_{n=1}^N \mathsf{E}(x^n - x^k - x^{n,N} + x^{k,N})(F(x^k - x^n) - F(x^{k,N} - x^{n,N})) +$$
$$+\mathrm{const}(p_0)\cdot N^{-1/2}\cdot\sqrt{\mathsf{E}\Delta_n^2}.$$

В свою очередь $\mathsf{E}|\lambda^n - \lambda^{n,N}|$ оценивается следующим образом:

$$\mathsf{E}|\lambda^n - \lambda^{n,N}| \le \frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^N F(x^k - x^n) - \sum_{k=1}^N F(x^{k,N} - x^{n,N})\right| +$$
$$+\mathsf{E}\left|\lambda^n - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N F(x^k - x^n)\right| + \frac{F(0)}{N} \le$$
$$\le \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^N\sum_{k=1}^N \mathsf{E}|F(x^k - x^n) - F(x^{k,N} - x^{n,N})| + \mathrm{const}(p_0)\cdot N^{-1/2}$$

(здесь мы воспользовались предложением 3.17). Аналогичная оценка справедлива и для $\mathsf{E}|\mu^n - \mu^{n,N}|$. Объединяя полученные неравенства, имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}\Delta_1^2 \le J_1 + \mathrm{const}(t, p_0)\cdot N^{-\gamma/2}\cdot\left(\sqrt{\mathsf{E}\Delta_1^2} + 1\right),$$

где

$$J_1 = \frac{2}{N^2} \sum_{k,n=1}^{N} \mathsf{E}(x^n - x^k - x^{n,N} + x^{k,N})(F(x^k - x^n) - F(x^{k,N} - x^{n,N}))+$$
$$+\frac{2}{N^2} \sum_{k,n=1}^{N} \mathsf{E}|F(x^k - x^n) - F(x^{k,N} - x^{n,N})|.$$

Таким образом, для доказательства (3.3.2) достаточно проверить следующее неравенство

$$J_1 \leq -\mathrm{const} \cdot \min\left(2\mathsf{E}\Delta_1^2, (\mathsf{E}\Delta_1^2)^2\right) + \mathrm{const}(t, p_0) \cdot N^{-\gamma/2}. \tag{3.3.11}$$

Последовательно применяя предложения 3.7 и 3.8, будем иметь

$$J_1 \leq \frac{2}{N^2} \sum_{k,n=1}^{N} \mathsf{E}(x^n - x^k - x^{n,N} + x^{k,N})(F(x^k - x^n) - F(x^{k,N} - x^{n,N}))\times$$
$$\times I_{\{|x^n - x^k - x^{n,N} + x^{k,N}| \neq 1\}} =$$
$$= \frac{2}{N^2} \sum_{k,n=1}^{N} \mathsf{E}(x^n - x^k - x^{n,N} + x^{k,N}) \left(G(x^k - x^n) - G(x^{k,N} - x^{n,N})\right) \times$$
$$\times I_{\{|x^n - x^k - x^{n,N} + x^{k,N}| \neq 1\}} \leq$$
$$\leq -\frac{\mathrm{const}}{N^2} \sum_{k,n=1}^{N} \mathsf{E}(x^n - x^k - x^{n,N} + x^{k,N})^2 I_{\{|x^n - x^k - x^{n,N} + x^{k,N}| \neq 1\}}.$$

Обозначив через

$$n_i = \sum_{k=1}^{N} I_{\{x^k - x^{k,N} = i\}},$$

имеем

$$J_1 \le -\frac{\mathrm{const}}{N^2}\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} n_k n_l (k-l)^2 I_{\{|k-l|\neq 1\}} =$$

$$= -\frac{\mathrm{const}}{N^2}\left(\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} n_k n_l (k^2-2kl+l^2) - 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} n_k n_{k+1}\right) =$$

$$= -\mathrm{const}\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} n_k k^2 - \frac{1}{N^2}\mathsf{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k n_k\right)^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} n_k n_{k+1}\right] =$$

$$= \mathrm{const}\cdot\mathsf{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k m_k\right)^2 - \mathrm{const}\cdot\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} m_k k^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} m_k m_{k+1}\right],$$

где $m_k = n_k/N \in [0,1]$. Заметим, что

$$\mathsf{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k m_k\right)^2 = \mathsf{E}(\bar{x}^N - \bar{x})^2 \le 2\mathsf{E}(\bar{x}^N - E)^2 + 2\mathsf{E}(\bar{x} - E)^2 \le \mathrm{const}(t, p_0)\cdot N^{-\gamma}$$

(здесь мы воспользовались предложениями 3.13 и 3.15). Далее, в силу того, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} m_k k^2 = \frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l=1}^{N} \mathsf{E} k^2 I_{\{x^l - x^{l,N} = k\}} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\mathsf{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 I_{\{x^l - x^{l,N} = k\}}\right) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\mathsf{E}(x^l - x^{l,N})^2 = \mathsf{E}\Delta_1^2,$$

из предложения 3.18 получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} m_k k^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{E} m_k m_{k+1} \ge \mathrm{const}\cdot\left(2\mathsf{E}\Delta_1^2, \left(\mathsf{E}\Delta_1^2\right)^2\right).$$

Объединяя доказанные неравенства, будем иметь (3.3.11).

3.4 Доказательство теоремы 3.1

Вспомогательные результаты Перед доказательством теоремы 3.1 нам потребуется сформулировать критерий Фостера для счетных цепей Маркова.

Определение 3.2. (см. [33, стр. 29]) Пусть ξ_t — произвольная марковская цепь с дискретным временем и не более чем счетным фазовым пространством $\mathcal{A}$. Положительная функция $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ называется функцией Ляпунова для ξ_t, если существуют $\varepsilon > 0$ и конечное множество $A \subset \mathcal{A}$, такие, что

1. для любого $x \notin A$ $\mathsf{E}(f(\xi_{t+1}) - f(\xi_t)|\xi_t = x) \leq -\varepsilon$.
2. для любого $x \in A$ $\mathsf{E}(f(\xi_{t+1}) - f(\xi_t)|\xi_t = x) < \infty$.

Теорема 3.7. *(см. [33, стр. 29]) В условиях определения 3.2 ξ_t является эргодической тогда и только тогда, когда для нее существует функция Ляпунова.*

Поскольку мы имеем процесс с непрерывным временем, то логично сформулировать аналог критерия Фостера для этого случая.

Предложение 3.19. *Пусть ξ_t — произвольная марковская цепь с непрерывным временем и не более чем счетным фазовым пространством $\mathcal{A}$. Предположим, что существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ и конечное множество $A \subset \mathbb{Z}$, такие, что для любых $t_1, t_2 \geq 0$, удовлетворяющих условию $t_2 \geq t_1 + \varepsilon_1$, выполнено:*

1. *при $x \notin A$ $\mathsf{E}(f(\xi_{t_2}) - f(\xi_{t_1})|\xi_{t_1} = x) \leq -\varepsilon_2$.*
2. *при $x \in A$ $\mathsf{E}(f(\xi_{t_2}) - f(\xi_{t_1})|\xi_{t_1} = x) < \infty$.*

Тогда ξ_t является эргодической.

Доказательство. Пусть $\{t_i\}$ $i \in \mathbb{N}$ — последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию $\inf_i(t_{i+1} - t_i) > \varepsilon_1$. Из теоремы 3.7 следует, что последовательность $\{\xi_{t_i}\}$, $i \in \mathbb{N}$ образует эргодическую цепь Маркова, и потому по теореме 1.7 последовательность $\mathrm{Law}(\xi_{t_i})$ является фундаментальной по метрике Прохорова.

Предположим, что ξ_t не является эргодической. По той же теореме 1.7 это означает, что существует последовательность $\{t_i\}$ $i \in \mathbb{N}$, т.ч. $\{\mathrm{Law}(\xi_{t_i})\}$, $i \in \mathbb{N}$ не является фундаментальной по метрике Прохорова. Совсем нетрудно показать, что из нее можно выбрать последовательность $\{t_{i'}\}$, т.ч. $\{\mathrm{Law}(\xi_{t_{i'}})\}$ по-прежнему не фундаментальна, и $\inf_i(t'_{i+1} - t'_i) > \varepsilon_1$. Противоречие.

Наконец, при доказательстве теоремы 3.1 мы будем существенно опираться на следуюший факт из математического анализа (см. [75, стр. 374]).

Теорема 3.8. *(о двойном пределе) Пусть (E,ρ) — произвольное полное метрическое пространство; $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций $f_n(t)$: $\mathbb{R}_+ \to E$. Предположим, что*

1. *равномерно по $t \geq 0$ $f_n(t)$ сходится к некоторой функции $f(t)$ при $n \to \infty$.*

2. *для любого $n \in \mathbb{N}$ $f_n(t)$ сходится к некоторому числу f_n^* при $t \to \infty$.*

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. *$f(t)$ сходится к некоторому числу f^* при $t \to \infty$.*

2. *$f_n^* \to f^*$ при $n \to \infty$.*

Следующая диаграмма иллюстрирует утверждение теоремы:

$$\begin{array}{ccc} f_n(t) & \xrightarrow[n\to\infty]{\text{равномерно по } t} & f(t) \\ \downarrow & & \\ f_n^* & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} f_n(t) & \xrightarrow[n\to\infty]{\text{равномерно по } t} & f(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_n^* & \xrightarrow{\qquad\qquad} & f^* \end{array}$$

Доказательство теоремы Всюду далее мы будем предполагать, что марковская цепь

$$\mathbf{x}^N(t) = (x^{1,N}(t), \ldots, x^{N,N}(t))$$

такая же как в теореме 3.5.

Предложение 3.20. *Существует такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $N \geq N_0$ марковская цепь $\boldsymbol{x}^N(t)$ является эргодической.*

Доказательство. Обозначим через $L(\mathbf{x}^N):\ \mathbb{Z}^N \to \mathbb{R}$, функцию

$$L(\mathbf{x}^N) = \frac{1}{N^2}\sum_{k,n=1}^{N}(x^{k,N} - x^{n,N})^2 + N^\gamma(\bar{x}^N - \mathsf{E}[p_0])^2,\ 0<\gamma<1.$$

Из (3.3.8) вытекает, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}L(\mathbf{x}^N(t)) \le -\mathrm{const}\cdot\mathsf{E}L(\mathbf{x}^N(t)) + \mathrm{const}.$$

Как следствие, существует такое компактное подмножество $A \subset \mathbb{Z}^N$ вида $\left\{\mathbf{x}^N:\ L(\mathbf{x}^N) \le \mathrm{const}\right\}$, что выполняются условия предложения 3.19, откуда следует требуемое утверждение.

Мы доказали, что при $t \to \infty$ $\mathrm{Law}(\mathbf{x}^N(t))$ слабо сходится к некоторой предельной мере $\mu^N \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^N)$, и потому $\mathrm{Law}(x^{1,N}(t))$ слабо сходится к $\mu^{1,N}$, являющейся одномерной проекцией μ^N. Таким образом, как следует из теоремы 1.7,

$$\rho_{\mathrm{P}}\left(\mathrm{Law}(x^{1,N}(t)), \mu^{1,N}\right) \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{3.4.1}$$

В теореме 3.6 было доказано, что между $x(t)$ и $x^{1,N}(t)$ можно сконструировать такой каплинг, что

$$\mathsf{E}(x(t) - x^{1,N}(t))^2 \le \mathrm{const}(p_0)\cdot N^{-\gamma/2},$$

где $0 < \gamma < 1$. Как следствие, для всех $t \ge 0$

$$\mathsf{P}\left(|x(t) - x^{1,N}(t)| \ge N^{-\gamma/6}\right) \le \frac{\mathsf{E}(x(t) - x^{1,N}(t))^2}{N^{-\gamma/3}} \le \mathrm{const}(p_0)\cdot N^{-\gamma/6},$$

и потому для всех $t \ge 0$

$$\rho_{\mathrm{P}}\left(\mathrm{Law}(x(t)), \mathrm{Law}(x^{1,N}(t))\right) \le \mathrm{const}(p_0)\cdot N^{-\gamma/6}. \tag{3.4.2}$$

Учитывая (3.4.1) и (3.4.2), по теореме о двойном пределе мы можем «замкнуть» следующую диаграмму,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Law}(x^{1,N}(t)) & \xrightarrow[n\to\infty]{\text{равномерно по } t} & \mathrm{Law}(x(t)) \\ \downarrow & & \\ \mu^{1,N} & & \end{array}$$

и получить, что $\mathrm{Law}(x(t))$ слабо сходится при $N \to \infty$ к неподвижной точке

$\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}):$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Law}(x^{1,N}(t)) & \xrightarrow[n\to\infty]{\text{равномерно по } t} & \mathrm{Law}(x(t)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu^{1,N} & \longrightarrow & \mu \end{array}$$

Литература

[1] N. Antunes, C. Fricker, P. Robert, and D. Tibi. Stochastic networks with multiple stable points. Ann. Probab., 36(1):255278, 2008

[2] Shun-ichi Amari. Information geometry in optimization, machine learning and statistical inference, Front. Electr. Electron. Eng. China 2010, 5(3): 241–260.

[3] Shun-ichi Amari. Divergence, Optimization and Geometry, Neural Information Processing Lecture Notes in Computer Science Volume 5863, 2009, pp 185-193.

[4] P. Billingsley. Convergence of Probability Measures. John Wiley k Sons, New York, 1968.

[5] Benachour, S.; Roynette, B.; Talay, D.; Vallois, P. Nonlinear selfstabilizing processes. I: Existence, invariant probability, propagation of chaos. Stochastic Processes Appl. 75, No.2, 173-201 (1998).

[6] Benachour, S.; Roynette, B.; Vallois, P. Nonlinear self-stabilizing processes. II: Convergence to invariant probability. Stochastic Processes Appl. 75, No.2, 203-224 (1998).

[7] M. Benaïm and J.-Y. Le Boudec. A class of mean field interaction models for computer and communication systems. Performance Evaluation, 65 (11-12):823838, 2008.

[8] M. Bossy and D. Talay. A stochastic particle method for the McKean- Vlasov and the Burgers equation. Mathematics of Computation 66 (217): 157-192, 1997.

[9] A. Braides, M. Solci, E. Vitali. A derivation of linear elastic energies from pair-interaction atomistic systems.

[10] W. Braun and K. Hepp. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the $1/N$ Limit of Interacting Classical Particles. Commun. math. Phys. 56, 101–113 (1977).

[11] J. Brawn. B. Schmidt. On the passage from atomistic systems to nonlinear elasticity theory, 2012.

[12] M. Born, K. Huang. Dynamical theory of crystal lattices. 1964. Oxford.

[13] Bulinskij A.V., Central limit theorem for the solution of the multidimensional Burgers equation with random data, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, (Finland), 17, № 1, p. 11-22

[14] C. Graham and P. Robert. Interacting multi-class transmissions in large stochastic networks. Ann. Appl. Probab., 19(6):23342361, 2009.

[15] Kai Lai Chung. Markov chains with stationary transition probabilities. 1960. Springer.

[16] P. Dai Pra, W. J. Runggaldier, E. Sartori, and M. Tolotti. Large portfolio losses: A dynamic contagion model. Ann. Appl. Probab., 19(1):347394, 2009.

[17] Ju.L. Daleckii. M. G. Krein. Stability of solutions of differential equations in Banach space. Translations of Mathematical Monographs. Volume 43.

[18] D. Dawson and J. Gartner. Large deviations from the McKean-Vlasov limit for weakly interacting diffusions. Stochastic 20: 247-308, 1987.

[19] D. A. Dawson, J. Tang, and Y. Q. Zhao. Balancing queues by mean field interaction. Queueing Syst., 49:335361, 2005.

[20] P. Dupuis, M. Fischery. On the construction of Lyapunov functions for nonlinear Markov processes via relative entropy. Preprint.

[21] S. N. Ethier, T. G. Kurtz. Markov processes, characterization and convergence. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 1986.

[22] G. Gallavotti (ed.). The Fermi-Pasta-Ulam problem. Lecture Notes in Physics, 728. Springer. 2008.

[23] Gitterman M. The noisy oscillator. Singapore. World Scientific Publishing Co. Re. Ltd, 2005.

[24] A. D. Gottlieb, Markov Transitions and the Propagation of Chaos, arXiv:math/0001076.

[25] C. Graham. McKean-Vlasov Ito-Skorohod equation, andnofieardiffusions with discrete jump sets. Stochastic Processes andtheir Applications 40: 69-82, 1992.

[26] C. Graham, Th. G. Kurtz, S. Meleard, Ph. E. Protter, M. Pulverenti, D. Talay. Probabilistic models for nonlinear partial differential equations, Springer, 1995.

[27] G. H. Hardy, E. M. Wright. An Introduction to the Theory of Numbers. 4th edition, Oxford, 1975.

[28] A. Hurwitz and R. Courant. Theory of functions. 1968. Moscow.

[29] M. Kac. Foundations of kinetic theory. Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statist. Probability 3, 171-197 (1956).

[30] M. Kac. Probability and Related Topics in Physical Sciences. American' Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1976.

[31] V. N. Kolokoltsov. Nonlinear Markov Processes and Kinetic Equations (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010), Vol. 182.

[32] Th. Liggett. Interacting Particle Systems. Springer, 2005.

[33] G. Fayolle, V. A. Malyshev, M. V. Menshikov, Topics in the constructive theory of countable Markov chains, Cambridge university press, 1995.

[34] T. Funaki. A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 67 (3): 331–348. 1984.

[35] V.A. Malyshev. One-dimensional mechanical networks and crystals. Moscow Mathematical Journal, 2006, v, 6, No. 2, 353-358.

[36] V.A. Malyshev and A.D. Manita. Dynamics of Phase Boundary with Particle Annihilation. MPRF, 2009, pp. 575-584.

[37] D. R. McDonald and J. Reynier. Mean eld convergence of a model of multiple TCP connections through a buer implementing RED. Ann. Appl. Probab., 16(1):244294, 2006.

[38] McKean, H.P. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations Proc. Natl. Acad. Sci. USA 56, 1907-1911 (1966).

[39] H. P. McKean, Jr. Propagation of chaos for a class of nonlinear parabolic equations. Lecture Series in Differential Equations 7: 41-57. Catholic University, Washington, D. C., 1967.

[40] H. P. McKean, Jr. Fluctuations in the kinetic theory of gases. Communications in Pure and Applied Mathematics 28: 435-455, 1975.

[41] S. Meleard, S. Roelly-Coppoletta. A propagation of chaos result for a system of particles with moderate interaction. Stochastic Processes and their Applications 26 (1987) 317-332.

[42] S. Meleard. Asymptotic behavior of some interacting particle systems; McKean-Vlasov and Boltzmann models. Lecture Notes in Mathematics, 1627. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[43] S. Muzychka, K. Vaninsky. A class of nonlinear random walks related to the Ornstein-Uhlenbeck process. Markov Processes and Related Fields, vol. 17, num. 2, pp. 277-304, 2012.

[44] M. Nagasawa, H. Tanaka. Propagation of Chaos for Diffusing Particles of Two Types with Singular Mean Field Interaction, Probab. Th. Rel. Fields 71, 69-83 (1986)

[45] M. Nagasawa, H. Tanaka. On the Propogation of Chaos for Diffusion Processes with Drift Coefficients Not of Average Form. Tokyo J. Math. Vol. 10, No. 2, 1987.

[46] Karpelevich F. I., Rybko A. N. Thermodynamic Limit for the Mean Field Model of Simple Symmetrical Closed Queueing Network. Markov Processes and Related Fields. 2000, v. 6, p. 89–105.

[47] S. N. Laughton and A. C. C. Coolen. Macroscopic Lyapunov functions for separable stochastic neural networks with detailed balance. J. Statist. Phys., 80(1-2):375387, 1995.

[48] I. Niven. Irrational numbers. 1956, Math. Ass. of America.

[49] K. Oelschlager. A martingale approach to the law of large numbers for weakly interacting stochastic processes. Ann. Probab., 12(2):458479, 1984.

[50] H. Osada. Propagation of chaos for the two dimensional Navier-Stokes equation. Probabilistic Methods in Mathematical Physics. Academic Press, Boston, 1987.

[51] O. Penrose. Statistical mechanics of nonlinear elasticity. Markov Processes and Random Fields, 2002, 8, no. 2, 351-364.

[52] S. Pirogov, A. Rybko, A. Kalinina, M. Gelfand, Recombination processes and non-linear Markov chains, arXiv:1312.7653.

[53] T. Shiga, H. Tanaka. Central Limit Theorem for a System of Markovian Particles with Mean Field Interactions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 69, 439-459 (1985).

[54] Sznitman, A.-S. Topics in propagation of chaos. Calcul des probabilites, Ec. d'ete, Saint-Flour/Fr. 1989, Lect. Notes Math. 1464, 165-251 (1991).

[55] Tamura Y. On asymptotic behaviors of the solution of a non-linear diffusion equation. J. Fac. Sci. Univ. Tokio Sect. IA, Math. 1984, v. 31, p. 195–221.

[56] Y. Tamura. Free energy and the convergence of distributions of diusion processes of McKean type. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., 34 (2):443484, 1987.

[57] A. Rybko, S. Shlosman. Poisson hypothesis for information networks (A study in non-linear Markov processes), arXiv:math-ph/0303010.

[58] N. Vvedenskaya, Y. Suhov, V. Belitsky. A non-linear model of limit order book dynamics. arXiv:1102.1104v1 [math.PR] 5 Feb 2011.

[59] A. Yu. Veretennikov. On ergodic measures for McKean-Vlasov stochastic equations. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo methods. pp. 471-486. Springer. 2006.

[60] A. Yu. Veretennikov. O. A. Butkovsky, On asymptotics of Vaserstein's coupling for a Markov chain.

[61] A. M. Vershik. Kantorovich metric: initial history and little-known applications. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 133, No. 4, pp. , 1410-1417, 2006.

[62] Weinan E., Pingbing Ming. Cauchy-Born rule and the stability of crystalline solids: static problems. Arch. Rational Mech. Anal., 2006.

[63] Weinan E., Pingbing Ming. Weinan E., Pingbing Ming. Cauchy-Born rule and the stability of crystalline solids: dynamic problems.

[64] K. Yosida. Functional analysis, Springer, 1965.

[65] Н. Ахмед, К. Р. Рао, Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980.

[66] О. Браун, Ю. Кившарь. Модель Френкеля-Конторовой. 2008. Москва.

[67] Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2004.

[68] Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.

[69] Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. Физматлит, 1996.

[70] А. А. Власов. О вибрационных свойствах элекроноого газа. Журнал теоретической и эксперементальной физики. 1938. 8 (3): 291.

[71] А. А. Власов. Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения. Ученые записки МГУ. 1945. в. 75. кн. 2. ч. 1.

[72] Гихман И.И., Скороход. А.В. Теория случайных процессов. Т.1. М.: Наука, 1971.

[73] Р. Л. Добрушин. Уравнения Власова, Функциональный анализ и его приложения, 13:2 (1979), 48–58.

[74] Р. Л. Добрушин. Избранные работы по математической физике. М.: МЦНМО, 2007.

[75] В. А. Зорич. Математический анализ, часть II. М.:Наука, 1984.

[76] К. Ито, Г. Маккин, Диффуционные процессы и их траектории, Издателельство «Мир», Москва, 1968.

[77] А. А. Лыков, В. А. Малышев, С. А. Музычка. Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием. Теория вероятностей и ее применения, 57:4, стр. 794 – 799, 2012.

[78] В. А. Малышев. С. А. Музычка. Динамический фазовый переход в простейшей модели цепочки молекул. Теоретическая и математическая физика, т. 179, № 1, стр. 123-133, 2014 г.

[79] Р. А. Минлос. Введение в математическую статистическую физику. МЦНМО, Москва 2002.

[80] С. А. Музычка. Среднее время до разрыва цепочки из $N = 2, 3, 4$ осцилляторов. Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика. Механика, стр. 46-51, 2013.

[81] С. А. Музычка. Класс нелинейных марковских процессов, допускающих явное описание. Депонировано в ВИНИТИ 21.01.2014, №25-В2014.

[82] И. П. Корнфельд. Я. Г. Синай, С. В. Фомин, Эргодическая теория. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

[83] Н. Н. Ченцов . Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука, 1972.

[84] Ю. А. Розанов. Стационарные случайные процессы, М.: ФИЗМАТЛИТ, 1990. - 272 с. 2-е изд.

[85] А. Н. Ширяев. О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением. Современные проблемы математики. Вып. 8, стр. 3 – 78, М.: МИАН, 2007.

[86] А. Н. Ширяев. Вероятность — М.: МЦНМО, 2004, 2 т.

[87] П. Н. Ярыкин. Устойчивость нелинейного стохастического процесса, аппроксимирующего систему взаимодействующих частиц. — Теория вероятн. и ее примен. 51:2 (2006), 400–409

[88] П. Н. Ярыкин. Поведение нелинейного случайного процесса в окрестности его стационарных распределений. УМН, 61:4(370) (2006), 199–200