

Отзыв научного руководителя на диссертацию С. А. Музычки “Линейные и нелинейные марковские системы на прямой”, представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Работа посвящена изучению нескольких вероятностных моделей динамики большого числа частиц на прямой. В первой части диссертации изучается система с локальным взаимодействием, которая является простейшей моделью цепочки молекул, а затем рассматриваются системы частиц, приводящие к нелинейным марковским процессам.

Первая задача возникла из следующей проблемы. Рассмотрим цепочку частиц на прямой с взаимодействием ближайших соседей. Для реалистических взаимодействий, стремящихся к нулю на бесконечности, такая система может бесконечно существовать только при нулевой температуре (в состоянии с минимумом энергии), но ее устойчивость при внешнем динамическом возмущении (растяжении) – открытая проблема. Один из возможных способов решения – найти окрестность точки минимума энергии, из которой траектория системы (при гамильтоновой динамике) не выходит на протяжении всего времени (иначе говоря частицы не разбегаются, то есть цепочка не разрушается). Получены двухсторонние оценки на параметры такой области и, более того, найден фазовый переход по величине внешней растягивающей силы F . Стоит также отметить, что несмотря на очевидную простоту рассматриваемой модели, основной результат нетривиален и использует теоретико-числовые оценки.

Известно, что при ненулевой температуре такая цепочка является метастабильной, то есть равновесной вероятностной меры Гиббса не существует. Иначе говоря, расстояния между соседними частицами могут становиться сколь угодно велики. Рассматривается задача нахождения асимптотики времени достижения некоторого расстояния между любыми двумя соседними осцилляторами. При этом рассматривается случай, когда на систему связанных гармонических осцилляторов действует малый возмущающий фактор, являющийся белым гауссовским шумом. Доказывается, что при определенном скейлинге параметров, соответствующее время разрыва слабо сходится к случайной величине, распределение которой совпадает с временем выхода броуновского движения из определенного многомерного компакта.

Во второй части диссертации рассматривается система из N взаимодействующих частиц типа «среднего поля». Утверждается, что при соответствующем скейлинге параметров первая компонента системы при $N \rightarrow \infty$ должна сходиться к соответствующему нелинейному марковскому процессу, т.е. такому чьи вероятности (интенсивности) переходов зависят не только от положения частицы, но и от всего распределения системы в целом. Сначала доказывается теорема существования и единственности для

соответствующего предельного процесса; приводятся примеры, показывающие, что в рассматриваемой модели могут иметься эффекты, отсутствующие в классическом марковском случае: а именно, неединственность инвариантной меры, интегралы движения и прочее; доказываются теоремы об аппроксимации предельного нелинейного марковского процесса соответствующими системами взаимодействующих частиц как на конечных интервалах времени, так и для всех $t \geq 0$; при определенных условиях на функцию взаимодействия устанавливается сходимость нелинейного марковского процесса к одной из инвариантных мер, в зависимости от начального распределения.

Диссертация состоит из 4 разделов. В первом из них дается введение и детальные определения основных понятий и конструкций, необходимых в дальнейшем. Во втором разделе рассматривается линейная гамильтонова система (цепочка гармонических осцилляторов) без диссипации под действием различных возмущающих факторов (рассмотрены случаи постоянной внешней силы и белого гауссовского шума). В третьем разделе вводится динамика на системе из N частиц на дискретной прямой, взаимодействующих друг с другом. Изучаются свойства, возникающего в пределе нелинейного марковского процесса. В последнем, четвертом, разделе устанавливается сходимость конечной системы взаимодействующих частиц к предельному процессу, а также сходимость соответствующего нелинейного марковского процесса к одной из инвариантных мер.

В заключение скажу, что диссертация написана четко, на хорошем математическом языке. Весьма важно, что диссертант прочитал и освоил много смежных работ, что видно по обширной библиографии, и написал развернутое введение.

Диссертант показал, что у него есть все необходимые качества творческого научного работника, способного проводить глубокие исследования и работать на перекрестке разных математических дисциплин. Диссертация удовлетворяет всем необходимым требованиям для кандидатских диссертаций, а диссертант безусловно, заслуживает присвоения ему искомой степени.

Доктор физико-математических наук, профессор,
зав. лабораторией больших случайных систем механико-математического факультета МГУ

В. А. Малышев