

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления
Лаборатория управления и навигации

На правах рукописи

Богданов Олег Николаевич

**Методика согласованного моделирования измерений
инерциальных датчиков, траекторных параметров
объекта с приложением к задачам инерциальной и
спутниковой навигации.**

Специальность 01.02.01 теоретическая механика
Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., А.А. Голован

Москва, 2014 г.

Содержание

Введение	6
Глава I. Вводные понятия и справочные соотношения	20
1 Основные обозначения и соотношения	20
1.1 Основные обозначения, понятия и числовые характеристики	20
1.2 Взаимная ориентация систем координат $O\xi$, $O\eta$, Ox и Os	23
1.3 Географические координаты точки	24
1.4 Соотношения для линейных и угловых скоростей в географической системе Ox	25
1.5 Сила тяжести и сила тяготения	26
1.6 Кинематические и динамические уравнения	27
1.7 Моделирование траекторных параметров движения объекта	27
1.7.1 Пример моделирования траектории на основе аналитического задания траекторных параметров	29
1.7.2 Использование экспериментальных данных для моделирования согласованной траектории	30
Глава II. Задачи согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков, траекторных параметров объекта и их приложения в инерциальной навигации	32
Введение	32
2 Моделирование показаний идеальных инерциальных датчиков	34
2.1 Общие положения	34
2.2 Моделирование показаний гироскопов	35
2.2.1 Вычисление идеальных показаний гироскопов. Частный случай интегрируемости уравнения Пуассона	36
2.2.2 Вычисление идеальных показаний гироскопов путем прямого численного интегрирования	40
2.2.3 Краткие выводы	44
2.3 Вычисление показаний ньютонометров	44
2.3.1 Модельные уравнения записаны в осях инерциальной системы $O\xi$. Частный случай интегрируемости	45

2.3.2	Модельные уравнения записаны в осях географической системы Ox . Частный случай интегрируемости	49
2.3.3	Модельные уравнения записаны в приборной системе Oz . Частный случай интегрируемости	52
2.3.4	Вычисление идеальных показаний ньютонометров путем прямого численного интегрирования	54
2.3.5	Краткие выводы	56
2.4	Задача согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков двух БИНС, расположенных на одном объекте	57
2.5	Особенности интегрирования модельных уравнений БИНС с точки зрения выполнения нулевого теста	60
2.5.1	Решение модельных уравнений в системе координат, в осях которой моделировались показания ньютонометров	60
2.5.2	Особенности имитации показаний ньютонометров	62
2.6	Моделирование траекторных параметров в полярных районах	66
3	Тестирование уравнений ошибок БИНС	71
4	Вычисление показаний идеальных инерциальных датчиков при калибровке	75
4.1	Описание процедуры калибровки	77
4.1.1	Общий случай расположения БИНС на стенде	77
4.1.2	Частный случай расположения БИНС на стенде. Три цикла калибровки. Матрица ориентации	78
4.2	Вычисление показаний гироскопов	80
4.3	Вычисление показаний ньютонометров	81
4.3.1	Характеристика разнесения чувствительных масс ньютонометров	81
4.3.2	Алгоритм вычисления показаний ньютонометров	82
4.4	Результаты моделирования	84
5	Моделирование вибрации объекта на этапе начальной выставки БИНС на неподвижном основании	85
5.1	Вычисление показаний инерциальных датчиков на неподвижном основании	86
5.2	Модель вибрации и анализ влияния вибрации на точность определения ориентации	86
5.2.1	Модель вибрации постоянной частоты	86

5.2.2	Ошибка в определении ориентации, вызванная вибрацией	88
5.3	Многошаговые методы решения уравнения Пуассона	89
5.3.1	Уравнение Пуассона в кватернионах	89
5.3.2	Связь кватерниона ориентации с матрицей ориентации и углами ориентации	90
5.3.3	Описание и примеры многошаговых методов	91
5.4	Сравнительный анализ многошаговых методов на вибрационных воздействиях	91
	Заключение к главе II	95
	Глава III. Некоторые задачи моделирования спутниковых навигационных систем	98
	Введение	98
6	Моделирование траектории навигационного спутника	99
6.1	Вычисление высокоточной траектории спутника	100
6.1.1	Краткая характеристика данных IGS	100
6.1.2	Построение априорной траектории без использования эфемеридных данных реального времени	101
6.1.3	Уравнения движения спутника в отклонениях от априорной траектории	104
6.1.4	Дискретизация модели задачи	105
6.1.5	Уравнения корректирующих измерений	106
6.1.6	Формирование скорректированной траектории навигационного спутника	107
6.2	Высокоточное определение кеплеровых элементов орбиты спутника . .	108
6.2.1	Кеплеровы элементы орбиты	108
6.2.2	Алгоритм определения кеплеровых элементов по трем положениям спутника на орбите	109
6.2.3	Результаты моделирования	114
6.3	Определение внешних возмущений, действующих на спутник	115
7	Моделирование ионосферной погрешности спутниковых измерений	117
7.1	Общая информация о ионосфере и ионосферной погрешности спутниковых измерений	117

7.2	Моделирование ионосферной погрешности с помощью информации службы CODE	119
7.2.1	Краткое описание модели на основе сферических гармоник	119
7.2.2	Краткая характеристика данных, предоставляемых центром CODE	120
7.2.3	Вычисление ПЭС в дискретной точке	122
7.2.4	Вычисление наклонного ПЭС	123
7.3	Моделирование ионосферы при помощи измерений двухчастотного приемника	124
7.3.1	Модель кодовых измерений	124
7.3.2	Модель фазовых измерений	125
7.3.3	Коррекция сбоев фазы	127
7.4	Содержание комбинированного подхода	128
7.4.1	Оценка величины B	128
7.4.2	Сравнение ионосферных погрешностей измерений двух близко расположенных приемников	129
8	Приложение	130
8.1	Вычисление положения спутника системы GPS	130
8.2	Вычисление положения спутника системы ГЛОНАСС	132
8.3	Вычисление положения спутника в постобработке	133
Заключение к главе III		133
Заключение		134
Список литературы		136

Введение

Актуальность темы

Методы математического моделирования широко используются при исследовании прикладных задач в различных областях науки и техники. Это в полной мере относится к задачам навигации и управления, в которых имитаторы (аппаратные, компьютерные) являются важной составляющей разработки и тестирования соответствующего программно-математического обеспечения (ПМО).

Аппаратные имитаторы включают в свой состав датчики первичной информации конкретного приборного комплекса, управляемые стенды для задания требуемого углового движения корпуса объекта и т.п. Так, например, полноразмерные динамические стенды использовались при разработке и тестировании системы управления и навигации космического корабля Буран. Однако такие стенды могут позволить себе достаточно крупные компании, круг их пользователей весьма ограничен.

Для задач разработки и тестирования алгоритмов интегрированных навигационных систем во многих ситуациях можно обойтись компьютерными имитаторами, которые являются весьма эффективным инструментом исследования прикладных задач.

Компьютерный имитатор представляет собой программу, моделирующую, с той или иной степенью полноты, конкретную прикладную задачу. Такая программа может быть установлена на обычный персональный компьютер инженера-разработчика ПМО. Современные возможности персональных компьютеров таковы, что они позволяют осуществлять требуемый объем вычислений за разумное время, что во многом предопределяет эффективность использования имитаторов в прикладных исследованиях.

Выбор темы диссертации был обусловлен теоретическими и практическими работами лаборатории управления и навигации МГУ в области инерциальной и спутниковой навигации. В части инерциальной навигации далее будет рассматриваться только класс бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС).

При проведении этих работ значимая роль отводилась компьютерным имитаторам разноплановых задач инерциально-спутниковой навигации. К числу упомянутых задач относятся:

- задачи калибровки инерциальных датчиков БИНС;
- задачи выставки БИНС на неподвижном и подвижном основаниях;

- задачи автономного инерциального счисления БИНС;
- задачи коррекции БИНС,

а также некоторые родственные задачи спутниковой навигации:

- задача определения точных траекторных параметров навигационных спутников систем ГЛОНАСС и GPS при помощи данных международного центра IGS (International Global Navigation Satellite Systems Service);
- задача моделирования ионосферной задержки спутникового радиосигнала при помощи данных международного центра CODE и двухчастотных фазовых измерений.

Последние две задачи оказались востребованными и для аппаратных имитаторов спутниковых навигационных систем.

Очевидны требования, предъявляемые к математическому обеспечению компьютерного имитатора навигационных задач. Они состоят в том, что алгоритмы должны обеспечивать универсальность и полноту имитационного моделирования, при этом, оставаясь достаточно простыми в вычислительном плане и использующими минимальный набор исходных данных для моделирования.

Поясним приведенные положения.

Как известно [24], любая инерциальная навигационная система предназначена для определения движения материальной точки – приведенной чувствительной массы блока ньютонометров – и движения приборной системы координат, отождествляемой с корпусом объекта. Движение материальной точки и приборной системы координат удовлетворяет известным уравнениям теоретической механики, которые должны учитывать принятые в навигации модели формы Земли, ее поля тяготения, вращение Земли и т.п. Опора на эти инвариантные механические объекты и понятия, собственно, и определяет универсальность имитатора. С практической точки зрения это означает, что имитатор без каких-либо модификаций может быть использован для моделирования функционирования БИНС разного класса точности: от точных систем, построенных на лазерных, волоконно-оптических гироскопах, до грубых систем на MEMS-датчиках. Это достигается только за счет имитации первичной навигационной информации – идеальных показаний идеально установленных инерциальных датчиков (в общем случае – интегрирующих): ньютонометров (акселерометров), измеряющих удельную внешнюю силу, и гироскопов, измеряющих абсолютную угловую скорость объекта.

Далее, моделируя инструментальные погрешности инерциальных датчиков в соответствии с характеристиками заданного класса точности инерциальной системы, либо используя записи стендовых экспериментов конкретных инерциально-измерительных блоков, можно простым суммированием показаний идеальных инерциальных датчиков и реализаций инструментальных погрешностей, определить "реальные" измерения инерциальных датчиков.

При моделировании важно обеспечить выполнение так называемого нулевого теста, когда по сформированным показаниям идеальных инерциальных датчиков бортовые алгоритмы БИНС воспроизводят исходную траекторию (координаты, линейные скорости, углы ориентации) с максимальной точностью, в идеале, абсолютно точно. Для обеспечения нулевого теста необходимо решение ряда прямых и обратных задач механики: определения движения по известным силам и скоростям и определения сил и скоростей движения по известной траектории. Задача выполнения нулевого теста при своей кажущейся простоте и очевидности содержит, однако, ряд тонкостей, которые нуждается в аккуратном исследовании. В диссертационной работе постановкам и решению задач моделирования показаний идеальных инерциальных датчиков БИНС уделено значительное внимание.

Исходные данные для моделирования представляют собой следующий ограниченный набор траекторных параметров (с невысокой частотой регистрации, например, 1 гц): отсчеты времени, координаты (широта, долгота, высота) характерной точки объекта, углы ориентации корпуса, возможно, начальное значение линейной скорости движения.

Такие данные могут быть подготовлены, например, с помощью так называемого аналитического имитатора, когда используется явное формульное представление указанных траекторных параметров. Способы построения такого имитатора приведены в диссертации.

Другой вариант – использование экспериментальных, телеметрических данных. Как правило, при разработке и тестировании конкретного навигационного комплекса проводятся его всесторонние испытания с регистрацией выходных навигационных параметров. Эти параметры (координаты, скорости, углы ориентации) естественно использовать для моделирования параметров опорной идеальной траектории, тем более, что такая траектория будет соответствовать классу движений объекта. Особенности использования телеметрических данных также подробно исследованы в диссертации.

Отметим, что нередко имитацию показаний инерциальных датчиков осуществляют, например, в авиационных приложениях, на основе трудоемкого моделирования аэродинамических характеристик, законов тяги двигателя и т.д. Предложенная в диссертации методика является простой, обоснованной, универсальной в плане воз-

можности ее применения для моделирования как различного типа навигационных приложений – морских, наземных, подземных, воздушных, космических, – так и для моделирования функционирования БИНС разного класса точности.

Тестирование разработанных математических моделей и алгоритмов на конкретных приложениях имеет двоякий смысл. С одной стороны – это собственно тестирование предлагаемых моделей и алгоритмов, с другой стороны – тестирование является составной частью исследования конкретного приложения.

Перечислим основные задачи инерциально-спутниковой навигации, вопросы математического моделирования которых были исследованы в диссертации. К задачам инерциальной навигации относятся:

1. Задача моделирования показаний идеальных инерциальных датчиков (обратная задача механики) при использовании в навигационном счислении разных опорных систем координат: инерциальной, географической (связанной с местоположением объекта) и приборной (связанной с корпусом объекта).
2. Задача согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков двух БИНС, установленных на одном объекте в разных точках: базовая и резервная БИНС (например, для задачи начальной выставки на подвижном основании резервной БИНС при помощи информации, доставляемой базовой БИНС).
3. Задача моделирования с высокой частотой показаний инерциальных датчиков для тестирования алгоритмов численного интегрирования кинематических уравнений БИНС.
4. Задача сравнительного анализа алгоритмов численного интегрирования кинематических уравнений при помощи имитации вибрационных воздействий на этапе начальной выставки БИНС.
5. Задача имитации калибровки инерциальных датчиков БИНС на одноосном поворотном стенде с целью последующего тестирования алгоритмов калибровки.
6. Задача моделирования траекторных параметров движения объекта в полярных районах.

Из области спутниковой навигации в диссертации рассмотрены следующие задачи:

- Задача определения в режиме постобработки точных траекторных параметров (координат и компонент вектора скорости) навигационных спутников систем ГЛОНАСС и GPS, а также внешних возмущений, действующих на спутники, с помощью данных сервиса IGS.

- Задача моделирования ионосферной задержки спутникового радиосигнала при помощи данных международного центра CODE и двухчастотных измерений (в частности, для возможности полунатурного моделирования первичных спутниковых измерений).

Проведенные исследования, хотя и основанные на прикладных задачах, не были связаны с какими-либо конкретными характеристиками инерциальных датчиков, с конкретным типом навигационного приложения. Это означает, что была разработана методика, которая может быть использована при моделировании задач инерциально-спутниковой навигации для БИНС разного типа, разного класса точности, разных сфер применения.

Все вышеизложенное обосновывает актуальность выбранной темы исследования.

Обзор литературы

Теория инерциальной навигации начала активно развиваться примерно в середине 20-го века [46] и с тех появилось большое количество монографий, содержащих подробное описание основных математических моделей. Не претендуя на полноту обзора, выделим следующие работы: Андреева В.Д. [5], Бабича О.А. [7], Бабиченко А.В. [8], Бранца В.Н. [18], Бромберга П.В. [19], Веремеенко К.К. [3], Голована А.А. [24], Дмитриева С.П. [26], Жбанова Ю.К. [30], Ишлинского А.Ю. [32], Каршакова Е.В. [34], Климова Д.М. [35], Мак-Клур К.Л. [40], Парусникова Н.А. [45], Распопова В.Я. [41], Салычева О.С. [39], Faurte P. [61], Savage P. [70] и др.

В последнее время стали появляться опубликованные работы, непосредственно связанные с вопросами моделирования показаний инерциальных датчиков, например, Savage P. [70], Терешкова В.М. [50], однако, в указанных работах отражены частные аспекты моделирования, которые возникают в реальных навигационных приложениях.

Описание методики использования кубических сплайнов, которая применяется для моделирования показаний инерциальных датчиков как интегрирующих датчиков, содержится во многих изданиях, например, в [25].

Калибровка инерциального блока как правило осуществляется с помощью высокоточных прецизионных стендов [29]. Парусниковой Н.А. была предложена методика проведения калибровки грубых инерциальных систем без использования высокоточного стенда. Соответствующие алгоритмы получили распространение и используются на ряде профильных предприятий. Среди характерных работ, описывающих методику калибровки на грубом стенде, можно выделить статьи Вавиловой Н.Б. [21] и Козлова А.В. [36].

Достаточно большое количество печатных изданий посвящено вопросам комплексирования инерциальных и спутниковых навигационных систем. Среди основных работ обозначим следующие – Степанова О.А. [49], Харина Е.Г. [51], Парусникова Н.А. [44], – а также ряд зарубежных работ: Farrell J. [60], Yang Y. [72], Kim J. [64], Lipman J. [67], Moya D. [68], Shengu H. [69]. Отдельно отметим работы, в которых проводились исследования уравнений ошибок: Емельянцева Г.И. [28], Голована А.А. [25].

Среди основных работ, посвященных описанию и изучению многошаговых численных методов для интегрирования уравнений инерциальной навигации, особо отметим Savage P. [70], Панова А.П. [43]. В [43] представлен вывод и широкий обзор численных методов с указанием порядка аппроксимации, а в [70] приведены соотношения для получения субоптимального алгоритма при произвольном количестве тактов съема показаний инерциальных датчиков в рамках одного шага интегрирования уравнений навигации. В статье Алексовой Е.Ю. [2] описаны соотношения для вычисления кватернионов ориентации при наличии вибрации, наложенной на коническое движение. Математический аппарат кватернионов применительно к задачам механики твердого тела достаточно хорошо и полноценно изложен в работах Челновикова Ю.Н. [53] и Амелькина Н.И. [4].

Подробное описание работы спутниковых навигационных систем содержится в первую очередь в интерфейсных контрольных документах систем GPS и ГЛОНАСС [22], [62]. Подробное описание всех алгоритмов спутниковой навигации, включая детальное описание характерных погрешностей первичных спутниковых измерений, приводится в монографиях, например, у Leick A. [65], Hofmann-Wellenhof B. [63], Голована А.А. [20], Соловьева Ю.А. [48], Конина В.В. [38], Перова А.И. [23], Шебшаевича В.С. [54].

Описание технической стороны получения эфемеридных данных высокого уровня точности содержится, например, в Вестнике спутниковой системы ГЛОНАСС [47]. В настоящей работе для получения высокоточной траектории навигационного спутника используется теория калмановской фильтрации, с которой можно познакомиться, например, в трудах Калмана Р.Е. [33], Браммера А.Е. [17], а также в методических пособиях Парусникова Н.А. [1], [25].

Модели, связывающие кеплеровы элементы орбиты с декартовыми координатами содержатся в классической литературе по небесной механике, например: Балк М.Б. [9], Дубошин Г.Н. [27], Эльясберг П.Е. [55], Белецкий В.В. [10].

Обширная литература посвящена исследованиям ионосферных погрешностей спутниковых измерений. Описание классической модели Клобухара приведено в контролльном документе спутниковой системы GPS [62]. Модели, использующие детальную информацию о состоянии ионосферы, приводятся в работах Афраймовича Э.Л. [6] и Иванова В.Ф. [31]. Модели, использующие первичные спутниковые измерения,

содержатся в [65], [66].

Содержание работы

Сначала охарактеризуем круг задач инерциальной навигации, которые рассмотрены в диссертации.

Моделирование показаний инерциальных датчиков. К инерциальным датчикам относятся гироскопы (датчики угловой скорости) и ньютонометры (акселерометры), которые измеряют, соответственно, абсолютную угловую скорость объекта, и удельную внешнюю силу, действующую на объект. Задача определения показаний инерциальных датчиков по заданным траекторным параметрам является обратной задачей механики и поэтому содержит ряд особенностей, которые нуждаются в аккуратном исследовании.

Для отработки алгоритмов интегрированных навигационных систем в большинстве случаев не возникает необходимости в тщательном моделировании показаний инерциальных датчиков. Вполне достаточно использовать частные случаи интегрируемости уравнений инерциальной навигации, основанные на принимаемых гипотезах о характере движения объекта. Исключение составляют приложения, связанные с исследованием многошаговых методов численного интегрирования. При моделировании показаний инерциальных датчиков возникает требование выполнения нулевого теста – навигационное решение, полученное с помощью вычисленных показаний датчиков должно повторять с высокой точностью (в идеале, абсолютно точно) траекторные параметры – координаты, скорости и углы ориентации, которые легли в основу моделирования инерциальных датчиков. При этом необходимо обращать внимание на возможное возникновение вычислительной неустойчивости рассматриваемых разностных схем.

При сравнительном изучении различных многошаговых алгоритмов интегрирования измерений гироскопов возникает необходимость детально моделировать показания интегрирующих датчиков. Инерциальные датчики являются, как правило, интегрирующими и измеряют не абсолютные угловые скорости и удельные внешние силы, а интегралы от этих величин на интервале опроса. Моделирование показаний интегрирующих датчиков на базе экспериментальных траекторных данных предполагает использование аппарата кубических сплайнов для вычисления соответствующих интегралов.

Весьма распространены приложения, когда на объекте располагаются две БИНС – базовая и резервная – и требуется осуществить начальную выставки резервной БИНС по информации от базовой БИНС. Для отработки навигационных алгоритмов совместного использования двух (или нескольких) систем необходимо согласованно

моделировать показания их инерциальных датчиков.

В задаче калибровки инерциально-измерительного блока оцениваются основные виды инструментальных погрешностей: смещения нулей, погрешности масштабов и взаимные перекосы. Тестирование различных алгоритмов калибровки также целесообразно осуществлять на имитаторе. При моделировании показаний инерциальных датчиков в задаче калибровки требуется учитывать внутреннее разнесение чувствительных масс ньютонометров и смещение инерциально-измерительного блока относительно оси вращения стенда с учетом возможных угловых ошибок установки.

Тестирование уравнений ошибок. Уравнения ошибок получаются путем линеаризации уравнений инерциальной навигации в окрестности навигационного решения и используются для различных целей. Выделим основные:

- уравнения ошибок устанавливают связь между инструментальными погрешностями и конечными ошибками навигационного решения;
- уравнения ошибок лежат в основе алгоритмов коррекции;
- уравнения ошибок позволяют в каждом конкретном случае судить о необходимости введения в алгоритм коррекции обратных связей.

Тестирование упрощенных уравнений ошибок основывается на том соображении, что для инерциальных навигационных систем высокого класса точности решение уравнений ошибок не должно сильно отличаться от прямой разности между истинными координатами, компонентами вектора скорости и параметрами ориентации движения объекта и полученными в автономном режиме инерциальном навигации.

Выделение в отдельный пункт этого материала (при всей его очевидности) связано только с тем, что в литературе нередко используются без должного обоснования упрощенные модели уравнений ошибок БИНС, содержащие методические погрешности. Тестирование таких моделей легко осуществить с помощью предлагаемого полноценного имитатора.

Сравнительный анализ многошаговых численных методов при наличии вибрации. На этапе начальной выставки определяется ориентация объекта, а сам объект при этом остается неподвижным. Для неподвижных объектов, например, при включенным двигателем характерна вибрация, которая может вносить определенную погрешность в алгоритм начальной выставки. Указанная погрешность зависит от частоты работы инерциальных датчиков и частоты вибрации. Имитация вибрации дает возможность проводить сравнительный анализ различных многошаговых методов численного интегрирования уравнения Пуассона, описывающего изменение ориентации объекта, и отвечать на вопрос о выборе оптимального алгоритма для данного характерного диапазона частот вибрации.

В работе представлена методика анализа многошаговых методов для различных диапазонов рабочих частот инерциальных датчиков и частот вибрации с помощью имитации типовой вибрации.

Далее остановимся на рассмотренных в диссертации задачах спутниковой навигации.

Высокоточное определение траектории навигационного спутника. Характерная точность определения координат навигационных спутников в режиме реального времени по эфемеридным данным составляет 1-3 метра. Непрерывное наблюдение за движением навигационных спутников, осуществляющееся на станциях мониторинга, позволяет через некоторое время определять координаты спутников с точностью 2-3 см. Высокоточные координаты спутников становятся доступны в сети Internet с дискретом 15 минут.

Задача определения координат спутника в произвольный момент времени с высокой точностью возникает в различных приложениях, связанных с высокоточным позиционированием (например, в задаче аэрогравиметрии). Также возможность построения высокоточной траектории навигационного спутника востребована при создании аппаратного имитатора спутниковых радиосигналов для предоставления пользователям дополнительных возможностей для отработки широкого спектра навигационных алгоритмов.

В работе представлен алгоритм, позволяющий восстановить траекторию навигационного спутника на заданном отрезке времени с частотой работы спутникового приемника на уровне точности предоставляемых данных. Задача ставится как задача оценивания, в основе ее решения лежит сглаживающий фильтр Калмана.

Моделирование ионосферной погрешности спутниковых измерений. Задача оценки ионосферной погрешности спутниковых сигналов также является неотъемлемой задачей, возникающей в высокоточных приложениях.

В работе рассматриваются два подхода к моделированию ионосферной погрешности. Один подход базируется на вычислении полного электронного содержания на пути прохождения спутникового радиосигнала с помощью коэффициентов разложения величины электронного содержания в ряд по сферическим гармоникам. Указанные коэффициенты предоставляются в сети Internet на профильных сайтах. Другой подход заключается в использовании комбинаций первичных фазовых спутниковых измерений.

В работе обоснован новый комбинированный алгоритм, использующий оба перечисленных подхода. Алгоритмы моделирования ионосферной погрешности также целесообразно включить в комплекс программно-математического обеспечения аппаратного спутникового имитатора.

Научная новизна

1. Разработана и продемонстрирована на конкретных разноплановых приложениях методика моделирования идеальных показаний идеально установленных инерциальных датчиков в различных опорных системах координат, включающая согласованное моделирование основных траекторных параметров с целью последующего исследования задач инерциально-спутниковой навигации.
2. Разработана и обоснована методика сравнительного анализа численных методов определения ориентации при наличии вибрации объекта на этапе начальной выставки БИНС.
3. Решена задача высокоточного восстановления в режиме постобработки траектории навигационных спутников систем GPS и ГЛОНАСС (в перспективе и Galileo) на произвольном интервале времени при помощи данных международного сервиса IGS.
4. Предложен вариант постановки и решения задачи моделирования ионосферной задержки спутниковых измерений на основе комбинации двухчастотных фазовых измерений и данных центра CODE.

Практические применения

Разработанные алгоритмы моделирования могут быть полезны для широкого круга производителей и потребителей инерциальных и спутниковых навигационных систем: ЗАО "Инерциальные Технологии Технокомплекса", ФГУП "ГосНИИАС", ОАО "Пермская научно-производственная приборостроительная компания" и др.).

В частности, совместно с ОАО "МИЭА" проводилась следующая работа:

1. На базе телеметрических данных полета самолета моделировались показания инерциальных датчиков для отработки алгоритма коррекции.
2. Моделировались показания инерциальных датчиков для сравнительного анализа многошаговых численных методов интегрирования на типовых выражах.
3. Для сравнительного анализа многошаговых методов определения ориентации объекта моделировалось вибрационное воздействие на этапе начальной выставки.

Существенная часть представленных в работе алгоритмов в настоящее время внедряется в аппаратный спутниковый Имитатор ИМ - 2 разработки ОАО "МКБ "Компас".

Также рабочие материалы по вопросам моделирования показаний инерциальных датчиков используются в настоящее время в ФГУП "ГосНИИАС" и ОАО "ЦНИИ-АГ".

Структура работы

Работа состоит из введения, трех глав и заключения.

Первая глава носит справочный характер и содержит основные понятия, обозначения, используемые соотношения, а также известные подходы к взаимно согласованному моделированию траекторных параметров движения объекта.

Вторая глава посвящена построению программно-математического обеспечения имитаторов для различных приложений в инерциальной навигации. Из рассмотренных подзадач и алгоритмов выделим следующие:

- Алгоритмы моделирования показаний идеальных инерциальных датчиков: ньютонометров и гироскопов. Представлены алгоритмы для моделирования показаний ньютонометров в различных системах координат и проведен их сравнительный анализ. Приведены, как алгоритмы, базирующиеся на частных случаях интегрируемости модельных уравнений инерциальной навигации, так и алгоритмы, позволяющие рассматривать инерциальные датчики как интегрирующие. Отдельно описан алгоритм согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков и траекторных параметров двух БИНС, расположенных на одном объекте, и алгоритм моделирования типовой траектории движения объекта в приполярных областях.
- Задача тестирования уравнений ошибок инерциальной навигации.
- Алгоритм моделирования показаний инерциальных датчиков при калибровке. Алгоритм учитывает угловые ошибки расположения БИНС относительно калибровочного стенда и внутреннее разнесение друг относительно друга чувствительных масс ньютонометров.
- Метод сравнительного анализа многошаговых численных методов определения ориентации при наличии вибрации объекта на этапе начальной выставки.

Третья глава посвящена решению задач, связанных с моделированием в спутниковой навигации, которые могут быть использованы при создании аппаратного имитатора спутниковых радиосигналов. Представлены следующие алгоритмы:

- Алгоритм высокоточного моделирования траекторий навигационных спутников.
- Алгоритмы вычисления кеплеровых элементов орбиты спутника и действующих на спутник внешних возмущений как функций времени.
- Различные подходы к моделированию ионосферной ошибки спутниковых измерений.

В приложении приводятся стандартные алгоритмы определения траекторий навигационных спутников систем GPS и ГЛОНАСС по эфемеридным данным реального времени в соответствии с контрольными документами [22], [62].

Публикации по теме диссертации

По теме диссертации были опубликованы следующие работы:

1. Богданов О.Н. Уточнение траекторных параметров навигационных спутников систем GPS и ГЛОНАСС при помощи данных сервиса IGS // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. 2009. Выпуск 3. С. 53-56. (Реферируемый журнал из перечня ВАК).
2. Bogdanov O.N. Fomichev A.V. Simulation of angular velocity sensor measurements using telemetry data on the motion of an object. Moscow University Mechanics Bulletin. 2014. V. 69. no.3. P. 40-47. (Реферируемый журнал из перечня ВАК).
3. Богданов О.Н., Вавилова Н.Б., Голован А.А., Демидов О.В. Особенности совместной обработки первичных измерений спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС и GPS в геофизических приложениях // Современные проблемы математики и механики. 2009. Том 1. С. 180-199.
4. Богданов О.Н., Коростелева С.С., Кухтевич С.Е., Фомичев А.В. О выборе алгоритма и тактовой частоты расчета матрицы ориентации для бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Труды МИЭА. 2010. Выпуск 2. С.60-67.
5. Bogdanov O.N., Cepc A. Precise orbit determination for GPS and GLONASS satellites on the basis of IGS data. In: Proceedings of 5th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. Istanbul, 2011. P. 915-919. (Сборник входит в базу данных Scopus).

6. Козлов А.В., Смоллер Ю.Л., Юрист С.Ш., Богданов О.Н., Голован А.А. Результаты испытаний на яхте бескарданного гравиметра GT-X // Труды XIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, ОАО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор", Санкт-Петербург, 2012, стр. 172-174.
7. Bogdanov O.N., Golovan A.A. Simulation of measurements of strapdown inertial navigation system sensors. In: Proceedings of XX International Conference on Integrated Navigation Systems. Saint Petersburg, Concern "CSRI Elektropribor", 2013. P. 138-141.
8. Bogdanov O.N., Golovan A.A. Analysis of Kepler's elements of the navigation satellite's orbits on the base of precise IGS position information. In: Proceedings of 6th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. 2013. P. 271-275. (Сборник входит в базу данных Scopus).
9. Богданов О.Н., Фомичев А.В. Алгоритм имитации показаний инерциальных датчиков по траекторным данным // Труды МИЭА. 2013. Выпуск 6. С.46-59.
10. Богданов О.Н., Голован А.А. Об имитации идеальных показаний датчиков БИНС при произвольном движении объекта // Труды МИЭА. 2013. Выпуск 7. С.30-35.

Доклады на конференциях по теме диссертации

По теме диссертации были сделаны следующие доклады на конференциях и симпозиумах:

1. Уточнение траекторных параметров навигационных спутников при помощи данных сервиса IGS. Конференция молодых ученых, ЦНИИ "Электроприбор", 2006.
2. Моделирование ионосферной погрешности при помощи измерений двухчастотного приемника и данных центра CODE. Конференция молодых ученых, ЦНИИ "Электроприбор", 2007.
3. О возможности повышения точности аэрогравиметрии за счет уточнения данных об эфемеридах навигационных спутников и состоянии ионосферы. Симпозиум Международной ассоциации по геодезии, ЦНИИ "Электроприбор", 2007.

4. Повышение точности навигации с использованием системы ГЛОНАСС в режиме постобработки. Международный научно-технический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации". МАИ, 2009.
5. Precise orbit determination for GPS and GLONASS satellites on the basis of IGS data. Международная конференция по последним достижениям космических технологий, Стамбул, 2011.
6. Компьютерная имитация показаний инерциальных датчиков бескарданных инерциальных навигационных систем. Международная конференция по интегрированным навигационным системам, ЦНИИ "Электроприбор", 2013.
7. Analysis of Kepler's elements of the navigation satellite's orbits on the base of precise IGS position information. Международная конференция по последним достижениям космических технологий, Стамбул, 2013.

Благодарности

Автор выражает сердечную благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, Головану Андрею Андреевичу.

Автор также благодарит за помощь и полезные советы профессора Парусникова Николая Алексеевича, профессора Болотина Юрия Владимировича, ведущего научного сотрудника Вавилову Нину Борисовну и старшего научного сотрудника Козлова Александра Владимировича.

Глава I. Вводные понятия и справочные соотношения

1 Основные обозначения и соотношения

1.1 Основные обозначения, понятия и числовые характеристики

Основная часть обозначений, используемых в работе, соответствует обозначениям, принятым в [24].

Системы координат.

Обозначим через O условный центр Земли и свяжем с ней две системы координат. Инерциальную систему координат обозначим через $O\xi$. Ось $O\xi_3$ совпадает с осью вращения Земли, оси $O\xi_1$ и $O\xi_2$ взаимно перпендикулярны, находятся в экваториальной плоскости Земли и направлены на неподвижные звезды. Заметим, что введенная таким образом система координат, строго говоря, не является инерциальной, поскольку движение точки O не является прямолинейным, однако, в работе будет использоваться такой термин, поскольку оси данной системы не врашаются. Введем гринвичскую систему координат $O\eta$. Ось $O\eta_3$ совпадает с осью $O\xi_3$, $O\eta_1$ и $O\eta_2$ находятся в экваториальной плоскости Земли, ось $O\eta_1$ лежит в плоскости нулевого гринвичского меридиана. Будем считать, что в начальный момент времени t_0 системы $O\xi$ и $O\eta$ совпадают.

Через M обозначим некоторую фиксированную точку объекта (далее, под точкой M будем понимать приведенный центр БИНС – чувствительную массу пространственного ньютонаометра, эквивалентного трем одностепенным ньютонаометрам) и свяжем с ней географическую систему координат Mx , первая ось которой совпадает с направлением на Восток в точке M , вторая – с направлением на Север, третья ось совпадает с направлением географической вертикали в точке M . Обозначим через Ms связанную (с рассматриваемым объектом) систему координат, оси которой будем считать направленными следующим образом: ось Ms_1 направлена в сторону правого крыла объекта, ось Ms_2 параллельна продольной оси объекта, ось Ms_3 дополняет систему Ms до правой тройки. Отметим, что на практике часто используются и другие варианты связанных систем координат, например, система, соответствующая авиационному ГОСТу, первая ось (ось X) которой направлена по продольной оси объекта, вторая ось (ось Y) направлена вдоль вертикальной оси, а третья ось (ось Z)

в сторону правого крыла. Будем также вместе с системами Mx и Ms рассматривать соосные им системы Ox и Os с началом в условном центре Земли O .

Обозначения для координат и скорости точки.

Введем для точки M географические координаты. Долготу $\lambda \in [-\pi, \pi]$ определим как угол между меридиональной полуплоскостью, проходящей через точку M , и полуплоскостью нулевого гринвичского меридиана. Географической широтой $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ назовем угол между нормалью к поверхности модельного эллипсоида Земли, проведенной через точку M , и плоскостью экватора $O\eta_1\eta_2$. Высоту h введем как расстояние от точки на поверхности модельного эллипсоида, через которую проходит нормаль, до точки M .

Введем также геоцентрическую широту $\varphi^0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ как угол между лучом \overline{OM} и плоскостью экватора $O\eta_1\eta_2$.

Пусть Op – произвольная система координат с началом в условном центре Земли. Тогда для радиус-вектора точки M в системе Op будем использовать обозначение $p = (p_1, p_2, p_3)^T$, для вектора абсолютной скорости точки – обозначение $v_p = (v_{p1}, v_{p2}, v_{p3})^T$. Вектор относительной скорости (относительно гринвичской системы $O\eta$) точки в проекциях на оси системы Op будем обозначать $V_p = (V_{p1}, V_{p2}, V_{p3})^T$. В том случае, когда скорость точки рассматривается в географической системе координат, нижний индекс x у компонент будем опускать: $v_x = (v_1, v_2, v_3)^T$, $V_x = (V_1, V_2, V_3)^T$.

Обозначения для угловой скорости.

Абсолютную угловую скорость произвольной системы координат Op в проекциях на собственные оси обозначим через $\omega_p = (\omega_{p1}, \omega_{p2}, \omega_{p3})^T$, относительную угловую скорость (относительно системы $O\eta$) – через $\Omega_p = (\Omega_{p1}, \Omega_{p2}, \Omega_{p3})^T$. У компонент угловых скоростей географической системы Ox нижний индекс x будем опускать: $\omega_x = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, $\Omega_x = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$.

Обозначения для матриц ориентации.

Через A_p всегда будем обозначать матрицу ориентации произвольной системы Op относительно инерциальной системы $O\xi$, через B_p – матрицу ориентации системы Op относительно гринвичской системы $O\eta$. Через L обозначим матрицу ориентации связанной системы Os относительно географической Ox .

Углы ориентации объекта.

Углом курса ψ называется угол между направлением на Север (осью Mx_2) и проекцией оси Ms_2 на плоскость Mx_1x_2 . Условимся отсчитывать угол курса от оси Mx_2 против часовой стрелки (отметим при этом, что в навигационных алгоритмах угол курса традиционно отсчитывается по часовой стрелке). Углом тангажа ϑ назовем

угол между осью Ms_2 и плоскостью Mx_1x_2 . Углом крена γ назовем угол поворота плоскости Ms_2s_3 вокруг оси Ms_2 относительно плоскости Mx_3s_2 .

Обозначения параметров модельного эллипсоида Земли.

Модельный эллипсоид Земли считается эллипсоидом вращения. Обозначим через a большую полуось модельного эллипса Земли, через e – его эксцентриситет. Для долготного и широтного радиусов кривизны модельного эллипса Земли введем обозначения, соответственно, R_E и R_N . Для вектора удельной нормальной силы тяготения будем использовать обозначение g^0 , для вектора силы тяжести – g , для вектора угловой скорости вращения Земли – u . Через μ обозначим константу гравитационного поля Земли, через C_{20} – параметр, характеризующий несферичность поля тяготения.

Приведем в виде таблицы значения введенных нами параметров.

$a = 6378136$ м	Большая полуось эллипса Земли
$e = 0.0818191$	Эксцентриситет эллипса Земли
$u = 7.2921151467 \cdot 10^{-5}$ рад/с	Угловая скорость вращения Земли
$\mu = 3986005 \cdot 10^8$ м ³ /с ²	Гравитационная постоянная Земли
$C_{20} = -1082.6257 \cdot 10^{-6}$	Коэффициент несферичности

Приведенные числовые значения характеризуют эллипсоид, который используется в системе ПЗ-90.02.

Обозначение для удельной внешней силы.

Для удельной внешней силы, действующей на объект, будем использовать обозначение f . Забегая вперед отметим, что поскольку в инерциальных навигационных системах внешняя сила измеряется ньютонометрами, то идеальные показания ньютонометров мы также будем обозначать через f .

Использование нижнего индекса.

Нижним индексом у произвольного вектора всегда будем указывать систему координат, в проекциях на оси которой данный вектор рассматривается.

Матричная запись векторного произведения.

Каждому вектору c можно поставить в соответствие кососимметрическую матрицу \hat{c} :

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad c \times b = -\hat{c}b. \quad (1)$$

1.2 Взаимная ориентация систем координат $O\xi$, $O\eta$, Ox и Os

Инерциальная, гринвичская и географическая системы координат связаны следующей последовательностью поворотов:

$$O\xi \xrightarrow[3]{ut} O\eta \xrightarrow[3]{\frac{\pi}{2} + \lambda} \xrightarrow[1]{\frac{\pi}{2} - \varphi} Ox. \quad (2)$$

Здесь и далее в аналогичных записях над стрелкой помещается величина угла поворота, а под стрелкой номер координатной оси, вокруг которой совершается поворот.

Запишем матрицу A_η ориентации гринвичской системы $O\eta$ относительно инерциальной $O\xi$ и матрицу B_x ориентации географической системы Ox относительно гринвичской $O\eta$:

$$A_\eta = \begin{pmatrix} \cos ut & \sin ut & 0 \\ -\sin ut & \cos ut & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_x = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \lambda \sin \varphi & -\sin \lambda \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \lambda \cos \varphi & \sin \lambda \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тогда

$$A_x = B_x A_\eta. \quad (4)$$

Географическая и связанная системы координат связаны следующей последовательностью поворотов:

$$Ox \xrightarrow[3]{\psi} \xrightarrow[1]{\vartheta} \xrightarrow[2]{\gamma} Os. \quad (5)$$

Элементы матрицы $L = \{l_{ij}\}$ следующим образом выражаются через углы ориентации:

$$L = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma & \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \cos \psi \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \cos \vartheta \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для матрицы A_s ориентации связанной системы относительно инерциальной можно записать следующее выражение:

$$A_s = LB_x A_\eta. \quad (7)$$

Углы ориентации выражаются из (6), например, следующими соотношениями:

$$\psi = -\arctan \frac{l_{21}}{l_{22}}, \quad \vartheta = -\arcsin l_{23}, \quad \gamma = -\arctan \frac{l_{13}}{l_{33}}. \quad (8)$$

Отметим, что углы ориентации находятся в следующих числовых диапазонах:

$$\psi \in [-\pi, \pi], \quad \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \gamma \in [-\pi, \pi]. \quad (9)$$

1.3 Географические координаты точки

Связь гринвичских и географических координат точки.

Приведем соотношения для долготного и широтного радиусов кривизны:

$$R_E = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad R_N = R_E \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (10)$$

Гринвичские координаты η_1, η_2 и η_3 точки M выражаются через географические координаты φ, λ и h точки M и радиус кривизны R_E , с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (R_E + h) \cos \lambda \cos \varphi, \\ \eta_2 &= (R_E + h) \sin \lambda \cos \varphi, \\ \eta_3 &= (R_E + h) \sin \varphi - R_E e^2 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

Долгота λ определяется через гринвичские координаты из соотношения:

$$\tan \lambda = \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad (12)$$

а географическая широта φ и высота h не имеют аналитического выражения через гринвичские координаты и могут быть найдены итерационно, например, методом Ньютона [20].

Кинематические уравнения для географических координат точки M .

Кинематические дифференциальные уравнения для точки M имеют вид:

$$\dot{\varphi} = \frac{V_2}{R_N + h}, \quad \dot{\lambda} = \frac{V_1}{(R_E + h) \cos \varphi}, \quad \dot{h} = V_3. \quad (13)$$

Связь географической и геоцентрической широты точки M .

Географическая широта φ и геоцентрическая широта φ^0 связаны соотношением:

$$\tan \varphi = \frac{1}{1 - e^2} \tan \varphi^0, \quad (14)$$

откуда

$$\varphi \approx \varphi^0 + \frac{1}{2}e^2 \sin 2\varphi. \quad (15)$$

1.4 Соотношения для линейных и угловых скоростей в географической системе Ox

Абсолютная v_x и относительная V_x линейные скорости точки M связаны соотношением:

$$v_x = V_x - \hat{u}_x x, \quad (16)$$

откуда

$$v_1 = V_1 + uR_E \cos \varphi, \quad v_2 = V_2, \quad v_3 = V_3. \quad (17)$$

Абсолютная ω_x и относительная Ω_x угловые скорости географической системы координат Ox связаны соотношением:

$$\omega_x = \Omega_x + u_x. \quad (18)$$

Вектор u_x имеет следующие компоненты:

$$u_x = (0, u \cos \varphi, u \sin \varphi)^T. \quad (19)$$

Компоненты линейной и угловой относительных скоростей связаны соотношениями:

$$\Omega_1 = -\frac{V_2}{R_N + h}, \quad \Omega_2 = \frac{V_1}{R_E + h}, \quad \Omega_3 = \Omega_2 \tan \varphi. \quad (20)$$

1.5 Сила тяжести и сила тяготения

В описываемых ниже алгоритмах имитации показаний ньютонаометров используется удельная сила тяготения g^0 . Приведем два различных варианта ее вычисления. Первый вариант представляет собой модель, которая используется в спутниковой системе ГЛОНАСС. Эта модель будет нами применяться в главе, посвященной моделированию различных аспектов спутниковой навигации. Второй вариант основывается на формуле Гельмерта для вычисления удельной силы тяжести. Формулой Гельмерта будем пользоваться при моделировании показаний ньютонаометров.

Формула для силы тяготения, используемая в спутниковой навигационной системе ГЛОНАСС.

Компоненты силы тяготения в проекциях на оси гринвичской системы $O\eta$, в соответствии с контрольным документом спутниковой системы ГЛОНАСС [22], имеют вид:

$$\begin{aligned} g_{\eta 1}^0 &= -\frac{\mu}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left(5 \frac{\eta_3^2}{r^2} - 1 \right) \right] \eta_1, \\ g_{\eta 2}^0 &= -\frac{\mu}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left(5 \frac{\eta_3^2}{r^2} - 1 \right) \right] \eta_2, \\ g_{\eta 3}^0 &= -\frac{\mu}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left(5 \frac{\eta_3^2}{r^2} - 3 \right) \right] \eta_3, \end{aligned} \quad (21)$$

где $r = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}$.

Компоненты вектора силы тяготения g^0 в проекциях на оси инерциальной системы $O\xi$ выражаются по этой же формуле.

Формула Гельмерта для силы тяжести.

Формула Гельмерта для вычисления величины удельной силы тяжести g с поправкой на высоту h имеет вид [24]:

$$g(\varphi, h) = 9.78030(1 + 0.005302 \sin^2 \varphi + 0.000007 \sin^2 2\varphi) - 0.00014 - 2 \frac{\mu}{a^3} h. \quad (22)$$

Вектор удельной силы тяжести в проекциях на оси систем координат Ox , $O\xi$ и Os имеет вид:

$$g_x = (0, 0, -g)^T, \quad g_\xi = A_x^T g_x, \quad g_s = A_s A_x^T g_x = L g_x. \quad (23)$$

Удельную силу тяготения g^0 можно вычислить через удельную силу тяжести g по следующим формулам:

$$g_\xi^0 = g_\xi + \hat{u}_\xi^2 \xi, \quad g_s^0 = g_s + \hat{u}_s^2 s, \quad g_x^0 = g_x + \hat{u}_x^2 x. \quad (24)$$

1.6 Кинематические и динамические уравнения

Кинематическое уравнение Пуассона.

Обозначим через Or и Op две произвольные системы координат. Через ω_{rp} обозначим угловую скорость системы Or относительно системы Op в проекциях на оси системы Or , через C_{rp} – матрицу ориентации системы Or относительно Op . Имеет место кинематическое уравнение Пуассона:

$$\dot{C}_{rp} = \hat{\omega}_{rp} C_{rp}. \quad (25)$$

Выражение для угловой скорости связанной системы координат.

Вектор угловой скорости ω_{sx} выражается через углы курса, крена, тангажа и их производные так:

$$\omega_{sx} = \begin{pmatrix} \omega_{sx1} \\ \omega_{sx2} \\ \omega_{sx3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \sin \gamma \cos \vartheta \\ \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \gamma \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Кинематическое уравнение движения материальной точки.

Координаты p материальной точки в подвижной системе координат Op и вектор абсолютной скорости данной точки v_p связаны кинематическим уравнением:

$$\dot{p} = v_p + \hat{\omega}_p p. \quad (27)$$

Динамические уравнения движения материальной точки.

Динамические уравнения движения точки в абсолютных (v_p, ω_p) и относительных (V_p, Ω_p) переменных таковы:

$$\begin{aligned} \dot{v}_p &= \hat{\omega}_p v_p + f_p + g_p^0, \\ \dot{V}_p &= (\hat{\Omega}_p + 2\hat{u}_p) V_p + f_p + g_p. \end{aligned} \quad (28)$$

1.7 Моделирование траекторных параметров движения объекта

Приведем краткое описание двух подходов для задания траекторных параметров движения объекта. Первый подход использует явные аналитические формулы для

траекторных параметров, например, для модуля продольной скорости и углов ориентации объекта. Оказывается, что этих параметров достаточно для моделирования всех параметров поступательного и углового движения объекта.

Второй подход использует экспериментальные данные – записанные выходные данные некоторого навигационного комплекса, установленного на борту объекта. Часто подобные записи включают в себя географические координаты объекта (φ, λ, h) , компоненты его относительной скорости в проекциях на оси географической системы (V_1, V_2, V_3) и углы ориентации объекта $(\psi, \vartheta, \gamma)$, причем координаты и скорости могут доставляться БИНС/СНС с разной степенью взаимной синхронизации. Экспериментальные данные могут включать в себя и показания инерциальных датчиков БИНС. Характерной особенностью такой информации является ее зашумленность и несогласованность, а также наличие различных сбоев. Кроме того, часто подобная информация может быть известна с достаточно низкой частотой, например, 1 Гц. Ставится задача моделирования траектории движения объекта, параметры которой были бы взаимно согласованы и которая с некоторой точностью совпадала бы с исходной траекторией. Здесь под согласованностью будем понимать значения координат, компонент вектора скорости и углов ориентации, которые обращают в верные равенства используемые численные методы решения уравнений, описывающих движение объекта. Другими словами, в экспериментальных данных присутствует аналитическая избыточность, связанная с тем, что эти данные удовлетворяют известным дифференциальным и алгебраическим уравнениям. Важно также учесть, что корпус объекта может совершать достаточно большие эволюции за короткий интервал времени, поэтому моделировать согласованные траекторные параметры необходимо с высокой частотой.

Таким образом, задача моделирования траектории движения объекта при помощи экспериментальных данных включает в себя три предварительных этапа: фильтрация исходных экспериментальных данных с целью выявления сбоев, интерполяция исходных данных и сглаживание полученных значений с помощью цифрового фильтра.

Для моделирования согласованной траектории достаточно рассмотреть набор независимых параметров. Здесь мы опишем лишь один из возможных вариантов, когда в качестве независимых параметров рассматриваются углы ориентации объекта ψ, ϑ, γ и его координаты φ, λ, h .

1.7.1 Пример моделирования траектории на основе аналитического задания траекторных параметров

Пусть углы ориентации объекта $\psi(t), \vartheta(t), \gamma(t)$ и его путевая скорость $V(t)$, заданы как непрерывные функции времени на отрезке $[t_0, t_n]$, а также заданы координаты объекта в начальный момент времени $\varphi(t_0), \lambda(t_0), h(t_0)$. Например, можно задать следующие функции:

$$V(t) = \begin{cases} \frac{V^*}{2} + \frac{V^*}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi \frac{t-t_0}{t^*-t_0}\right), & t < t^* \\ V^*, & t \geq t^*, \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi^* + A_\psi \sin(\omega_\psi(t - t_0) + \varphi_\psi), \\ \vartheta(t) &= \vartheta^* + A_\vartheta \sin(\omega_\vartheta(t - t_0) + \varphi_\vartheta), \\ \gamma(t) &= \gamma^* + A_\gamma \sin(\omega_\gamma(t - t_0) + \varphi_\gamma), \end{aligned} \quad (30)$$

где $V^*, \psi^*, \vartheta^*, \gamma^*, A_\psi, A_\vartheta, A_\gamma, \omega_\psi, \omega_\vartheta, \omega_\gamma, \varphi_\psi, \varphi_\vartheta, \varphi_\gamma, t^*$ – некоторые параметры.

Предположим, что вектор скорости совпадает с продольной осью объекта Ms_2 . Требуется определить траекторные параметры в моменты времени t_j , где $j = 0, \dots, n$.

Вектор относительной скорости объекта V_s в проекциях на оси связанной системы координат Ms имеет вид:

$$V_s(t) = (0, V(t), 0)^T. \quad (31)$$

Тогда из соотношения

$$V_x(t) = L^T(t)V_s(t) \quad (32)$$

вычисляются компоненты вектора относительной скорости $V_x = (V_1, V_2, V_3)^T$ в проекциях на оси географической системы координат:

$$\begin{aligned} V_1(t) &= -V(t) \sin \psi(t) \cos \vartheta(t), & V_2(t) &= V(t) \cos \psi(t) \cos \vartheta(t), \\ V_3(t) &= V(t) \sin \vartheta(t). \end{aligned} \quad (33)$$

Определим географические координаты объекта при помощи (13), используя метод Эйлера:

$$\begin{aligned} \varphi(t_{j+1}) &= \varphi(t_j) + \frac{V_2(t_j)}{R_N(t_j) + h(t_j)} \Delta t, \\ \lambda(t_{j+1}) &= \lambda(t_j) + \frac{V_1(t_j)}{(R_E(t_j) + h(t_j)) \cos \varphi(t_j)} \Delta t, \\ h(t_{j+1}) &= h(t_j) + V_3(t_j) \Delta t, \end{aligned} \quad (34)$$

где $j = 0, \dots, n - 1$. Здесь $\Delta t = t_{j+1} - t_j$.

1.7.2 Использование экспериментальных данных для моделирования согласованной траектории

Обозначим через $\Delta T = T_{j+1} - T_j = K\Delta t$ шаг по времени, с которым предоставлена траекторная информация, через Δt – шаг по времени, с которым требуется построить согласованную траекторию. Тогда $T_j = t_{jK}$, где $j = 0, \dots, N$. Например, $\Delta T = 1\text{с.}$, а $\Delta t = 0.01\text{с.}$ Исходные данные условимся обозначать индексом $'$.

Пусть в нашем распоряжении имеются значения координат объекта $\varphi'(T_j), \lambda'(T_j), h'(T_j)$ и углов ориентации $\psi'(T_j), \vartheta'(T_j), \gamma'(T_j)$, где $j = 0, \dots, N$.

Опишем кратко три предварительных этапа, которые включают в себя фильтрацию возможных сбоев, интерполяцию и последующее сглаживание с помощью цифрового фильтра.

Использование медианного фильтра для устранения сбоев.

Опишем простейший пример медианного фильтра третьего порядка. Для определения каждого параметра $F = \{\varphi, \lambda, h, \psi, \vartheta, \gamma\}$ в моменты времени T_j , где $j = 1, \dots, N - 1$ рассмотрим три значения: $F'(T_{j-1}), F'(T_j)$ и $F'(T_{j+1})$, и расположим их в порядке возрастания. В качестве нового значения $F'(T_j)$ выберем ту величину из трех рассмотренных, которая займет центральное место в этой последовательности. После этого доопределим концевые точки: $F'(T_0) = F'(T_1), F'(T_N) = F'(T_{N-1})$. Такой способ позволяет отфильтровать однократные сбои. Если вместо трех значений рассматривать аналогичным образом пять или семь значений, то фильтр позволит устраниить, соответственно, двукратные и трехкратные сбои.

Линейная интерполяция.

Для каждого параметра $F = \{\varphi, \lambda, h, \psi, \vartheta, \gamma\}$ осуществим линейную интерполяцию по следующей схеме:

$$F'(t_{jK+i}) = \frac{1}{K} \left[(K-i)F'(t_{jK}) + iF'(t_{(j+1)K}) \right]. \quad (35)$$

Здесь $i = 0, \dots, K - 1$.

Таким образом, определяются параметры $\varphi'(t_j), \lambda'(t_j), h'(t_j), \psi'(t_j), \vartheta'(t_j), \gamma'(t_j)$ ($j = 0, \dots, NK$) с нужной частотой дискретизации.

Сглаживание данных с помощью цифрового фильтра.

Сгладим указанные реализации с помощью цифрового фильтра:

$$F'(t_j) \longrightarrow F(t_j) = \sum_{i=-k}^k w_i F'(t_{j+i}), \quad (36)$$

где коэффициенты w_i – весовые коэффициенты фильтра. Для сглаживания экспериментальных данных можно использовать, например, окно Ханна [52], весовые коэффициенты которого имеют вид:

$$w_i = \frac{1}{2k} \left(1 + \cos \left(\frac{i\pi}{k} \right) \right) \quad (37)$$

и $2k$ – ширина окна.

В результате определяются реализации $\varphi(t_j), \lambda(t_j), h(t_j), \psi(t_j), \vartheta(t_j), \gamma(t_j)$, где $j = k, \dots, NK - k$, которые представляют собой движение объекта с требуемым шагом по времени Δt , близкое к реальному движению объекта.

Вычисление компонент вектора относительной скорости.

Определим компоненты вектора относительной скорости численным дифференцированием с помощью (13), например, следующим образом:

$$\begin{aligned} V_1(t_j) &= \frac{\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)}{\Delta t} \cdot \frac{R_E(t_j) + h(t_j) + R_E(t_{j+1}) + h(t_{j+1})}{2} \cos \left(\frac{\varphi(t_j) + \varphi(t_{j+1})}{2} \right), \\ V_2(t_j) &= \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{\Delta t} \cdot \frac{R_N(t_j) + h(t_j) + R_N(t_{j+1}) + h(t_{j+1})}{2}, \\ V_3(t_j) &= \frac{h(t_{j+1}) - h(t_j)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (38)$$

При этом в правой точке можно положить:

$$V_1(t_{NK-k}) = V_1(t_{NK-k-1}), \quad V_2(t_{NK-k}) = V_2(t_{NK-k-1}), \quad V_3(t_{NK-k}) = V_3(t_{NK-k-1}). \quad (39)$$

Замечание. В качестве входной информации можно использовать значения углов ориентации и компонент вектора относительной скорости. Тогда по формулам (34) определяются географические координаты. Однако, предварительное сглаживание цифровым фильтром меняет значение вектора скорости, что может привести к существенному отклонению моделируемых координат траектории от исходных.

Глава II. Задачи согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков, траекторных параметров объекта и их приложения в инерциальной навигации

Введение

Важной составляющей разработки и тестирования алгоритмов интегрированных платформенных (ИНС) или бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС) является использование компьютерных имитаторов траекторного движения объекта. Для околоземных навигационных приложений имитатор должен учитывать такие факторы как несферичность формы и поля тяготения Земли, ее вращение. Результатом имитации служат взаимно согласованные реализации траекторных параметров движения объекта: координаты, линейная скорость и ускорение объекта, угловая скорость трехгранника, жестко связанного с корпусом объекта, углы ориентации, например, углы истинного курса, крена и тангла.

Применительно к задачам имитации функционирования интегрированных инерциальных навигационных систем важно согласованно моделировать идеальные показания инерциальных датчиков – ньютонометров и датчиков угловой скорости (гироскопов). Под согласованностью будем понимать выполнение так называемого нулевого теста, когда по сформированным идеальным показаниям инерциальных датчиков бортовые алгоритмы БИНС воспроизводят исходную траекторию с максимальной точностью, в идеале, абсолютно точно.

Для точных инерциальных навигационных систем, систем с ограниченным временем функционирования, для имитации алгоритмов комплексирования достаточно моделировать не алгоритмы навигационного счисления БИНС, а линейные уравнения ошибок БИНС, линейные модели корректирующих измерений, алгоритмы оценивания калмановского типа. При этом инструментальные погрешности инерциальных датчиков имитируются на основе соответствующей параметризованной модели

с использованием, например, датчиков случайных чисел, либо для этой цели используются данные стендовых испытаний.

Иная ситуация возникает в случае, когда используются инерциальные датчики низкой точности, например MEMS датчики. Здесь отметим, что этот сегмент датчиков в настоящее время активно внедряется в навигационную практику. Для полноценного моделирования алгоритмов комплексирования БИНС построенных на грубых датчиках уже необходимо имитировать алгоритмы навигационного счисления одновременно с алгоритмами комплексирования, реализованными в виде обратных связей (управления). Поэтому без имитации идеальных показаний инерциальных датчиков полноценное моделирование просто невозможно.

Другой момент, который должен учитываться при разработке моделей, заключается в имитации показаний интегрирующих инерциальных датчиков, когда соответствующее устройство определяет не мгновенное значение измеряемого параметра, а его интегральное среднее на такте съема информации. Именно так "работает" система съема показаний датчиков, когда внутренняя частота опроса датчика больше частоты формирования выходного измерительного сигнала.

Обязательным свойством алгоритмов имитации показаний инерциальных датчиков является выполнение упомянутого выше нулевого теста – при интегрировании модельных уравнений БИНС при нулевых инструментальных погрешностях и нулевых ошибках начальной выставки траектория полученного навигационного решения совпадает с исходной траекторией с высокой степенью точности, в идеале – абсолютно точно. Последнее зависит от задаваемых априорно условий моделирования, например, требования формировать идеальные показания ньютонометров в осях системы координат, жестко связанной с корпусом объекта, а навигационную задачу решать при этом в осях иной системы, например, в осях системы, связанной с местной географической вертикалью.

Помимо собственно задач согласованной имитации идеальных показаний инерциальных датчиков, других траекторных параметров движения, возникают сопутствующие задачи, сопровождающие моделирование алгоритмов интегрированных инерциальных навигационных систем и для которых необходимо разработать соответствующие модели и алгоритмы. Перечислим их:

- Задача моделирования показаний навигационных датчиков для систем, которые установлены на одном объекте, но располагаются в разных точках и могут иметь разную ориентацию осей чувствительности инерциальных датчиков. Пример: на объекте в разных местах установлена базовая и выставляемая БИНС. Другой пример – антенна сигналов спутниковых навигационных систем (СНС) расположена на известном расстоянии от приведенного центра

БИНС (под приведенным центром БИНС всегда будем понимать центр блока ньютонаометров).

- Задача проверки точности известных линейных моделей уравнений ошибок БИНС. Здесь следует отметить, что в литературе можно найти различные формы уравнений ошибок инерциальной навигации, предлагаемые разными авторами в разное время, например, Парусниковым Н.А. [24], Салычевым О.С. [39], Андреевым В.Д. [5], Веремеенко К.К. [3] и др. Эти модели допускают разного рода упрощения, модификации, и зачастую не всегда понятна их точность. Сравнительный же анализ результатов моделирования уравнений ошибок (по выбранной модели) с ошибками навигационного счисления, определяемыми как разность выходных параметров БИНС и параметров имитатора движения, позволяет четко ответить на этот вопрос.
- Задача учета относительного смещения чувствительных масс ньютонаометров БИНС при моделировании. Данный аспект будет учитываться при имитации показаний инерциальных датчиков в задаче калибровки для последующего тестирования алгоритмов калибровки.
- Задача анализа вибрационных воздействий на этапе начальной выставки БИНС с целью выбора оптимального численного метода для определения ориентации объекта.
- Анализ особенностей использования так называемых аналитических и телеметрических имитаторов. В первом случае траекторные параметры задаются аналитическими функциями, во втором траекторные параметры содержатся в телеметрической информации конкретного эксперимента, например, летного испытания.

Вторая глава посвящена детальному обсуждению и решению описанных выше задач. Приводятся необходимые результаты моделирования.

2 Моделирование показаний идеальных инерциальных датчиков

2.1 Общие положения

Чувствительными элементами бескарданной инерциальной навигационной системы являются ньютонаометры и гироскопы. Предполагается, что после проведения проце-

дуры калибровки оси чувствительности ньютонометров взаимно перпендикулярны и ось чувствительности каждого ньютонометра совпадает с осью чувствительности одного из гироскопов. Через M обозначим приведенную чувствительную массу блока ньютонометров. Введем приборную систему координат Mz , оси которой направим параллельно осям чувствительности инерциальных датчиков. В дальнейшем всегда будем считать, что БИНС расположена на объекте (например, на самолете) так, что ось Mz_1 направлена в сторону правого крыла, ось Mz_2 параллельна продольной оси объекта, ось Mz_3 параллельна его вертикальной оси. Будем рассматривать также систему координат Oz с координатными осями, параллельными осям системы Mz и с началом в точке O . Из определения следует, что в случае БИНС связанная система Ms (Os) и приборная Mz (Oz) совпадают и справочные соотношения, приведенные в начале главы для системы Ms (Os), выполняются для приборной системы Mz (Oz).

Идеальные измерения гироскопов представляют собой абсолютную угловую скорость ω_z приборной системы Mz (Oz). Идеальные ньютонометры измеряют вектор удельной внешней силы f_z , действующей на объект. Через f_ξ и f_x будем обозначать проекции показаний ньютонометров, соответственно, на оси систем $O\xi$ и Ox .

Инерциальные датчики в основном являются интегрирующими датчиками. Это означает, что гироскопы измеряют интеграл от абсолютной угловой скорости приборной системы координат, а ньютонометры измеряют интеграл от удельной внешней силы за один такт съема информации $[t_j, t_{j+1}]$. Для получения средних значений угловой скорости и удельной внешней силы указанные интегралы делятся на длину интервала времени:

$$\frac{\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_z dt}{t_{j+1} - t_j}, \quad \frac{\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z dt}{t_{j+1} - t_j}. \quad (40)$$

В дальнейшем будем показаниями инерциальных датчиков называть как саму абсолютную угловую скорость и удельную внешнюю силу, так и интегралы от этих величин.

Далее приводятся модели, предназначенные для имитации идеальных показаний гироскопов и ньютонометров. Описываются модели вычисления согласованных показаний инерциальных датчиков двух БИНС, расположенных на одном объекте.

2.2 Моделирование показаний гироскопов

Задача ставится следующим образом. Предполагаются известными координаты объекта и параметры его ориентации в моменты времени t_j и t_{j+1} . Требуется вычислить вектор измерений гироскопов на этом интервале.

В работе рассмотрены два подхода к определению идеальных показаний гироскопов. Первый базируется на частном случае интегрируемости уравнения Пуассона для матрицы ориентации A_z приборной системы Oz относительно инерциальной $O\xi$. А именно: если вектор абсолютной угловой скорости ω_z постоянен на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$, вектор показаний гироскопов как интеграл от угловой скорости ω_z приборной системы может быть вычислен аналитически.

Другой подход основывается на численном интегрировании компонент вектора угловой скорости ω_z как функций от координат и углов ориентации объекта и их производных. Рассматриваются два варианта задания координат и углов ориентации. В первом случае координаты и углы ориентации задаются аналитически как непрерывные функции времени. Во втором случае задаются дискретные значения координат и углов ориентации, а непрерывные функции времени для этих величин получаются на основе сплайн-аппроксимации. Численное интегрирование вектора ω_z можно осуществлять со сколь угодно мелким шагом, что позволяет рассматривать данный метод как метод точного вычисления идеальных показаний гироскопов. Этот вариант ориентирован на задачи тестирования различных численных схем интегрирования кинематических уравнений Пуассона.

2.2.1 Вычисление идеальных показаний гироскопов. Частный случай интегрируемости уравнения Пуассона

Полагаются известными значения матриц $A_z(t_j)$ и $A_z(t_{j+1})$, поскольку известны значения координат объекта φ, λ и углов его ориентации ψ, ϑ, γ в моменты времени t_j и t_{j+1} (3, 6, 7). Требуется определить вектор показаний гироскопов как интеграл от абсолютной угловой скорости приборной системы $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z dt$:

Рассмотрим уравнение Пуассона для матрицы ориентации A_z (25):

$$\dot{A}_z = \hat{\omega}_z A_z. \quad (41)$$

Если вектор угловой скорости ω_z постоянен на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$, то интеграл $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z dt$ представляет собой вектор конечного поворота приборной системы γ_z и точное решение уравнения Пуассона может быть записано в следующем виде [70], [16]:

$$A_z(t_{j+1}) = \left(E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_z + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_z^2 \right) A_z(t_j). \quad (42)$$

Здесь $\gamma = \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z dt \right| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}$ – модуль вектора конечного поворота приборной

системы координат за интервал времени $[t_j, t_{j+1}]$ ($\Delta t = t_{j+1} - t_j$), γ_i – компоненты вектора конечного поворота ($i = 1, 2, 3$).

Покажем, как, используя (42), в явном виде определить вектор γ_z . Домножим справа обе части соотношения (42) на матрицу $A_z^T(t_j)$ и вычтем затем из обеих частей единичную матрицу E . Имеем:

$$\frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_z + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_z^2 = A_z(t_{j+1}) A_z^T(t_j) - E. \quad (43)$$

Введем обозначение:

$$A_z^T(t_{j+1}) A_z(t_j) - E = B = \{b_{ij}\}. \quad (44)$$

Распишем поэлементно матрицу $\hat{\gamma}_z^2$:

$$\hat{\gamma}_z^2 = \begin{pmatrix} -\gamma_3^2 - \gamma_2^2 & \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \gamma_3 \\ \gamma_1 \gamma_2 & -\gamma_3^2 - \gamma_1^2 & \gamma_2 \gamma_3 \\ \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_2 \gamma_3 & -\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Обратим внимание на то, что матрица $\hat{\gamma}_z$ является кососимметрической, а матрица $\hat{\gamma}_z^2$ – симметрической. Приравняем первые два диагональные элемента левой и правой части выражения (43):

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} [-\gamma_3^2 - \gamma_2^2] &= b_{11} \\ \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} [-\gamma_3^2 - \gamma_1^2] &= b_{22}. \end{aligned} \quad (46)$$

Разделив одно соотношение на другое, получим:

$$\frac{-\gamma_3^2 - \gamma_2^2}{-\gamma_3^2 - \gamma_1^2} = \frac{b_{11}}{b_{22}}. \quad (47)$$

Запишем это равенство в другой форме:

$$\gamma_1^2 b_{11} - \gamma_2^2 b_{22} + \gamma_3^2 [b_{11} - b_{22}] = 0. \quad (48)$$

Приравнивая первый и третий диагональные элементы выражения (43), аналогичным образом получим:

$$\gamma_1^2 b_{11} - \gamma_3^2 b_{33} + \gamma_2^2 [b_{11} - b_{33}] = 0. \quad (49)$$

Вычитая из одного полученного соотношения другое, получаем выражение зависимости γ_2^2 от γ_3^2 :

$$\gamma_2^2 = \gamma_3^2 \frac{b_{11} - b_{22} + b_{33}}{b_{11} + b_{22} - b_{33}}. \quad (50)$$

Проделаем ровно то же самое, приравнивая сначала первые два диагональные элемента, затем второй и третий, и получим выражение зависимости γ_1^2 от γ_3^2 :

$$\gamma_1^2 = \gamma_3^2 \frac{b_{22} - b_{11} + b_{33}}{b_{11} + b_{22} - b_{33}}. \quad (51)$$

Теперь приравняем внедиагональные элементы "12" и "21" выражения (43). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \gamma}{\gamma} \gamma_3 + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \gamma_1 \gamma_2 &= b_{12} \\ -\frac{\sin \gamma}{\gamma} \gamma_3 + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \gamma_1 \gamma_2 &= b_{21}. \end{aligned} \quad (52)$$

Вычтем из первого соотношения второе и получим:

$$2 \frac{\sin \gamma}{\gamma} \gamma_3 = b_{12} - b_{21}. \quad (53)$$

Запишем выражение для γ с учетом (50, 51):

$$\gamma = \sqrt{\gamma_3^2 \frac{b_{22} - b_{11} + b_{33}}{b_{11} + b_{22} - b_{33}} + \gamma_3^2 \frac{b_{11} - b_{22} + b_{33}}{b_{11} + b_{22} - b_{33}} + \gamma_3^2} = |\gamma_3| \sqrt{\frac{b_{11} + b_{22} + b_{33}}{b_{11} + b_{22} - b_{33}}}. \quad (54)$$

Подставим это выражение в (53) и получим:

$$2 \sin \gamma = |b_{12} - b_{21}| \sqrt{\frac{b_{11} + b_{22} + b_{33}}{b_{11} + b_{22} - b_{33}}}, \quad (55)$$

откуда

$$\gamma = \arcsin \left(\frac{|b_{12} - b_{21}|}{2} \sqrt{\frac{b_{11} + b_{22} + b_{33}}{b_{11} + b_{22} - b_{33}}} \right). \quad (56)$$

Если вместо выражений γ_1^2, γ_2^2 через γ_3^2 выражать γ_1^2, γ_3^2 через γ_2^2 или γ_2^2, γ_3^2 выражать через γ_1^2 и приравнивать затем другие внедиагональные элементы матрицы B , то для угла поворота γ получатся еще две аналогичные формулы:

$$\begin{aligned}\gamma &= \arcsin \left(\frac{|b_{31} - b_{13}|}{2} \sqrt{\frac{b_{11} + b_{22} + b_{33}}{b_{11} - b_{22} + b_{33}}} \right) \\ \gamma &= \arcsin \left(\frac{|b_{23} - b_{32}|}{2} \sqrt{\frac{b_{11} + b_{22} + b_{33}}{b_{22} - b_{11} + b_{33}}} \right).\end{aligned}\quad (57)$$

Замечание. Представленные формулы корректны только при $\gamma < \pi/2$, что, однако, не мешает их использовать для моделирования показаний гироскопов, поскольку на каждом интервале Δt угол γ не превышает нескольких градусов. Однако, если рассматривать произвольные матрицы $A_z(t_j)$ и $A_z(t_{j+1})$, то в случае $\gamma > \pi/2$, следует воспользоваться одной из формул:

$$\gamma = \pi - \arcsin \left(\frac{|b_{ij} - b_{ji}|}{2} \sqrt{\frac{b_{ii} + b_{jj} + b_{kk}}{b_{ii} + b_{jj} - b_{kk}}} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad k \neq j.\quad (58)$$

Из соотношения (53) находим величину γ_3 :

$$\gamma_3 = \frac{\gamma(b_{12} - b_{21})}{2 \sin \gamma},\quad (59)$$

а приравнивая другие, соответствующие друг другу внедиагональные элементы соотношения (43), получим выражения для γ_1 и γ_2 :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\gamma(b_{23} - b_{32})}{2 \sin \gamma} \\ \gamma_2 &= \frac{\gamma(b_{31} - b_{13})}{2 \sin \gamma}.\end{aligned}\quad (60)$$

Поскольку в выражениях для определения величины γ какой-нибудь знаменатель может обратиться в нуль, рекомендуется следующий способ: из всех трех знаменателей $b_{22} - b_{11} + b_{33}$, $b_{11} - b_{22} + b_{33}$ и $b_{11} + b_{22} - b_{33}$ выбрать наибольший по модулю и соответствующую формулу использовать для вычисления величины γ .

Представленный алгоритм имеет особенность при малых углах γ . Из соотношений (46) видно, что при малом векторе поворота γ_z диагональные элементы матрицы B будут ограничены квадратом нормы вектора γ_z :

$$|b_{ii}| \leq \gamma^2, \quad i = 1, 2, 3.\quad (61)$$

Моделирование показало, что описанный алгоритм устойчиво работает при углах $\gamma > 10^{-7}$. Таким образом, если хотя бы один из трех знаменателей окажется по модулю больше ε , где, например, $\varepsilon = 10^{-14}$, описанную процедуру можно использовать для вычисления вектора γ_z . Если все три знаменателя по модулю будут меньше, чем ε , следует воспользоваться линеаризованным аналогом соотношения (42):

$$A_z(t_{j+1}) = (E + \hat{\gamma}_z) A_z(t_j). \quad (62)$$

Отсюда

$$\gamma_1 = 0.5 \cdot (b_{23} - b_{32}), \quad \gamma_2 = 0.5 \cdot (b_{31} - b_{13}), \quad \gamma_3 = 0.5 \cdot (b_{12} - b_{21}). \quad (63)$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда приборная система Oz не вращается относительно Земли. Тогда модуль вектора конечного поворота γ приборной системы за одну секунду составит: $\gamma = u \cdot 1\text{c.} \approx 7.29 \cdot 10^{-5}\text{рад}$. Таким образом, если интервал времени Δt , например, составляет 0.01с, то для моделирования показаний гироскопов следует использовать описанный алгоритм, если $\Delta t = 0.001\text{с}$, то измерения гироскопов должны вычисляться по упрощенным формулам (63).

Среднее значение вектора абсолютной угловой скорости на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ определяется так:

$$\omega_z = \begin{pmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} \\ \omega_{z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1/\Delta t \\ \gamma_2/\Delta t \\ \gamma_3/\Delta t \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Замечание. В дальнейшем, при вычислении показаний ньютонометров мы будем использовать полученные выше соотношения для взаимосвязи угловой скорости географической системы Ox с линейной скоростью точки M в географических осях.

2.2.2 Вычисление идеальных показаний гироскопов путем прямого численного интегрирования

Рассмотрим два способа задания траекторных параметров. В первом случае координаты и углы ориентации объекта задаются как непрерывные функции времени, во втором случае, значения координат и углов ориентации представлены в дискретные моменты времени.

Аналитический способ задания траектории объекта.

Будем считать заданными непрерывные функции $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ и $\gamma(t)$ на некотором отрезке времени $[t_0, t_n]$. Эти функции должны иметь непрерывные производные в каждой точке указанного отрезка. Например, можно взять функции (30). Будем также

считать заданными непрерывные функции $\varphi(t)$, $\lambda(t)$ и $h(t)$ на том же отрезке времени. Эти функции также должны иметь непрерывные производные в каждой точке отрезка. Требуется определить показания гироскопов на каждом интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$, где $j = 0, \dots, n - 1$.

Абсолютная угловая скорость приборной системы складывается из угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси, угловой скорости вращения географической системы координат относительного Земли и угловой скорости собственно объекта относительно местного горизонта. Имеем:

$$\begin{aligned} \omega_z &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + L\Omega_x + Lu_x \quad (65) \end{aligned}$$

Из кинематических уравнений движения объекта (13) могут быть найдены как непрерывные функции компоненты V_1, V_2 вектора относительной скорости V_x :

$$V_1 = \dot{\lambda}(R_E + h) \cos \varphi, \quad V_2 = \dot{\varphi}(R_N + h). \quad (66)$$

Компоненты вектора относительной угловой скорости Ω_x географической системы координат определяются соотношениями (20). Вектор u_x вычисляется в соответствии с (19), элементы матрицы ориентации L вычисляются по формуле (6).

Таким образом, выражение для вектора ω_z представляет собой известную непрерывную зависимость от функций $\psi(t), \vartheta(t), \gamma(t), \varphi(t), \lambda(t), h(t)$ и их производных. Вектор показаний гироскопов на интервале $[t_j, t_{j+1}]$ представляет собой интеграл:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z(\tau) d\tau. \quad (67)$$

Разобьем интервал времени $[t_j, t_{j+1}]$ на m равных отрезков, где $m \gg 1$. Длину каждого отрезка обозначим через $\Delta\tau = \Delta t/m$, а каждую узловую точку через $\tau_k = t_j + k\Delta\tau$. Будем приближенно вычислять интеграл $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z(t) dt$ как интегральную сумму:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z(t) dt \cong \sum_{k=1}^m \omega_{z_k}^* \cdot \Delta\tau. \quad (68)$$

Здесь ω_{zk}^* – некоторое значение $\omega_z(t)$ на отрезке времени $[\tau_{k-1}, \tau_k]$. Для вычисления интегральной суммы (68) можно использовать любой численный метод интегрирования, например, метод Симпсона (метод парабол):

$$\omega_{zk}^* = \frac{1}{6} \left[\omega_z(\tau_{k-1}) + 4\omega_z\left(\frac{\tau_{k-1} + \tau_k}{2}\right) + \omega_z(\tau_k) \right]. \quad (69)$$

Замечание. Отметим, что выбор величины t определяется характером движения объекта.

Траектория объекта задана дискретным набором значений координат и углов ориентации.

Пусть имеется дискретная информация о координатах объекта и углах его ориентации: $\psi(t_j), \vartheta(t_j), \gamma(t_j), \varphi(t_j), \lambda(t_j)$ и $h(t_j)$. Здесь $j = 0, \dots, n$ и шаг по времени исходной информации $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ соответствует длине интервала, на котором требуется определять показания гироскопов. По указанным дискретным значениям требуется построить непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, после чего задача сводится к постановке, рассмотренной в предыдущем пункте.

Необходимость в получении координат и углов ориентации как непрерывных известных функций времени побуждает осуществить сглаживание указанных дискретных реализаций при помощи кубических сплайнов [25]. Аппарат кубических сплайнов является общеизвестным и широко используется в различных задачах. Однако, в данной работе требуется не только осуществить сглаживание координат и углов ориентации, но и точно вычислить их производные в каждый момент времени. Поэтому опишем процедуру сглаживания произвольной функции $f(t)$ на отрезке времени $[t_0, t_n]$ по известным значениям функции $f(t_j)$ при $j = 0, \dots, n$. Разобьем отрезок времени $[t_0, t_n]$ на l отрезков равной длины. Тогда $n/l = p$ – количество моментов времени t_i в каждом отрезке. Для каждого отрезка $[t_{ip}, t_{(i+1)p}]$ введем безразмерное время τ :

$$\tau = \frac{t - t_{ip}}{t_{(i+1)p} - t_{ip}}, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (70)$$

Введем базовые функции:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= \frac{1}{4}(1 - \tau)^3, & \varphi_2(\tau) &= 1 - \frac{3}{4}(2 - \tau)\tau^2, \\ \varphi_3(\tau) &= 1 - \frac{3}{4}(1 + \tau)(1 - \tau)^2, & \varphi_4(\tau) &= \frac{1}{4}\tau^3. \end{aligned} \quad (71)$$

На каждом отрезке времени $[t_{ip}, t_{(i+1)p}]$ ($i = 0, \dots, l-1$) будем приближать функцию $f(t)$ базовыми функциями с коэффициентами, соответственно, c_i, c_{i+1}, c_{i+2} и c_{i+3} :

$$f(t) = c_i \varphi_1(\tau) + c_{i+1} \varphi_2(\tau) + c_{i+2} \varphi_3(\tau) + c_{i+3} \varphi_4(\tau). \quad (72)$$

Для каждой точки t_j ($j = 0, \dots, n$) записывается соответствующее выражение. Таким образом имеется $N \cdot K + 1$ уравнений для определения $l+3$ неизвестных коэффициентов. Для определения коэффициентов применяется стандартный метод наименьших квадратов.

Таким образом, функция $f(t)$ приближается с помощью $l+3$ коэффициента. Указанная процедура сглаживания обеспечивает непрерывность как самой построенной функции $f(t)$ так и ее первых двух производных во всех точках отрезка $[t_0, t_n]$.

Применим процедуру сглаживания кубическими сплайнами для дискретных реализаций $\varphi(t_j), \lambda(t_j), h(t_j), \psi(t_j), \vartheta(t_j), \gamma(t_j)$. Набор коэффициентов для каждой реализации будем обозначать, соответственно $c_i^\varphi, c_i^\lambda, c_i^h, c_i^\psi, c_i^\vartheta, c_i^\gamma$, где $i = 0, \dots, l+2$. Соответственно, на каждом интервале $[t_{ip}, t_{(i+1)p}]$ имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= c_i^\varphi \varphi_1(\tau) + c_{i+1}^\varphi \varphi_2(\tau) + c_{i+2}^\varphi \varphi_3(\tau) + c_{i+3}^\varphi \varphi_4(\tau), \\ \lambda(t) &= c_i^\lambda \varphi_1(\tau) + c_{i+1}^\lambda \varphi_2(\tau) + c_{i+2}^\lambda \varphi_3(\tau) + c_{i+3}^\lambda \varphi_4(\tau), \\ h(t) &= c_i^h \varphi_1(\tau) + c_{i+1}^h \varphi_2(\tau) + c_{i+2}^h \varphi_3(\tau) + c_{i+3}^h \varphi_4(\tau), \\ \psi(t) &= c_i^\psi \varphi_1(\tau) + c_{i+1}^\psi \varphi_2(\tau) + c_{i+2}^\psi \varphi_3(\tau) + c_{i+3}^\psi \varphi_4(\tau), \\ \vartheta(t) &= c_i^\vartheta \varphi_1(\tau) + c_{i+1}^\vartheta \varphi_2(\tau) + c_{i+2}^\vartheta \varphi_3(\tau) + c_{i+3}^\vartheta \varphi_4(\tau), \\ \gamma(t) &= c_i^\gamma \varphi_1(\tau) + c_{i+1}^\gamma \varphi_2(\tau) + c_{i+2}^\gamma \varphi_3(\tau) + c_{i+3}^\gamma \varphi_4(\tau), \end{aligned} \quad (73)$$

и τ определяется соотношением (70). Далее потребуются выражения для производных:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= c_i^\varphi \dot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^\varphi \dot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^\varphi \dot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^\varphi \dot{\varphi}_4(\tau), \\ \dot{\lambda}(t) &= c_i^\lambda \dot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^\lambda \dot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^\lambda \dot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^\lambda \dot{\varphi}_4(\tau), \\ \dot{\psi}(t) &= c_i^\psi \dot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^\psi \dot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^\psi \dot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^\psi \dot{\varphi}_4(\tau), \\ \dot{\vartheta}(t) &= c_i^\vartheta \dot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^\vartheta \dot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^\vartheta \dot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^\vartheta \dot{\varphi}_4(\tau), \\ \dot{\gamma}(t) &= c_i^\gamma \dot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^\gamma \dot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^\gamma \dot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^\gamma \dot{\varphi}_4(\tau). \end{aligned} \quad (74)$$

Производные базовых функций с учетом (70) таковы:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(\tau) &= -\frac{1}{p\Delta t} \cdot \frac{3}{4} (1-\tau)^2, & \dot{\varphi}_2(\tau) &= \frac{1}{p\Delta t} \left[\frac{3}{4} \tau^2 - \frac{3}{2} (2-\tau)\tau \right], \\ \dot{\varphi}_3(\tau) &= \frac{1}{p\Delta t} \left[-\frac{3}{4} (1-\tau)^2 + \frac{3}{2} (1+\tau)(1-\tau) \right], & \dot{\varphi}_4(\tau) &= \frac{1}{p\Delta t} \cdot \frac{3}{4} \tau^2. \end{aligned} \quad (75)$$

Таким образом, на отрезке $[t_0, t_n]$ определены следующие функции: $\varphi(t), \lambda(t), h(t), \psi(t), \vartheta(t), \gamma(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\lambda}(t), \dot{h}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\gamma}(t)$. Это означает, что для вычисления точных значений показаний гироскопов можно применить процедуру, которая описана для случая аналитического задания траектории объекта.

Замечание. Выбор количества отрезков l , на которые следует разбивать указанный интервал $[t_0, t_n]$, напрямую зависит от характерного времени изменения траекторных параметров и от уровня точности, с которой требуется приблизить исходную траекторию. При этом, для сглаживания каждого из траекторных параметров величина l может быть различной. Например, если для углов ориентации мы рассмотрим аналитическую зависимость вида (30), то каждый период синуса достаточно разбить на $8 \div 10$ отрезков. Ниже, в соответствующем разделе данный подход будет применен к моделированию вибрации и там также будут приведены числовые характеристики сглаживания.

2.2.3 Краткие выводы

Были рассмотрены два разных подхода к вычислению показаний гироскопов.

Первый подход базируется на частном случае интегрируемости уравнения Пуассона. Достоинством такого подхода является его простота и универсальность, а также соответствие методу Эйлера численного интегрирования.

Второй подход основывается на точном вычислении показаний гироскопов как интегралов от компонент вектора ω_z , которые выражаются через координаты и углы ориентации объекта и их производные. Координаты и углы ориентации либо задаются аналитически, либо получаются путем сглаживания кубическими сплайнами своих дискретных значений. Достоинством такого подхода является его высокая точность, что позволяет его использовать для тестирования различных многошаговых численных схем решения уравнения Пуассона. Однако, сглаживание исходных данных с высокой точностью и необходимость моделировать показания гироскопов на длительные интервалы времени могут сильно повысить трудоемкость вычислений.

2.3 Вычисление показаний ньютонаометров

Пусть известны координаты, компоненты вектора скорости и параметры ориентации объекта в моменты времени $t_j, j = 0 \dots n$. Требуется вычислить вектор измерений ньютонаометров f_z (или $\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_z(t) dt$) на интервале $[t_j, t_{j+1}]$ для $j = 0, \dots, n - 1$.

Как и в случае моделирования измерений гироскопов рассматриваются два подхода к определению показаний ньютонаометров. Первый подход базируется на частных

случаях интегрируемости кинематических и динамических уравнений движения характерной точки объекта. Эти уравнения могут быть записаны в осях разных систем координат: в инерциальной $O\xi$, географической Ox , приборной Oz (в работе рассматриваются указанные системы, поскольку в инерциальной навигации именно они обычно выступают в роли опорных систем координат). В каждом из перечисленных случаев существуют частные случаи интегрируемости. Они используются для моделирования показаний ньютонаометров. Данный подход предлагается использовать для исследования различных алгоритмов комплексирования. Все приводимые ниже алгоритмы строятся таким образом, чтобы при решении модельных уравнений навигации выполнялся нулевой тест: траекторные параметры, являющиеся результатом решения модельных уравнений, совпадали с траекторными параметрами, которые легли в основу моделирования.

Второй подход основывается на численном интегрировании компонент вектора удельной внешней силы f_z как известной функции, зависящей от координат и углов ориентации объекта, а также от их производных. Рассматриваются два случая. В первом случае координаты и углы ориентации задаются аналитически как непрерывные функции времени. Во втором случае задаются дискретные значения координат и углов ориентации, а непрерывные функции времени для этих величин получаются на основе сплайн-аппроксимации. Численное интегрирование вектора f_z можно осуществлять со сколь угодно мелким шагом, что позволяет рассматривать данный метод как метод точного вычисления идеальных показаний ньютонаометров. Такой способ формирования показаний ньютонаометров позволяет тестировать многошаговые методы численного интегрирования уравнений БИНС.

2.3.1 Модельные уравнения записаны в осях инерциальной системы $O\xi$. Частный случай интегрируемости

Общий подход.

Уравнения движения точки M в проекциях на оси инерциальной системы координат $O\xi$ имеют вид (27, 28):

$$\dot{\xi} = v_\xi, \quad \dot{v}_\xi = F_\xi, \quad (76)$$

где через $F = f + g^0$ обозначена сумма всех удельных внешних сил, действующих на объект, которая складывается из удельной силы тяготения g^0 и реакции со стороны подвеса на приведенную чувствительную массу блока ньютонаометров f , которую, собственно, и измеряют ньютонаометры.

Предположим, что вектор F_ξ постоянен на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$. Тогда точное решение системы уравнений (76) запишется в следующем виде:

$$v_\xi(t_{j+1}) = v_\xi(t_j) + \Delta F_\xi, \quad \xi(t_{j+1}) = \xi(t_j) + v_\xi(t_j)\Delta t + \frac{1}{2}\Delta F_\xi\Delta t, \quad (77)$$

где

$$\Delta F_\xi = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_\xi(t) dt. \quad (78)$$

Варианты определения удельной силы F_ξ .

Для определения величины F_ξ положим $F_\xi = \frac{\Delta F_\xi}{\Delta t}$ и запишем решение (77) в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{v_\xi(t_{j+1}) - v_\xi(t_j)}{\Delta t} \\ \frac{2[\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)]}{\Delta t^2} - \frac{2v_\xi(t_j)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} F_\xi. \quad (79)$$

Возможны три варианта вычисления удельной силы F_ξ :

1. Удельная сила F_ξ определяется из второго соотношения (79) по известным координатам в моменты t_j и t_{j+1} и скорости в момент t_j :

$$F_\xi = \frac{2}{\Delta t^2} [\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j) - v_\xi(t_j)\Delta t]. \quad (80)$$

Значение скорости в момент t_{j+1} после этого определяется из первого соотношения (77). Используются координаты точки M в моменты $t_j, j = 0, \dots, n$ и вектор скорости в начальный момент времени $v_\xi(t_0)$. Недостатком такого подхода является его численная неустойчивость. В самом деле, подставим выражение (80) в первое соотношение (77). Получим следующую рекуррентную форму для определения вектора скорости v_ξ :

$$\frac{v_\xi(t_{j+1}) + v_\xi(t_j)}{2} = \frac{\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)}{\Delta t}. \quad (81)$$

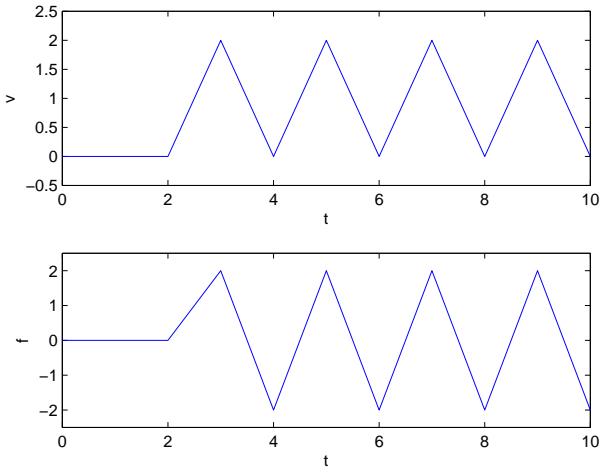
Данное выражение представляет собой цифровой фильтр с бесконечной импульсной характеристикой. Передаточная функция для данного фильтра имеет вид:

$$W(z) = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (82)$$

Полюсом данной функции будет величина $z = -1$, что говорит о неустойчивости фильтра, т.к. для устойчивости необходимо, чтобы модули каждого полюса были меньше единицы.

При использовании такого подхода вычисляемые вектор скорости и вектор показаний ньютона-мометров будут взаимно согласованными, но со временем могут совершать колебания, амплитуда которых будет возрастать. Для иллюстрации рассмотрим пример (скалярный случай): точка M сначала неподвижна, а потом начинает двигаться с постоянной скоростью. Сведем в одну таблицу обозначенную траекторию и те значения скорости и удельной внешней силы, которые будут вычисляться в соответствии с (80) и первым соотношением (77):

j	$t_j[s]$	$\xi[m]$	$v[m/s]$	$f[m/s^2]$
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	0	0	0
3	3	1	2	2
4	4	2	0	-2
5	5	3	2	2
6	6	4	0	-2
7	7	5	2	2
...



2. Удельная сила F_ξ определяется из первого соотношения (79) по известным значениям вектора скорости в моменты t_j и t_{j+1} :

$$F_\xi = \frac{v_\xi(t_{j+1}) - v_\xi(t_j)}{\Delta t}. \quad (83)$$

Тогда из второго соотношения (79):

$$\xi(t_{j+1}) = \xi(t_j) + \frac{v_\xi(t_{j+1}) + v_\xi(t_j)}{2} \Delta t. \quad (84)$$

Используется вектор скорости точки M в моменты $t_j, j = 0, \dots, n$ и вектор координат в начальный момент времени $\xi(t_0)$. Недостатком такого подхода является описанная выше неустойчивость цифрового фильтра (84), передаточная функция для которого имеет вид:

$$W(z) = \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}. \quad (85)$$

Кроме того, сама траектория (координаты точки M) на всем отрезке $[t_0, t_n]$ становится известной только после интегрирования известных векторов по формуле (84).

3. Вектор скорости в момент t_{j+1} вычисляется по следующей формуле:

$$v_\xi(t_{j+1}) = \frac{\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)}{\Delta t}. \quad (86)$$

После этого, удельная сила F_ξ определяется из первого соотношения (79) по приведенной выше формуле (83), а второе соотношение (79) не используется. Отметим, что такой подход не соответствует точному решению системы (77), однако, позволяет избежать расходимости со временем векторов скорости и удельной внешней силы, поскольку используемые соотношения представляют собой устойчивые цифровые фильтры. Поэтому данный способ и будем использовать для моделирования показаний ньютонометров.

Замечание. В дальнейшем, при моделировании показаний ньютонометров с использованием модельных уравнений в приборной системе Oz , возникнут те же три возможности, поэтому в соответствующем пункте подробно на них останавливаться не будем.

Варианты вычисления силы тяготения g_ξ^0 .

Для вычисления модуля силы тяжести g будем пользоваться формулой Гельмерта (22), итерационно вычислив географические координаты точки M . Сформируем матрицу A_x (3, 4), спроектируем силу тяжести на оси инерциальной системы ($g_\xi = A_x^T g_x$), вычислим удельную силу тяготения g_ξ^0 по (24).

Возможны три варианта:

1. Использовать при вычислении g значения координат в левом узле $\xi(t_j)$.
2. Использовать значения координат в правом узле $\xi(t_{j+1})$.
3. Использовать полусумму $\frac{\xi(t_j) + \xi(t_{j+1})}{2}$.

Поскольку при интегрировании модельных уравнений БИНС координаты точки M в правом узле t_{j+1} еще не известны, условимся здесь и далее всегда вычислять силу тяготения по значению координат точки в левом узле $\xi(t_j)$. Этим выбором обеспечивается выполнение так называемого нулевого теста имитатора при решении соответствующих модельных уравнений БИНС, который будет подробно обсуждаться ниже.

После вычисления силы тяготения, показания ньютонометров в проекции на оси инерциальной системы $O\xi$ вычисляются по формуле:

$$f_\xi = F_\xi - g_\xi^0. \quad (87)$$

Варианты проектировки вектора f_ξ на оси приборной системы Oz .

Показания ньютонометров получаются перепроектировкой вектора f_ξ на оси приборной системы:

$$f_z = A_z f_\xi. \quad (88)$$

Здесь возможны три варианта::

1. Использовать значение матрицы в левом узле $A_z(t_j)$.
2. Использовать значение матрицы в правом узле $A_z(t_{j+1})$.
3. Вычислить по формуле (41) матрицу A_z , соответствующую повороту на половинный угол $\frac{\gamma}{2}$:

$$A_z = \left(E + \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\gamma} \hat{\gamma}_z + \frac{1 - \cos \frac{\gamma}{2}}{\gamma^2} \hat{\gamma}_z^2 \right) A_z(t_j). \quad (89)$$

Как и при вычислении удельной силы тяготения будем использовать матрицу ориентации в левом узле $A_z(t_j)$ для обеспечения выполнения нулевого теста БИНС.

Замечание. Ниже всегда при проектировании внешней удельной силы f будем использовать соответствующие матрицы ориентации в левом узле t_j .

2.3.2 Модельные уравнения записаны в осях географической системы Ox . Частный случай интегрируемости

При использовании географической системы координат Ox в качестве опорной в инерциальной навигации для определения координат φ и λ традиционно рассматривается уравнение Пуассона относительно матрицы A_x (или соответствующего кватерниона), а высота h определяется через вертикальную компоненту скорости v_3 по (13).

Запишем систему модельных уравнений движения точки M в следующей форме (25, 28):

$$\dot{A}_x = \hat{\omega}_x A_x, \quad \dot{v}_x = \hat{\omega}_x v_x + F_x. \quad (90)$$

Рассмотрим задачу определения показаний ньютонометров на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$. Будем считать, что векторы F_x и ω_x постоянны на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$. Введем обозначение: $\gamma_x = \omega_x \Delta t$. Тогда можно показать, что точное решение системы уравнений (90) запишется в виде:

$$A_x(t_{j+1}) = \left(E + \frac{\sin \gamma_x}{\gamma_x} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \gamma_x}{\gamma_x^2} \hat{\gamma}_x^2 \right) A_x(t_j),$$

$$\begin{aligned} v_x(t_{j+1}) &= \left(E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x^2 \right) v_x(t_j) + \\ &+ \left(E + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x + \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma^3} \hat{\gamma}_x^2 \right) \Delta F_x, \end{aligned} \quad (91)$$

где

$$\Delta F_x = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_x(t) dt. \quad (92)$$

Для определения величины F_x положим $F_x = \frac{\Delta F_x}{\Delta t}$. Возможны два подхода к вычислению удельной силы F_x .

1. Предполагаются известными координаты точки M в моменты времени t_j и t_{j+1} и вектор скорости в момент времени t_j . Из первого соотношения (91) определяем вектор γ_x способом, которым моделируются показания гироскопов при рассмотрении решения (42) аналогичного уравнения Пуассона для матрицы A_z .

Затем вычисляем вектор скорости $v_x(t_{j+1})$. Для этого определим вектор $u_x(t_{j+1})$ (19) и вектор относительной угловой скорости географического трехгранника Ω_x (18):

$$\Omega_x = \omega_x - u_x. \quad (93)$$

Затем вычислим долготный R_E и широтный R_N радиусы кривизны (10). После этого компоненты вектора $V_x = (V_1, V_2, V_3)^T$ вычисляются в соответствии с (20) по формулам:

$$\begin{aligned} V_1(t_{j+1}) &= \Omega_2(R_E + h), \quad V_2(t_{j+1}) = -\Omega_1(R_N + h), \\ V_3(t_{j+1}) &= (h(t_{j+1}) - h(t_j)) / \Delta t, \end{aligned} \quad (94)$$

где Ω_i – компоненты вектора Ω_x . Абсолютную скорость $v_x(t_{j+1})$ точки M находим по (17).

Введем матричные обозначения:

$$\begin{aligned} C_1 &= E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x^2, \\ C_2 &= E + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x + \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma^3} \hat{\gamma}_x^2. \end{aligned} \quad (95)$$

Здесь отметим, что из первого соотношения (91) следует $C_1 = A_x(t_{j+1}) A_x^T(t_j)$.

Из второго соотношения (91) следует:

$$F_x = \frac{1}{\Delta t} C_2^{-1} [v_x(t_{j+1}) - C_1 v_x(t_j)], \quad (96)$$

откуда

$$f_x = F_x - g_x^0, \quad (97)$$

где сила тяготения g_x^0 вычисляется по формулам (22 - 24).

Матрица C_2^{-1} существует, поскольку для малого угла γ ее можно представить в виде:

$$C_2 = E + \frac{1}{2} \hat{\gamma}_x + O(\gamma^2) \quad \text{и} \quad |C_2| = 1 + O(\gamma^2) > 0. \quad (98)$$

Что и подтверждает существование матрицы C_2^{-1} .

Представленный способ определения показаний ньютонометров и вектора скорости в правом узле не содержит численной неустойчивости, поэтому рекомендуется к использованию.

Замечание. На первый взгляд может показаться более правильным, вычисляя по формулам (94) относительную скорость V_x точки M , относить ее не к моменту времени t_{j+1} , а к середине отрезка $[t_j, t_{j+1}]$. Но тогда, как и в п. 2.3.1., соответствующий цифровой фильтр для определения $v_x(t_{j+1})$ окажется неустойчивым.

2. Предполагаются известными компоненты вектора скорости точки M в моменты времени t_j и t_{j+1} и координаты в момент времени t_j . Тогда вектор F_x вычисляется по приведенной выше формуле (96), а вектор абсолютной угловой скорости ω_x определяется через вектор $v_x(t_{j+1})$ (приведенные в п.1 соотношения выполняются в обратном порядке). Далее, вычисляются элементы матрицы $A_x(t_{j+1})$ из первого соотношения (91), через которые могут быть найдены географические координаты $\varphi(t_{j+1})$ и $\lambda(t_{j+1})$ точки M , а $h(t_{j+1}) = h(t_j) + v_3(t_{j+1})\Delta t$.

Недостатком данного подхода является его численная неустойчивость, отмеченная в предыдущем параграфе, и тот факт, что координаты точки M на всем отрезке $[t_0, t_n]$ становятся известны только после решения первого уравнения (90) и, вообще говоря, могут существенно отличаться от траектории, которая предположительно легла в основу моделирования. Поэтому данный подход предлагается не использовать.

Показания ньютонометров в приборной системе координат Oz получаются перепроектировкой:

$$f_z = A_z A_x^T f_x = L f_x. \quad (99)$$

Представленный алгоритм имеет особенность при малых углах γ . Моделирование показало, что описанный алгоритм устойчиво работает при норме вектора поворота $\gamma > 10^{-6}$. Если норма вектора поворота меньше, выражения $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$ следует разложить в ряд Тейлора и ограничиться только квадратичными членами разложения. Тогда используемые в алгоритмах выражения упростятся следующим образом:

$$\begin{aligned} E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x^2 &\rightarrow E + \hat{\gamma}_x + \frac{1}{2} \hat{\gamma}_x^2, \\ E + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x + \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma^3} \hat{\gamma}_x^2 &\rightarrow E + \frac{1}{2} \hat{\gamma}_x + \frac{1}{6} \hat{\gamma}_x^2. \end{aligned} \quad (100)$$

2.3.3 Модельные уравнения записаны в приборной системе Oz . Частный случай интегрируемости

Запишем систему уравнений движения точки M в проекциях на оси приборной системы координат Oz (27, 28):

$$\dot{z} = v_z + \hat{\omega}_z z, \quad \dot{v}_z = \hat{\omega}_z v_z + F_z. \quad (101)$$

Перепишем систему (101) в матричной форме, поменяв местами порядок переменных:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_z \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_z & 0 \\ E & \hat{\omega}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_z \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_z \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Предположим, что векторы ω_z и F_z постоянны на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$. Тогда систему (102) можно проинтегрировать в явном виде и точное решение запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} v_z(t_{j+1}) &= \left(E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_z + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_z^2 \right) v_z(t_j) + \\ &+ \left(E + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_z + \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma^3} \hat{\gamma}_z^2 \right) \Delta F_z, \\ z(t_{j+1}) &= \left(E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_z + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_z^2 \right) (z(t_j) + v_z(t_j) \Delta t) + \\ &+ \left[\frac{1}{2} E + \frac{\sin \gamma - \gamma \cos \gamma}{\gamma^3} \hat{\gamma}_z + \frac{1 + 0.5\gamma^2 - \cos \gamma - \gamma \sin \gamma}{\gamma^4} \hat{\gamma}_z^2 \right] \Delta F_z \Delta t. \end{aligned} \quad (103)$$

Здесь вектор $\gamma_z = \omega_z \Delta t$, алгоритм его вычисления обсуждался выше. Введем для вектора γ_z матричные обозначения C_1 и C_2 аналогично (95) и дополним их обозначением C_3 :

$$C_3 = \frac{1}{2}E + \frac{\sin \gamma - \gamma \cos \gamma}{\gamma^3} \hat{\gamma}_z + \frac{1 + 0.5\gamma^2 - \cos \gamma - \gamma \sin \gamma}{\gamma^4} \hat{\gamma}_z^2. \quad (104)$$

Для определения величины F_z положим $F_z = \frac{\Delta F_z}{\Delta t}$. Как и для уравнений в инерциальной системе координат $O\xi$, здесь представляются возможными три подхода к вычислению удельной силы F_z :

1. Пусть известны $z(t_j), z(t_{j+1})$ и $v_z(t_j)$. Тогда из второго соотношения:

$$F_z = \frac{1}{\Delta t^2} C_3^{-1} [z(t_{j+1}) - C_1[z(t_j) + v_z(t_j)\Delta t]], \quad (105)$$

а вектор $v_z(t_{j+1})$ находится из первого соотношения (103). Как ранее было отмечено, данный подход ведет к вычислительной неустойчивости.

2. Пусть известны $v_z(t_j), v_z(t_{j+1})$ и $z(t_j)$. Тогда вектор F_z находится из первого соотношения (103) по формуле:

$$F_z = \frac{1}{\Delta t} C_2^{-1} [v_z(t_{j+1}) - C_1 v_z(t_j)]. \quad (106)$$

Вектор координат $z(t_{j+1})$ после этого определяется из второго соотношения (103). Недостатком данного подхода является отмеченная ранее численная неустойчивость и тот факт, что координаты точки M на всем отрезке $[t_0, t_n]$ становятся известны только после решения первого уравнения (101).

3. Пусть известны координаты точки M в моменты времени t_j и t_{j+1} и вектор скорости в моменты времени t_j . Сначала вычислим вектор абсолютной скорости $v_x(t_{j+1})$ точки M точно так же, как и при работе в географической системе координат Ox через первое уравнение (90). Затем векторы $v_x(t_j)$ и $v_x(t_{j+1})$ следует перепроектировать на оси приборной системы координат Oz :

$$v_z(t_j) = A_z(t_j) A_x^T(t_j) v_x(t_j), \quad v_z(t_{j+1}) = A_z(t_{j+1}) A_x^T(t_{j+1}) v_x(t_{j+1}). \quad (107)$$

После этого, вектор F_z определяется по формуле (106). Этот подход является устойчивым (см. п.2.3.1.), поэтому предлагается вычислять вектор F_z данным способом.

Удельная сила тяготения g_z^0 , как и ранее, определяется с помощью (22 - 24). Тогда выражение для показаний ньютона имеет вид:

$$f_z = F_z - g_z^0. \quad (108)$$

Покажем, что матрица C_3^{-1} существует. Поскольку на каждом отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ угол γ является малым, матрицу C_3 можно представить в виде:

$$C_3 = \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}\hat{\gamma}_z + O(\gamma^2) \quad \text{и} \quad |C_3| = \frac{1}{8} + O(\gamma^2) > 0, \quad (109)$$

что подтверждает существование матрицы C_3^{-1} .

Как и ранее, указанные формулы следует применять при норме вектора поворота $\gamma > 10^{-6}$. Если норма вектора поворота меньше, все выражения $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$ следует разложить в ряд Тейлора и ограничиться только квадратичными членами разложения. В частности матрица C_3 примет вид:

$$\frac{1}{2}E + \frac{\sin \gamma - \gamma \cos \gamma}{\gamma^3} \hat{\gamma}_z + \frac{1 + 0.5\gamma^2 - \cos \gamma - \gamma \sin \gamma}{\gamma^4} \hat{\gamma}_z^2 \rightarrow \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}\hat{\gamma}_z + \frac{1}{8}\hat{\gamma}_z^2.$$

2.3.4 Вычисление идеальных показаний ньютонометров путем прямого численного интегрирования

Рассмотрим два способа задания траекторных параметров. В первом случае координаты и углы ориентации объекта заданы как непрерывные функции времени, во втором случае, значения координат и углов ориентации представлены в дискретные моменты времени.

Аналитический способ задания траектории объекта.

Рассмотрим отрезок $[t_0, t_n]$ и будем считать на нем заданными непрерывные функции $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ и $\gamma(t)$. Будем также считать заданными функции $\varphi(t)$, $\lambda(t)$ и $h(t)$, которые являются непрерывными и имеют непрерывные первые и вторые производные в каждой точке отрезка. Требуется определить вектор показаний ньютонометров как интеграл от вектора удельной внешней силы f_z на каждом интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$, где $j = 0, \dots, n - 1$.

Для вычисления силы f можно рассматривать любые варианты точных дифференциальных динамических уравнений движения. Рассмотрим, для определенности, динамическое уравнение движения точки в относительных переменных в проекциях на оси географической системы координат (28):

$$\dot{V}_x = (\hat{\Omega}_x + 2\hat{u}_x)V_x + g_x + L^T f_z. \quad (110)$$

Отсюда:

$$f_z(t) = L(t)[\dot{V}_x(t) - (\hat{\Omega}_x(t) + 2\hat{u}_x(t))V_x(t) - g_x(t)]. \quad (111)$$

Вектор g_x вычисляется при помощи соотношений (22, 23), вектор u_x определяется из (19), а компоненты вектора относительной скорости V_x выражаются из (13):

$$V_1 = \dot{\lambda}(R_E + h) \cos \varphi, \quad V_2 = \dot{\varphi}(R_N + h), \quad V_3 = \dot{h}. \quad (112)$$

Компоненты вектора относительной угловой скорости Ω_x географической системы вычисляются через компоненты вектора относительной скорости V_x (94). Для определения производных компонент вектора относительной скорости точки M имеем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \ddot{\lambda}(R_E + h) \cos \varphi + \dot{\lambda}(\dot{R}_E + \dot{h}) \cos \varphi - \dot{\lambda}\dot{\varphi}(R_E + h) \sin \varphi, \\ \dot{V}_2 &= \ddot{\varphi}(R_N + h) + \dot{\varphi}(\dot{R}_N + \dot{h}), \\ \dot{V}_3 &= \ddot{h}, \end{aligned} \quad (113)$$

где в соответствии с (10):

$$\dot{R}_E = R_E \frac{\dot{\varphi}e^2 \cos \varphi \sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}, \quad \dot{R}_N = \frac{3R_E \dot{R}_E (1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (114)$$

Таким образом, выражение для вектора $f_z(t)$ представляет собой известную непрерывную зависимость от функций $\psi(t), \vartheta(t), \gamma(t), \varphi(t), \lambda(t), h(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\lambda}(t), \dot{h}(t), \ddot{\varphi}(t), \ddot{\lambda}(t), \ddot{h}(t)$.

Вектор показаний ньютонометров как интеграл от вектора удельной внешней силы вычисляется через интегральную сумму

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_z(t) dt \cong \sum_{k=1}^m f_{zk}^* \cdot \Delta\tau, \quad (115)$$

где значения f_{zk}^* могут быть получены любым численным методом, например, методом Симпсона (69) с контролем точности вычисления.

Траектория объекта задана дискретным набором значений координат и углов ориентации.

Пусть имеется дискретная информация о координатах объекта и углах его ориентации: $\psi(t_j), \vartheta(t_j), \gamma(t_j), \varphi(t_j), \lambda(t_j)$ и $h(t_j)$, $j = 0, \dots, n$. Сведем задачу к предыдущему случаю.

Осуществим сглаживание указанных дискретных реализаций при помощи кубических сплайнов. Ранее при описании соответствующего алгоритма вычисления показаний гироскопов были получены непрерывные реализации

$\psi(t), \vartheta(t), \gamma(t), \varphi(t), \lambda(t), h(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\lambda}(t)$. Аналогично (74), реализация \dot{h} на каждом отрезке $[t_{ip}, t_{(i+1)p}]$ ($i = 0, \dots, l - 1$, $lp = n$) вычисляется:

$$\dot{h}(t) = c_i^h \dot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^h \dot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^h \dot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^h \dot{\varphi}_4(\tau).$$

Запишем выражения для вторых производных базовых функций:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1(\tau) &= \frac{3}{2}(1-\tau) \cdot \frac{1}{p^2 \Delta t^2}, & \ddot{\varphi}_2(\tau) &= \frac{3}{2}(3\tau-2) \cdot \frac{1}{p^2 \Delta t^2}, \\ \ddot{\varphi}_3(\tau) &= \frac{3}{2}(1-3\tau) \cdot \frac{1}{p^2 \Delta t^2}, & \ddot{\varphi}_4(\tau) &= \frac{3}{2}\tau \cdot \frac{1}{p^2 \Delta t^2}. \end{aligned}\quad (116)$$

Тогда вторые производные от географических координат точки M на каждом отрезке $[t_{ip}, t_{(i+1)p}]$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}(t) &= c_i^\varphi \ddot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^\varphi \ddot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^\varphi \ddot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^\varphi \ddot{\varphi}_4(\tau), \\ \ddot{\lambda}(t) &= c_i^\lambda \ddot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^\lambda \ddot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^\lambda \ddot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^\lambda \ddot{\varphi}_4(\tau), \\ \ddot{h}(t) &= c_i^h \ddot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^h \ddot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^h \ddot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^h \ddot{\varphi}_4(\tau).\end{aligned}$$

Таким образом, на отрезке $[t_0, t_n]$ определены следующие функции: $\psi(t), \vartheta(t), \gamma(t), \varphi(t), \lambda(t), h(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\lambda}(t), \ddot{h}(t), \ddot{\varphi}(t), \ddot{\lambda}(t), \ddot{h}(t)$. Это означает, что для вычисления точных значений показаний ньютонометров можно применить процедуру, которая описана для случая аналитического задания траектории объекта.

2.3.5 Краткие выводы

Были рассмотрены два подхода к вычислению показаний ньютонометров.

Первый подход базируется на частных случаях интегрируемости кинематических и динамических уравнений движения. Достоинством такого подхода является его простота, универсальность и соответствие методу Эйлера численного интегрирования.

Второй подход основывается на точном вычислении вектора показаний ньютонометров как интеграла от вектора f_z , компоненты которого выражаются через координаты, углы ориентации объекта, первые и вторые производные от координат. Координаты и углы ориентации либо задаются аналитически, либо получаются путем сглаживания кубическими сплайнами своих дискретных значений. Это позволяет использовать предложенный метод для тестирования различных многошаговых численных схем решения уравнений движения. Однако, сглаживание исходных данных с высокой точностью и необходимость моделировать показания ньютонометров на длительные интервалы времени могут сильно повысить трудоемкость вычислений.

Оба представленных подхода были тщательно проверены как с помощью большого набора разноплановых экспериментальных данных, так и путем проведения необходимого цикла тестового моделирования.

2.4 Задача согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков двух БИНС, расположенных на одном объекте

Рассмотрим задачу согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков двух бескарданных инерциальных навигационных систем, расположенных на одном подвижном объекте. Входной информацией для такой задачи являются траекторные параметры первой системы и известная информация об их взаимном расположении. В качестве примера востребованной задачи из практики можно привести задачу начальной выставки БИНС, расположенной на самолете или вертолете корабельного базирования, с помощью информации от базовой БИНС. Второй, методически схожей задачей является задача учета разнесения чувствительных масс блока ньютонометров при калибровке, которая будет рассмотрена ниже. Также приводимые в данном параграфе соотношения актуальны при моделировании показаний инерциальных датчиков БИНС по информации о положении находящейся на том же объекте спутниковой антенны, расположенной на некотором удалении от БИНС.

Опишем содержание задачи. На объекте находятся две бескарданные инерциальные навигационные системы. Обозначим через M_1 центр блока ньютонометров первой БИНС, через M_2 – второй БИНС. С осями чувствительности каждой БИНС связем приборные системы координат, соответственно, $M_1z_1(Oz_1)$ и $M_2z_2(Oz_2)$.

Задача ставится следующим образом. Пусть в моменты времени $t_j, j = 0 \dots n$ известны координаты точки M_1 , компоненты вектора скорости и параметры ориентации системы M_1z_1 . Сразу отметим, что для первой БИНС показания инерциальных датчиков могут быть вычислены с помощью описанных выше алгоритмов. Известен постоянный вектор $\bar{l} = \bar{M}_1\bar{M}_2$, в осях связанной с объектом системы координат. Для определенности будем считать, что связанная система совпадает с приборной системой M_1z_1 . Задана постоянная матрица $C_{z_2z_1}$ ориентации системы M_2z_2 относительно M_1z_1 . Требуется на каждом интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0 \dots n - 1$) вычислить показания инерциальных датчиков второй БИНС, а также координаты и вектор скорости точки M_2 в моменты времени $t_j, j = 0 \dots n$.

Вычисление показаний гироскопов второй БИНС.

Поскольку обе системы жестко связаны с одним и тем же корпусом, показания

гироскопов второй системы ω_{z2} можно выразить через показания первой ω_{z1} следующим образом:

$$\omega_{z2} = C_{z_2 z_1} \omega_{z1}. \quad (117)$$

Вычисление показаний ньютонометров второй БИНС.

Воспользуемся результатами предыдущего раздела. Для этого вычислим координаты точки M_2 в моменты t_j и t_{j+1} , вектор скорости в момент t_j и параметры ориентации системы $M_2 z_2$ в моменты t_j и t_{j+1} .

Вычисление координат точки M_2 .

Координаты точки M_2 вычисляются, например, следующим образом:

$$\eta^{M_2} = l_\eta + \eta^{M_1}, \quad (118)$$

где η^{M_1}, η^{M_2} – соответственно, координаты точек M_1 и M_2 в гринвичской системе координат $O\eta$, l_η – проекции вектора \bar{l} на оси гринвичской системы координат.

По гринвичским координатам η^{M_2} могут быть вычислены географические координаты φ_2, λ_2 и h_2 точки M_2 .

Обозначим через $M_1 x_1$ и $M_2 x_2$ соответствующие точкам M_1 и M_2 географические системы координат. Через A_{x_1} и A_{x_2} обозначим, соответственно, матрицы ориентации систем $M_1 x_1$ и $M_2 x_2$ относительно инерциальной системы $O\xi$. Матрица $A_{x_2}(t)$ может быть сформирована через географические координаты φ_2, λ_2 и время t . Матрица $C_{x_2 x_1}$ взаимной ориентации систем $M_1 x_1$ и $M_2 x_2$ вычисляется так:

$$C_{x_2 x_1} = A_{x_2} A_{x_1}^T. \quad (119)$$

В качестве более простого варианта вычисления матрицы $C_{x_2 x_1}$ может быть использована следующая модель. Обозначим через γ_x^{12} вектор малого поворота системы $M_2 x_2$ относительно $M_1 x_1$. Тогда имеем:

$$C_{x_2 x_1} = (E + \hat{\gamma}_x^{12}), \quad \gamma_x^{12} = (-\Delta\varphi, \Delta\lambda \cos\varphi, \Delta\lambda \sin\varphi)^T, \quad (120)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ и $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

Вычисление параметров ориентации второй системы.

Обозначим через A_{z_1} и A_{z_2} , соответственно, матрицы ориентации систем $M_1 z_1$ и $M_2 z_2$ относительно инерциальной системы $O\xi$. Матрица A_{z_2} может быть выражена через матрицу A_{z_1} по формуле:

$$A_{z_2} = C_{z_2 z_1} A_{z_1}. \quad (121)$$

Если через L_2 обозначить матрицу ориентации системы M_2z_2 относительно системы M_2x_2 , то верно следующее равенство:

$$L_2 = A_{z_2}A_{x_2}^T. \quad (122)$$

Через элементы матрицы L_2 могут быть найдены углы ориентации второй БИНС по формулам (8).

Вычисление вектора скорости точки M_2

Запишем в векторном виде формулу Эйлера, связывающую абсолютные скорости двух точек M_1 и M_2 объекта:

$$v^{M_2} = v^{M_1} + [\omega_* \times \overline{M_1 M_2}]. \quad (123)$$

Здесь ω_* – вектор абсолютной угловой скорости объекта.

Запишем уравнение Эйлера в проекциях на оси системы координат M_1x_1 . Имеем:

$$v_{x1}^{M_2} = v_{x1}^{M_1} - \hat{\omega}_{*x1}l_{x1}. \quad (124)$$

Угловая скорость объекта ω_{*x1} в проекциях на оси системы координат M_1x_1 может быть вычислена двумя способами:

$$\omega_{*x1} = A_{x1}A_{z1}^T\omega_{z1} = A_{x1}A_{z2}^T\omega_{z2}. \quad (125)$$

Абсолютная скорость $v_{x2}^{M_2}$ точки M_2 в проекциях на оси системы координат M_2x_2 вычисляется по формуле:

$$v_{x2}^{M_2} = C_{x_2x_1}v_{x1}^{M_2} \quad (126)$$

или в осях инерциальной системы $O\xi$ и приборной системы M_2z_2 :

$$v_\xi^{M_2} = A_{x2}^T v_{x2}^{M_2}, \quad v_{z2}^{M_2} = A_{z2}A_{x2}^T v_{x2}^{M_2}. \quad (127)$$

Компоненты вектора относительной скорости $V_{x2}^{M_2}$ вычисляются с помощью (17).

После определения координат и компонент вектора скорости точки M_2 показания ньютонометров могут быть вычислены с помощью описанных выше подходов.

Краткие выводы.

Задача согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков двух БИНС, расположенных на подвижном объекте, свелась к использованию описанных выше алгоритмов.

2.5 Особенности интегрирования модельных уравнений БИНС с точки зрения выполнения нулевого теста

После того, как были описаны алгоритмы вычисления показаний инерциальных датчиков, гироскопов и ньютонометров, приведем соответствующие алгоритмы для интегрирования модельных уравнений инерциальной навигации. Интегрирование модельных уравнений позволяет провести качественный анализ вычисленных показаний инерциальных датчиков на предмет выполнения так называемого нулевого теста, т.е. проверить точность совпадения траектории, которая получается в результате решения модельных уравнений, с исходной траекторией.

Задача ставится следующим образом. Пусть в момент времени t_j известны координаты объекта (точки M), вектор его скорости и параметры ориентации, а также показания гироскопов и ньютонометров на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$. Требуется определить координаты объекта, вектор его скорости и параметры ориентации в момент времени t_{j+1} .

Здесь сразу отметим, что в задаче определения параметров ориентации нулевой тест выполняется всегда в силу того, что решается уравнение Пуассона (41), которое легко в основу моделирования. Решение этого уравнения при соответствующих ограничениях на вектор угловой скорости ω_z получается по формуле (42), что обеспечивает выполнение нулевого теста.

Поэтому остановимся на вопросах точности определения координат и вектора скорости объекта.

2.5.1 Решение модельных уравнений в системе координат, в осях которой моделировались показания ньютонометров

Опишем алгоритмы интегрирования модельных уравнений для работы в инерциальной $O\xi$, географической Ox и приборной Oz системах координат.

Модельные уравнения записаны в инерциальной системе $O\xi$.

Система модельных уравнений в осях инерциальной системы координат $O\xi$ имеет вид (76). Решение этой системы при соответствующих гипотезах о поведении удельной внешней силы f_ξ и удельной силы тяготения g_ξ^0 имеет вид (77).

Процедура решения модельных уравнений в обратном порядке в точности повторяет процедуру определения показаний ньютонометров, поэтому нулевой тест всегда выполняется.

Модельные уравнения записаны в приборной системе Oz .

Система модельных уравнений в осях приборной системы координат Oz имеет вид (101). Решение этой системы при соответствующих ограничениях на векторы f_z, ω_z и g_z^0 имеет вид (103).

Как и при работе в инерциальной системе $O\xi$, нулевой тест всегда выполняется.

Модельные уравнения записаны в географической системе Ox .

Система модельных уравнений в осях географической системы координат Ox имеет вид (90). Точное решение этой системы при сформулированных в соответствующем пункте (п.2.3.2) предположениях имеет вид (91). Решение модельных уравнений на отрезке времени $[t_j, t_{j+1}]$ предполагает определение координат в момент времени t_{j+1} . Однако, алгоритм интегрирования модельных уравнений использует значение вектора поворота $\gamma_x = \omega_x \Delta t$, который связывает координаты точки в моменты времени t_j и t_{j+1} . Поэтому вектор γ_x всегда может быть вычислен только приближенно и решение модельных уравнений не будет в точности повторять исходную траекторию, которая легла в основу формирования показаний ньютонаометров, что не позволяет в полной мере обеспечить выполнение нулевого теста.

Опишем последовательностей вычислений для решения модельных уравнений.

1. Вычисление вектора поворота γ_x на интервале на интервале $[t_j, t_{j+1}]$.

Сначала выразим вектор поворота географической системы координат γ_x через горизонтальные компоненты вектора относительной скорости V_x точки M в момент времени t_j . Для этого воспользуемся соотношением, связывающим абсолютную и относительную скорости (17):

$$V_1 = v_1 - u R_E \cos \varphi, \quad V_2 = v_2. \quad (128)$$

Здесь географическая широта φ и долготный радиус кривизны R_E берутся в момент времени t_j . Затем воспользуемся, предварительно вычислив широтный радиус кривизны R_N (10), соотношениями (20), связывающими линейные и угловые относительные скорости.

Из формулы (93) определяется абсолютная угловая скорость ω_x , которая связана с искомым вектором γ_x соотношением $\gamma_x = \omega_x \Delta t$.

2. Вычисление скорости $v_x(t_{j+1})$. Для определения скорости $v_x(t_{j+1})$ используется решение модельного уравнения (91). Для этого, показания ньютонаометров перепроектируются на оси географической системы координат Ox через матрицы $A_z(t_j)$ и $A_x(t_j)$:

$$f_x = A_x A_z^T f_z. \quad (129)$$

3. Повторное вычисление векторов γ_x и $v_x(t_{j+1})$. По вычисленному вектору $v_x(t_{j+1})$ снова повторяется процедура определения вектора поворота географической

системы координат γ_x , начиная с соотношений (128). Затем снова по формуле (91) определяется скорость $v_x(t_{j+1})$. Следует заметить, что данный алгоритм представляет собой метод Эйлера с пересчетом для численного интегрирования.

4. Вычисление географических координат в момент t_{j+1} . Для определения географической широты и долготы точки M используется первое уравнение системы (90), решение которого совпадает с решением аналогичного уравнения для матрицы A_z (42). Зная матрицу $A_x(t_{j+1})$, можно вычислить матрицу $B_x(t_{j+1})$ (4):

$$B_x = A_x A_\eta^T, \quad (130)$$

через элементы которой определяются географическая широта $\varphi(t_{j+1})$ и долгота $\lambda(t_{j+1})$ объекта (3):

$$\tan \varphi = \frac{b_{33}}{b_{23}}, \quad \tan \lambda = -\frac{b_{11}}{b_{12}}. \quad (131)$$

Для определения угла λ необходимо учитывать знаки величин b_{11} и b_{12} .

Высота $h(t_{j+1})$, в соответствии с (94) определяется по следующей формуле:

$$h(t_{j+1}) = h(t_j) + v_3(t_{j+1}) \Delta t. \quad (132)$$

С целью проверки рассмотрим пример. В начальный момент времени объект (точка M) имеет координаты: $\varphi = 60^\circ$ с.ш., $\lambda = 0^\circ$, $h = 100$ м. Объект плавно разгоняется до путевой скорости в продольном направлении 100м/с и далее движется с постоянной скоростью. Углы ориентации в начальный момент времени: $\psi = 20^\circ$, $\vartheta = 1^\circ$, $\gamma = 10^\circ$. В течение всего движения углы ориентации совершают колебания с амплитудами $A_\psi = 10^\circ$, $A_\vartheta = 2^\circ$, $A_\gamma = 4^\circ$ и периодами $T_\psi = 3.3$ с, $T_\vartheta = 4.0$ с, $T_\gamma = 4.1$ с. Рассмотрим движение на интервале времени $t_n - t_0 = 50$ мин. с шагом $\Delta t = 0.01$ с. На Рис.1,2 показаны графики величин $a \cdot \Delta\varphi$ и $a \cdot \Delta\lambda \cos \varphi$, которые представляют собой расхождения между исходной траекторией и решением модельных уравнений в метрах. Видно, что величина $\Delta\lambda$ достигает значения 3см, что и демонстрирует неполное выполнение нулевого теста.

2.5.2 Особенности имитации показаний ньютонометров

Моделирование показаний ньютонометров и решение модельных уравнений в различных системах координат.

Если моделировать показания ньютонометров в инерциальной или приборной системе координат и решать модельные уравнения в той же самой системе координат, то нулевой тест будет выполняться.

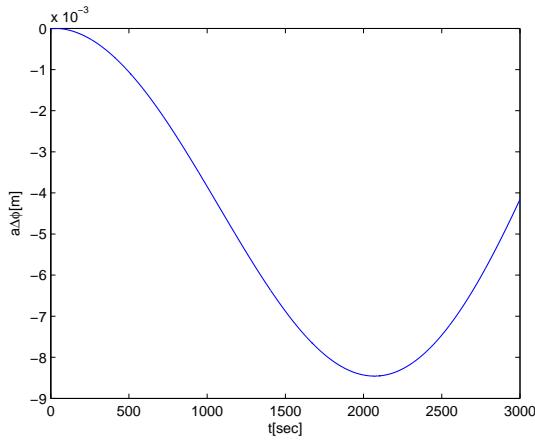


Рис. 1: График ошибки местоположения по географической широте $\Delta\varphi$.

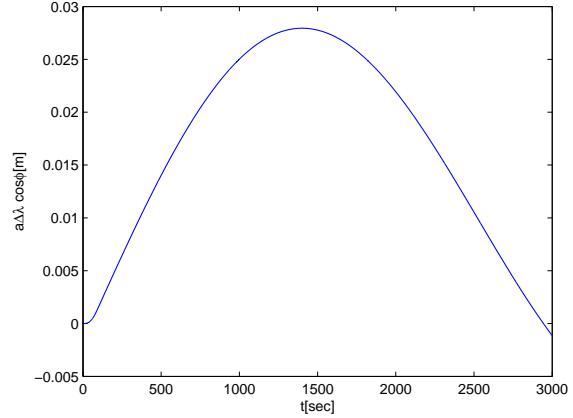


Рис. 2: График ошибки местоположения по долготе $\Delta\lambda$.

Если моделировать показания ньютонометров в одной системе координат, а решать модельные уравнения в другой, то нулевой тест выполняться не будет – полученное решение будет отличаться от траекторных параметров, по которым были сформированы идеальные показания ньютонометров. Это обстоятельство вызвано тем, что представленные формулы для вычислений в инерциальной системе $O\xi$, географической системе Ox и приборной системе Oz получены при разных предположениях. В самом деле, например, вектор f сохраняет свое направление и в осях $O\xi$, и в осях Oz только в том случае, если приборный трехгранник Oz неподвижен в инерциальном пространстве. Однако, такой вариант необходимо рассмотреть, поскольку алгоритмы навигационного счисления БИНС могут решаться в осях разных систем координат.

Для того чтобы минимизировать различия в гипотезах, лежащих в основе вычисления показаний ньютонометров, следует проектировать удельную силу f и силу тяготения g^0 из одной системы координат в другую при помощи матриц ориентации, соответствующих половине вектора поворота за интервал времени $[t_j, t_{j+1}]$, что является, своего рода, аналогом метода трапеций интегрирования дифференциальных уравнений. Можно считать, что такие матрицы соответствуют середине отрезка $[t_j, t_{j+1}]$. Пусть γ_z – угол поворота приборной системы за интервал $[t_j, t_{j+1}]$, который определяется из уравнения Пуассона (41) (см.п.2.2.1.), γ_x – угол поворота географической системы, который определяется из первого уравнения (90). Тогда матрицы $A_x(t_j + \frac{\Delta t}{2})$ и $A_z(t_j + \frac{\Delta t}{2})$, отнесенные к середине интервала времени, вычисляются

через углы γ_x и γ_z по формулам:

$$\begin{aligned} A_x \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) &= \left(E + \frac{\sin \frac{\gamma_x}{2}}{\gamma_x} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \frac{\gamma_x}{2}}{\gamma_x^2} \hat{\gamma}_x^2 \right) A_x(t_j), \\ A_z \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) &= \left(E + \frac{\sin \frac{\gamma_z}{2}}{\gamma_z} \hat{\gamma}_z + \frac{1 - \cos \frac{\gamma_z}{2}}{\gamma_z^2} \hat{\gamma}_z^2 \right) A_z(t_j). \end{aligned} \quad (133)$$

Тогда

$$\begin{aligned} g_x^0 &= A_z \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) g_\xi^0, & g_z^0 &= A_z \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) A_x^T \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) g_x^0, \\ f_z &= A_z \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) f_\xi, & f_z &= A_z \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) A_x^T \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) f_x. \end{aligned} \quad (134)$$

При этом отметим, что

$$\begin{aligned} A_x^T \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) &= A_x^T(t_j) \left(E - \frac{\sin \frac{\gamma_x}{2}}{\gamma_x} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \frac{\gamma_x}{2}}{\gamma_x^2} \hat{\gamma}_x^2 \right), \\ A_z^T \left(t_j + \frac{\Delta t}{2} \right) &= A_z^T(t_j) \left(E - \frac{\sin \frac{\gamma_z}{2}}{\gamma_z} \hat{\gamma}_z + \frac{1 - \cos \frac{\gamma_z}{2}}{\gamma_z^2} \hat{\gamma}_z^2 \right). \end{aligned} \quad (135)$$

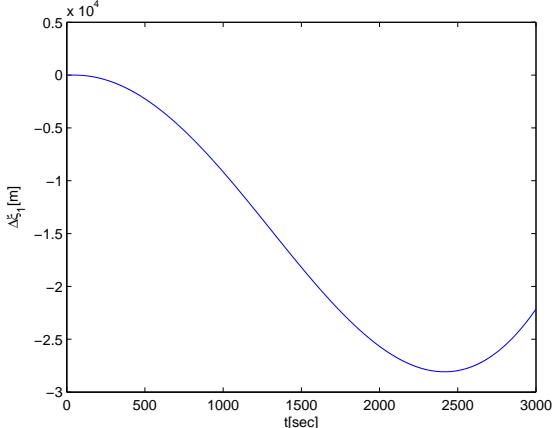


Рис. 3: График ошибки местоположения по оси $O\xi_1$. Матрица перепроектировки – $A_z(t_j)$.

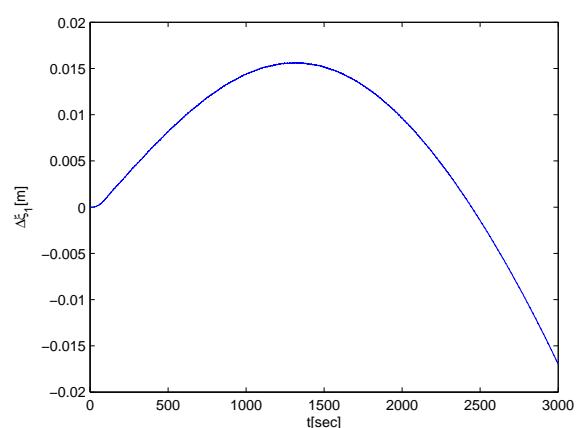


Рис. 4: График ошибки местоположения по оси $O\xi_1$. Матрица перепроектировки – $A_z(t_j + \frac{\Delta t}{2})$.

На Рис. 3,4 представлены для рассмотренного выше примера графики ошибки местоположения по оси $O\xi_1$ при моделировании показаний ньютонометров в инерциальной системе по формуле (80) и решении модельных уравнений в приборной системе по формулам (103) (для сравнения с исходной траекторией полученное навигационное решение перепроектируется в инерциальную систему $O\xi$). В первом случае, удельная сила f и сила тяготения g^0 проектируются при помощи матриц, отнесенных к моменту времени t_j , во втором – при помощи матриц, отнесенных к моменту $t_j + \frac{\Delta t}{2}$. Видно, что в первом случае, разность между исходной траекторией и решением модельных уравнений достигает десятков километров, тогда как во втором случае не превышает нескольких сантиметров. По осям $O\xi_2$ и $O\xi_3$ ошибки ведут себя аналогично.

Таким образом, при работе в разных системах координат нулевой тест полностью выполняться не будет, однако, при использовании матриц ориентации, отнесенных к середине интервала $[t_j, t_{j+1}]$, разницу между исходной траекторией и траекторией, полученной решением модельных уравнений, можно минимизировать. Отсюда следует вывод, что на практике при решении модельных уравнений инерциальной навигации показания ньютонометров следует также проектировать на оси опорной системы координат при помощи матрицы ориентации, отнесенной к середине интервала интегрирования.

Замечание. Отметим, что в работах по численному интегрированию уравнений навигации (например, [70]) при выводе решения модельных уравнений детально учитывается вращение приборной системы Oz на шаге интегрирования, что приводит в соответствующих формулах к ряду дополнительных слагаемых. Отнесение матриц ориентации к середине интервала интегрирования (133) в предложенных в работе алгоритмах также по сути представляет собой учет вращения систем координат на интервале интегрирования.

Замечания об особенностях моделирования высоты.

При решении модельных уравнений возникает особенность, связанная с неустойчивостью вертикального канала. Данное обстоятельство вынуждает привлекать дополнительную информацию о высоте. Именно, поэтому использование формулы Гельмерта для вычисления силы тяжести представляется более удобным, т.к. высота h в нее входит явно.

На самом деле, разность между силой тяготения (силой тяжести), вычисленной по формуле (21), и силой тяготения, вычисленной с помощью формулы Гельмерта, не превышает $3 \cdot 10^{-4} \text{ м/c}^2$. На Рис.5,6 представлены соответствующие графики в проекциях на оси Ox_2 и Ox_3 . Синий цвет соответствует высоте $h = 0 \text{ км}$, зеленый – высоте $h = 5 \text{ км}$, красный – высоте $h = 10 \text{ км}$. Таким образом при моделировании

показаний ньютонометров на небольшие интервалы времени можно пользоваться, вообще говоря, как формулами, используемыми в спутниковой системе ГЛОНАСС (21), так и формулой Гельмерта (22).

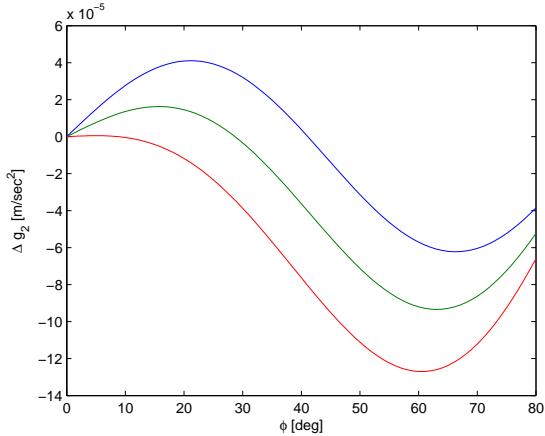


Рис. 5: Разность вычисления разными способами силы тяжести по оси Ox_2 .

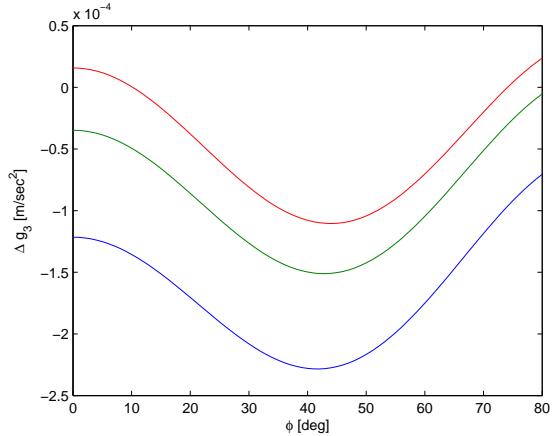


Рис. 6: Разность вычисления разными способами силы тяжести по оси Ox_3 .

2.6 Моделирование траекторных параметров в полярных районах

Задача моделирования траекторных параметров летательного аппарата и показаний инерциальных датчиков в полярных областях возникла из практики аэрогравиметрических съемок и связана с тем, что существующие гравиметрические комплексы платформенного типа, например, GT2A, Чекан-АМ, имеют особенности алгоритмов навигации и гиростабилизации в высоких широтах. Последнее связано с тем, что в точках Северного и Южного Полюсов неопределенена долгота λ и угол курса ψ . Кроме того, при движении объекта строго через полюс долгота λ и угол курса ψ меняются скачком на 180 градусов.

Поэтому разработчиками комплекса GT2A было предложено дополнительно использовать систему разнесенных спутниковых антенн, как источник курсовой информации, что привело к модификации алгоритмов навигации и стабилизации этого прибора. Для тестирования новых алгоритмов навигации собственно и понадобилась задача имитации траекторных параметров в высоких широтах.

Задача ставится следующим образом: смоделировать согласованные значения траекторных параметров для типового движения объекта. Для имитации согласованных траекторных параметров предлагается следующая идея: использовать типовые профили аэрогравиметрических съемок в районах с умеренным значением географической широты. Затем "перенести" эти траектории в полярные районы. При таком "переносе" нужно аккуратно учитывать особенности траекторных и угловых параметров непосредственно в точке полюса, где значения долготы и угла курса не определены.

Для определенности рассмотрим задачу "переноса" траектории в район Северного Полюса. Зададим исходную типовую траекторию географическими координатами $\varphi(t_j), \lambda(t_j), h(t_j)$ и углами ориентации $\psi(t_j), \vartheta(t_j), \gamma(t_j)$ ($j = 0, \dots, n$).

Задача "переноса" траектории распадается на две подзадачи: "перенос" координат объекта (с некоторой регуляризацией, о которой будет сказано ниже) и "перенос" ориентации корпуса объекта. Здесь не ставится цель описать все возможные различные подходы к "переносу" типовой траектории, а приводится лишь один из возможных вариантов "переноса" который представляется достаточно наглядным.

Сначала рассмотрим задачу "переноса" координат объекта. "Перенос" траектории объекта вместе с соответствующей сеткой полетных линий удобнее всего представлять как поворот гринвичской системы координат $O\eta$ и переход к новой гринвичской системе $O\eta^*$. Такой переход должен, во-первых, обеспечить перенос траектории в полярный район и переход к промежуточной системе $O\eta'$, а во-вторых (что опционно), содержать разворот траектории вокруг оси вращения Земли на желаемый угол.

При повороте гринвичской системы координат $O\eta$ всегда найдется точка K (необязательно принадлежащая траектории) с гринвичскими координатами η_K , которая при таком повороте попадает в точку полюса. Вычислим долготу λ_K и геоцентрическую широту φ_K^0 точки K . Тогда переход к новой гринвичской системе $O\eta'$ можно задать следующей цепочкой поворотов:

$$O\eta \xrightarrow[3]{\lambda_K} \xrightarrow[2]{\frac{\pi}{2} - \varphi_K^0} \xrightarrow[3]{-\lambda_K} O\eta' \quad (136)$$

Геометрический смысл данной последовательности поворотов таков, что если таким образом повернуть гринвичскую систему координат, то точка Северного Полюса N будет иметь такие же координаты в новой гринвичской системе координат $O\eta'$, какие имела точка K в системе $O\eta$:

$$\eta'_N = \eta_K. \quad (137)$$

Далее, как было сказано выше, можно выполнить разворот траектории вокруг оси вращения Земли на угол ε . Указанный разворот совершается по следующему правилу:

$$O\eta' \xrightarrow[\bar{\nu}]{}^{\varepsilon} O\eta^*, \quad (138)$$

где $\bar{\nu}$ – единичный вектор оси вращения Земли, который в системе $O\eta^*$ имеет координаты $\bar{\nu} = (\cos \varphi_K^0 \cos \lambda_K, \cos \varphi_K^0 \sin \lambda_K, \sin \varphi_K^0)^T$. Отметим, что всегда

$$\eta_N^* = \eta'_N = \eta_K. \quad (139)$$

Если разворот не совершается ($\varepsilon = 0$), системы $O\eta'$ и $O\eta^*$ совпадают.

Обозначим через $C = C(\lambda_K, \varphi_K^0, \varepsilon)$ матрицу ориентации системы $O\eta^*$ относительно системы $O\eta$. Вычислим гринвичские координаты объекта (точки M) $\eta(t_j)$ по формулам (11). Тогда гринвичские координаты $\eta^P(t_j)$ точки M "новой" траектории в районе полюса вычисляются:

$$\eta^P(t_j) = C^T \eta(t_j). \quad (140)$$

Отметим, что радиус-вектор точки M в районе полюса меньше, чем при движении в другом районе, поэтому вполне естественно высоту траектории в районе полюса оставить такой же, как у исходной траектории, т.е. потребовать выполнение условия $h^P(t_j) = h(t_j)$. Для этого через гринвичские координаты $\eta^P(t_j)$ следует итерационно вычислить географические координаты $\varphi^P(t_j), \lambda^P(t_j), h^P(t_j)$, затем положить $h^P(t_j) = h(t_j)$ и после этого можно считать координаты построенной траектории движения объекта заданными (гринвичские координаты $\eta^P(t_j)$ определяются повторным применением формул (11)). Указанная процедура может быть условно названа регуляризацией или согласованием высот.

Теперь рассмотрим вторую подзадачу - задачу "переноса" ориентации корпуса объекта. Ориентация объекта относительно эллипсоида Земли описывается матрицей B_z – матрицей ориентации приборной системы Mz относительно гринвичской системы $O\eta$:

$$B_z = LB_x. \quad (141)$$

Поворот корпуса объекта, аналогичный повороту координат объекта, обеспечивает сохранность типовой траектории, что вынуждает "переносить" ориентацию корпуса

объекта именно с помощью матрицы B_z . Иными словами, для сохранности траектории необходимо потребовать, чтобы матрица ориентации приборной системы Mz относительно системы $O\eta^*$ совпадала с матрицей B_z исходной траектории. Тогда искомая матрица ориентации, которую обозначим через $B_z^P(t_j)$, вычисляется по формуле:

$$B_z^P(t_j) = B_z(t_j)C. \quad (142)$$

Сформируем по географическим координатам $\varphi^P(t_j), \lambda^P(t_j)$ матрицу $B_x^P(t_j)$ (3) и вычислим матрицу L^P ориентации приборной системы Mz относительно географической Mx :

$$L^P(t_j) = B_z^P(t_j)B_x^{PT}(t_j). \quad (143)$$

Через элементы матрицы $L^P(t_j)$ могут быть найдены углы ориентации $\psi^P(t_j), \vartheta^P(t_j), \gamma^P(t_j)$.

Замечание. Поскольку в точке полюса неопределены долгота λ и угол курса ψ , нужно осуществить регуляризацию. Например, если в момент t_j точка M находится на полюсе, то можно положить:

$$\lambda^P(t_j) = \lambda^P(t_{j-1}), \quad \psi^P(t_j) = \psi^P(t_{j-1}). \quad (144)$$

Решение задачи "переноса" типовой траектории полностью описано.

Кратко обсудим вычисление показаний инерциальных датчиков. Показания ньютона-метров удобнее всего вычислять в инерциальной системе координат $O\xi$ (см. п.2.3.1.), поскольку координаты в инерциальной системе не имеют особенностей в точке полюса. Для этого необходимо получить координаты $\xi^P(t_j)$ точки M в инерциальной системе с помощью матрицы $A_\eta^T(t_j)$ (3) и задать начальный вектор скорости $v_\xi(t_0)$.

Замечание. Можно показания ньютона-метров вычислять и в гринвичской системе координат. Соответствующие модели в работе не были описаны, поскольку они не представляют отдельного интереса.

Для определения показаний гироскопов следует вычислить матрицы $A_z^P(t_j)$:

$$A_z^P(t_j) = L^P(t_j)A_x^P(t_j), \quad (145)$$

где матрицы $A_x^P(t_j)$ определяются по (3,4) через географические координаты $\varphi^P(t_j), \lambda^P(t_j)$, а матрицы $L^P(t_j)$ – через углы ориентации $\psi^P(t_j), \vartheta^P(t_j), \gamma^P(t_j)$.

Показания гироскопов вычисляются алгоритмом, рассмотренным в соответствующем разделе (см. п.2.2.1.).

Пример. Зададим движение объекта вблизи экватора следующим образом (Рис. 7). Объект двигается на постоянной высоте $h = 0$ сначала вдоль меридиана λ_k ($k = 0, \dots, 8$) от значения широты $-\varphi_0$ до значения широты φ_0 , затем плавно переходит на другой меридиан. При движении по k -му меридиану географические координаты меняются по следующему закону:

$$\varphi(t) = (-1)^k[-\varphi_0 + v^\varphi(t - t_k^b)], \quad \lambda(t) = \frac{k-4}{4}\lambda_0. \quad (146)$$

Здесь $\varphi_0 = \lambda_0 = 16'$, $v^\varphi = 0.1'/\text{с}$, $t \in [t_k^b, t_k^e]$. Время движения вдоль меридиана составляет 320 секунд, время перехода с одного меридиана на другой – 60 секунд. Тогда

$$t_k^b = 380 \cdot k, \quad t_k^e = 380 \cdot k + 320, \quad t_n - t_0 = 9 \cdot 320 + 8 \cdot 60 = 3200. \quad (147)$$

Закон перехода с k -го меридиана на $(k+1)$ -й записывается так:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (-1)^k[\varphi_0 + A_\varphi \sin \frac{t - t_k^e}{t_{k+1}^b - t_k^e} \pi], \\ \lambda(t) &= \frac{k-4}{4}\lambda_0 + \frac{A_\lambda}{2} - \frac{A_\lambda}{2} \cos \frac{t - t_k^e}{t_{k+1}^b - t_k^e} \pi, \end{aligned} \quad (148)$$

Здесь $A_\varphi = A_\lambda = 2'$, $t \in [t_k^e, t_{k+1}^b]$.

Зададим законы для изменения углов ориентации:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= A_\psi \sin(\omega_\psi(t - t_0)), & \vartheta(t) &= A_\vartheta \sin(\omega_\vartheta(t - t_0)), \\ \gamma(t) &= A_\gamma \sin(\omega_\gamma(t - t_0)). \end{aligned} \quad (149)$$

Для определенности введем следующие значения параметров: $A_\psi = 20^\circ$, $A_\vartheta = 10^\circ$, $A_\gamma = 5^\circ$, $\omega_\psi = 0.1\pi/\text{рад/с}$, $\omega_\vartheta = 0.3\pi/\text{рад/с}$, $\omega_\gamma = 0.5\pi/\text{рад/с}$.

Заметим, что средняя точка заданной траектории имеет координаты $\varphi = 0$, $\lambda = 0$. Осуществим "перенос" траектории в район высоких широт таким образом, чтобы средняя точка траектории находилась на Северный Полюс. Для этого следует совершить поворот вокруг оси $O\eta_2$ по часовой стрелке на угол 90° . Вектор поворота имеет компоненты $l_\eta = (0, 1, 0)^T$, а соответствующая ему матрица поворота C записывается следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (150)$$

Замечание. Поскольку в данном примере "перенос" траектории совершается путем поворота на 90° , регуляризация, связанная с согласованием высот, здесь достигает наибольшей величины. Если у исходной траектории в районе экватора рассматривалась постоянная высота $h = 0$, то у траектории после "переноса" без регуляризации высота h^P будет представлять собой разницу между экваториальным и полярным радиусами Земли (около 21км).

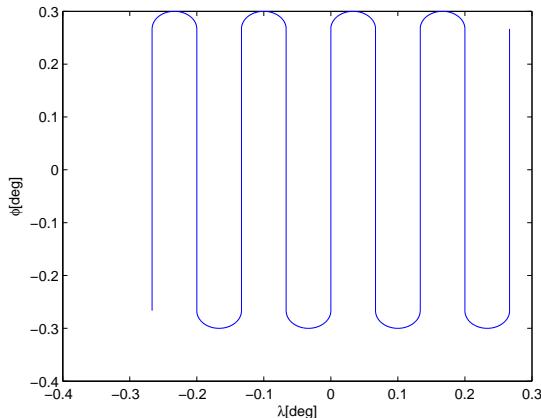


Рис. 7: Траектория, заданная в районе экватора.

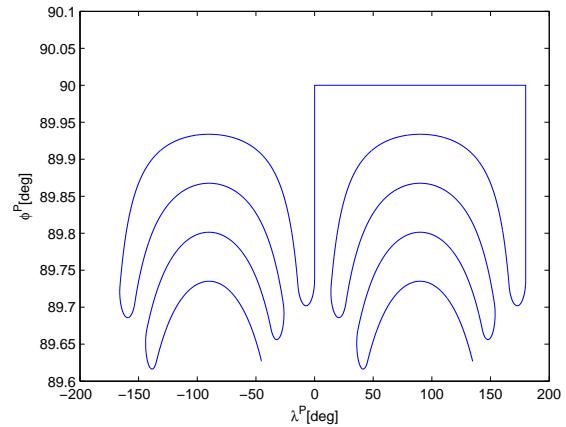


Рис. 8: Траектория, "перенесенная" в район Северного Полюса.

На Рис. 8 изображена траектория, полученная в результате переноса. Из графиков видно, что вблизи полюса очень быстро меняется долгота λ . Также быстро меняется угол курса ψ , что подтверждает некорректность переноса траектории в полярный район путем переноса углов ориентации или географических координат.

3 Тестирование уравнений ошибок БИНС

На практике используются различные виды линейных уравнений ошибок, предложенные разными авторами. Каждая модель ошибок представляет собой линеаризацию реальной траектории объекта в окрестности модельной траектории. Область применимости каждой модели уравнений ошибок БИНС обусловлена, с одной стороны, характером движения объекта, а с другой стороны, шагом Δt и численным методом интегрирования модельных уравнений.

Опишем задачу тестирования точности линейных уравнений модели ошибок БИНС. Рассмотрим некоторый интервал времени $[t_0, t_n]$. Условимся рассматривать только горизонтальные каналы БИНС, считая, что информация о высоте $h(t_j)$ и вертикальной скорости $V_3(t_j), j = 0, \dots, n$, известна. Суть задачи тестирования сводится к следующему.

Зададим начальные значения траектории объекта, которые условимся называть точными: $\varphi(t_0), \lambda(t_0), V_1(t_0), V_2(t_0), \psi(t_0), \vartheta(t_0), \gamma(t_0)$. Зададим на каждом интервале времени $[t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots, n - 1$ точные значения показаний гирокопов ω_z и ньютононметров f_z и с их помощью вычислим траекторные параметры объекта на всем интервале времени $\varphi(t_j), \lambda(t_j), V_1(t_j), V_2(t_j), \psi(t_j), \vartheta(t_j), \gamma(t_j), j = 1, \dots, n$.

Зададим другие начальные значения траектории объекта $\varphi'(t_0), \lambda'(t_0), V'_1(t_0), V'_2(t_0), \psi'(t_0), \vartheta'(t_0), \gamma'(t_0)$, которые условимся считать ошибочными и будем называть модельными. Введем также модельные значения показаний гирокопов и ньютононметров:

$$\omega'_z = \omega_z - \nu_z, \quad f'_z = f_z + \Delta f_z, \quad (151)$$

где ν_z – вектор дрейфов гирокопов, Δf_z – вектор погрешностей ньютононметров. Вычислим с помощью модельных показаний инерциальных датчиков модельные траекторные параметры объекта на всем интервале времени $\varphi'(t_j), \lambda'(t_j), V'_1(t_j), V'_2(t_j), \psi'(t_j), \vartheta'(t_j), \gamma'(t_j), j = 1, \dots, n$.

Введем обозначения для ошибок модельной траектории в каждый момент времени t_j :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi' - \varphi, & \Delta\lambda &= \lambda' - \lambda, \\ \Delta V_1 &= V'_1 - V_1, & \Delta V_2 &= V'_2 - V_2, \\ \Delta\psi &= \psi' - \psi, & \Delta\vartheta &= \vartheta' - \vartheta, & \Delta\gamma &= \gamma' - \gamma. \end{aligned} \quad (152)$$

Далее решается исследуемая система уравнений ошибок, входом для которой являются начальные ошибки $\Delta\varphi(t_0), \Delta\lambda(t_0), \Delta V_1(t_0), \Delta V_2(t_0), \Delta\psi(t_0), \Delta\vartheta(t_0), \Delta\gamma(t_0)$ и погрешности измерений инерциальных датчиков $\nu_z, \Delta f_z$. Сравнение решения уравнений ошибок с полученными ранее этими же величинами – прямыми разностями между точными и модельными значениями траекторных параметров (152) – и позволяет судить о приемлемости исследуемой модели уравнений ошибок.

Рассмотрим одну из возможных моделей ошибок. Назовем модельной точку M' с координатами (φ', λ', h) . Построим для точки M' географическую систему координат, и обозначим ее Oy^x . Назовем модельной матрицей ориентации L' , которая вычисляется по (6) через модельные углы $\psi', \vartheta', \gamma'$. Введем модельную систему координат

Oy следующим образом. В начальный момент времени t_0 она связана с системой Oy^x матрицей $L'(t_0)$, а далее вращается с абсолютной угловой скоростью ω'_z . Систему Oy^x назовем квазимодельной. Назовем квазиприборной систему координат Oz^x , которая связана с приборной системой Oz матрицей L'^T , т.е. для любого вектора l выполняется соотношение: $l_{zx} = L'^T l_z$.

Обозначим через $\alpha_x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ вектор малого поворота квазиприборной системы Oz^x относительно географической Ox , через $\beta_x = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ обозначим вектор малого поворота квазиприборной системы Oz^x относительно квазимодельной Oy^x . Тогда в линейном приближении вектор малого поворота квазимодельной системы Oy^x относительно географической Ox будем представлять собой разность $\alpha_x - \beta_x$.

Введем полную ошибку местоположения $\Delta y = (\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3)^T$ следующим образом:

$$\Delta y = y'^x - y^x, \quad (153)$$

где y^x – координаты точки M в системе Oy^x , y'^x – координаты точки M' в системе Oy^x . Введем динамическую ошибку скорости $\delta V_x = (\delta V_1, \delta V_2, \delta V_3)^T$:

$$\delta V_x = V'_{y^x} - V_{z^x}, \quad (154)$$

где V'_{y^x} – вектор относительной скорости точки M' в системе Oy^x , V_{z^x} – вектор относительной скорости точки M в системе Oz^x .

Для введенных нами позиционных, скоростных и угловых ошибок запишем замкнутую систему линеаризованных дифференциальных уравнений [24]:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{y}_1 &= \Omega'_3 \Delta y_2 + \delta V_1 + \beta_3 V'_2, \\ \Delta \dot{y}_2 &= -\Omega'_3 \Delta y_1 + \delta V_2 - \beta_3 V'_1, \\ \delta \dot{V}_1 &= -\alpha_2 g + (\Omega'_3 + 2u'_3) \delta V_2 + \Delta f_{z^x 1} - \left(-\left(\alpha_1 + \frac{\Delta y_2}{a} \right) u'_2 + \nu_{z^x 3} \right) V'_2, \\ \delta \dot{V}_2 &= \alpha_1 g - (\Omega'_3 + 2u'_3) \delta V_1 + \Delta f_{z^x 2} + \left(-\left(\alpha_1 + \frac{\Delta y_2}{a} \right) u'_1 + \nu_{z^x 3} \right) V'_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= -\frac{\delta V_2}{a} + \omega'_3 \alpha_2 - u'_3 \frac{\Delta y_1}{a} - u'_2 \beta_3 + \nu_{z^x 1}, \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{\delta V_1}{a} - \omega'_3 \alpha_1 - u'_3 \frac{\Delta y_2}{a} + u'_1 \beta_3 + \nu_{z^x 2}, \\ \dot{\beta}_3 &= \omega'_2 \alpha_1 - \omega'_1 \alpha_2 + \omega'_2 \frac{\Delta y_2}{a} + \omega'_1 \frac{\Delta y_1}{a} + \nu_{z^x 3}. \end{aligned} \quad (155)$$

Здесь $\omega'_i, i = 1, 2, 3$ и Ω'_3 – компоненты, соответственно, абсолютной и относительной угловой скорости квазимодельного трехгранника Oy^x , $u'_2 = u \cos \varphi'$, $u'_3 = u \sin \varphi'$. Вычислим начальные условия в момент t_0 для системы (155) по следующим формулам,

связывающим введенные ошибки с точными и модельными значениями координат, скоростей и углов ориентации:

$$\begin{aligned}
 \Delta y_1 &= a\Delta\lambda \cos\varphi, \\
 \Delta y_2 &= a\Delta\varphi, \\
 \alpha_1 &= \Delta\gamma \cos\vartheta \sin\psi - \Delta\vartheta \cos\psi, \\
 \alpha_2 &= -\Delta\gamma \cos\vartheta \cos\psi - \Delta\vartheta \sin\psi, \\
 \beta_3 &= -\Delta\psi - \Delta\gamma \sin\vartheta - \Delta\lambda \sin\varphi, \\
 \delta V_1 &= \Delta V_1 - (\beta_3 + \Delta\lambda \sin\varphi)V_2 + \alpha_2 V_3, \\
 \delta V_2 &= \Delta V_2 + (\beta_3 + \Delta\lambda \sin\varphi)V_1 - \alpha_1 V_3.
 \end{aligned} \tag{156}$$

Решим систему уравнений ошибок (155) с вычисленными начальными значениями. Полученное решение обозначим: $\Delta y_1^*(t_j), \Delta y_2^*(t_j), \delta V_1^*(t_j), \delta V_2^*(t_j), \alpha_1^*(t_j), \alpha_2^*(t_j), \beta_3^*(t_j)$, где $j = 0, \dots, n$.

Выразим ошибки модельной траектории из (156):

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi &= \frac{\Delta y_2}{a}, \\
 \Delta\lambda &= \frac{\Delta y_1}{a \cos\varphi}, \\
 \Delta V_1 &= \delta V_1 + (\beta_3 + \Delta\lambda \sin\varphi)V_2 - \alpha_2 V_3, \\
 \Delta V_2 &= \delta V_2 - (\beta_3 + \Delta\lambda \sin\varphi)V_1 + \alpha_1 V_3, \\
 \Delta\vartheta &= -\alpha_1 \cos\psi - \alpha_2 \sin\psi, \\
 \Delta\gamma &= \frac{\alpha_1 \sin\psi - \alpha_2 \cos\psi}{\cos\vartheta}, \\
 \Delta\psi &= -\beta_3 - \Delta\gamma \sin\vartheta - \Delta\lambda \sin\varphi.
 \end{aligned} \tag{157}$$

и вычислим оценки ошибок модельной траектории $\Delta\varphi^*(t_j), \Delta\lambda^*(t_j), \Delta V_1^*(t_j), \Delta V_2^*(t_j), \Delta\psi^*(t_j), \Delta\vartheta^*(t_j), \Delta\gamma^*(t_j)$, соответствующие решению системы уравнений ошибок (155).

Сравнение этих величин с точными значениями ошибок модельной траектории $\Delta\varphi(t_j), \Delta\lambda(t_j), \Delta V_1(t_j), \Delta V_2(t_j), \Delta\psi(t_j), \Delta\vartheta(t_j), \Delta\gamma(t_j)$ позволяет судить о том, насколько данная система уравнений ошибок пригодна для использования для данного класса движений при выбранном шаге интегрирования Δt и методе численного интегрирования. Указанный анализ рекомендуется проводить для оценки степени пригодности и иных моделей уравнений ошибок и численных методов интегрирования.

В качестве примера рассмотрим движение, описанное в п.2.5.1. Зададим следующие начальные значения ошибок модельной траектории: $\Delta\varphi(t_0) = 0.0001^\circ$, $\Delta\lambda(t_0) =$

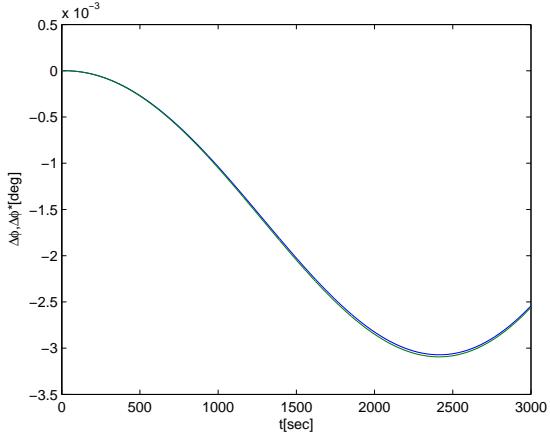


Рис. 9: Реализации $\Delta\varphi(t)$ и $\Delta\varphi^*(t)$.

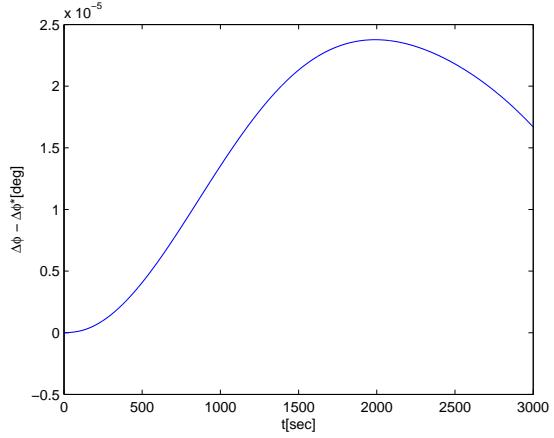


Рис. 10: Разность реализаций $\Delta\varphi(t) - \Delta\varphi^*(t)$.

0.00005° , $\Delta V_1(t_0) = 0.08\text{m/sec}$, $\Delta V_2(t_0) = 0.01\text{m/sec}$, $\Delta\psi(t_0) = 0.5^\circ$, $\Delta\vartheta(t_0) = 0.15^\circ$, $\Delta\gamma(t_0) = 0.1^\circ$.

На Рис.9 приведены графики реализаций $\Delta\varphi(t)$ и $\Delta\varphi^*(t)$, на Рис.10 – их разность. На графиках видно, что ошибка в определении угла курса обоими способами достигала 10 угловых секунд, в то время как разность ошибок не превышала 1% от их величин. На Рис.11 приведен график реализации $\Delta\psi(t)$, на Рис.12 – разность $\Delta\psi(t) - \Delta\psi^*(t)$. Ошибка в определении угла курса обоими способами составляла 30 угловых минут, тогда как разность ошибок не превышала 0.5% от их величин.

4 Вычисление показаний идеальных инерциальных датчиков при калибровке

Калибровка блока инерциальных датчиков БИНС является неотъемлемым технологическим этапом, предваряющим работу навигационной системы. Целью задачи калибровки является оценка параметров моделей инструментальных погрешностей БИНС, к которым в первую очередь относятся: смещение нулей ньютонометров, постоянная составляющая дрейфов гироскопов, погрешности масштабов и взаимных перекосов гироскопов и ньютонометров. Существуют различные методики калибровки и различные алгоритмы, предназначенные для оценки инструментальных погрешностей. Для тестирования алгоритмов калибровки необходимо уметь правильно

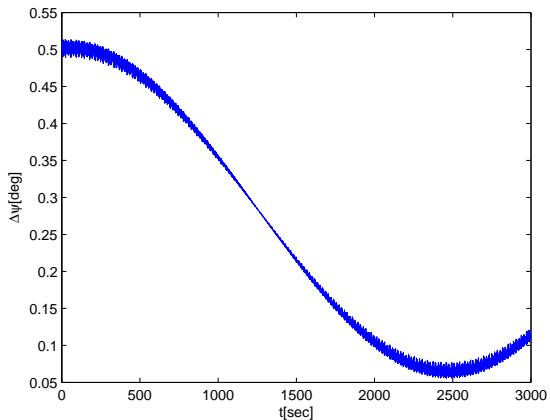


Рис. 11: Реализация $\Delta\psi(t)$.

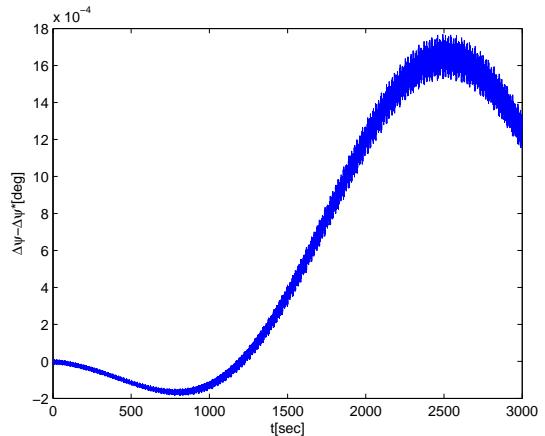


Рис. 12: Разность реализаций $\Delta\psi(t) - \Delta\psi^*(t)$.

имитировать показания инерциальных датчиков. Задача имитации показаний инерциальных датчиков при калибровке БИНС является актуальной и ее решению посвящен данный раздел. Отметим, что в работе для определенности за основу берется методика калибровки, изложенная в [21], [36].

Для тестирования алгоритмов калибровки, необходимо имитировать показания инерциальных датчиков, учитывая следующие факторы, которые можно условно подразделить на группы:

- Собственно, инструментальные погрешности инерциальных датчиков, перечисленные выше. Оценка параметров инструментальных погрешностей и является целью калибровки.
- Разнесение чувствительных масс ньютонометров друг относительно друга и относительно оси вращения стенда.
- Ошибки процедуры калибровки, к которым относятся, в первую очередь, угловые ошибки расположения БИНС на калибровочном стенде.

При описании моделей калибровки будет использовано несколько систем координат, поэтому сразу условимся все матрицы взаимной ориентации обозначать через C с двумя нижними индексами. Обозначение C_{sp} всегда будет определять матрицу ориентации системы Os (Ms) относительно системы Op (Mp).

4.1 Описание процедуры калибровки

В соответствии с [21], [36] процесс калибровки включает в себя некоторое количество циклов, в каждом из которых БИНС тем или иным образом помещается на одностороннем стенде. В [36] рассматривается частный случай, когда калибровка состоит из трех циклов, в каждом из которых БИНС помещается так, чтобы одна из ее осей совпадала с осью вращения стендса. Таким образом, вокруг каждой из осей БИНС будет совершено вращение в одном из трех циклов. Для определенности можно считать, что в первой цикле вращение происходит вокруг оси Mz_1 , во втором вокруг оси Mz_2 , в третьем вокруг оси Mz_3 .

Далее будут описаны соотношения для общего случая, когда в рамках одного цикла, БИНС помещается на стенде произвольным образом, а затем их конкретизация для вышеуказанного частного случая.

Связем со стендом систему координат Mt , так что ось Mt_2 совпадает с осью вращения стендса. Система координат Mt получается из географической системы Mx двумя поворотами:

$$\begin{array}{ccc} & Az & El \\ Mx & \longrightarrow & \longrightarrow \\ & 3 & 1 \end{array} \quad (158)$$

Здесь Az – угол азимута, а El – угол возвышения. Калибровка осуществляется путем вращения стендса вокруг оси Mt_2 с некоторой угловой скоростью $\omega_t(t)$. Обычно ось вращения стараются сделать горизонтальной, т.е. стараются добиться того, чтобы угол возвышения El был малым, однако, это необязательное требование, поэтому оба угла Az и El будем считать отличными от нуля. Соответствующую матрицу ориентации системы Mt относительно географической системы Mx будем обозначать через C_{tx} и:

$$C_{tx} = \begin{pmatrix} \cos Az & \sin Az & 0 \\ -\cos El \sin Az & \cos El \cos Az & \sin El \\ \sin El \sin Az & -\sin El \cos Az & \cos El \end{pmatrix}. \quad (159)$$

4.1.1 Общий случай расположения БИНС на стенде

В общем случае, ориентацию приборной системы Mz относительно стендса в начальный момент времени t_0 зададим тремя углами ориентации ψ_t , ϑ_t и γ_t :

$$\begin{array}{ccc} \psi_t & \vartheta_t & \gamma_t \\ Mt & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow \\ 3 & 1 & 2 & Mz. \end{array} \quad (160)$$

Через ψ_t обозначим угол между осью Mt_2 и проекцией оси Mz_2 на плоскость Mt_1t_2 . Через ϑ_t обозначим угол между осью Mz_2 и плоскостью Mt_1t_2 . Через γ_t обозначим угол поворота плоскости Mz_2z_3 вокруг оси Mz_2 относительно плоскости Mt_3z_2 . Эти углы аналогичны углам ориентации объекта: углам курса, танажа и крена. Тогда по аналогии с (6) имеем:

$$C_{zt}(t_0) = \begin{pmatrix} \cos \psi_t \cos \gamma_t - \sin \psi_t \sin \vartheta_t \sin \gamma_t & \sin \psi_t \cos \gamma_t + \cos \psi_t \sin \vartheta_t \sin \gamma_t & -\cos \vartheta_t \sin \gamma_t \\ -\sin \psi_t \cos \vartheta_t & \cos \psi_t \cos \vartheta_t & \sin \vartheta_t \\ \cos \psi_t \sin \gamma_t + \sin \psi_t \sin \vartheta_t \cos \gamma_t & \sin \psi_t \sin \gamma_t - \cos \psi_t \sin \vartheta_t \cos \gamma_t & \cos \vartheta_t \cos \gamma_t \end{pmatrix} \quad (161)$$

Замечание. Здесь и далее под моментом времени t_0 понимается начальный момент конкретного цикла калибровки.

Введем угол поворота стендса $\chi(t)$:

$$\chi(t) = \int_{t_0}^t \omega_t(\tau) d\tau. \quad (162)$$

Введем соответствующую этому повороту матрицу I_χ :

$$I_\chi = \begin{pmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{pmatrix}. \quad (163)$$

Тогда матрица ориентации приборной системы относительно системы, связанной со стендом, в произвольный момент времени t примет вид:

$$C_{zt}(t) = C_{zt}(t_0) I_\chi(t) \quad (164)$$

Матрица ориентации L приборной системы Mz относительно географической Mx вычисляется по формуле:

$$L = C_{zt} C_{tx}. \quad (165)$$

4.1.2 Частный случай расположения БИНС на стенде. Три цикла калибровки. Матрица ориентации

Когда совершается вращение вокруг второй приборной оси Mz_2 приборная система Mz в идеальном случае совпадает в начальный момент времени t_0 с системой Mt . В двух других случаях система Mz может быть получена из системы Mt парой

поворотов. Когда система вращается вокруг первой оси, т.е. совпадают оси Mt_2 и Mz_1 , цепочка поворотов выглядит так:

$$Mt \xrightarrow[3]{\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[1]{\frac{\pi}{2}} Mz, \quad (166)$$

когда вращение происходит вокруг третьей приборной оси, т.е. совпадают оси Mt_2 и Mz_3 , цепочка поворотов имеет вид:

$$Mt \xrightarrow[1]{-\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[3]{-\frac{\pi}{2}} Mz. \quad (167)$$

Матрицы этих поворотов обозначим, соответственно, через $I^{(1)}$ и $I^{(3)}$ и запишем их выражения:

$$I^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (168)$$

Матрицу ориентации приборной системы Mz относительно системы координат Mt , связанной со стендом, в каждом конкретном цикле будем обозначать $C_{zt}^{(i)}$, где i – номер цикла вращения. Тогда матрицы ориентации $C_{zt}^{(1)}$, $C_{zt}^{(2)}$ и $C_{zt}^{(3)}$ в идеальном случае в момент t_0 примут вид:

$$C_{zt}^{(1)}(t_0) = I^{(1)}, \quad C_{zt}^{(2)}(t_0) = E, \quad C_{zt}^{(3)}(t_0) = I^{(3)}, \quad (169)$$

а в произвольный момент времени t :

$$C_{zt}^{(1)}(t) = I^{(1)}I_\chi(t), \quad C_{zt}^{(2)}(t) = I_\chi(t), \quad C_{zt}^{(3)}(t) = I^{(3)}I_\chi(t). \quad (170)$$

Введем ошибки несоосности в начальный момент t_0 приборной системы координат Mz и системы Mt . Эти ошибки предполагаются малыми. Обозначим через $\alpha^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)})^T$ вектор малого поворота приборной системы относительно того положения, которая она должна занимать в соответствии с планом калибровки в i -ом цикле калибровки. Соответствующие матрицы поворота обозначим через $I_\alpha^{(i)}$:

$$\begin{aligned} I_\alpha^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3^{(1)} & -\alpha_2^{(1)} \\ -\alpha_3^{(1)} & 1 & \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} & -\alpha_1^{(1)} & 1 \end{pmatrix}, & I_\alpha^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3^{(2)} & -\alpha_2^{(2)} \\ -\alpha_3^{(2)} & 1 & \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} & -\alpha_1^{(2)} & 1 \end{pmatrix}, \\ I_\alpha^{(3)} &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3^{(3)} & -\alpha_2^{(3)} \\ -\alpha_3^{(3)} & 1 & \alpha_1^{(3)} \\ \alpha_2^{(3)} & -\alpha_1^{(3)} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (171)$$

Для каждого цикла все углы $\alpha_j^{(i)}$, при $i \neq j$ представляют собой угловые ошибки не совпадения оси вращения стенда Mt_2 и оси Mz_i . Углы $\alpha_i^{(i)}$ – углы поворота приборной системы Mz вокруг оси вращения стенда Mt_2 , которые для удобства также считаются малыми.

Запишем выражения для матриц ориентации приборной системы координат Mz относительно системы Mt в момент времени t_0 :

$$C_{zt}^{(1)}(t_0) = I_\alpha^{(1)} I^{(1)}, \quad C_{zt}^{(2)}(t_0) = I_\alpha^{(2)} I^{(2)}, \quad C_{zt}^{(3)}(t_0) = I_\alpha^{(3)} I^{(3)}. \quad (172)$$

В произвольный момент t матрицы $C_{zt}^{(i)}(t)$ вычисляются следующим образом:

$$C_{zt}^{(1)}(t) = I_\alpha^{(1)} I^{(1)} I_\chi, \quad C_{zt}^{(2)}(t) = I_\alpha^{(2)} I^{(2)} I_\chi, \quad C_{zt}^{(3)}(t) = I_\alpha^{(3)} I^{(3)} I_\chi. \quad (173)$$

Матрица ориентации $L^{(i)}$ приборной системы относительно географической в i -м цикле вычисляется по формуле

$$L^{(i)} = C_{zt}^{(i)} C_{tx}, \quad (174)$$

где i – номер цикла.

4.2 Вычисление показаний гироскопов

Опишем процедуру вычисления показаний гироскопов на произвольном интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$, где $j = 0, 1, \dots, n - 1$ и t_n – момент окончания текущего цикла калибровки.

Абсолютная угловая скорость приборной системы координат складывается из угловой скорости вращения Земли и собственно вращения стендса:

$$\omega_z = \omega_{t,z} + u_z. \quad (175)$$

Здесь $\omega_{t,z}$ – вектор угловой скорости вращения стендса в проекциях на оси приборной системы координат Mz . Вектор $\omega_{t,z}$ может быть получен с помощью матрицы C_{zt} :

$$\omega_{t,z} = C_{zt} \omega_t. \quad (176)$$

Стоит отметить, что вектор $\omega_{t,z}$ сохраняет свое направление в приборной системе Mz . Для вектора угловой скорости u_z верно следующее представление:

$$u_z = C_{zt} C_{tx} u_x, \quad (177)$$

где вектор u_x определяется через известную географическую широту φ по (19). Здесь матрица C_{zt} определяется в общем случае соотношениями (161), (163) и (164), а в частном случае – соотношениями (168) и (163). Матрица C_{tx} определяется соотношением (159).

Если под показаниями гироскопов на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$ понимается абсолютная угловая скорость приборной системы координат Mz , то в качестве показаний можно принять величину $(\omega_z(t_j) + \omega_z(t_{j+1}))/2$. Если под показаниями понимается интеграл от абсолютной угловой скорости, то вычисленную угловую скорость $\omega_z(t)$ следует проинтегрировать, например, тем способом, который был описан в соответствующем разделе (68, 69). При этом, стоит отметить, что географическая широта φ постоянна, а угловая скорость стенда $\omega_t(t)$ задана как непрерывная функция, поэтому компоненты вектора ω_z автоматически оказываются непрерывными функциями времени и не нуждаются в предварительном сглаживании кубическими сплайнами.

4.3 Вычисление показаний ньютонометров

В данном разделе опишем процедуру вычисления показаний ньютонометров на произвольном интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$, где $j = 0, 1, ..n - 1$ и t_n – момент окончания текущего цикла калибровки. Если чувствительная масса ньютонометра находится на оси вращения стендса, то показанием ньютонометра служит проекция удельной силы тяжести g на его ось чувствительности. Когда чувствительная масса находится не на оси вращения, к показанию добавляются возникающие силы инерции. Сначала охарактеризуем ошибки разнесения чувствительных масс каждого ньютонометра друг относительно друга и относительно оси вращения стендса. Затем приведем соотношения непосредственно для вычисления показаний ньютонометров.

4.3.1 Характеристика разнесения чувствительных масс ньютонометров

Ранее, при моделировании показаний ньютонометров, неявно предполагалось, что все три чувствительные массы ньютонометров при отсутствии внешних сил, действующих на объект, находятся в одной точке. На самом деле, инерциальная навигационная система включает в себя три ньютонометра, которые находятся на некотором расстоянии друг относительно друга.

Уточним, что в таком случае мы будем понимать под точкой M . Обозначим через M_1, M_2 и M_3 чувствительные массы ньютонометров. Как и ранее, будем предполагать, что оси чувствительности ньютонометров взаимно ортогональны. Проведем через каждую чувствительную массу плоскость, ортогональную оси чувствительности

данного ньютонометра. Точку пересечения всех трех плоскостей и будем называть приведенной чувствительной массой и обозначать через M .

Обозначим через $\rho_i = (\rho_{i1}, \rho_{i2}, \rho_{i3})^T$ ($i = 1, 2, 3$) вектор координат точки M_i в системе Mz . Отметим, что из способа построения точки M для каждого $i = 1, 2, 3$ следует равенство $\rho_{ii} = 0$. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную оси вращения стендса Mt_2 . Точку пересечения плоскости с осью Ot_2 обозначим через S и введем систему координат Sz с началом в точке S , оси которой параллельны осям приборной системы Mz . Обозначим через $s^M = (s_1^M, s_2^M, s_3^M)^T$ вектор координат точки M в системе Sz .

Обозначим вектор координат каждой чувствительной массы M_i в системе Sz через $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})^T$. Тогда для каждого $i = 1, 2, 3$ можно написать:

$$r_i = s^M + \rho_i. \quad (178)$$

Вектора ρ_i , характеризующие внутреннюю геометрию блока ньютонометров инерциальной навигационной системы, являются постоянными в системе координат Sz . Обозначим через St систему координат с началом в точке S и с осями, параллельными осям системы Mt , связанной со стендом. Обозначим вектор координат точки M в системе St через s_t^M . По построению вторая компонента вектора s_t^M равна нулю. Предположим, что в начальный момент t_0 задан вектор $s_t^M = (s_{t1}^M, 0, s_{t3}^M)^T$. Поскольку блок ньютонометров вращается в процессе калибровки вместе с системой Sz , вектор s^M координат точки M в системе Sz будет постоянным и вычисляется по формуле:

$$s^M = C_{zt}(t_0)s_t^M. \quad (179)$$

Стоит отметить, что и векторы r_i ($i = 1, 2, 3$) также будут постоянными в системе Sz .

4.3.2 Алгоритм вычисления показаний ньютонометров

Когда ньютонометр неподвижен относительно Земли, его измерением служит реакция опоры, которая представляет собой проекцию удельной силы тяжести, взятой с обратным знаком, на ось чувствительности ньютонометра. Иными словами, вектор измерений ньютонометров f_z записывается в следующем виде

$$f_z = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}. \quad (180)$$

Если ньютонометр движется относительно Земли, на его чувствительную массу действуют, кроме реакции опоры, силы инерции, сумму которых в проекциях на оси системы Mz обозначим через f_z^{ext} . Тогда:

$$f_z = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + f_z^{ext}. \quad (181)$$

Если в цикле калибровки чувствительная масса ньютонометра оказалась на оси Mt_2 , данный ньютонометр измеряет удельную силу тяжести, взятую с обратным знаком, в проекции на свою ось чувствительности. Если чувствительная масса ньютонометра не лежит на оси Mt_2 , на нее действуют две внешние силы: центростремительная сила и сила, вызванная угловым ускорением $\dot{\omega}_t$. Центростремительную силу, которая всегда направлена перпендикулярно к оси вращения стенда Mt_2 , будем обозначать f^c . Сила, вызванная угловым ускорением, всегда направлена по касательной к окружности, по которой движется чувствительная масса, обозначать эту силу будем через f^t .

Запишем выражение для силы f_{zi}^c , действующей на точку M_i , в проекциях на оси приборной системы координат Mz :

$$f_{zi}^c = \hat{\omega}_{t,z}^2 r_i. \quad (182)$$

Вектор $\omega_{t,z}$ можно представить в следующем виде:

$$\omega_{t,z} = C_{zt}\omega_t = C_{zt}(t_0)I_\chi\omega_t = C_{zt}(t_0)\omega_t = c_{zt,2}\omega_t(t), \quad (183)$$

где $c_{zt,2}$ – второй столбец матрицы C_{zt} , который не зависит от времени. Тогда вектор силы f_{zi}^c , действующей на точку M_i , можно записать в виде:

$$f_{zi}^c(t) = \omega_t(t)\hat{c}_{zt,2}^2 r_i \quad (184)$$

и величина $\hat{c}_{zt,2}^2 r_i$ – есть величина постоянная в рамках одного цикла калибровки. В показаниях i -го ньютонометра будет содержаться i -я компонента вектора f_{zi}^c , которую мы будем обозначать через f_{zii}^c .

Выражение для силы f_{zi}^t , действующей на точку M_i , в проекциях на оси приборной системы координат Mz записывается следующим образом:

$$f_{zi}^t = -\hat{\omega}_{t,z}r_i. \quad (185)$$

С учетом (183) можно записать:

$$f_{zi}^t = -\dot{\omega}_t(t)\hat{c}_{zt,2}r_i. \quad (186)$$

В показаниях i -го ньютонометра будет содержаться i -я компонента вектора f_{zi}^t , которую мы будем обозначать через f_{zii}^t .

Таким образом, вектор измерений ньютонометров примет вид:

$$f_z = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{z11}^c \\ f_{z22}^c \\ f_{z33}^c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{z11}^t \\ f_{z22}^t \\ f_{z33}^t \end{pmatrix}. \quad (187)$$

Если под показаниями ньютонометров на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$ понимается удельная внешняя сила, действующая на чувствительную массу, то в качестве показаний можно принять величину $(f_z(t_j) + f_z(t_{j+1}))/2$. Если под показаниями понимается интеграл от удельной внешней силы, то вычисленную удельную внешнюю силу $f_z(t)$ следует проинтегрировать тем же способом, который рекомендуется для интегрирования абсолютной угловой скорости приборной системы ω_z с целью получения показаний гироскопов (68, 69).

Замечание. Для того, чтобы удельную внешнюю силу можно было проинтегрировать, необходимо, чтобы функция $\omega_t(t)$ имела непрерывную производную.

4.4 Результаты моделирования

Для проверки работоспособности представленных алгоритмов вычисления показаний инерциальных датчиков при калибровке было проведено моделирование. Был рассмотрен описанный выше частный случай, когда калибровка состоит из трех циклов, в каждом из которых одна из осей чувствительности БИНС совмещается с осью вращения стенда Mt_2 .

Каждый цикл состоял из начальной выставки длительностью 4 минуты и собственно вращения стендса в течение 20 минут. Угловая скорость вращения стендса составляла $10^\circ/\text{s}$. Были заданы следующие значения несоосности осей чувствительности БИНС оси вращения стендса: $\alpha_2^{(1)} = 0.01$, $\alpha_3^{(1)} = 0.012$, $\alpha_1^{(2)} = 0.008$, $\alpha_3^{(2)} = -0.01$, $\alpha_1^{(3)} = 0.01$, $\alpha_2^{(3)} = -0.009$. Значения инструментальных погрешностей БИНС, которые подлежали оцениванию, были заданы соответствующими классу точных систем, построенных на базе кольцевых лазерных гироскопов. Случайные составляющие погрешностей показаний датчиков не задавались.

Далее, к вычисленным показаниям инерциальных датчиков был применен алгоритм калибровки, описанный в [36], построенный на основе фильтра Калмана [25], [33]. Результатом работы алгоритма стали не только достаточно точные оценки заданных инструментальных погрешностей БИНС, но и угловые ошибки несоосности $\alpha_j^{(i)}$. Это обстоятельство подтверждает как работоспособность описанных в работе

алгоритмов моделирования, так и состоятельность использованного алгоритма калибровки.

5 Моделирование вибрации объекта на этапе начальной выставки БИНС на неподвижном основании

Рабочему режиму инерциальной навигационной системы предшествует этап начальной выставки. На этапе начальной выставки на неподвижном основании объект остается по возможности неподвижным на протяжении нескольких минут и по измерительной информации ньютонометров и гироскопов, накопленной за время выставки, определяются параметры ориентации объекта.

Известно, что на качество начальной выставки влияют в первую очередь инструментальные погрешности БИНС. Однако, существуют и внешние факторы, которые могут внести дополнительные ошибки в определение параметров ориентации. В первую очередь, к таким факторам относится вибрация, которая присуща объектам в отсутствии движения и при включенном двигателе. Вибрация характерна тем, что ошибки углов ориентации линейно накапливаются и скорость нарастания ошибок зависит от численного метода, который используется для решения кинематического уравнения Пуассона (41).

В данном разделе приводятся выражения для показаний инерциальных датчиков на этапе выставки. Затем описывается модель вибрации и дается характеристика ошибок, возникающих в определении параметров ориентации в зависимости от характеристик вибрации. После этого приводятся различные численные методы решения уравнения Пуассона (41), когда уравнение решается с большим шагом по времени, нежели формируются показания инерциальных датчиков. Целью раздела является описание способа математического моделирования, с помощью которого можно просто и наглядно проводить сравнительный анализ различных численных методов при различных характеристиках вибрации для выработки рекомендаций по выбору оптимального численного метода для работы при данных характеристиках вибрации.

Отметим, что основной интерес рассматриваемой задачи заключается в изучении степени влияния вибрации на алгоритмы решения уравнения Пуассона, поэтому непосредственно алгоритмы начальной выставки здесь не приводятся.

5.1 Вычисление показаний инерциальных датчиков на неподвижном основании

Предположим, что в нашем распоряжении имеются значения углов ориентации объекта: курса ψ , крена γ и тангажа ϑ . Также заданы географическая широта φ объекта и его высота h . Требуется вычислить показания инерциальных датчиков: гироскопов и ньютонаометров.

Поскольку объект неподвижен и не вращается относительно Земли, абсолютная угловая скорость приборной системы Oz совпадает с угловой скоростью вращения Земли:

$$\omega_z = Lu_x, \quad (188)$$

где элементы матрицы L ориентации приборной системы относительно географической Ox формируются по (6), а вектор u_x вычисляется по (19) через географическую широту φ .

Поскольку объект неподвижен, удельная внешняя сила, действующая на точку M , равняется силе тяжести, взятой с обратным знаком:

$$f_z = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad (189)$$

где сила тяжести g вычисляется по формуле Гельмерта (22) через известные значения географической широты и высоты объекта.

Если под показаниями гироскопов и ньютонаометров на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$ понимаются интегралы, соответственно, от абсолютной угловой скорости ω_z приборной системы и удельной внешней силы f_z , действующей на чувствительную массу, то в качестве показаний датчиков можно принять, соответственно, величины $\omega_z \Delta t$ и $f_z \Delta t$.

5.2 Модель вибрации и анализ влияния вибрации на точность определения ориентации

В данном пункте опишем модель вибрации, приведенную в [2], и анализ ее влияния на точность определения параметров ориентации.

5.2.1 Модель вибрации постоянной частоты

Для простоты рассмотрим случай, когда вибрация присутствует только в одном направлении. Предположим, что углы ориентации объекта равны нулю, т.е. приборная

система Oz и географическая система Ox совпадают. Пусть объекту сообщена вибрация, действующая вдоль оси Ox_3 и приводящая приборную систему Oz в движение, которое можно описать следующей последовательностью поворотов:

$$\begin{array}{ccccc} & \omega^v(t - t_0) & \beta & -\omega^v(t - t_0) & \\ Ox & \xrightarrow[3]{} & \xrightarrow[1]{} & \xrightarrow[3]{} & Oz. \end{array} \quad (190)$$

Здесь β – амплитуда вибрации, а величина ω^v условно может быть названа угловой скоростью вибрации. Величины β и ω^v будем считать постоянными. Введенная таким образом вибрация описывает следующее движение: ось Oz_3 совершает коническое движение вокруг оси Ox_3 с углом раствора конуса β и периодом $2\pi/\omega^v$. Оси Oz_1 и Oz_2 совершают плоские колебания с угловой амплитудой β и периодом $2\pi/\omega^v$.

Запишем выражение для матрицы L ориентации приборной системы Oz относительно географической системы Ox (здесь для краткости записи переобозначим выражение $\omega^v(t - t_0) = \alpha^v$):

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} \cos \alpha^v & -\sin \alpha^v & 0 \\ \sin \alpha^v & \cos \alpha^v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha^v & \sin \alpha^v & 0 \\ -\sin \alpha^v & \cos \alpha^v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha^v + \sin^2 \alpha^v \cos \beta & \cos \alpha^v \sin \alpha^v - \cos \alpha^v \sin \alpha^v \cos \beta & -\sin \alpha^v \sin \beta \\ \cos \alpha^v \sin \alpha^v - \cos \alpha^v \sin \alpha^v \cos \beta & \sin^2 \alpha^v + \cos^2 \alpha^v \cos \beta & \cos \alpha^v \sin \beta \\ \sin \alpha^v \sin \beta & -\cos \alpha^v \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (191)$$

Вычислим вектор угловой скорости ω_z^v вращения приборной системы Oz , вызванного вибрацией, как сумму угловых скоростей каждого из трех поворотов:

$$\begin{aligned} \omega_z^v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega^v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \omega^v(t - t_0) & -\sin \omega^v(t - t_0) & 0 \\ \sin \omega^v(t - t_0) & \cos \omega^v(t - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos \omega^v(t - t_0) & -\sin \omega^v(t - t_0) & 0 \\ \sin \omega^v(t - t_0) & \cos \omega^v(t - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\omega^v \sin \beta \sin \omega^v(t - t_0) \\ \omega^v \sin \beta \cos \omega^v(t - t_0) \\ \omega^v \cos \beta - \omega^v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (192)$$

Вектор ω_z^v представляет собой вектор угловой скорости приборной системы Oz относительно географической системы Ox , записанный в проекциях на оси системы Oz .

5.2.2 Ошибка в определении ориентации, вызванная вибрацией

Для того, чтобы исследовать непосредственно влияние вибрации на качество численного решения задачи ориентации, будем рассматривать уравнение Пуассона для матрицы ориентации L :

$$\dot{L} = \hat{\omega}_z^v L. \quad (193)$$

Отметим, что за время, равное периоду $2\pi/\omega^v$, приборная система возвращается в исходное положение: $L(t_0 + 2\pi/\omega^v) = L(t_0)$. Третья компонента вектора ω_z^v не зависит от времени, первые две компоненты – зависят. Таким образом, третья компонента не вносит алгоритмическую ошибку в решение уравнения Пуассона (41) численным интегрированием с шагом по времени Δt . Если такт счета интегрирования уравнения Пуассона $\Delta t \ll 2\pi/\omega^v$, то погрешность того или иного численного метода, решающего уравнение Пуассона, будет несущественной. Если отношение $\frac{\Delta t}{2\pi/\omega^v}$ по порядку приближается к 1 или даже превосходит ее, то численное интегрирование не будет правильно учитывать поведение во времени первых двух компонент вектора ω_z^v .

Грубо оценим величину и характер ошибки, которую даст численный алгоритм решения уравнения Пуассона при шаге интегрирования $\Delta t > 2\pi/\omega^v$. Поскольку третья компонента постоянна и поэтому ее значение при интегрировании уравнения Пуассона учитывается правильно, а интеграл по времени от первых двух компонент на одном периоде вибрации $2\pi/\omega^v$ равен 0, т.е. они как бы осредняются, то ориентация приборной системы будет вычисляться так, как будто вибрация порождает ее вращение с угловой скоростью:

$$\omega_z^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^v \cos \beta - \omega^v \end{pmatrix}. \quad (194)$$

Такая угловая скорость относительно географической системы координат Ox представляет собой вращение вокруг вертикальной оси Ox_3 с угловой скоростью $\omega^v \cos \beta - \omega^v$. Подобная угловая скорость за один период вибрации $2\pi/\omega^v$ порождает поворот на угол курса $\Delta\psi_T$:

$$\Delta\psi_T = 2\pi(\cos \beta - 1). \quad (195)$$

Поскольку угловая амплитуда вибрации β является малой величиной, можно приблизенно принять

$$\Delta\psi_T \approx -\pi\beta^2. \quad (196)$$

Введем частоту вибрации $f^v = \omega^v/2\pi$. Тогда за 1 секунду накопится угол поворота $\Delta\psi_T$:

$$\Delta\psi_T = -\pi f^v \beta^2. \quad (197)$$

Таким образом, рассмотрены две крайние ситуации. Одна ситуация – когда шаг по времени интегрирования уравнения Пуассона много меньше периода вибрации. Тогда ошибка, обусловленная численным интегрированием, несущественна. Противоположная ситуация – когда шаг по времени интегрирования уравнения Пуассона больше периода вибрации. Тогда линейно накапливается ошибка по курсу со скоростью $\Delta\psi_T = -\pi f^v \beta^2$ за 1 секунду.

Аналогичные ошибки будут возникать и при определении остальных углов ориентации при наличии вибрации относительно соответствующих осей.

Замечание. Отметим, что если $\Delta t \simeq 2\pi n/\omega^v$, где n – целое число, тогда первые две компоненты вектора ω_z^v осредняться не будут и угловая ошибка будет отличаться от величины $\Delta\psi_T$, что будет хорошо видно на приведенных ниже графиках.

5.3 Многошаговые методы решения уравнения Пуассона

В данном разделе опишем различные многошаговые методы [43], которые применяются на практике для решения уравнения Пуассона (41). Для того, чтобы оценить непосредственно влияние вибрации, будем рассматривать уравнение Пуассона для матрицы ориентации L (193), и при обсуждении показаний гирокомпасов пренебречь угловой скоростью вращения Земли.

Удобнее всего вести описание методов на языке кватернионов.

5.3.1 Уравнение Пуассона в кватернионах

Обозначим через A кватернион ориентации приборной системы относительно географической в момент времени t_j . Обозначим через Ω^v кватернион угловой скорости приборной системы координат, который имеет следующие компоненты:

$$\Omega^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{z1}^v \\ \omega_{z2}^v \\ \omega_{z3}^v \end{pmatrix}, \quad (198)$$

где ω_{zi}^v , для $i = 1, 2, 3$ – компоненты вектора ω_z^v . Тогда уравнение Пуассона (193) в кватернионной форме примет вид:

$$\dot{A} = \frac{1}{2} A \circ \Omega^v. \quad (199)$$

Обозначим через A_j кватернион ориентации приборной системы относительно географической в момент времени t_j , через Λ_j – кватернион поворота приборной системы на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$. Тогда дискретная форма уравнения (199) запишется следующим образом:

$$A_{j+1} = A_j \circ \Lambda_j. \quad (200)$$

Каждый кватернион поворота Λ можно представить через вектор поворота $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \frac{\varphi_3}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (201)$$

5.3.2 Связь кватерниона ориентации с матрицей ориентации и углами ориентации

Переход от системы координат Ox к системе Oz осуществляется поворотами на углы курса, тангажа и крена (5). Для каждого поворота введем соответствующий кватернион:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (202)$$

Тогда можно записать выражение для кватерниона A :

$$A = \Psi \circ \Theta \circ \Gamma = \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}. \quad (203)$$

Матрица ориентации L выражается через элементы a_i ($i = 0, 1, 2, 3$) кватерниона A следующим образом:

$$L = \begin{pmatrix} 2(a_0^2 + a_1^2) - 1 & 2(a_1 a_2 + a_0 a_3) & 2(a_1 a_3 - a_0 a_2) \\ 2(a_1 a_2 - a_0 a_3) & 2(a_0^2 + a_2^2) - 1 & 2(a_2 a_3 + a_0 a_1) \\ 2(a_1 a_3 + a_0 a_2) & 2(a_2 a_3 - a_0 a_1) & 2(a_0^2 + a_3^2) - 1 \end{pmatrix}. \quad (204)$$

5.3.3 Описание и примеры многошаговых методов

Предположим, что параметры ориентации объекта требуется вычислять с шагом по времени Δt , а измерения гироскопов поступают с шагом по времени $\Delta\tau$, причем, $\Delta t/\Delta\tau = k$ – есть целое число. Обозначим, через q_i i -й вектор ($i = 1, \dots, k$) измерений гироскопов внутри интервала длины Δt . Здесь измерениями гироскопов будем считать интегралы от угловой скорости приборной системы.

Для каждого значения k существуют различные алгоритмы [70], [43] для вычисления вектора поворота φ приборной системы за интервал времени Δt по k измерениям гироскопов. Рассмотрим здесь три известных алгоритма, на примере которых проиллюстрируем сравнительный анализ, который рекомендуется проводить для оценки влияния вибрации.

Одношаговый алгоритм ($k = 1$). Вектор поворота φ просто представляет собой вектор измерений гироскопов:

$$\varphi = q_1. \quad (205)$$

Двухшаговый алгоритм ($k = 2$). Вектор поворота φ вычисляется следующим образом через измерения гироскопов q_1 и q_2 :

$$\varphi = q_1 + q_2 - \frac{2}{3}\hat{q}_1 q_2. \quad (206)$$

Четырехшаговый алгоритм ($k = 4$). Вектор поворота φ вычисляется через измерения гироскопов q_1, q_2, q_3 и q_4 :

$$\varphi = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - \frac{22}{45}(\hat{q}_1 q_3 + \hat{q}_1 q_4 + \hat{q}_2 q_3 + \hat{q}_2 q_4) - \frac{32}{45}(\hat{q}_1 q_2 + \hat{q}_3 q_4). \quad (207)$$

5.4 Сравнительный анализ многошаговых методов на вибрационных воздействиях

Рассмотрим некоторый интервал времени длины T , так чтобы величина $T/\Delta t = n$ была целым числом. Также важно, чтобы длина интервала намного превосходила период вибрации: $T \gg 2\pi/\omega^v$. Зафиксируем величину $f^v\beta^2 = Const$. Введем обозначение $f^m = 1/\Delta\tau$ для частоты измерений гироскопов. Для каждой частоты вибрации f^v сформируем показания гироскопов как интегралы от соответствующих компонент вектора угловой скорости ω_z^v (192). Например, на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, \dots, n - 1$) вектор q_i ($i = 1, \dots, k$) вычисляется так:

$$q_i = \int_{t_0+j\Delta t+(i-1)\Delta\tau}^{t_0+j\Delta t+i\Delta\tau} \omega_z^v =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin \beta [\cos \omega_z^v(t_0 + j\Delta t + i\Delta\tau) - \cos \omega_z^v(t_0 + j\Delta t + (i-1)\Delta\tau)] \\ -\sin \beta [\sin \omega_z^v(t_0 + j\Delta t + i\Delta\tau) - \sin \omega_z^v(t_0 + j\Delta t + (i-1)\Delta\tau)] \\ (\omega^v \cos \beta - \omega^v) \Delta\tau \end{pmatrix}. \quad (208)$$

В соответствии с (203) кватернион A_0 в момент времени t_0 будет единичным:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (209)$$

На каждом отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ по вычисленным значениям показаний гироскопов q_i сформируем вектор поворота φ . По вектору поворота φ вычислим кватернион поворота Λ_j . Решим уравнение Пуассона (200) на выбранном нами отрезке времени. По кватерниону A_n в конечный момент времени определим оценку соответствующей матрицы ориентации \tilde{L}_n (204), а затем по (8) вычислим оценку угла курса $\tilde{\psi}$.

Из точного выражения для матрицы L (191) можно вычислить значения углов ориентации. В частности для угла ϑ верна следующая оценка:

$$|\sin \vartheta| = |l_{23}| = |\cos \omega^v(t_n - t_0) \sin \beta| \leq \sin \beta. \quad (210)$$

Отсюда следует очевидное неравенство: $|\vartheta| \leq \beta$. Проведем рассуждения для угла курса ψ . Имеем:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= -\frac{l_{21}}{\cos \vartheta} = \\ &= \frac{\sin \omega^v(t_n - t_0) \cos \omega^v(t_n - t_0) \cos \beta - \sin \omega^v(t_n - t_0) \cos \omega^v(t_n - t_0)}{\cos \vartheta} \simeq \\ &\simeq -\frac{\sin 2\omega^v(t_n - t_0)\beta^2}{4 \cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (211)$$

Тогда

$$|\psi| \simeq |\sin \psi| \leq \frac{\beta^2}{\cos \vartheta} \simeq \beta^2 \left(1 + \frac{\vartheta^2}{2}\right) \leq \beta^2 + \frac{\beta^4}{2}. \quad (212)$$

Это означает, что угол курса всегда является величиной второго порядка малости, поэтому оценка угла курса $\tilde{\psi}$, вычисленная с помощью рассматриваемого многошагового метода, может рассматриваться как ошибка метода.

Будем менять частоту вибрации f^v в некотором диапазоне, меняя одновременно угловую амплитуду вибрации β так, чтобы величина $f^v\beta^2$ оставалась постоянной.

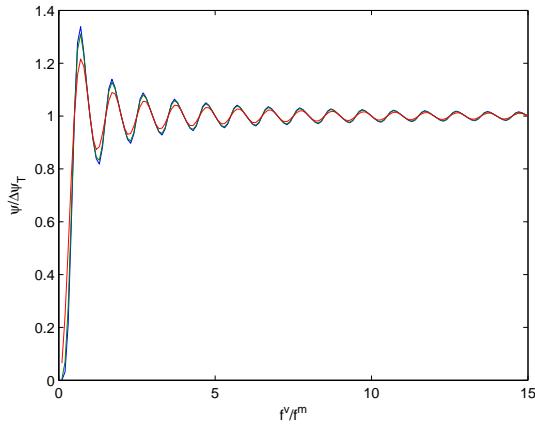


Рис. 13: Сравнение алгоритмов на вибрации с характеристикой $f^v\beta^2 = 10^{-5}$.

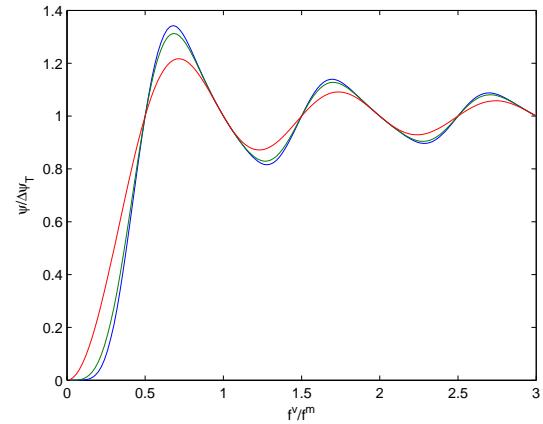


Рис. 14: Сравнение алгоритмов на вибрации с характеристикой $f^v\beta^2 = 10^{-5}$.

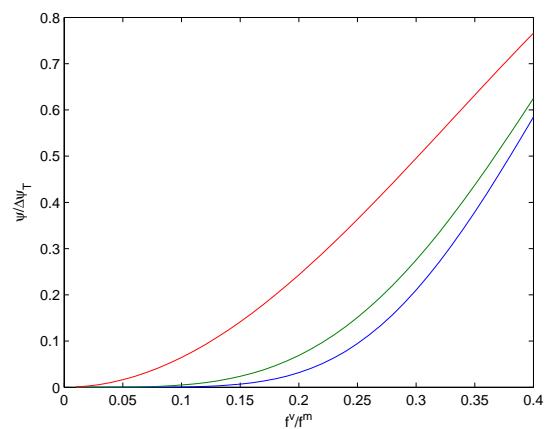


Рис. 15: Сравнение алгоритмов на вибрации с характеристикой $f^v\beta^2 = 10^{-5}$.

Для исследуемого алгоритма построим график зависимости ошибки определения угла курса от частоты вибрации f^v . Для наглядности будем строить график в нормализованных переменных: в качестве аргумента по оси абсцисс откладывать отношение f^v/f^m , а по оси ординат $\tilde{\psi}/\Delta\psi_T$.

Приведем в качестве примера графики для рассмотренных выше одношагового, двухшагового и четырехшагового алгоритмов. Здесь для константы $f^v\beta^2$ принималось значение 10^{-5} рад/с. Для большей наглядности представлены три графика (Рис.13-15) для различных диапазонов изменений величины f^v/f^m . На каждом графике красная линия соответствует одношаговому методу, зеленая – двухшаговому, синяя – четырехшаговому. Из графиков видно, что когда частота измерений гироскопов гораздо выше частоты вибрации, ошибки в определении угла курса у всех методов незначительны. Когда, наоборот, частота вибрации выше частоты съема показаний гироскопов, все алгоритмы оценивают угол курса, так, как будто приборная система координат вращается с постоянной угловой скоростью $\omega^v \cos \beta - \omega^v$ вокруг оси Ox_3 . Для частот вибрации из промежуточного диапазона различные алгоритмы дают различные курсовые ошибки. На отдельном графике приведем промежуточный диапазон частот вибраций. Видно, что четырехшаговый метод имеет самую высокую точность, тогда как уровень точности одношагового метода заметно ниже, чем у двухшагового и четырехшагового.

Заключение к главе II

Глава II содержит описание разработанной методики моделирования прикладных задач инерциальной навигации.

Раздел 2 посвящен исследованию и решению задачи согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков: гироскопов и ньютонометров. Рассмотрены два подхода. Первый подход базируется на частных случаях интегрируемости кинематических и динамических уравнений, причем, для имитации показаний ньютонометров рассмотрены несколько различных вариантов записи модельных уравнений. Второй подход базируется на точном вычислении показаний гироскопов и ньютонометров как интегралов, соответственно, от вектора абсолютной угловой скорости приборной системы и вектора удельной внешней силы. При этом, если траектория задана дискретными значениями, осуществляется предварительная процедура сглаживания кубическими сплайнами для получения аналитических выражений координат и углов ориентации.

Решена задача моделирования согласованных траекторных параметров и согласованных показаний инерциальных датчиков двух БИНС, расположенных на одном подвижном объекте.

Отдельно решена задача моделирования траекторных параметров и показаний инерциальных датчиков для траекторий в высоких широтах. В работе предложен алгоритм моделирования согласованных траекторий для типовых траекторий движения в районе низких или средних широт с последующим корректным переносом траектории в район высоких широт.

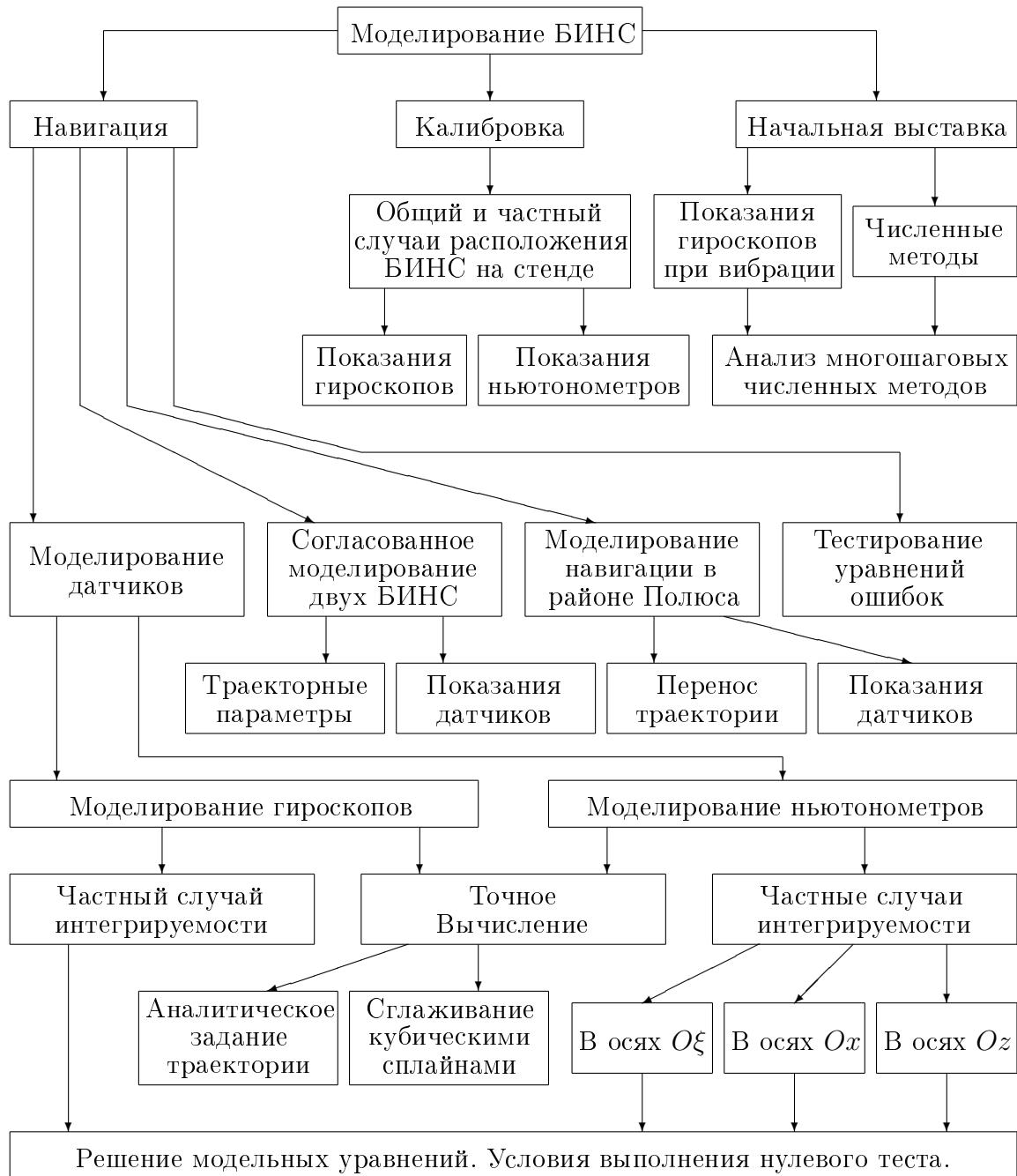
Раздел 3 служит приложением к разделу 2 и содержит описание задачи тестирования уравнений ошибок БИНС. Тестирование состоит в сравнении решения уравнений ошибок инерциальной навигации с прямой разностью между решением уравнений навигации и исходной траекторией.

В разделе 4 исследована задача и предложен алгоритм вычисления показаний инерциальных датчиков при калибровке БИНС на одноосном грубом стенде. При моделировании показаний датчиков, учитывалась ориентация БИНС относительно стенда, а также разнесение чувствительных масс ньютонометров друг относительно друга и относительно оси вращения стенда. Получены выражения показаний инерциальных датчиков как для произвольного расположения БИНС на стенде при произвольном количестве циклов, так и для частного случая, когда калибровка состоит из трех циклов, в каждом из которых одна из осей чувствительности БИНС совмещается с осью стенда.

В разделе 5 исследована чувствительность численных методов интегрирования кинематического уравнения Пуассона на этапе начальной выставки БИНС в услови-

ях вибрации основания. Была описана распространенная модель вибрации и предложен метод простого и эффективного сравнительного анализа алгоритмов при различных характеристиках вибраций.

Содержание главы II можно проиллюстрировать в виде следующей блок-схемы исследованных задач и алгоритмов:



Глава III. Некоторые задачи моделирования спутниковых навигационных систем

Введение

При разработке навигационных приложений для спутниковых систем, так же как и для инерциальных навигационных систем, удобно использовать соответствующие имитаторы. Имитатор спутниковой навигации должен включать как моделирование самой траектории каждого навигационного спутника, так и моделирование первичных спутниковых измерений, содержащих те или иные виды погрешностей.

Следует отличать математические имитаторы, позволяющие вычислять первичные спутниковые измерения с учетом известных моделей случайных и детерминированных погрешностей, от аппаратных имитаторов, воспроизводящих спутниковые сигналы с помощью соответствующих аппаратных средств.

В главе исследуются две прикладные задачи, актуальные для указанных имитаторов:

1. Высокоточное определение траекторий навигационных спутников GPS и ГЛОНАСС (в будущем, возможно, Galileo и Beidou) при помощи данных сервиса IGS (International Global Navigation Satellite Systems Service). На данный момент точность эфемеридных данных реального времени для спутников системы GPS составляет 1-2м, для спутников системы ГЛОНАСС около 3 метров. Точность позиционных данных IGS составляет 2-3см.
2. Моделирование реализаций ионосферных задержек спутниковых радиосигналов при помощи экспериментальных данных.

Решение этих задач востребовано, например, в следующих приложениях:

1. Для создания аппаратуры имитатора и его внутреннего программного обеспечения.
2. В задаче аэрогравиметрии.
3. В задачах изучения относительного дрейфа материков.

Аппаратный имитатор спутниковых радиосигналов может быть также тесно связан с компьютерным имитатором для инерциальных навигационных систем, что удобно для изучения и отработки различных алгоритмов комплексирования.

В главе представлены постановка и решение следующих задач. Сначала приводится решение задачи определения высокоточной траектории каждого навигационного спутника на основе дополнительной позиционной информации, доставляемой международным центром IGS. При этом считается, что приближенная (априорная) траектория спутника уже получена. Решение представляет из себя задачу, основанную на применении алгоритма оценивания погрешностей априорной траектории. Представлены две модификации алгоритма:

1. Для вычисления априорной траектории используются эфемеридные данные реального времени, позволяющие определять координаты и компоненты вектора скорости спутника.
2. Априорная траектория моделируется только при помощи редкой высокоточной позиционной информации.

Далее решается задача определения отклонения движения спутника от эллиптической траектории на базе вычисленной высокоточной его траектории. Для этого приводятся алгоритм вычисления реализаций во времени кеплеровых элементов орбиты навигационного спутника и алгоритм вычисления оценки внешних возмущений, действующих на спутник.

Для моделирования спутниковых измерений отдельно решается задача определения реализаций ионосферной погрешности, для чего рассматриваются различные существующие подходы:

1. Использование комбинаций первичных спутниковых сигналов.
2. Использование параметров, характеризующих состояние ионосферы, которые предоставляются центром CODE (Center for Orbit Determination in Europe).

6 Моделирование траектории навигационного спутника

Рассмотрим три взаимосвязанные задачи: вычисление высокоточной траектории навигационного спутника, вычисление оценок кеплеровых элементов орбиты, вычисление оценок внешних возмущений, действующих на спутник. В приложении приведем

стандартные алгоритмы [22], [62], рекомендованные к вычислению координат навигационных спутников по эфемеридной информации реального времени, которые нужны для целостности излагаемого материала.

6.1 Вычисление высокоточной траектории спутника

Восстановление высокоточной траектории в постобработке предлагается осуществлять на основе дискретных позиционных данных международного сервиса IGS. Точность этих позиционных данных достигает 2-3 см, время обновления составляет 15 минут. Задача ставится следующим образом: используя дискретную информацию IGS требуется определять координаты каждого навигационного спутника в произвольный момент времени (например, с частотой работы приемника) на уровне точности IGS-данных.

Решение задачи определения высокоточных траекторных параметров навигационного спутника разобьем на два этапа:

1. Определение приближенных координат и скоростей навигационных спутников – априорной траектории (две подзадачи: с использованием или без использования эфемеридных данных реального времени).
2. Оценивание и компенсация ошибок местоположения и скорости априорной траектории навигационного спутника при помощи данных IGS.

Первый вариант моделирования априорной траектории – использование эфемеридных данных реального времени. Соответствующие стандартные алгоритмы вычисления координат и компонент вектора скорости спутников для систем GPS и ГЛОНАСС приведены в приложении. Поэтому здесь опишем лишь второй вариант – алгоритм построения априорной траектории, использующий в качестве исходной информации только позиционные данные IGS.

На втором этапе ставится задача оценивания ошибок априорной траектории (ошибок координат и скоростей). Записываются линейные уравнения в вариациях и для получения оценок решения линейной системы применяется сглаживающий фильтр Калмана. При этом данные IGS служат корректирующей информацией.

6.1.1 Краткая характеристика данных IGS

Файлы IGS с эфемеридной информацией разного уровня точности являются общедоступными и хранятся в сети Internet на специализированных сайтах, например:

- <ftp://igscb.jpl.nasa.gov>;

- <ftp://cddis.gsfc.nasa.gov;>
- [ftp://www.ngs.noaa.gov.](ftp://www.ngs.noaa.gov)

Данные, предоставляемые IGS, содержатся в текстовых файлах формата sp3 или sp3c и представляют собой гринвичские координаты каждого спутника (GPS, ГЛОНАСС) и погрешность его часов. Декларируется возможность предоставления в этих файлах скоростной информации, хотя в открытом доступе таких данных на сегодняшний день нет.

Эфемеридная информация бывает трех уровней точности: с задержкой в несколько часов, с суточной задержкой и с двухнедельной задержкой. В начале файла для каждого спутника указана точность данных о его гринвичских координатах и погрешности его часов. В блоке основной информации указывается момент времени, а затем для каждого спутника в отдельной строке эфемеридные данные. В строке сначала указывается спутниковая система, к которой принадлежит данный спутник, и его номер, затем записываются три гринвичские координаты спутника и погрешность его часов.

Обычно точность позиционных данных составляет 2-3 сантиметра. Формат sp3c дополнительно содержит параметры, позволяющие более точно определить уровень точности координат спутника и погрешности его часов. Эти параметры записываются в каждой строке с эфемеридной информацией после погрешности часов спутника.

Данные в sp3 и sp3c файлах записываются с дискретом 15 минут.

Пример строки файла формата sp3c:

<i>PG11</i>	<i>-12021.820378 18920.369577 13724.103078</i>	<i>-37.976955</i>	<i>9 8 9 134</i>
номер	гринвичские координаты спутника	погр. часов	точность данных

Для спутников системы GPS перед номером спутника ставится индекс "G" для спутников ГЛОНАСС - индекс "R". Гринвичские координаты записываются в километрах, погрешность часов в микросекундах. Параметры, позволяющие оценить точность данных, представляют собой показатели степеней, основание для которых содержится в служебной информации каждого файла.

6.1.2 Построение априорной траектории без использования эфемеридных данных реального времени

Задача ставится следующим образом: на интервале времени $[T_0^*, T_1^*]$ требуется определить априорные координаты и компоненты вектора скорости спутника в каждый момент времени. Особенностью этой задачи является отсутствие информации о скорости спутника.

Через T_0 и T_1 обозначим такие моменты времени, для которых предоставлена позиционная информация IGS и при этом интервал $[T_0, T_1]$ содержит рассматриваемый интервал времени ($[T_0^*, T_1^*] \subset [T_0, T_1]$). Моменты времени T_0 и T_1 условно можно назвать "начальным" и "конечным". Заданы $\eta(T_0) = \eta^{IGS}(T_0)$ и $\eta(T_1) = \eta^{IGS}(T_1)$. Будем определять вектор скорости спутника в "начальный" момент времени $V'_\eta(T_0)$ таким образом, чтобы выполнялось условие: интегрирование уравнения движения спутника с начальными условиями $(\eta^{IGS}(T_0), V'_\eta(T_0))$ в конечный момент времени T_1 дает точку $\eta^{IGS}(T_1)$. Тогда численно интегрируя уравнения движения спутника с начальными условиями $(\eta(T_0), V'_\eta(T_0))$, можно будет в произвольный момент вычислить априорные координаты и вектор скорости.

Запишем в векторной форме уравнения движения навигационного спутника в гринвичской системе координат $O\eta$:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_\eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\hat{u} & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_\eta \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f + g \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = g_0 - \hat{u}^2 \eta. \quad (213)$$

Здесь вектор $f_\eta = (f_{\eta 1}, f_{\eta 2}, f_{\eta 3})^T$ – вектор внешних возмущений, действующих на спутник, а матрица \hat{u} определяется следующим образом:

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 \\ -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (214)$$

Для вычисления компонент вектора силы тяготения $g_\eta^0 = (g_{\eta 1}^0, g_{\eta 2}^0, g_{\eta 3}^0)^T$ следует пользоваться соотношениями (21) из контрольного документа спутниковой системы ГЛОНАСС [22], т.к. формула Гельмерта (22) пригодна только для околоземных движений объекта.

Уравнения движения навигационного спутника (213) можно проинтегрировать в явном виде (аналогично пп. 2.2.1., 2.3.2., 2.3.3.). Рассмотрим внутренний интервал времени $[t_j, t_{j+1}] \subset [T_0^*, T_1^*]$. Решение с учетом малости угловой скорости вращения Земли ($\cos u\Delta t = 1, \sin u\Delta t = u\Delta t$) запишется в виде:

$$\begin{aligned} V_\eta(t_{j+1}) &= (E + 2\hat{u}\Delta t + 2\hat{u}^2\Delta t^2)V_\eta(t_j) + \left(E + \hat{u}\Delta t + \frac{2}{3}\hat{u}^2\Delta t^2\right)(f + g)\Delta t, \\ \eta(t_{j+1}) &= \eta(t_j) + \left(E + \hat{u}\Delta t + \frac{2}{3}\hat{u}^2\Delta t^2\right)V_\eta(t_j)\Delta t + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}E + \frac{1}{3}\hat{u}\Delta t + \frac{1}{6}\hat{u}^2\Delta t^2\right)(f + g)\Delta t^2, \end{aligned} \quad (215)$$

где t_j, t_{j+1} – соседние моменты времени, $\Delta t = t_j - t_{j+1}$.

Опишем итерационный алгоритм оценки начальной скорости $V'_\eta(T_0)$, представляющий собой метод стрельбы. Обозначим через η^* предполагаемые координаты конечной точки траектории. Перед первой итерацией положим $\eta^* = \eta^{IGS}(T_1)$. Последовательность вычислений на каждой итерации такова:

1. Положим $t_j = T_0$, $t_{j+1} = T_1$ и возьмем на интервале $[T_0, T_1]$ среднее значение силы тяжести

$$g = 0.5 \cdot (g(\eta^{IGS}(T_0)) + g(\eta^*)) \quad (216)$$

2. Выразим величину $V_\eta(t_j) = V'_\eta(T_0)$ из второго уравнения системы (215), положив $\eta(t_j) = \eta^{IGS}(T_0)$ и $\eta(t_{j+1}) = \eta^*$. При этом будет предполагать, что на спутник не действуют неизвестные внешние возмущения f :

$$\begin{aligned} V'_\eta(T_0) &= \left(E - \hat{u}\Delta t + \frac{2}{3}\hat{u}^2\Delta t^2 \right) \cdot \\ &\cdot \left[\frac{\eta^* - \eta^{IGS}(T_0)}{T_1 - T_0} - \left(\frac{1}{2}E + \frac{1}{3}\hat{u}\Delta t + \frac{1}{6}\hat{u}^2\Delta t^2 \right) g(T_1 - T_0) \right]. \end{aligned} \quad (217)$$

3. Проинтегрируем на отрезке $[T_0, T_1]$ уравнения движения спутника (213) с начальными условиями $(\eta^{IGS}(T_0), V'_\eta(T_0))$ методом Рунге-Кутта 4-го порядка, который рекомендован в контрольном документе спутниковой системы ГЛОНАСС [22].
4. Введем обозначение $\Delta\eta = \eta^{IGS}(T_1) - \eta'(T_1)$, где $\eta'(T_1)$ – результат интегрирования. Если $|\Delta\eta| < \delta_R$, где δ_R – некоторое пороговое значение, то итерационный процесс оценки начальной скорости окончен. В противном случае, заново определяется величина $\eta^* \rightarrow \eta^* + \Delta\eta$ и выполняется следующая итерация.

Отметим, что в данном итерационном алгоритме варьируются на каждой итерации не только ожидаемые координаты конечной точки η^* , но и значение силы тяжести g , которое определяется как среднее арифметическое для начальной и конечной точек.

Замечание. Поскольку на спутник действуют неизвестные возмущения f , указанный итерационный алгоритм не позволяет восстановить всю траекторию навигационного спутника, например, на уровне точности эфемеридных данных реального времени. Выбором соответствующего порогового значения δ_R можно добиться того, чтобы с любой точностью результат интегрирования методом Рунге-Кутта $\eta'(T_1)$

совпадал с истинными значениями координат спутника $\eta^{IGS}(T_1)$. Однако, в промежуточных точках интервала интегрирования ошибка определения траектории достигает нескольких десятков метров.

Замечание. Опыты обработки показывают, что описанный итерационный алгоритм будет устойчиво работать, если длина интервала $[T_0, T_1]$ не превышает 2 часа. Если рассматривается более длительный интервал времени, его рекомендуется разбить на двухчасовые отрезки и для каждого из них применить описанный алгоритм.

6.1.3 Уравнения движения спутника в отклонениях от априорной траектории

Для постановки задачи оценивания запишем уравнения движения спутника в вариациях. Обозначим через $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ вектор координат спутника в гринвичской системе координат $O\eta$, через $V_\eta = (V_{\eta 1}, V_{\eta 2}, V_{\eta 3})^T$ – вектор его относительной скорости (относительно системы $O\eta$). Запишем уравнения движения спутника (213) в скалярной форме:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= V_{\eta 1}, \quad \dot{\eta}_2 = V_{\eta 2}, \quad \dot{\eta}_3 = V_{\eta 3}, \\ \dot{V}_{\eta 1} &= 2uV_{\eta 2} + f_{\eta 1} + g_{\eta 1}^0 + u^2\eta_1, \\ \dot{V}_{\eta 2} &= -2uV_{\eta 1} + f_{\eta 2} + g_{\eta 2}^0 + u^2\eta_2, \\ \dot{V}_{\eta 3} &= f_{\eta 3} + g_{\eta 3}^0.\end{aligned}\tag{218}$$

Обозначим через $\eta' = (\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)^T$ и $V'_\eta = (V'_{\eta 1}, V'_{\eta 2}, V'_{\eta 3})^T$, соответственно, вектор координат спутника и вектор его относительной скорости для априорной траектории. Тогда для векторов η' и V'_η можно записать аналогичную (218) систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}'_1 &= V'_{\eta 1}, \quad \dot{\eta}'_2 = V'_{\eta 2}, \quad \dot{\eta}'_3 = V'_{\eta 3}, \\ \dot{V}'_{\eta 1} &= 2uV'_{\eta 2} + f'_{\eta 1} + g'^0_{\eta 1} + u^2\eta'_1, \\ \dot{V}'_{\eta 2} &= -2uV'_{\eta 1} + f'_{\eta 2} + g'^0_{\eta 2} + u^2\eta'_2, \\ \dot{V}'_{\eta 3} &= f'_{\eta 3} + g'^0_{\eta 3}.\end{aligned}\tag{219}$$

Замечание. Вектор внешних возмущений f'_η можно положить нулевым, либо для спутников системы ГЛОНАСС взять значения его компонент из файла с эфемеридной информацией реального времени.

Введем ошибки траектории:

$$\Delta\eta = \eta' - \eta \quad \Delta V_\eta = V'_\eta - V_\eta \tag{220}$$

Введем также обозначение $\Delta f_\eta = f'_\eta - f_\eta$. Будем считать, что неизвестный вектор Δf_η представим в виде суммы постоянного неизвестного вектора Δf_η^0 и случайного вектора Δf_η^s :

$$\Delta f_\eta = \Delta f_\eta^0 + \Delta f_\eta^s. \quad (221)$$

Линеаризуем систему уравнений движения спутника (218) в окрестности априорной траектории:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta\eta}_1 &= \Delta V_{\eta 1}, \quad \dot{\Delta\eta}_2 = \Delta V_{\eta 2}, \quad \dot{\Delta\eta}_3 = \Delta V_{\eta 3}, \\ \dot{\Delta V}_{\eta 1} &= 2u\Delta V_{\eta 2} + \Delta f_{\eta 1}^0 + \Delta f_{\eta 1}^s + (g_{\eta 1}^0)'_{\eta 1}\Delta\eta_1 + (g_{\eta 1}^0)'_{\eta 2}\Delta\eta_2 + (g_{\eta 1}^0)'_{\eta 3}\Delta\eta_3 + u^2\Delta\eta_1, \\ \dot{\Delta V}_{\eta 2} &= -2u\Delta V_{\eta 1} + \Delta f_{\eta 2}^0 + \Delta f_{\eta 2}^s + (g_{\eta 2}^0)'_{\eta 1}\Delta\eta_1 + (g_{\eta 2}^0)'_{\eta 2}\Delta\eta_2 + (g_{\eta 2}^0)'_{\eta 3}\Delta\eta_3 + u^2\Delta\eta_2, \\ \dot{\Delta V}_{\eta 3} &= \Delta f_{\eta 3}^0 + \Delta f_{\eta 3}^s + (g_{\eta 3}^0)'_{\eta 1}\Delta\eta_1 + (g_{\eta 3}^0)'_{\eta 2}\Delta\eta_2 + (g_{\eta 3}^0)'_{\eta 3}\Delta\eta_3, \\ \dot{\Delta f}_{\eta 1}^0 &= 0, \quad \dot{\Delta f}_{\eta 2}^0 = 0, \quad \dot{\Delta f}_{\eta 3}^0 = 0. \end{aligned} \quad (222)$$

Здесь через $(g_{\eta i}^0)'_{\eta k}$ обозначены вариации ускорения силы тяготения. В частности, для вполне оправданной сферической модели поля тяготения ($g_{\eta i}^0 = -\frac{\mu}{r^3}\eta_i$, $i = 1, 2, 3$) они имеют вид:

$$(g_{\eta i}^0)'_{\eta k} = 3\frac{\mu}{r^5}\eta_i\eta_k - \frac{\mu}{r^3}\delta_{ik}, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3. \quad (223)$$

Будем предполагать, что возмущения $\Delta f_\eta^s = (\Delta f_{\eta 1}^s, \Delta f_{\eta 2}^s, \Delta f_{\eta 3}^s)^T$ являются независимыми центрированными белыми шумами с заданными интенсивностями σ_q . Также предположим, что ошибки $\Delta\eta$, ΔV_η , Δf_η^0 в начальный момент некоррелированы.

Введем вектор состояния x и вектор шумов q динамической системы (222):

$$x = (\Delta\eta_1, \Delta\eta_2, \Delta\eta_3, \Delta V_{\eta 1}, \Delta V_{\eta 2}, \Delta V_{\eta 3}, \Delta f_{\eta 1}^0, \Delta f_{\eta 2}^0, \Delta f_{\eta 3}^0)^T, \quad (224)$$

$$q = (\Delta f_{\eta 1}^s, \Delta f_{\eta 2}^s, \Delta f_{\eta 3}^s)^T. \quad (225)$$

Тогда систему (222) можно записать в виде:

$$\dot{x} = Ax + Bq, \quad (226)$$

где вид матриц A и B может быть легко определен.

6.1.4 Дискретизация модели задачи

Динамическую систему (222) можно записать в дискретном виде:

$$x_{j+1} = \Phi_{j+1,j}x_j + Bq_j, \quad (227)$$

где x_j, x_{j+1} – значение вектора состояния x , соответственно, в моменты времени t_j, t_{j+1} . q_j – эквивалентный в среднеквадратичном смысле вектор дискретного шума динамической системы. $\Phi_{j+1,j}$ – переходная матрица системы, которая вычисляется следующим образом (используется, например, простейший метод численного интегрирования дифференциальных уравнений - метод Эйлера):

$$\Phi_{j+1,j} = E + \Delta t \cdot A(t_j), \quad \Delta t = t_{j+1} - t_j, \quad (228)$$

6.1.5 Уравнения корректирующих измерений

Дискретные уравнения позиционных измерений имеют вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= \eta'_1 - \eta_1^{IGS} = \Delta\eta_1 + r_1, \\ z_2 &= \eta'_2 - \eta_2^{IGS} = \Delta\eta_2 + r_2, \\ z_3 &= \eta'_3 - \eta_3^{IGS} = \Delta\eta_3 + r_3, \end{aligned} \quad (229)$$

где η_i^{IGS} – позиционные данные IGS, а r_1, r_2, r_3 – погрешности этих данных.

Будем предполагать, что погрешности измерений являются независимыми центрированными белыми шумами с заданными дисперсиями $\sigma_{r_1}^2, \sigma_{r_2}^2, \sigma_{r_3}^2$. Значения σ_{r_i} характеризуют точность измерений и, как отмечалось выше, предоставлены в файлах IGS. На сегодняшний день, декларируемая точность данных IGS составляет 2-3 см.

Уравнения измерений легко представить в матричной форме

$$z(t_j) = Hx(t_j) + r(t_j), \quad (230)$$

где j – номер измерения, а матрица H записывается следующим образом:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (231)$$

Замечание. Если в sp3, sp3c файлах присутствует скоростная информация, то можно образовать соответствующие скоростные измерения:

$$\begin{aligned} z_4 &= V'_{\eta 1} - V_{\eta 1}^{IGS} = \Delta V_{\eta 1} + r_4 \\ z_5 &= V'_{\eta 2} - V_{\eta 2}^{IGS} = \Delta V_{\eta 2} + r_5 \\ z_6 &= V'_{\eta 3} - V_{\eta 3}^{IGS} = \Delta V_{\eta 3} + r_6, \end{aligned} \quad (232)$$

где $V_{\eta i}^{IGS}$ – скоростные данные IGS, а r_4, r_5, r_6 - погрешности скоростных данных сервиса IGS. Отметим, что на сегодняшний день скоростная информация не предоставляется.

Таким образом, поставленная задача оценки ошибки траектории навигационного спутника принимает вид:

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= \Phi_{j+1,j}x_j + Bq_j, \\ z_j &= Hx_j + r_j. \end{aligned} \quad (233)$$

Замечание. Расчеты показали, что шаг по времени Δt рекомендуется брать не более 1с.

Решение задачи оценивания проводится при помощи сглаживающего фильтра Калмана [25], [33].

6.1.6 Формирование скорректированной траектории навигационного спутника

В результате применения сглаживающего фильтра Калмана определяется оценка $\tilde{x} = (\Delta\tilde{\eta}, \Delta\tilde{V}_\eta, \Delta\tilde{f}_\eta^0)^T$ (224). Запишем скорректированную оценку гринвичских координат и скоростей навигационного спутника в следующем виде:

$$\tilde{\eta} = \eta' - \Delta\tilde{\eta}, \quad \tilde{V}_\eta = V'_\eta - \Delta\tilde{V}_\eta. \quad (234)$$

Для проверки точности применяемого алгоритма искусственно моделировался пропуск одного из корректирующих измерений и проверялось, с какой точностью фильтр определит координаты пропущенной точки. Ошибка определения фильтром Калмана пропущенного корректирующего измерения составляла несколько миллиметров.

Таким образом, несмотря на то, что высокоточная позиционная эфемеридная информация предоставляетя достаточно редко, удается восстановить всю траекторию навигационного спутника без потери точности. Остаточная ошибка определения координат навигационного спутника в каждый момент времени t_j после применения сглаживающего фильтра Калмана остается на уровне точности данных IGS и, соответственно, не превышает 2-3см. Отметим, что ковариационные характеристики соответствующих оценок также остаются примерно на уровне 2-3см на всем рассматриваемом отрезке времени, что косвенно подтверждает высокую точность полученных результатов.

Замечание. Оценка модуля ошибки скорости $\tilde{V} = \sqrt{\tilde{V}_{\eta 1}^2 + \tilde{V}_{\eta 2}^2 + \tilde{V}_{\eta 3}^2}$ для спутников обеих систем не превосходит 3 мм/с.

Замечание. Если шаг по времени Δt взять не более 0.1 секунды, то для определения координат спутника в произвольный момент времени t , $t \in [t_j, t_{j+1}]$ с тем же уровнем точности достаточно линейной интерполяции координат.

6.2 Высокоточное определение кеплеровых элементов орбиты спутника

Естественным развитием задачи высокоточного определения траектории навигационного спутника представляется задача моделирования кеплеровых элементов возмущенной орбиты спутника как функций времени.

Задача вычисления кеплеровых элементов по известным значениям декартовых координат некоторых точек орбиты является классической задачей небесной механики и подробно описана в соответствующих изданиях, например, в книгах Балка М.Б. [9], Дубошина Г.Н. [27]. Традиционно данная задача решается в инерциальной системе координат, причем орбита спутника предполагается строго эллиптической. Однако, в спутниковой навигации опорной системой координат является гринвичская система, а из-за внешних возмущений, постоянно действующих на спутник, его орбита не является эллиптической и даже плоской. Поэтому чтобы воспользоваться существующими алгоритмами, необходимо их модифицировать.

Моделирование эволюций кеплеровых элементов орбиты может быть полезно для задач прогноза движения спутника. Моделирование кеплеровых элементов на длительных интервалах времени позволяет выявлять частоты, соответствующие влиянию основных возмущающих факторов: воздействию Луны, Солнца и т.д.

6.2.1 Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты являются универсальным понятием, однако, для самодостаточности излагаемого материала приведем здесь их подробное описание. Введем орбитальную систему координат $O\zeta$, ось $O\zeta_1$ которой направлена вдоль линии пересечения плоскости экватора $O\eta_1\eta_2$ и плоскости орбиты спутника, причем в ту из двух точек пересечения спутником плоскости экватора, через которую спутник проходит при движении в направлении Юг-Север. Ось $O\zeta_3$ перпендикулярна плоскости орбиты и всегда составляет с направлением $O\eta_3$ острый угол, а ось $O\zeta_2$ лежит в плоскости орбиты и дополняет оси $O\zeta_1$ и $O\zeta_3$ до правой тройки. Назовем долготой восходящего узла угол между осью $O\eta_1$ и осью $O\zeta_1$. Ось $O\zeta_1$ назовем линией узлов, а долготу восходящего узла обозначим через Ω .

Углом наклонения орбиты назовем угол между плоскостью экватора $O\eta_1\eta_2$ и плоскостью орбиты $O\zeta_1\zeta_2$ и обозначим его через i . Через a и e обозначим, соответ-

ственno, большую полуось орбиты и ее первый эксцентриситет. Аргументом перигея назовем угол между линией узлов и направлением из точки O в точку перигея орбиты и обозначим его через ω .

Указанными пятью параметрами полностью задается орбита, шестым параметром задается положение спутника на орбите.

Зададим ориентацию орбитальной системы $O\zeta$ относительно гринвичской $O\eta$ двумя последовательными поворотами:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & & i \\ O\eta & \xrightarrow{3} & \xrightarrow{1} O\zeta. \end{array} \quad (235)$$

Матрицу ориентации орбитальной системы относительно гринвичской обозначим через B_ζ :

$$B_\zeta = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega \cos i & \cos \Omega \cos i & \sin i \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i & \cos i \end{pmatrix}. \quad (236)$$

6.2.2 Алгоритм определения кеплеровых элементов по трем положениям спутника на орбите

Приведем описание стандартного алгоритма определения кеплеровых элементов [9] с учетом особенностей, о которых было сказано выше. По известным координатам спутника в три известные моменты времени требуется определить все пять кеплеровых элементов, а также время прохождения спутника через перигей.

Замечание. Вообще говоря, для определения указанных величин достаточно двух положений спутника, но алгоритм достаточно трудоемкий [9], поэтому приводим здесь и рекомендуем к использованию алгоритм, определяющий кеплеровы элементы по трем положениям спутника.

Введем еще одну систему координат, связанную с орбитой спутника, и обозначим ее орты через $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3$. Орт $\bar{\psi}_1$ направим в точку перигея, орт $\bar{\psi}_2$ также лежит в плоскости орбиты, а орт $\bar{\psi}_3$ совпадает с осью $O\zeta_3$.

Обозначим гринвичские координаты выбранных точек, соответственно, через $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ и $\eta^{(3)}$, а расстояния от этих точек до точки O , соответственно, через $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}$. Через t_1, t_2, t_3 обозначим последовательные моменты времени прохождения спутником выбранных точек ($t_1 < t_2 < t_3$).

Замечание. В выбранные моменты времени t_1, t_2, t_3 гринвичская система координат занимает различное положение. Поэтому условимся все вычисления производить

в той системе, с которой совпадает гринвичская система в средний момент t_2 . Тогда необходимо гринвичские координаты остальных точек привести в эту же систему, т.е. выполнить замены:

$$\begin{aligned}\eta^{(1)} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \cos u(t_2 - t_1) & \sin u(t_2 - t_1) & 0 \\ -\sin u(t_2 - t_1) & \cos u(t_2 - t_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \eta^{(1)}, \\ \eta^{(3)} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \cos u(t_3 - t_2) & -\sin u(t_3 - t_2) & 0 \\ \sin u(t_3 - t_2) & \cos u(t_3 - t_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \eta^{(3)}.\end{aligned}\quad (237)$$

Вектор $\bar{\psi}_3$ в гринвичской системе координат может быть вычислен следующим образом:

$$\bar{\psi}_3 = \frac{\eta^{(1)} \times \eta^{(3)}}{|\eta^{(1)} \times \eta^{(3)}|}. \quad (238)$$

С другой стороны, орт $\bar{\psi}_3$ в системе $O\zeta$ имеет координаты $(0, 0, 1)^T$. Отсюда:

$$\bar{\psi}_3 = B_\zeta^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (239)$$

Из последнего равенства можно найти долготу восходящего узла и угол наклонения орбиты:

$$\Omega = -\arctan \frac{\psi_{31}}{\psi_{32}} \quad (\Omega \in [0, 2\pi]), \quad i = \arccos \psi_{33} \quad (240)$$

с учетом знаков ψ_{31}, ψ_{32} где $\psi_{31}, \psi_{32}, \psi_{33}$ – компоненты вектора $\bar{\psi}_3$.

Поскольку все три выбранные точки лежат в одной плоскости, вектор $\eta^{(2)}$ можно линейно выразить через вектора $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(3)}$:

$$\eta^{(2)} = c_1 \eta^{(1)} + c_3 \eta^{(3)}. \quad (241)$$

Замечание. Вообще говоря, поскольку реальная орбита спутника не является эллиптической, три выбранные точки вместе с условным центром Земли O не будут лежать в одной плоскости. Иными словами мы определили углы Ω и i через векторы $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(3)}$. Если мы сформируем по этим углам матрицу B_ζ и вычислим координаты второй точки $\zeta^{(2)}$ в орбитальной системе $O\zeta$ с помощью равенства $\zeta^{(2)} = B_\zeta \eta^{(2)}$, то

третья координата $\zeta_3^{(2)}$ будет отлична от нуля и может достигать, например, нескольких десятков метров (при $t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = 10\text{мин.}$). Но этим отличием можно пренебречь, принудительно положив ее равной нулю: $\zeta_3^{(2)} = 0$. А после этого снова вычислить координаты $\eta^{(2)} = B_\zeta^T \zeta^{(2)}$ и эти координаты в дальнейшем и считать гринвичскими координатами второй точки. На этом модификация заканчивается и дальше предлагается изложение стандартного алгоритма, приведенного в [9].

Найдем коэффициенты c_1 и c_3 , поочередно домножив, соотношение (241) справа на $\eta^{(3)}$ и $\eta^{(1)}$:

$$c_1 = \frac{|\eta^{(2)} \times \eta^{(3)}|}{|\eta^{(1)} \times \eta^{(3)}|}, \quad c_3 = \frac{|\eta^{(2)} \times \eta^{(1)}|}{|\eta^{(3)} \times \eta^{(1)}|}. \quad (242)$$

Для каждой точки на эллипсе справедливо соотношение:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad (243)$$

где r – расстояние до точки от фокуса (в нашем случае, от центра Земли O), p – фокальный параметр, f – угол истинной аномалии, который представляет собой угол между направлением на перигей (ортом $\bar{\psi}_1$) и направлением на данную точку из фокуса O . Отсюда следует равенство:

$$p - r = e\xi, \quad (244)$$

где ξ – проекция радиус-вектора точки на направление большой полуоси эллипса. Спроектируем на большую полуось соотношение (241):

$$\xi^{(2)} = c_1 \xi^{(1)} + c_3 \xi^{(3)}, \quad (245)$$

откуда следует равенство

$$p - r^{(2)} = c_1(p - r^{(1)}) + c_3(p - r^{(3)}). \quad (246)$$

Из последнего равенства можно найти фокальный параметр p :

$$p = \frac{r^{(2)} - c_1 r^{(1)} - c_3 r^{(3)}}{1 - c_1 - c_3}. \quad (247)$$

Запишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2 = \bar{\psi}_3 \times \bar{\psi}_1 &= \frac{(\eta^{(1)} \times \eta^{(3)}) \times \bar{\psi}_1}{|\eta^{(1)} \times \eta^{(3)}|} = \frac{1}{|\eta^{(1)} \times \eta^{(3)}|} (\eta^{(3)}(\bar{\psi}_1 \cdot \eta^{(1)}) - \eta^{(1)}(\bar{\psi}_1 \cdot \eta^{(3)})) = \\ &= \frac{1}{|\eta^{(1)} \times \eta^{(3)}|} (\xi^{(1)} \eta^{(3)} - \xi^{(3)} \eta^{(1)}). \end{aligned} \quad (248)$$

Домножив обе части равенства на эксцентриситет e и взяв по норме, получим с учетом (244) выражение для определения эксцентриситета:

$$e = \frac{|(p - r^{(1)})\eta^{(3)} - (p - r^{(3)})\eta^{(1)}|}{|\eta^{(1)} \times \eta^{(3)}|}. \quad (249)$$

Далее может быть найден сам вектор $\bar{\psi}_2$:

$$\bar{\psi}_2 = \frac{1}{e|\eta^{(1)} \times \eta^{(3)}|} \left((p - r^{(1)})\eta^{(3)} - (p - r^{(3)})\eta^{(1)} \right). \quad (250)$$

Оставшийся неизвестным орт $\bar{\psi}_1$ находится через векторное произведение:

$$\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 \times \bar{\psi}_3. \quad (251)$$

Большая полуось a и малая полуось b вычисляются через эксцентриситет e и фокальный параметр p :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (252)$$

Линия узлов $O\zeta_1$ как вектор единичной длины имеет следующие компоненты: $(\cos \Omega, \sin \Omega, 0)^T$. Тогда аргумент перигея ω может быть найден по формуле:

$$\omega = -\text{sign}(O\zeta_1 \cdot \bar{\psi}_2) \arccos(O\zeta_1 \cdot \bar{\psi}_1). \quad (253)$$

Таким образом, найдены все пять кеплеровых элементов, задающих орбиту спутника, осталось найти время прохождения спутником точки перигея. На большой полуоси эллипса как на радиусе построим окружность. Проведем через точку эллипса прямую, перпендикулярную большой полуоси. Угол между большой полуосью и направлением из центра эллипса на точку пересечения построенной прямой с окружностью называется углом эксцентрической аномалии E . Обозначим через x, y декартовы координаты второй точки (из исходных трех точек), отсчитываемые от точки O . Справедливо равенство:

$$\cos E = \frac{x + c}{a}, \quad (254)$$

где c – фокусное расстояние. Воспользуемся уравнением эллипса:

$$\frac{(x + c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (255)$$

Отсюда $y = b \sin E$. С другой стороны:

$$x = (\eta^{(2)} \cdot \bar{\psi}_1), \quad y = (\eta^{(2)} \cdot \bar{\psi}_2). \quad (256)$$

Тогда могут быть легко найдены тригонометрические функции для эксцентрической аномалии E :

$$\cos E = e + \frac{(\eta^{(2)} \cdot \bar{\psi}_1)}{a}, \quad \sin E = \frac{(\eta^{(2)} \cdot \bar{\psi}_2)}{b}. \quad (257)$$

Запишем уравнение Кеплера, обозначив через t_0 время прохождения спутника через перигей:

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t_2 - t_0). \quad (258)$$

Отсюда легко может быть найдено искомое время t_0 :

$$t_0 = t_2 - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E - e \sin E). \quad (259)$$

Вычисленные значения кеплеровых элементов и времени прохождения через перигей следует отнести к моменту времени t_2 .

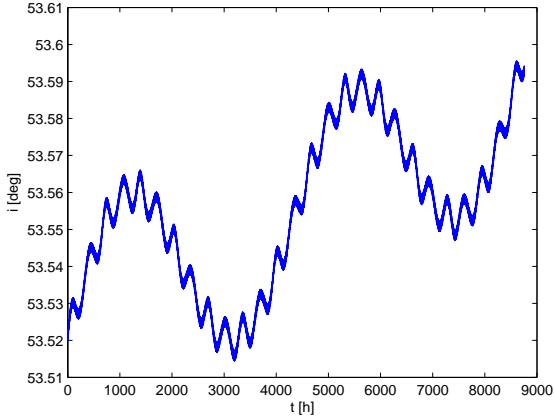


Рис. 16: График угла наклонения i на интервале 1 год.

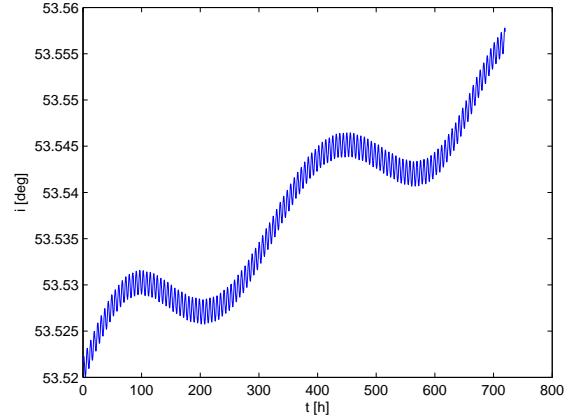


Рис. 17: График угла наклонения i на интервале 1 месяц.

Замечание. Если моменты времени t_1, t_2, t_3 взять далеко отстоящими друг от друга, то задача определения кеплеровых элементов как функций времени теряет смысл. Если взять слишком близкими друг другу, то задача становится плохо обусловленной: неточно определяются эксцентриситет e и аргумент перигея ω . Расчеты показали, что оптимальной разницей по времени представляется $t_2 - t_1 \sim t_3 - t_2 \sim 5 - 15$ мин.

6.2.3 Результаты моделирования

Проиллюстрируем эволюции кеплеровых элементов на достаточно длительных интервалах времени.

На Рис.16, 18 приведены для примера графики эволюций во времени угла наклонения орбиты i (как параметра, характеризующего ориентацию орбиты) и эксцентриситета e (как параметра, характеризующего форму орбиты) спутника номер 6 системы GPS за 2010 год. Хорошо видны частоты колебаний, соответствующие периоду вращения Луны вокруг Земли и вращения Земли вокруг Солнца.

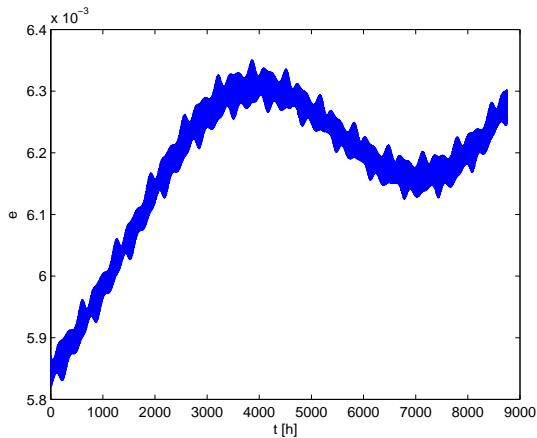


Рис. 18: График эксцентриситета e на интервале 1 год.

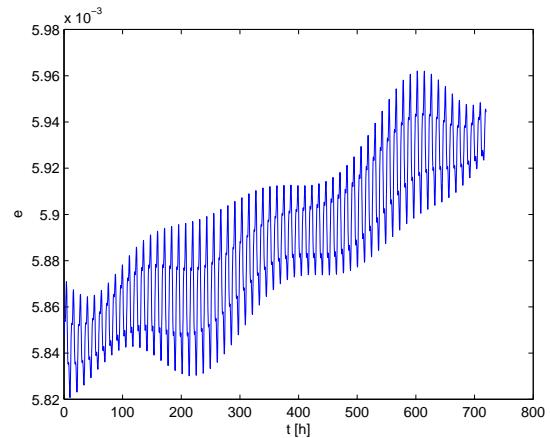


Рис. 19: График эксцентриситета e на интервале 1 месяц.

На Рис.17,19 приведены графики эволюций этих же величин за январь 2010 года. Четко прослеживаются вариации с частотой, соответствующей периоду вращения спутника вокруг Земли.

Однако, следует отметить, что силы притяжения со стороны Луны и Солнца являются далеко не единственными факторами, возмущающими траекторию спутника.

В работе Микрина Е.А. и др. [42] приведен перечень возмущающих факторов с указанием для каждого из них степени отклонения от невозмущенной траектории.

6.3 Определение внешних возмущений, действующих на спутник

Описанный выше алгоритм использования позиционных данных IGS позволяет с высокой точностью определять координаты спутника и компоненты вектора его относительной скорости. Тогда из (218) можно получить выражения для определения компонент вектора внешних возмущений f_η , действующих на спутник:

$$\begin{aligned} f_{\eta 1} &= \dot{V}_{\eta 1} - 2uV_{\eta 2} - g_{\eta 1}^0 - u^2\eta_1, \\ f_{\eta 2} &= \dot{V}_{\eta 2} + 2uV_{\eta 1} - g_{\eta 2}^0 - u^2\eta_2, \\ f_{\eta 3} &= \dot{V}_{\eta 3} - g_{\eta 3}^0. \end{aligned} \quad (260)$$

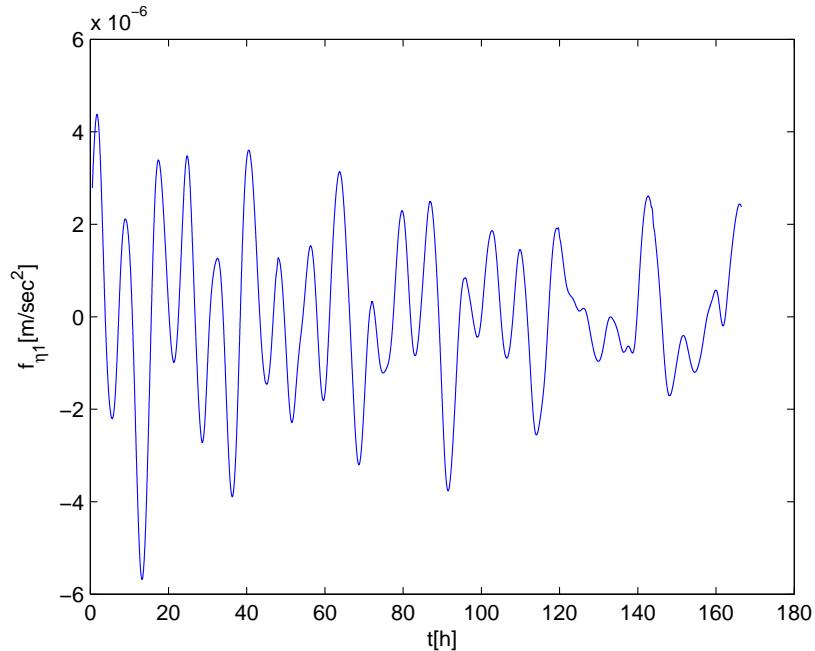


Рис. 20: График величины внешнего возмущения $f_{\eta 1}$.

Если шаг по времени Δt определения внешних возмущений небольшой, например, $\Delta t = 0.1\text{с.}$, то производные от компонент вектора относительной скорости могут быть найдены простым численным дифференцированием (например, центральной разностью):

$$\dot{V}_{\eta i}(t_j) = \frac{V_{\eta i}(t_{j+1}) - V_{\eta i}(t_{j-1})}{2\Delta t}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (261)$$

Характер поведения реализаций возмущений во времени качественно похож на характер реализаций кеплеровых элементов. Приведем для примера реализацию оценки $f_{\eta 1}$ (Рис. 20) спутника номер 1 системы GLONASS на интервале с 25 по 31 августа 2013 года:

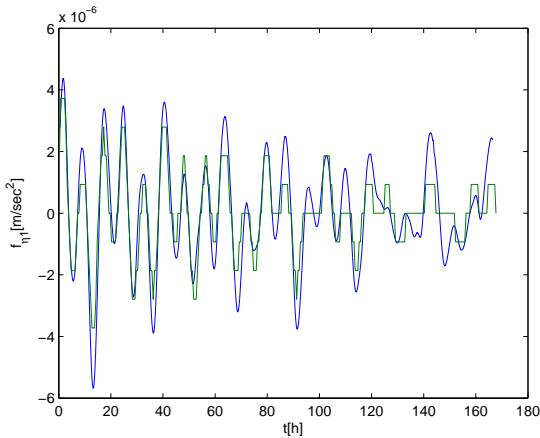


Рис. 21: Внешнее возмущение $f_{\eta 1}$ и его априорная оценка из эфемеридной информации реального времени. С 25 по 31 августа 2013г.

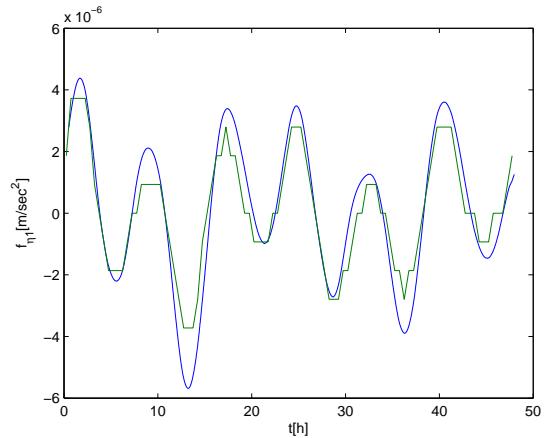


Рис. 22: Внешнее возмущение $f_{\eta 1}$ и его априорная оценка из эфемеридной информации реального времени. С 25 по 26 августа 2013г.

Замечание. Анализ показал, что вычисленные значения внешних возмущений не всегда хорошо совпадают с оценками внешних возмущений, которые передаются в качестве эфемеридной информации реального времени спутниковой системы ГЛОНАСС. На Рис.21 и 22 приведены соответствующие графики, где синим цветом обозначена вычисленная по (260) эволюция величины $f_{\eta 1}$, а зеленым цветом приведена оценка этой величины, сообщаемая системой ГЛОНАСС в числе эфемеридной информации реального времени. Из графиков видно, что ошибка величины внешних возмущений может достигать $10^{-6}\text{м}/\text{с}^2$. Однако, эфемеридные данные обновляются

каждые 30 минут и за этот отрезок времени указанные ошибки в определении внешних возмущений не приведут к существенным погрешностям в определении траектории спутника при интегрировании уравнений движения.

7 Моделирование ионосферной погрешности спутниковых измерений

Как было сказано в начале главы, одним из элементов компьютерного и аппаратного имитатора является моделирование ионосферной погрешности спутниковых измерений. Остановимся на описании различных подходов к вычислению ионосферной погрешности:

- моделирование ионосферы методом сферических гармоник, коэффициенты для которого открыто предоставляются службой CODE (Center for Orbit Determination in Europe);
- определение ионосферной погрешности с помощью измерений двухчастотного приемника.

Отметим, что ниже сначала приводятся известные подходы к вычислению ионосферной погрешности, поскольку эти модели и соотношения нужны для моделирования спутниковых измерений.

7.1 Общая информация о ионосфере и ионосферной погрешности спутниковых измерений

Слоем ионосферы называется верхняя часть атмосферы, в которой находятся заряженные ионы (электроны). Ионосфера располагается ориентировочно в пределах 50-1000км над поверхностью Земли, наибольшая концентрация ионов наблюдается на высоте 300-400км. Поскольку возникновение ионов вызвано действием солнечных лучей, в дневное время суток содержание ионов в ионосфере выше, чем в ночное. По этой же причине в экваториальной части ионосферы концентрация ионов всегда больше, чем в полярных областях.

Ошибка, вызванная прохождением радиосигнала через слой ионосферы, зависит от частоты радиосигнала и концентрации ионов на пути прохождения сигнала. На величину погрешности влияет только количество электронов на пути прохождения

сигнала, в независимости от того, как они расположены. Поэтому в научной литературе широко используется термин "полное электронное содержание" (ПЭС), который характеризует количество электронов в некоторой вертикальной области ионосферы (вертикальной "трубке") с определенной площадью поперечного сечения. В качестве единицы измерения полного электронного содержания выбрана величина $TECU = 10^{12}$ электронов в вертикальной "трубке" с площадью поперечного сечения 1 кв.см. Обобщенную формулу для вычисления ионосферной погрешности можно записать в следующем виде [65]:

$$|\Delta| = \frac{40.3 \cdot 10^{16}}{f^2} E, \quad (262)$$

где f - частота радиосигнала, E - величина полного электронного содержания.

Ионосферные составляющие погрешности кодовых и фазовых измерений равны друг другу по модулю и противоположны по знаку. У кодовых измерений ионосферная погрешность Δ имеет положительный знак, у фазовых отрицательный.

Для компенсации ионосферной погрешности существует несколько подходов. Традиционно для оценки и компенсации ионосферной ошибки в алгоритмах реального времени используется модель Клобухара [62], коэффициенты для которой передаются на рабочий приемоиндикатор одновременно с эфемеридной информацией в навигационном сообщении спутниковой системы GPS. Эти же коэффициенты при необходимости могут быть использованы и для спутников системы GLONASS при совместной обработке измерений с измерениями системы GPS. Однако, модель Клобухара достаточно общая и описывает системные интегральные эффекты в ионосфере, не учитывая более детально электронное содержание электронов в каждой небольшой области, поэтому компенсирует лишь часть ионосферной составляющей погрешности сигнала [65], [20]. Подробно мы не будем на ней останавливаться.

Если рабочий приемник является двухчастотным, то используют ионосферо-свободную комбинацию. Вместо первичных фазовых измерений на несущих опорных частотах f_1 и f_2 используется комбинация фазовых измерений, не содержащая ионосферную ошибку. Это возможно, поскольку ионосферная задержка, согласно (262), зависит от частоты радиосигнала. Такой подход широко распространен для двухчастотных приемников, хотя абсолютное значение ионосферной ошибки в этом случае не оценивается.

7.2 Моделирование ионосферной погрешности с помощью информации службы CODE

Одним из способов построения карт полного электронного содержания ионосферы является использование метода сферических гармоник, коэффициенты для которого в открытом доступе предоставляет организация CODE - Center for Orbit Determination in Europe, - которая является аналитическим европейским центром международной службы IGS. Время обновления этих коэффициентов составляет два часа, а соответствующие файлы доступны в сети Internet, например, на сайте: <http://www.aiub.unibe.ch>.

Отметим, что центр CODE также предоставляет ежедневную информацию о полном электронном содержании для дискретных точек земной поверхности с шагом пять градусов по долготе и два с половиной градуса по широте, которая рассчитывается по этим же коэффициентам. Однако, этих данных недостаточно для интерполяции с требуемой точностью полного электронного содержания в любой точке модельного эллипсоида Земли, что побуждает пользоваться непосредственно самими коэффициентами.

7.2.1 Краткое описание модели на основе сферических гармоник

Как уже говорилось выше, для вычисления ионосферной ошибки по формуле (262) необходимо знать полное электронное содержание на пути прохождения сигнала, вне зависимости от того, как электроны располагаются. Поэтому нет необходимости моделировать ионосферу трехмерной, и в дальнейшем речь будет идти о двумерных моделях ионосферы. Ионосфера моделируется сферическим слоем бесконечно малой толщины в предположении, что все электроны содержатся в этом слое. Для большей точности ионосфера моделируется сферическим слоем, располагающимся над земной поверхностью на той высоте, на которой находится наибольшее количество электронов (примерно 300-400 км).

Модель на основе сферических гармоник для расчета полного электронного содержания в дискретной точке выглядит следующим образом:

$$E(\beta, s) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \tilde{P}_{nm}(\sin \beta) (a_{nm} \cos(ms) + b_{nm} \sin(ms)). \quad (263)$$

Здесь E – вертикальное полное электронное содержание (количество электронов в "трубке" перпендикулярной к поверхности модельного эллипсоида Земли), β – геоцентрическая широта данной точки, $s = \lambda - \lambda_0$ – разность между значением долготы данной точки и значением долготы солнца, n_{max} – максимальная степень

разложения в ряд по сферическим гармоникам, a_{nm} и b_{nm} – коэффициенты разложения, $\tilde{P}_{nm} = \Lambda_{nm} P_{nm}$ – нормализованные полиномы Лежандра степени n порядка m . Полином Лежандра P_n степени n определяется по формуле:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad (264)$$

а полином Лежандра P_{nm} степени n порядка m получается из полинома P_n по формуле:

$$P_{nm} = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \quad (265)$$

Коэффициент нормализации Λ_{nm} определяется следующим соотношением:

$$\Lambda_{nm} = \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}{(n+m)!}}, \quad (266)$$

где δ является символом Кронекера.

7.2.2 Краткая характеристика данных, предоставляемых центром CODE

CODE ежедневно предоставляет в открытом доступе (в сети Internet) два вида файлов, описывающих состояние ионосферы. Остановимся сначала на файлах, которые содержат коэффициенты разложения a_{nm} и b_{nm} полного электронного содержания в ряд Фурье. Коэффициенты разложения представлены с временным интервалом два часа и предназначены для разложения величины ПЭС в ряд Фурье степени 15. Таким образом, на каждый момент времени представлено 256 коэффициентов, что оказывается достаточным для вычисления полного электронного содержания на моделируемом слое ионосферы в любой точке с достаточно высокой точностью.

На каждый момент времени перед коэффициентами помещено некоторое введение, которое содержит данные, необходимые или просто полезные для вычисления полного электронного содержания. К наиболее важным данным относится информация о том, в какой системе координат по коэффициентам вычисляется ПЭС (на данный момент все предоставляемые файлы с коэффициентами предполагают вычисление ПЭС в геомагнитной системе координат), затем и координаты магнитного полюса, если ПЭС вычисляется в геомагнитной системе координат. Также содержится информация о высоте над поверхностью Земли, на которой находится моделируемый коэффициентами слой ионосферы. Кроме того, указан момент времени, в

который вычисляется ПЭС, и предельные значения широты, для которых возможно определение ПЭС по коэффициентам.

Сами коэффициенты записываются в файле так, что каждый коэффициент помещен в отдельную строку. В каждой строке указана сначала степень n слагаемого (263), в которое должен подставляться коэффициент, затем его порядок m , потом сам коэффициент и оценка его среднеквадратического отклонения. Для коэффициента перед косинусом a_{mn} порядок обозначается m , а для коэффициента перед синусом $b_{mn} - (-m)$. Обычно среднеквадратическое отклонение не превышает 0.5 ТЕСУ.

Теперь кратко охарактеризуем файлы с уже посчитанными значениями полного электронного содержания в узловых точках. Непосредственно перед значениями полного электронного содержания каждый файл имеет довольно большую вводную часть. Наиболее важной вводной информацией являются моменты времени первой и последней карт ионосферы, а также временной интервал между соседними. На сегодняшний день карты состояния ионосферы публикуются с двухчасовым интервалом. В каждом файле записаны шаг по долготе и шаг по широте, с которыми публикуются данные для дискретных точек слоя ионосферы. Как уже говорилось выше, в настоящее время публикуются карты с шагом пять градусов по долготе и два с половиной градуса по широте. Еще одним важным параметром является показатель степени. Значения электронного содержания приведены в файлах в более удобном для чтения виде, поэтому их следует умножить на 10 в указанной степени для получения ПЭС. В настоящее время публикуемые значения ПЭС завышены в 10 раз, поэтому умножать их следует на 10^{-1} . Далее следуют сами карты со значениями ПЭС, после чего следуют карты со значениями среднеквадратического отклонения для каждого значения ПЭС.

Замечание. Формула (263) предполагает вычисление полного электронного содержания по коэффициентам разложения в те моменты времени, на которые предоставлены коэффициенты. Для определения полного электронного содержания в произвольный момент времени t ($T_i < t < T_{i+1}$, где T_i и T_{i+1} - соседние моменты времени, для которых предоставлены коэффициенты сферического разложения) необходимо вычислить ПЭС по коэффициентам в моменты времени T_i и T_{i+1} и проинтерполировать:

$$E(t, \beta, s) = E(T_i, \beta, s) \frac{T_{i+1} - t}{T_{i+1} - T_i} + E(T_{i+1}, \beta, s) \frac{t - T_i}{T_{i+1} - T_i}. \quad (267)$$

Как уже отмечалось, на сегодняшний день интервал $T_{i+1} - T_i$, с которым предлагаются коэффициенты разложения, составляет два часа.

7.2.3 Вычисление ПЭС в дискретной точке

Для того, чтобы посчитать полное электронное содержание в дискретной точке с координатами (φ, λ) модельного слоя ионосферы, необходимо получить соответствующие этой точке β и s из (263). Сначала вычисляется долгота положения Солнца по формуле:

$$\lambda_0 = \pi - UT \cdot \pi / 12, \quad (268)$$

где UT - Всемирное Время, вычисленное в часах. Тогда величины β и s вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin \frac{\eta_3}{R}, \\ s &= \lambda + UT \cdot \pi / 12 - \pi, \end{aligned} \quad (269)$$

где R – расстояние между точкой и условным центром Земли.

Если в файле с коэффициентами указано, что ПЭС вычисляется в геомагнитной системе координат (центр геомагнитной системы координат совпадает с условным центром земли O , третья координатная ось проходит через геомагнитные полюсы, координаты которых содержатся в файле), то следует перейти в геомагнитную систему координат по формулам:

$$\begin{aligned} z_1 &= R \cos \lambda \cos \varphi \cos \psi' \cos \theta' + R \sin \lambda \cos \varphi \sin \psi' \cos \theta' - R \sin \varphi \sin \theta', \\ z_2 &= -R \cos \lambda \cos \varphi \sin \psi' + R \sin \lambda \cos \varphi \cos \psi', \\ z_3 &= R \cos \lambda \cos \varphi \cos \psi' \sin \theta' + R \sin \lambda \cos \varphi \sin \psi' \sin \theta' + R \sin \varphi \cos \theta', \end{aligned} \quad (270)$$

где z_1, z_2, z_3 – координаты точки в геомагнитной системе координат. Углы перехода ψ' и θ' от гринвичской системы координат к геомагнитной вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi' &= \pi + \psi + UT \cdot \pi / 12, \\ \theta' &= \pi / 2 - \theta, \end{aligned} \quad (271)$$

где ψ и θ – соответственно, долгота и широта геомагнитного полюса, которые передаются в файлах с коэффициентами. После этого вычисляются геомагнитные широта β и долгота λ^{geom} :

$$\begin{aligned} \beta &= sign(z_3) \arccos \left(\frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{R} \right), \\ \lambda^{geom} &= \arctan \frac{z_2}{z_1} + \frac{\pi}{2} - sign(z_1) \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (272)$$

Затем по этим же формулам вычисляется геомагнитная долгота λ_0^{geom} точки с геоцентрической широтой $\varphi_0 = 0$ и долготой солнца λ_0 . Тогда:

$$s = \lambda^{geom} - \lambda_0^{geom}. \quad (273)$$

Затем по формулам (263 - 266) вычисляется полное электронное содержание для точки модельного слоя ионосферы с координатами (β, s) . Поскольку сам CODE вычисляет ПЭС, используя эту же методику, полученные значения электронного содержания совпадают со значениями ПЭС, посчитанными CODE и представленными в файлах формата IONEX.

7.2.4 Вычисление наклонного ПЭС

Полное электронное содержание, вычисленное описанным способом, характеризует количество свободных электронов в вертикальной перпендикулярной поверхности Земли "трубке". Однако, когда спутник находится не в зените, сигнал, регистрируемый приемоиндикатором, проходит через модельный слой ионосферы не под прямым углом. Следовательно, для вычисления ионосферной составляющей погрешности спутниковых измерений необходимо по полученным значениям вертикального ПЭС вычислить наклонное значение ПЭС для спутникового сигнала.

Переход от вертикального ПЭС к наклонному в общем виде записывается в виде следующей формулы:

$$E = F(z)E_V, \quad (274)$$

где $F(z)$ – функция перехода, аргументом которой является угол z , между вертикалью и линией спутник-приемник. Существует несколько различных используемых видов функции $F(z)$. Чаще всего используется следующая переходная функция:

$$F(z) = \frac{1}{\cos z'}, \quad (275)$$

где

$$\sin z' = \frac{R}{R_0 + H} \sin z. \quad (276)$$

Здесь R – расстояние от центра Земли до приемоиндикатора, $R_0 = 6371$ км – средний радиус Земли, H – высота над поверхностью Земли, над которой находится моделируемый слой ионосферы. Как уже отмечалось выше, значение высоты содержится в файлах вводной части перед каждым набором коэффициентов.

Пусть (φ, λ) – координаты приемоиндикатора, через (φ', λ') обозначим координаты точки I пересечения линии приемник-спутник с модельным слоем ионосферы. Тогда z' – угол между нормалью к поверхностью Земли, проходящей через точку I , и линией приемник-спутник.

Стоит подчеркнуть, что для того, чтобы посчитать наклонное ПЭС на пути прохождения спутникового сигнала по формуле (274), необходимо использовать вертикальное ПЭС E_V , вычисленное в точке I .

После того, как вычислено значение полного электронного содержания на пути следования радиосигнала, по формуле (262) можно получить оценку ионосферной погрешности. Легко посчитать, например, что для сигнала частоты f_1 при электронном содержании в 1 TECU погрешность составляет примерно 16 см, для сигнала частоты f_2 – около 23 см.

7.3 Моделирование ионосферы при помощи измерений двухчастотного приемника

Возможность оценить ионосферную погрешность и полное электронное содержание на пути следования радиосигнала обусловлена тем, что погрешность зависит от несущей частоты сигнала и различна для измерений на частотах f_1 и f_2 . Теоретически из формулы (262) следует, что это можно сделать как по фазовым, так и по кодовым измерениям.

Опишем кратко, что из себя представляют кодовые и фазовые измерения. Сразу отметим, что оценка ионосферной погрешности, вычисленная по сферическим коэффициентам, будет использоваться для определения систематики, порожденной известной целочисленной неопределенностью фазовых измерений.

7.3.1 Модель кодовых измерений

Кодовым измерением называется измеренное время прохождения спутникового сигнала. Учитывая в общем виде все возможные погрешности и домножая сигнал на скорость света c , выразим кодовые измерения в метрах и запишем в следующем виде [20]:

$$Z_\rho = c \cdot t_{tr} = \rho + c(\Delta\tau - \Delta T) + \Delta\rho_{ion} + \Delta\rho_{trop} + \Delta\rho_{sat} + \Delta\rho_{rcv} + \Delta\rho_{mp} + \Delta\rho^s. \quad (277)$$

Здесь t_{tr} – время прохождения спутникового сигнала, ρ – истинное значение расстояния между приемником и спутником, которое иногда называют полезным сигналом измерения, $\Delta\tau$ – погрешность часов приемника, ΔT – погрешность часов спутника,

$\Delta\rho_{ion}$ и $\Delta\rho_{trop}$ – погрешности измерения, вызванные, соответственно, прохождением сигнала через ионосферу и тропосферу, $\Delta\rho_{sat}$ и $\Delta\rho_{rcv}$ – инструментальные погрешности аппаратуры, соответственно, спутника и приемника, $\Delta\rho_{mp}$ – ошибка многолучевости, $\Delta\rho^s$ – остаточная шумовая составляющая погрешности.

Когда спутниковые измерения проводятся посредством двухчастотного приемника, ошибка прохождения через слой тропосферы для сигналов обеих частот будет одинаковой, поскольку тропосферная ошибка зависит только от угла возвышения спутника и атмосферных параметров. Поэтому, вычитая измерение одной частоты из измерения другой, получим следующее выражение:

$$Z_\rho^1 - Z_\rho^2 = \Delta\rho_{ion}^1 - \Delta\rho_{ion}^2 + \Delta\rho, \quad (278)$$

где через $\Delta\rho$ обозначена остаточная погрешность, включающая погрешность многолучевости, инструментальные погрешности аппаратуры и шумовую составляющую. Подставим формулу (262) в (278):

$$Z_\rho^1 - Z_\rho^2 = \frac{40.3 \cdot 10^{16}}{f_1^2} E - \frac{40.3 \cdot 10^{16}}{f_2^2} E + \Delta\rho. \quad (279)$$

Из этого выражения легко определяется наклонное ПЭС на пути прохождения радиосигнала:

$$E = \frac{f_1^2 f_2^2}{40.3 \cdot 10^{16} (f_2^2 - f_1^2)} (Z_\rho^1 - Z_\rho^2) + \Delta\rho', \quad (280)$$

где через $\Delta\rho'$ обозначена преобразованная остаточная ошибка. Отсюда по приведенным выше формулам можно определить вертикальное полное электронное содержание в точке I . Недостатком такого метода является большая шумовая составляющая $\Delta\rho^s$ кодовых измерений, из-за чего вычисленное наклонное полное электронное содержание оказывается сильно зашумленным. Кроме того, кодовым измерениям присущи сравнительно большие погрешности аппаратуры $\Delta\rho_{sat}$ и $\Delta\rho_{rcv}$, ввиду чего вычисленное значение ПЭС может быть несколько смещено относительно истинного. Поэтому рекомендуется использовать фазовые измерения.

7.3.2 Модель фазовых измерений

Фазовым измерением называется измеренное смещение фазы спутникового сигнала. Запишем уравнение фазовых измерений в следующем виде [20]:

$$\begin{aligned} Z_\varphi &= \frac{\rho}{\lambda} + f \left(1 - \frac{\dot{\rho}}{c}\right) \Delta\tau - f\Delta T + N + \frac{a^{sat}}{c} \rho + \Delta\varphi_{ion} + \\ &+ \Delta\varphi_{trop} + \Delta\varphi_{sat} + \Delta\varphi_{rcv} + \Delta\varphi_{mp} + \Delta\varphi^s. \end{aligned} \quad (281)$$

Здесь λ – длина волны спутникового сигнала, N – целочисленная неопределенность фазовых измерений, a^{sat} – параметр, характеризующий влияние сдвига опорной частоты f на ошибки фазовых измерений, $\Delta\varphi_{ion}$ и $\Delta\varphi_{trop}$ – погрешности измерения, вызванные, соответственно, прохождением сигнала через ионосферу и тропосферу, $\Delta\varphi_{sat}$ и $\Delta\varphi_{rcv}$ – инструментальные погрешности аппаратуры, соответственно, спутника и приемника, $\Delta\varphi^s$ – остаточная шумовая составляющая погрешности. Величину ρ/λ принято называть полезным сигналом.

Как и при обработке кодовых измерений вычтем фазовое измерение одной частоты из фазового измерения другой, предварительно умножив каждое уравнение на соответствующую длину волны λ :

$$\lambda_1 Z_\varphi^1 - \lambda_2 Z_\varphi^2 = \Delta\varphi_{ion}^1 - \Delta\varphi_{ion}^2 + \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 + \Delta\varphi, \quad (282)$$

где через $\Delta\varphi$ обозначена общая остаточная погрешность. Аналогично, подставляя (262) в (282), имеем:

$$\lambda_1 Z_\varphi^1 - \lambda_2 Z_\varphi^2 = -\frac{40.3 \cdot 10^{16}}{f_1^2} E + \frac{40.3 \cdot 10^{16}}{f_2^2} E + \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 + \Delta\varphi, \quad (283)$$

откуда получаем выражение для наклонного ПЭС:

$$E = \frac{f_1^2 f_2^2}{40.3 \cdot 10^{16} (f_1^2 - f_2^2)} (\lambda_1 Z_\varphi^1 - \lambda_2 Z_\varphi^2) - B + \Delta\varphi', \quad (284)$$

где

$$B = \frac{f_1^2 f_2^2}{40.3 \cdot 10^{16} (f_1^2 - f_2^2)} (\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2), \quad (285)$$

а через $\Delta\varphi'$ обозначена преобразованная остаточная ошибка. Величина B является постоянной неизвестной и вызвана целочисленной неопределенностью фазовых измерений, что делает невозможным оценить абсолютную величину ионосферной погрешности, используя только фазовые измерения.

Замечание. Как уже было сказано выше, на практике для устранения ионосферной погрешности без ее оценки обычно используют вместо фазовых измерений Z_φ^1 и Z_φ^2 их комбинации, которые называются ионосфера-свободными. Например, фазовому измерению Z_φ^1 соответствует следующая комбинация:

$$\frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} Z_\varphi^1 - \frac{f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2} Z_\varphi^2. \quad (286)$$

Данная комбинация имеет тот же полезный сигнал, что и фазовое измерение Z_φ^1 , но не содержит ионосферной погрешности. При необходимости вместо фазового измерения Z_φ^2 можно также использовать аналогичную ионосфера-свободную комбинацию.

7.3.3 Коррекция сбоев фазы

Для фазовых измерений от каждого конкретного спутника величина смещения B остается постоянной на протяжении всего сеанса измерений только в том случае, если не было скачков фазы и потери захвата навигационного спутника. В случае потери захвата спутника, до и после потери захвата величина B будет разной, поэтому оценивать ее нужно отдельно на каждом интервале непрерывности поступления сигнала.

При наличии скачков фазы сигнала, величина смещения B будет кусочно-постоянной (постоянной величиной до сбоя фазы и постоянной величиной после сбоя), что говорит о необходимости отслеживания всех случаев сбоя фазы, которое предполагается осуществлять следующим образом. Величина $\lambda_j Z_\varphi^j(t_{i+1}) - \lambda_j Z_\varphi^j(t_i)$, где t_i и t_{i+1} – соседние моменты времени спутниковых измерений, представляет собой приращение расстояния объект-спутник. Тогда в отсутствии сбоя фазы достаточно малой является величина:

$$\delta_j = |\lambda_j Z_\varphi^j(t_{i+1}) - \lambda_j Z_\varphi^j(t_i) - \dot{\rho}(t_{i+1} - t_i)|, \quad j = 1, 2,$$

где производная от истинного расстояния объект-спутник $\dot{\rho}$ называется радиальной скоростью. Ее следует вычислять по априорно известным координатам навигационного спутника и приемника, которые определяются стандартными методами, не учитывающими влияние ионосферы. Уровень величины δ_j определяется шумовыми характеристиками фазовых измерений и обычно не превышает 1 см.

Замечание. Можно не рассчитывать величину $\dot{\rho}$ стандартными методами, а использовать доплеровские измерения смещения опорной частоты, для которых радиальная скорость $\dot{\rho}$ является полезным сигналом. Однако, опыт показал, что ввиду высокого уровня шума доплеровских измерений не всегда удается правильно установить наличие или отсутствие сбоя фазы. Поэтому рекомендуется вычислять значение радиальной скорости по априорным координатам приемника и спутника.

В случае, если на одной из опорных частот произошел скачок фазы, соответствующая величина $|\delta_j|$ станет значительно больше. Таким образом, условием того, что произошел скачок фазы служит выполнение неравенства:

$$|\delta_j| > \delta_0, \tag{287}$$

где $\delta_0 < \frac{\lambda_1}{2}$ является некоторой пороговой величиной. В этом случае, величина смещения B изменяется, и ее следует подкорректировать по формуле:

$$B \longrightarrow B \pm \delta_j \frac{f_1^2 f_2^2}{40.3 \cdot 10^{16} (f_1^2 - f_2^2)}. \tag{288}$$

7.4 Содержание комбинированного подхода

7.4.1 Оценка величины B

Для оценки величины B предлагается использовать оценки полного электронного содержания, рассчитанные по коэффициентам разложения, которые предоставляет европейский центр CODE. Как уже говорилось выше, CODE одновременно с файлами, содержащими коэффициенты разложения, публикует в сети Internet файлы с уже вычисленными значениями ПЭС и их среднеквадратическими отклонениями. Величины среднеквадратических отклонений не превосходят 0.4-0.5 TECU. Это соответствует 7-10 см ионосферной погрешности, в зависимости от частоты передаваемого сигнала, что говорит о достаточно высоком уровне точности, на котором коэффициенты позволяют вычислить значение ПЭС в любой точке модельного слоя ионосферы.

Пусть интервал видимости некоторого спутника включает n моментов времени, на которые имеются коэффициенты разложения CODE (поскольку интервал видимости спутника обычно не превышает 4-5 часов, величина $n \leq 3$). Пусть на этом интервале не было потери захвата спутника и фазовые измерения не содержат скачков фазы. Тогда разность B_i между величиной ПЭС, вычисленной по коэффициентам разложения и величиной ПЭС, вычисленной по фазовым измерениям двухчастотного приемника без учета величины смещения ($B = 0$), и будет оценкой величины B . Окончательно в качестве оценки B следует брать среднее арифметическое по всем величинам B_i :

$$\tilde{B} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i \quad (289)$$

Если в какой-то момент времени произошел сбой фазы, то все величины B_i после этого момента следует корректировать по формуле (288).

Обычно разность между получившимися реализациями погрешностей для различных спутников не превышает 15 см. Поскольку ионосферная погрешность, вычисленная только по коэффициентам разложения, определяется при помощи интерполяции, она является собой лишь осредненную реализацию погрешности, но не содержит высокочастотной составляющей. Таким образом, данные центра CODE удобно использовать для коррекции погрешности, вычисленной по фазовым измерениям, а фазовые измерения использовать в качестве основной информации.

7.4.2 Сравнение ионосферных погрешностей измерений двух близко расположенных приемников

Фазовые измерения потенциально обладают существенно более высокой точностью, чем кодовые. У фазовых измерений значительно ниже уровень шума и значительно меньше инструментальные погрешности аппаратуры, что говорит о том, что они предпочтительнее для оценки ионосферной погрешности, по сравнению с кодовыми измерениями. Чтобы убедиться в этом, был проведен следующий эксперимент. В течение часа проводились статические спутниковые измерения двумя приемниками, антенны которых находились друг от друга на расстоянии нескольких метров. У приемников, расположенных в такой непосредственной близости, ионосферные погрешности теоретически должны совпадать. Съемочные работы проводились в Подмосковье, для получения измерений большей точности было выбрано место на возышенности, вдали от жилых и лесных массивов, вдали от линий электропередач. Съемки проводились в зимнее время года, в светлое время суток.

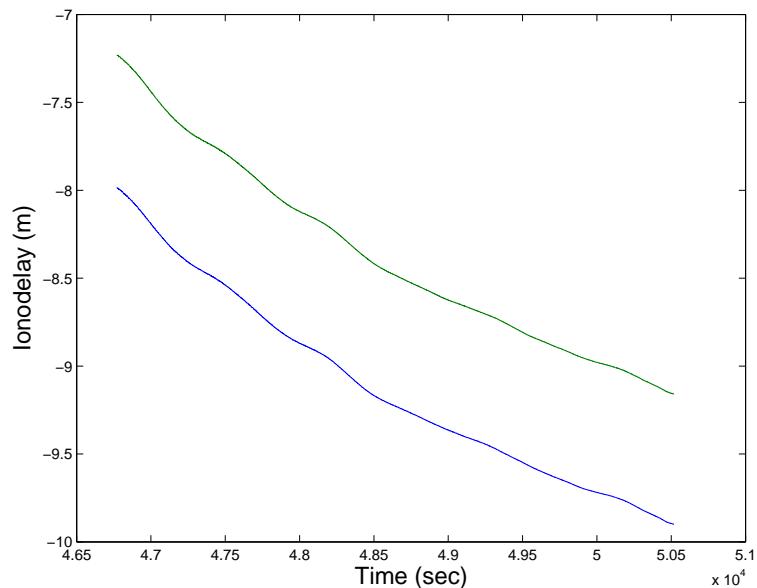


Рис. 23: Ионосферные погрешности неподвижных приемников.

Для каждого спутника по фазовым измерениям были вычислены с помощью формул (284) и (262) оценки ионосферных погрешностей без учета их смещения B . Для каждого спутника вычисленные ионосферные погрешности были смещены на неиз-

вестные постоянные (Рис.23), но изменение их разности не превосходило 3 см, что и подтвердило тот факт, что использование фазовых измерений весьма эффективно для оценки ионосферной ошибки.

8 Приложение

В приложении приведем стандартные алгоритмы вычисления координат навигационных спутников, которые рекомендованы контрольными документами спутниковых навигационных систем.

8.1 Вычисление положения спутника системы GPS

Эфемеридная информация спутниковой системы GPS представляет набор оскулирующих элементов, характеризующих положение орбиты спутника и ее вариации. По этим параметрам сначала определяется положение спутника в орбитальной системе координат, а затем в гринвичской. Эфемеридная информация представлена с дискретом 2 часа.

Согласно контрольному документу системы GPS, для определения координат и скоростей спутника необходимо использовать следующие эфемеридные данные: время эфемеридных данных t_{oe} , поправка к среднему движению Δn , средняя аномалия M_0 , эксцентриситет орбиты e , квадратный корень \sqrt{a} из большой полуоси a орбиты, поправки C_{rc} , C_{rs} радиуса r орбиты, поправки C_{ic} , C_{is} угла наклонения i орбиты, поправки C_{uc} , C_{us} углового положения спутника, долгота восходящего узла орбиты Ω_0 , аргумент перигея ω , наклонение орбиты i_0 , производная от долготы восходящего узла $\dot{\Omega}_0$, производная от угла наклонения орбиты \dot{i}_0 .

Приведем здесь краткое описание алгоритма без каких-либо комментариев. Процесс определения координат навигационного спутника в момент времени t начинается с вычисления средней аномалии:

$$M = M_0 + \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} + \Delta n \right) \cdot t^*,$$

где $t^* = t - t_{oe}$. Затем итерационно решается уравнение Кеплера и определяется эксцентрическая аномалия E :

$$E = M + e \sin E.$$

Через значение эксцентрической аномалии определяется значение истинной аномалии:

$$f = \arctan \left(\frac{\sqrt{(1-e^2) \sin E}}{\cos E - e} \right).$$

Тогда аргумент широты запишется:

$$\varphi = f + \omega.$$

Далее определяются поправки δu , δr , δi для коррекции аргументов широты φ , радиуса r и угла наклона орбиты i_0 :

$$\begin{aligned}\delta u &= C_{us} \sin 2\varphi + C_{uc} \cos 2\varphi, \\ \delta r &= C_{rs} \sin 2\varphi + C_{rc} \cos 2\varphi, \\ \delta i &= C_{is} \sin 2\varphi + C_{ic} \cos 2\varphi,\end{aligned}\tag{290}$$

после чего определяются скорректированные значения:

$$\begin{aligned}u &= \varphi + \delta u, \\ r &= a(1 - e \cos E) + \delta r, \\ i &= i_0 + \delta i + i_0 t^*.\end{aligned}\tag{291}$$

Затем вычисляются декартовы координаты ζ_1^0 и ζ_2^0 спутника в орбитальной системе координат $O\zeta$:

$$\zeta_1^0 = r \cos u, \quad \zeta_2^0 = r \sin u\tag{292}$$

и скорректированное значение долготы восходящего узла орбиты Ω :

$$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega}_0 - u)t^* - ut_{oe}.$$

После этого находятся искомые декартовы координаты спутника в гринвичской системе координат $O\eta$:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \zeta_1^0 \cos \Omega - \zeta_2^0 \cos i \sin \Omega, \\ \eta_2 &= \zeta_1^0 \sin \Omega + \zeta_2^0 \cos i \cos \Omega, \\ \eta_3 &= \zeta_2^0 \sin i.\end{aligned}\tag{293}$$

Далее определяются три относительные компоненты скорости навигационного спутника в гринвичской системе координат. Данная процедура не была предусмотрена в контрольном документе системы GPS, поэтому ниже приводится алгоритм,

предложенный лабораторией управления и навигации МГУ. Прежде всего определяются модули радиальной v_r и трансверсальной v_u составляющих скорости спутника:

$$v_r = a \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} + \Delta n \right) \frac{e \sin E}{1 - e \cos E} + \dot{\delta r}, \quad v_u = r(\dot{f} + \dot{\delta u}). \quad (294)$$

Через них вычисляются сначала компоненты абсолютной скорости в орбитальной системе координат:

$$\begin{aligned} v_1^0 &= v_r \cos u - v_u \sin u, \\ v_2^0 &= v_r \sin u + v_u \cos u, \\ v_3^0 &= r \sin f(i_0 + \dot{\delta i}), \end{aligned} \quad (295)$$

затем в гринвичской:

$$\begin{aligned} v_{\eta_1} &= v_1^0 \cos \Omega - v_2^0 \cos i \sin \Omega + v_3^0 \sin i \sin \Omega, \\ v_{\eta_2} &= v_1^0 \sin \Omega + v_2^0 \cos i \cos \Omega - v_3^0 \sin i \cos \Omega, \\ v_{\eta_3} &= v_2^0 \sin i + v_3^0 \cos i. \end{aligned} \quad (296)$$

После этого находятся искомые компоненты относительной скорости спутника в гринвичской системе координат:

$$\begin{aligned} V_{\eta_1} &= v_{\eta_1} + (u - \dot{\Omega}_0)\eta_2, \\ V_{\eta_2} &= v_{\eta_2} - (u - \dot{\Omega}_0)\eta_1, \\ V_{\eta_3} &= v_{\eta_3}. \end{aligned} \quad (297)$$

8.2 Вычисление положения спутника системы ГЛОНАСС

В системе ГЛОНАСС в качестве эфемеридной информации передаются для каждого видимого навигационного спутника его координаты, компоненты вектора относительной скорости и оценки внешних возмущений, действующих на спутник. Указанные данные формируются с частотой 30 минут. Координаты и скорости спутника в произвольный момент времени определяются решением системы уравнений движения спутника (218), когда в качестве начальных условий берутся предоставленные эфемериды. Для решения системы уравнений рекомендуется классический метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

8.3 Вычисление положения спутника в постобработке

Если спутниковые измерения подвергаются постобработке, обычно для повышения точности определения координат спутника используют два набора эфемеридных данных, относящихся к моментам времени t_0 и t_1 . Как уже говорилось выше, для системы GPS $t_1 - t_0 = 2\text{ч.}$, для системы ГЛОНАСС $t_1 - t_0 = 30\text{мин.}$ Тогда для любого момента времени t из интервала $[t_0, t_1]$ координаты и скорости навигационного спутника определяются по формуле:

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \eta^0(t) \cdot \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} + \eta^1(t) \cdot \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \\ V_\eta(t) &= V_\eta^0(t) \cdot \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} + V_\eta^1(t) \cdot \frac{t - t_0}{t_1 - t_0},\end{aligned}\quad (298)$$

где (η^0, V_η^0) и (η^1, V_η^1) , координаты и скорости навигационного спутника, полученные с помощью эфемеридных данных, предоставленных, соответственно, на моменты времени t_0 и t_1 .

Заключение к главе III

Глава III содержит описание методики моделирования частных задач в спутниковой навигации.

В Разделе 6 приведено решение задачи уточнения траекторных параметров навигационных спутников систем GPS и ГЛОНАСС при помощи высокоточной позиционной информации, предоставляемой международным центром IGS. Задача поставлена как задача сглаживания. Показано, что координаты спутника в произвольный момент времени определяются на уровне точности данных IGS (2-3см).

Построен алгоритм определения кеплеровых элементов орбиты спутника как функций времени на основе модифицированных соотношений небесной механики. Построены оценки внешних возмущений, действующих на спутник, включающие в себя гравитационное влияние Луны и Солнца, аномальную часть гравитационного поля Земли, солнечное давление и др.

В разделе 7 рассмотрена и решена задача моделирования ионосферной погрешности. Предложен новый комбинированный алгоритм, сочетающий в себе использование данных центра CODE и первичных двухчастотных фазовых спутниковых измерений. Тестирование алгоритма проведено на экспериментальных данных.

Разработанное программно-математическое обеспечение в настоящее время внедряется в аппаратные имитаторы спутниковых радиосигналов.

Заключение

В диссертации были поставлены и решены следующие задачи.

1. Задача согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков на произвольной траектории движения объекта, включающая в себя решение ряда подзадач, обусловленных конкретными навигационными приложениями. К их числу относятся:
 - задача моделирования показаний инерциальных датчиков в различных опорных системах координат (инерциальной, географической, приборной), традиционно используемых в инерциальной навигации;
 - задача моделирования показаний интегрирующих инерциальных датчиков с целью сравнительного анализа многошаговых численных методов интегрирования модельных уравнений движения;
 - задача согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков и траекторных параметров двух БИНС, расположенных на одном объектеносителе;
 - задача моделирования показаний инерциальных датчиков и траекторных параметров объекта в областях высоких широт.
2. Задача тестирования моделей уравнений ошибок инерциальной навигации для анализа возможности их использования в приложениях.
3. Задача имитации показаний инерциальных датчиков при калибровке. Разработанная математическая модель учитывает важные для приложений факторы: угловые ошибки расположения БИНС относительно калибровочного стенда и внутреннее разнесение друг относительно друга чувствительных масс ньютоно-метров. Указанная задача востребована как для тестирования алгоритмов калибровки, так и для составления плана калибровочных экспериментов.
4. Задача разработки методики сравнительного анализа многошаговых методов определения ориентации объекта при наличии вибрации на этапе начальной выставки БИНС.
5. Задачи расширения функциональных возможностей аппаратных спутниковых имитаторов:

- задача определения параметров движения навигационных спутников с высокой точностью на базе позиционной информации центра IGS;
- задача моделирования ионосферной погрешности спутниковых сигналов на основе данных европейского центра CODE и двухчастотных фазовых измерений.

Было осуществлено тщательное тестирование всех перечисленных выше задач, в том числе с привлечением экспериментальных данных. Соответствующие численные алгоритмы доведены до практического применения.

Список литературы

- [1] Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. М.: МАКС Пресс, 2012.
- [2] Алексова Е.Ю. Тестирование численного решения уравнений Пуассона. Гироскопия и навигация. Выпуск 4 (59) 2007.
- [3] Алешин В.С., Веремеенко К.К., Черноморский А.И. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии. М.: Физматлит. 2006. 424 с.
- [4] Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела. М.: МФТИ, 2000. 64 с.
- [5] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. (Автономные системы). Москва, Изд-во Наука, 1966.
- [6] Афраймович Э.Л., Косорогов Е.А., Лесюта О. С., Ушаков И. И. Спектр перемещающихся ионосферных возмущений по данным глобальной сети GPS. Известия вузов. Радиофизика Том XLIV, выпуск 10, 2001.
- [7] Бабич О.А. Обработка информации в навигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991.
- [8] Бабиченко А.В. Метод построения алгоритмов обработки информации бесплatformенной инерциальной навигационной системы. // Научно-методические материалы по системам навигации и управления летательными аппаратами / Под ред. В.П.Харькова. -М.: ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, 1995.
- [9] Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. М.: Наука. 1965.
- [10] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. 3-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2009.
- [11] Богданов О.Н. Уточнение траекторных параметров навигационных спутников систем GPS и ГЛОНАСС при помощи данных сервиса IGS // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. 2009. Выпуск 3. С. 53-56.
- [12] Богданов О.Н., Вавилова Н.Б., Голован А.А., Демидов О.В. Особенности совместной обработки первичных измерений спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС и GPS в геофизических приложениях // Современные проблемы математики и механики. 2009. Том 1. С. 180-199.

- [13] Богданов О.Н., Голован А.А. Об имитации идеальных показаний датчиков БИНС при произвольном движении объекта // Труды МИЭА. 2013. Выпуск 7. С. 30-35.
- [14] Богданов О.Н., Коростелева С.С., Кухтевич С.Е., Фомичев А.В. О выборе алгоритма и тактовой частоты расчета матрицы ориентации для бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Труды МИЭА. 2010. Выпуск 2. С.60-67.
- [15] Богданов О.Н., Фомичев А.В. Алгоритм имитации показаний инерциальных датчиков по траекторным данным. // Труды МИЭА. 2013. Выпуск 6. С.46-59.
- [16] Боданский Е.Д., Фурман В.Д. О погрешностях численного интегрирования кинематических уравнений Пуассона // Космические исследования. 1970. Т.8. Вып.6. С. 944-948.
- [17] Браммер А.Е., Зиффинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси . -М.: Наука. 1982. -198с.
- [18] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. -М.: Наука, 1992.
- [19] Бромберг П.В. Теория инерциальных систем навигации. Москва, Изд-во Наука, 1979.
- [20] Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А., Трубников С.А. Математические модели, методы и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. Москва, Изд-во МГУ, 2009.
- [21] Вавилова Н.Б., Голован А.А., Сазонов И.Ю. Калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем в сборе при помощи грубых одностепенных стендов. // Труды XVII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург: ГНЦ ЦНИИ "Электроприбор", 2010.
- [22] Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. Редакция 5.0; М.: КНИЦ ВКС, 2002.
- [23] ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. Под ред. Перова А.И., Харисона В.Н. М.: Радиотехника, 2010.
- [24] Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. Издание 3-е. Издательство Московского университета, 2011.

- [25] Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. Издание 2-е. Издательство Московского университета, 2012.
- [26] Дмитриев С.П. Высокоточная морская навигация. Спб.: Судостроение, 1991.
- [27] Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
- [28] Емельянцев Г.И., Каракашев В.А. Исследование ошибок связанный инерциальной навигационной системы при случайных возмущениях // Изв. вузов СССР "Приборостроение". -1974, выпуск 1.
- [29] Ермаков В.С. и др. Калибровка бесплатформенных инерциальных систем навигации и ориентации. // Вестник Перм. гос. техн. ун-та Аэрокосмическая техника, 2004. т.18, с.25-30.
- [30] Жбанов Ю.К. Инерциальная навигация на эллипсоидальной Земле.// Проблемы механики. М.: Физматлит, 2003.
- [31] Иванов В.Ф. Повышение точности навигационных измерений одночастотной аппаратуры потребителей СРНС ГЛОНАСС/GPS за счет применения оперативных данных о состоянии ионосферы. Навигация и управление движением. Материалы VIII конференции молодых ученых, 2007.
- [32] Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. -М.: Наука, 1976.
- [33] Калман Р.Е., Фарб П., Арбид М. Очерки по математической теории систем. -М.: Мир, 1977.
- [34] Каршаков Е.В., Тихомиров В.В., Яковлев В.А. Отработка алгоритмов бесплатформенной инерциальной навигационной системы с частичным использованием чувствительных элементов. // Актуальные проблемы авиационных и авиакосмических систем, 2 (10), 2000, с. 21-25 (p. 26-30 in English).
- [35] Климов Д.М. Инерциальная навигация на море. -М.: Наука, 1984.
- [36] Козлов А.В., Сазонов И.Ю. Калибровка инерциальных навигационных систем на грубых стендах с учетом разнесения чувствительных масс ньютонометров. // Вестник МГТУГА, Москва, 2012.

- [37] Козлов А.В., Смоллер Ю.Л., Юрист С.Ш., Богданов О.Н., Голован А.А. Результаты испытаний на яхте бескарданного гравиметра GT-X. // Труды XIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", Санкт-Петербург, 2012, стр. 172-174.
- [38] Конин В.В., Конина Л.А. Спутниковые системы навигации. Учебное пособие. Киев: НАУ, 2008.
- [39] Кузовков Н.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. М.: Машиностроение. 1982. 216 с.
- [40] Мак-Клур К.Л. Теория инерциальной навигации. Москва, Изд-во Наука, 1964.
- [41] Матвеев В.В., Распопов В.Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем: под ред. В.Я. Распопова. Ц Спб.: ГНЦ ЦНИИ "Электроприбор", 2009. 300 с.
- [42] Микрин Е.А., Михайлов М.В., Рожков С.Н., Семчнов А.С., Краснопольский И.А. Метод повышения точности и "времени жизни" эфемерид ГЛОНАСС и GPS. Материалы XIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", Санкт-Петербург, 2012.
- [43] Панов А.П. Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев.: Наукова думка. 1995. 279 с.
- [44] Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. Москва, Изд-во МГУ, 1982.
- [45] Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Теория навигационных систем. (Учебное пособие). Москва, Изд-во МГУ, 1980.
- [46] Развитие механики гирокопических и инерциальных систем. Сборник. Москва, Изд-во Наука, 1973.
- [47] Рой Ю.А., Садовников М.А., Шаргородский В.Д. Сеть лазерной дальнометрии – основа улучшения геодезического и эфемеридно-временного обеспечения ГЛОНАСС. // Вестник ГЛОНАСС, 2012, выпуск 10. С. 50-54.
- [48] Соловьев Ю.А. Системы спутниковой навигации. -М.: Эко-Трендз, 2000.

- [49] Степанов О.А., Пешехонов В.Г. Интегрированные инерциально-спутниковые системы навигации. СПб.: ГНЦ ЦНИИ "Электроприбор", 2001.
- [50] Терешков В.М.Средства полунаатурного моделирования инерциальных навигационных систем и отладка их алгоритмов // Автоматизация в промышленности. 2011. - выпуск 1. - с. 40 - 44.
- [51] Харин Е.Г., Копелович В.А., Копылов И.А., Клабуков Е.В., Якушев А.Ф., Якушев В.А. Летные испытания инерциально-спутниковых навигационных систем с применением современных информационных технологий. Материалы XVI Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2009.
- [52] Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. Пер. с англ. / Под ред. А.М.Трахтмана - М.: Сов. радио, 1980. 224 с.
- [53] Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит. 2006. 512 с.
- [54] Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич И.В. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / Под ред. Шебшаевича В.С. Ч 2-е изд., перераб. и доп. Ч М.: Радио и связь, 1993.
- [55] Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. -М.: Наука, 1965.
- [56] Bogdanov O.N., Cepc A. Precise orbit determination for GPS and GLONASS satellites on the basis of IGS data. In: Proceedings of 5th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. 2011. P. 915-919.
- [57] Bogdanov O.N., Golovan A.A. Analysis of Kepler's elements of the navigation satellite's orbits on the base of precise IGS position information. In: Proceedings of 6th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. 2013. P. 271-275.
- [58] Bogdanov O.N., Golovan A.A. Simulation of measurements of strapdown inertial navigation system sensors. In: Proceedings of XX International Conference on Integrated Navigation Systems. Saint Petersburg, Concern "CSRI Elektropribor", 2013. P. 138-141.

- [59] Bogdanov O.N., Fomichev A.V. Simulation of angular velocity sensor measurements using telemetry data on the motion of an object. Moscow University Mechanics Bulletin. 2014. V. 69. no.3. P. 40-47.
- [60] Jay A. Farrell. Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors. McGraw-Hill Professional, 2008.
- [61] Faurre P. Navigation inertielle optimale et filtrage statistique. "Dunod Paris, 1971.
- [62] GPS Interface Control Document (ICD-GPS-870A), 2011.
- [63] Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Wasle E. GNSS – Global Navigation Satellite Systems. Springer Wien New York, 2008.
- [64] Kim J., Park J.G., Lee J.G., Lee G.I., Park C. GPS/INS Integration Using GPS Carrier Phase Measurements. Proceedings of the 9th World Congress of the IAIN, 1997.
- [65] A. Leick. GPS satellite surveying, 2nd edn. Wiley, New York Chichester Brisbane Toronto Singapore, 1995.
- [66] Lao-Sheng LIN. Remote sensing of ionosphere using GPS measurements. Presented at the 22nd Asian Conference on Remote Sensing, 5-9 November 2001, Singapore.
- [67] J.S. Lipman. Tradeoffs in the Implementation of Integrated GPS Inertial Systems. Proc. of the Instit. of Navigation GPS-92 Tech. Meeting. The Institute of Navigation, Alexandria, VA, 1992.
- [68] D.C. Moya, J.J. Elchinski. Evaluation of the World's Smallest Integrated Embedded GPS/INS, the H-764G. Proc. of the National Tech. Meeting of the Instit. of Navigation. The Institute of Navigation, Alexandria, VA, 1993.
- [69] H.Shengu et al. Current Status of Flight Evaluations of DGPS-INS Hybrid Navigation System of NAL. J. Nav. 47 (3), 1994, p.338–348.
- [70] Savage P. Strapdown analytics. Strapdown Associates, Inc. Maple Plain, Minnesota, 2010.
- [71] D.H. Titterton, J.L. Weston. Strapdown Inertial Navigation Technology, 2-nd Edition. Великобритания, MPG Books limited, Bodmin, 2004.

- [72] Yunchun Yang, Jay A. Farrell. Magnetometr and Differential Carrier Phase GPS-Aided INS for Advanced Vehicle Control. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 19, no. 2, pp. 269-282, 2003.