ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

ВАСИЛЬЕВА Екатерина Викторовна

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ УСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» на кафедре дифференциальных уравнений математико-механического факультета.

Официальные оппоненты:	Ананьевский Игорь Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)», заведующий лабораторией механики управляемых систем
	Морозов Альберт Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского», профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа
	Розов Николай Христович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», декан факультета педагогического образования
Ведущая организация:	ФГБУН «Математический институт имени В.А.Стеклова РАН»

Защита состоится «24» июня 2016 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО «МГУ им. М.В.Ломоносова» по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова. Ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «МГУ им. М.В.Ломоносова» по адресу: Москва Ломоносовский проспект, 27, сектор А, 8-й этаж и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi

Автореферат разослан “____” ___________ 2016 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 501.001.85,

на базе МГУ имени М.В.Ломоносова,

доктор физико-математических наук,

профессор В.В. Власов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена проблеме существования бесконечного числа устойчивых периодических решений в окрестности нетрансверсального гомоклинического решения периодической системы дифференциальных уравнений.

Рассматривается периодическая система дифференциальных уравнений, которая имеет гиперболическое периодическое решение и гомоклиническое (двоякоасимптотическое) к нему решение, то есть предполагается наличие решения, которое лежит в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразия периодического решения. Первоначально гомоклинические (двоякоасимптотические) решения появились в работах А.Пуанкаре[1] в связи с изучением задачи трех тел, он отметил, что картина поведения решений в окрестности такого решения очень сложна и установил, что такие решения являются одной из причин неинтегрируемости гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. Позднее исследованием гомоклинических решений занимался Г. Д. Биркгоф[2]. Известное уравнение Дуффинга или уравнение нелинейного осциллятора имеет гомоклинические решения. Гомоклинические точки имеются и у диффеоморфизмов Аносова[3]. Таким образом, окрестность гомоклинического решения периодической системы дифференциальных

[1] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды. Т.1,2. М.: Наука. 1971. 772 с.

[2] *Биркгоф Г. Д.* Динамические системы. М.: Гостехиздат. 1941. 406 с.

[3] *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях. / Труды матем. Института им. М.А. Стеклова.1967. Т.90. С.3-209.

уравнений, исследуется достаточно давно. Из работы С. Смейла[4] известно, что если устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально, то в окрестности гомоклинического решения существует бесконечно много периодических решений и все эти решения неустойчивы. Таким образом, появление устойчивых периодических решений в окрестности гомоклинического решения возможно только, если устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются нетрансверсально. Такие решения называются нетрансверсальными гомоклиническими решениями.

При исследовании окрестности гомоклинического решения различают однообходные и многообходные периодические решения. Решение называют s-обходным, если его траектория имеет s витков в окрестности цикла, образованного гомоклинической траекторией.

Ш.Ньюхаус[5,6], Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников[7,8] и ряд других авторов рассматривали системы дифференциальных уравнений с нетрансверсальными гомоклиническими решениями при специальных (впрочем, весьма естественных) условиях, наложенных на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий. Было установлено, что все однообходные периодические решения неустойчивы.

---

[4] *Смейл С.* Диффеоморфизмы со многими периодическими точками // Математика. Сб. переводов. 1967. Т.11, № 4. С.88-106.

[5] *Sh. Newhouse*. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1974. Vol.12. P.9- 18.

[6] *Sh. Newhouse.* On homoclinic point // Proc. of the American Math. Society.1976. Vol. 60, N 10. P.221-224.

[7] *Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I // Матем. сб. 1972. Т.88, № 4. С.475-492.

[8] *Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. II // Матем. сб. 1973. Т.90, № 1. С.139-156.

Б.Ф.Иванов[9] в 1979 году показал, что среди многообходных решений может появиться бесконечно много устойчивых решений. Однако, детальный анализ доказательств, показывает, что с ростом периодов один из характеристических показателей таких решений стремится к нулю.

В связи с вышеизложенными фактами появляется вопрос: может ли произвольная окрестность нетрансверсального гомоклинического решения при ином характере касания устойчивого и неустойчивого многообразий содержать бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Известно,[10] что если периодическая система дифференциальных уравнений имеет бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями, траектории которых располагаются в ограниченной части фазового пространства, то при достаточно малых (в смысле C^1) периодических возмущениях возмущенная система имеет сколь угодно много устойчивых периодических решений. Вопрос о сохранении устойчивых периодических решений при малых возмущениях часто возникает в проблемах механики. Примером тому может служить нелинейный осциллятор с периодической по времени восстанавливающей и вынуждающей силами. Движения такого осциллятора описываются уравнениями типа Дуффинга. Это уравнение при определенных условиях имеет бесконечно много периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

---

[9] *Иванов Б.Ф.* Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т.15, № 8. С.1409-1419.

[10] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1956. 494с.

В диссертации изучается окрестность нетрансверсального гомоклинического решения периодической системы на предмет наличия счетного множества однообходных устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями, при этом рассматривается принципиально иной характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, чем в указанных выше работах.

В 1977 году В. А. Плисс[11] привел пример двумерной периодической системы, имеющей в окрестности гомоклинического контура бесконечно много устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями, однако в этом примере существенно использовалось то обстоятельство, что периодические решения лежат в окрестности гомоклинического контура. Заметим, что окрестность гомоклинического решения более изучена, чем окрестность гомоклинического контура, поэтому рассмотренная в диссертационной работе задача является более сложной.

В работах, посвященных исследованию окрестности нетрансверсального гомоклинического решения системы дифференциальных уравнений, характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, определяется с помощью преобразования Пуанкаре[12,13]. Известно, что преобразование Пуанкаре периодической

---

[11] *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1977. 304 с.

[12] *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // ДАН СССР. 1986. Т.286, № 5. С.1049-1053.

[13] *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Доклады Академии наук. 1993. Т.330, № 2. С.144-147.

системы дифференциальных уравнений является диффеоморфизмом того же класса гладкости, что правые части системы по зависимой переменной.

Отметим, что исследования, связанные с изучением окрестности нетрансверсального гомоклинического решения, где характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий определяется упомянутыми условиями, продолжаются по настоящее время. Например, следует отметить работы Л. П. Шильникова, С. В. Гонченко, О.В. Стенькина.[14,15,16]

Заметим, что вышеупомянутые условия описывают далеко не все возможные случаи касания устойчивого и неустойчивого многообразия периодического решения системы, поэтому, при изменении характера касания этих многообразий появляются новые темы для исследования. В предлагаемой работе получены первые результаты в этом направлении. Таким образом, данная диссертационная работа открывает новые перспективные направления для дальнейших исследований.

Цель работы – показать, что существует класс систем, которые имеют в окрестности гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

---

[14] *Стенькин О.В., Шильников Л.П.* Гомоклинический Ω-взрыв и области гиперболичности // Матем. сб. 1998. Т.189, № 4. С.125-144.

[15] *Гонченко С.В., Стенькин О.В.,* Гомоклинический Ω-взрыв: и интервалы гиперболичности и их границы // Нелинейная динамика.2011. Т.7, № 1. С.3-24.

[16] *Гонченко В.С., Шильников Л.П.* О бифуркациях систем с гомоклинической петлей к седлу-фокусу с седловым индексом $\frac{1}{2}$ // Доклады Академии наук. 2007. Т.417, № 6. С.727-731.

Методы исследования. В диссертации использованы методы качественной теории динамических систем и обыкновенных дифференциальных уравнений, разработан новый метод исследования окрестности нетрасверсального гомоклинического решения периодической системы, основанный на изучении свойств касания устойчивого и неустойчивого многообразия.

Достоверность результатов. Основные результаты диссертационной работы получены с помощью строгих математических доказательств.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Указан класс двумерных систем, которые имеют в окрестности гомоклинической траектории бесконечно много однообходных устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

2. Показано, что для любого $r > 1$ существует класс C^r гладких по зависимой переменной двумерных систем, обладающих тем же свойством.

3. Существуют двумерные системы с бесконечно гладкой правой частью, имеющие бесконечное число однообходных устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

4. Указан класс многомерных систем, которые имеют в окрестности гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в качественной теории динамических систем, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также могут использоваться в специальных курсах для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по математическим специальностям.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- на Городском семинаре по дифференциальным уравнениям математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, 2005, 2012;

- на симпозиуме «Пуанкаре и проблемы нелинейной механики», Санкт-Петербург, 2004;

- на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной 103-летию со дня рождения И.Г. Петровского, Москва, 2004;

- на международном конгрессе «Нелинейный динамический анализ-2007», посвященном 150-летию со дня рождения акад. А. М. Ляпунова, Санкт-Петербург, 2007;

- на международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология», посвященной 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина, Москва, 2008;

- на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений Пекинского университета, Пекин, КНР, 2003;

- на семинаре по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под рук. проф. И.А. Асташовой, проф. А.В. Боровских, проф. Н.Х. Розова, проф. И. Н. Сергеева, Москва, 2013, 2014;

- на международной конференции «Dynamical Systems and Applications», Марибор, Словения, 2013;

- на семинаре МИАН им. В.А. Стеклова и МГУ им. М.В. Ломоносова «Динамические системы классической механики» под рук. акад. РАН В.В. Козлова, проф. С.В. Болотина и чл.-корр. РАН Д.В. Трещева, 2014;

- на семинаре Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского «Теория управления и динамика систем» под рук. акад. РАН Ф.Л. Черноусько, 2014;

- на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского под рук. проф. А.Д. Морозова, 2014.

- на семинаре «Спектральная теория дифференциальных операторов» под рук. акад. РАН В.А. Садовничего, 2015.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 печатных работах. Все работы выполнены без соавторов. Работы [1-11] входят в список изданий, рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа изложена на 140 страницах и состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы, включающего 40 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Рассматривается система уравнений вида

$$\frac{dz}{dt} = Z(t,z), \tag{1}$$

где z, Z – N-векторы, вектор Z непрерывен по (t,z) и r раз непрерывно дифференцируем по z, $1 \le r \le \infty$, кроме того, вектор-функция Z ω-периодична по t: $Z(t+\omega, z) = Z(t,z)$, $\omega > 0$.

Предполагается, что у системы (1) имеется *гиперболическое*

ω-периодическое решение $z = \bar{\varphi}(t)$. Это значит, что линейная ω-периодическая система

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial Z(t,\bar{\varphi}(t))}{\partial z} z$$

не имеет равных единице мультипликаторов.

Обозначим через $z(t,z^0)$ решение с начальными данными $t = 0, z = z^0$. Определим

$$W^s(0) = \left\{ z^0 \in \mathbb{R}^N : \lim_{t\to+\infty} \left\| z(t,z^0) - \bar{\varphi}(t) \right\| = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ z^0 \in \mathbb{R}^N : \lim_{t\to-\infty} \left\| z(t,z^0) - \bar{\varphi}(t) \right\| = 0 \right\},$$

тогда *устойчивое и неустойчивое многообразия решения* $\bar{\varphi}(t)$, $W^s(t), W^u(t)$ определяются как

$$W^s(t) = \left\{ z = z(t,z^0) : z^0 \in W^s(0) \right\},$$

$$W^u(t) = \left\{ z = z(t,z^0) : z^0 \in W^u(0) \right\}.$$

Предположим, что $\dim W^s(0) = m,\ \dim W^u(0) = N - m,\ 1 \le m < N.$

Предполагается, что пересечение $W^s(0) \cap W^u(0)$ не сводится к точке $\bar{\varphi}(0)$. Пусть $w \in W^s(0) \cap W^u(0), w \ne \bar{\varphi}(0)$, тогда решение $\bar{\psi}(t)$ системы (1) с начальными данными $t = 0, z = w$ есть гомоклиническое к $\bar{\varphi}(t)$ решение.

Хорошо известно, что если пересечение $W^s(0)$ с $W^u(0)$ трансверсально, то в окрестности гомоклинического решения $\bar{\psi}(t)$ существует бесконечно много периодических решений, и все эти решения неустойчивы. Таким образом, появление устойчивых периодических решений в окрестности гомоклинического решения возможно, только если пересечение $W^s(0)$ с $W^u(0)$ нетрансверсально. В этом случае решение $\bar{\psi}(t)$ часто называют нетрансверсальным гомоклиническим решением.

Все рассуждения диссертации проводятся в ограниченной части пространства $\mathbb{R}^N$ векторов z, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что все решения $z(t, z^0)$ продолжимы на период. В таком случае преобразование Пуанкаре $f(z^0) = z(\omega, z^0)$ есть диффеоморфизм N-мерного пространства в себя гладкости r. В связи с этим дальнейшее изложение ведется на языке диффеоморфизмов. Отметим, что в большинстве вышеупомянутых работ рассматривались именно диффеоморфизмы.

Во введении диссертационной работы сформулированы основные результаты.

В первой главе диссертации доказывается, что при некоторых условиях диффеоморфизм плоскости в себя имеет в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Пусть f – диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, это означает, что собственные числа матрицы $Df(0)$ по модулю не равны единице. Предполагается, что собственные числа этой матрицы действительны и положительны, причем одно из них больше единицы, а второе меньше.

Устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической точки диффеоморфизма f W^s, W^u определяются как

$$W^s = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{j \to +\infty} \left\| f^j(z) \right\| = 0 \right\},$$
$$W^u = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{j \to +\infty} \left\| f^{-j}(z) \right\| = 0 \right\},$$

где f^j, f^{-j} – степени диффеоморфизмов f и f^{-1}.

Предположим, что в некоторой окрестности нуля V диффеоморфизм f имеет вид

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + p(x,y) \\ \mu y + q(x,y) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где λ и μ такие положительные действительные числа, что $0 < \lambda < 1 < \mu$,

а p, q такие непрерывно дифференцируемые в окрестности нуля функции, что

$$p(0,0) = q(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial p(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial p(0,0)}{\partial y} = \frac{\partial q(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial q(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Пусть

$$\lambda\mu < 1. \tag{3}$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} &p(0,y)=q(x,0)=0, \\ &(0,y)\in V,(x,0)\in V. \end{aligned} \qquad (4)$$

Пусть w – гомоклиническая точка, а именно, $w\neq 0, w\in W^s\cap W^u$. Ясно, что имеют место следующие соотношения $\lim\limits_{j\to\infty}\left\|f^j(w)\right\|=\lim\limits_{j\to\infty}\left\|f^{-j}(w)\right\|=0$, где f^j, f^{-j} – степени порядка j диффеоморфизмов f и f^{-1}.

Из последних соотношений следует, что орбита гомоклинической точки является ограниченным множеством, кроме того, существуют такие целые числа $i_1, i_2\,(i_1<i_2)$, что выполняются включения

$$f^k(w)\in V, k\le i_1, k\ge i_2.$$

Обозначим $\tau=i_2-i_1\ge 1$.

Пусть $u_1=f^{i_1}(w), u_2=f^{i_2}(w)$, ясно, что $f^\tau(u_1)=u_2$. Предположим, что точки u_1, u_2 в окрестности V имеют следующие координаты $u_1=(0,y^0), u_2=(x^0,0)$.

Предположим, что

$$x^0>0, y^0>0. \qquad (5)$$

Считаем, что

$$V_1=\left\{(x,y):|x|<(\lambda+\theta)^{-1}x^0, |y|<(\mu-\theta)y^0\right\}\subset V, \qquad (6)$$

где θ такая достаточно малая неотрицательная величина, что

$$0<\lambda-\theta<\lambda+\theta<1<\mu-\theta,\ (\lambda+\theta)(\mu+\theta)<1.$$

Фиксируем такую достаточно малую окрестность U точки u_1, что $U\subset V_1, f^\tau(U)\subset V_1,\ f(U)\cap U=\varnothing$.

Под расширенной окрестностью орбиты точки w будем понимать объединение $\widehat{V} = V_1 \cup f(U) \cup f^2(U) \cup \ldots \cup f^{\tau-1}(U)$.

Обозначим через L следующее сужение: $L = f^{\tau}\big|_U$. Периодическая точка $\overline{z} \in U$ диффеоморфизма f, траектория которой лежит в $\widehat{V}$, называется однообходной периодической точкой диффеоморфизма, если она является неподвижной точкой отображения $f^{j}L$, т. е. $f^{j}L(\overline{z}) = \overline{z}$ при некотором натуральном j, причем $f^{i}L(\overline{z}) \in V_1$, где $i = 1, 2, \ldots, j$. В свою очередь, периодическая точка $\overline{z} \in U$ называется s-обходной периодической точкой (s>1), если эта периодическая точка является неподвижной точкой отображения $f^{j_1}Lf^{j_2}\ldots Lf^{j_s}L$, где $j_1, j_2, \ldots, j_s$ натуральные числа, причем

$$
\begin{aligned}
&f^{j_s}L\ldots f^{j_2}Lf^{j_1}L(\overline{z}) = \overline{z},\\
&f^{j_l}L\ldots f^{j_2}Lf^{j_1}L(\overline{z}) \in U, l = 1, 2, \ldots, s-1,\\
&f^{j_l}L\ldots f^{j_2}Lf^{j_1}L(\overline{z}) \neq \overline{z}, l = 1, 2, \ldots, s-1,\\
&f^{i}L\ldots f^{j_2}Lf^{j_1}L(\overline{z}) \in V_1, i = 0, 1, \ldots, j_l, l = j_1, j_2, \ldots, j_s.
\end{aligned}
$$

Предмет изучения диссертационной работы – однообходные периодические точки.

Запишем отображение L в координатах

$$
L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + R(x, y - y^0) \\ Q(x, y - y^0) \end{pmatrix},\ R(0,0) = 0,\ Q(0,0) = 0\ .
$$

Предположим, что

$$
\begin{aligned}
&R(x, y - y^0) = x^0 + ax + b(y - y^0) + \varphi(x, y - y^0)\\
&Q(x, y - y^0) = cx + g(y - y^0) + \psi(x)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где a, b, c –такие действительные числа, что $b < 0$, $c > 0$, а g, φ, ψ – такие непрерывно дифференцируемые функции, что

$$\varphi(0,0)=\psi(0)=g(0)=0,$$
$$\frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial y}=0,\psi'(0)=g'(0)=0.$$

Условие $g'(0)=0$ означает, что точка u_2 является точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразия. Предположим, что производные первого порядка функций φ, ψ ограничены положительной постоянной M в окрестности нуля.

Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий определяется свойствами функции g. Для того чтобы сформулировать основные результаты первой главы работы, определим эти свойства.

Пусть $(\sigma_k-\varepsilon_k,\sigma_k+\varepsilon_k)$ − последовательность интервалов, причем

$$\begin{aligned}&\sigma_k>\sigma_{k+1}>0,\varepsilon_k>0,\\&\lim_{k\to\infty}\sigma_k=\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0,\end{aligned}\tag{8}$$

кроме того,

$$\sigma_k-\varepsilon_k>\sigma_{k+1}+\varepsilon_{k+1},\tag{9}$$

предполагается, что условия (8), (9) имеют место для любого k. Из (9) следует, что интервалы $(\sigma_k-\varepsilon_k,\sigma_k+\varepsilon_k)$ не пересекаются.

Обозначим через d следующую постоянную $d=\min\left[0.25,0.25\left(|b|+M\right)^{-1}\right]$.

Пусть j_k − некоторая достаточно быстро стремящаяся к бесконечности строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\left(\lambda\mu\right)^{j_k} < \varepsilon_k . \qquad (10)$$

Предположим, что непрерывно дифференцируемая функция g удовлетворяет следующим условиям

$$\left| g\left(\sigma_k\right) + \lambda^{j_k} c\left(x^0 + b\sigma_k\right)\left(1 - \lambda^{j_k} a\right)^{-1} - \left(y^0 + \sigma_k\right)\mu^{-j_k} \right| < 0.25 d\varepsilon_k \mu^{-j_k} \qquad (11)$$

для любого k.

Кроме того, предположим, что при некотором $\alpha > 1$ и любом k справедливы неравенства

$$\left| g'\left(t\right) \right| < \mu^{-\alpha j_k}, t \in \left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right). \qquad (12)$$

Условия (11), (12) определяют характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке u_2.

Первая глава работы разделена на три раздела, в первом разделе первой главы доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть f − диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть выполнены условия* (2) - (12). *Предположим, что f линеен в окрестности нуля* V_1, *тогда любая окрестность гомоклинической точки* u_1 *содержит счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Таким образом, если касание устойчивого и неустойчивого многообразия определяется условиями (11), (12), то диффеоморфизм f имеет счетное множество однообходных устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями, при этом из доказательства теоремы следует, что все эти точки являются однообходными периодическими точками.

Теорема 1.1 дает положительный ответ на давно стоящий вопрос о возможности существования в произвольной окрестности нетрансверсального гомоклинического решения двумерной периодической системы дифференциальных уравнений счетного множества устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Во втором разделе первой главы доказывается теорема 1.2, аналогичная теореме 1.1, но снимается предположение о том, что диффеоморфизм f является линейным в V_1, а именно, функции p, q, определенные в (2), могут быть не равны тождественно нулю в V_1. Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в этом случае задается условиями аналогичными условиям (11), (12).

В третьем разделе первой главы дан способ построения функции, удовлетворяющей условиям (11), (12). Здесь показано, что по фиксированным последовательностям σ_k, ε_k, удовлетворяющим условиям (8), (9), можно определить последовательность j_k таким образом, чтобы множество непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (11), (12) было бы не пусто.

Заметим, что у непрерывно дифференцируемой функции, удовлетворяющей указанным условиям, может не существовать в точке 0 производной второго порядка, в этом случае диффеоморфизм f является диффеоморфизмом класса C^1, и он не может быть диффеоморфизмом класса $C^r\left(1 < r \le \infty\right)$. Кроме того, строятся примеры функций p, q, удовлетворяющих условиям теоремы 1.2.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [1, 5, 7, 13], в книге [14], также в трудах научных конференций [16, 17].

Во второй главе диссертационной работы рассматриваются диффеоморфизмы плоскости в себя класса $C^r\left(1 \le r \le \infty\right)$, эта глава имеет два раздела.

В первом разделе второй главы изучаются диффеоморфизмы конечного класса гладкости, имеющие нетрансверсальную гомоклиническую точку. Здесь представлены теоремы аналогичные теоремам 1.1, 1.2 главы 1. Дан способ построения множества C^r гладких функций, определенных в окрестности нуля, удовлетворяющих условиям (11), (12). Здесь показано, что по фиксированным последовательностям σ_k, ε_k, удовлетворяющим условиям (8), (9), можно определить последовательность j_k таким образом, чтобы множество C^r гладких функций, удовлетворяющих условиям (11), (12) было бы не пусто.

В этом разделе показано, что произвольная непрерывно дифференцируемая функция g, определенная в окрестности нуля, удовлетворяющая условиям (11), (12), может иметь в точке 0 производные до порядка r включительно, однако, все существующие в точке 0 производные этой функции равны нулю.

Во втором разделе второй главы показано, что утверждения теорем 1.1, 1.2 первой главы справедливы и в случае диффеоморфизма плоскости класса C^∞, также показан способ построения множества бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (11), (12). Здесь показано, что по фиксированным последовательностям σ_k, ε_k, удовлетворяющим условиям (8), (9), можно определить последовательность j_k таким образом, чтобы множество бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (11), (12) было бы не пусто.

Кроме того, доказано, что у бесконечно дифференцируемой функции g, которая удовлетворяет всем вышеперечисленным свойствам, все производные в точке 0 равны нулю.

Заметим, что в вышеперечисленных работах Ш.Ньюхауса, Л. П. Шильникова, С. В. Гонченко и других авторов рассматривался диффеоморфизм плоскости с нетрансверсальной гомоклинической точкой, но характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке u_2 определяется следующими соотношениями

$$Q(0,0)=0, \frac{\partial Q(0,0)}{\partial y}=\ldots=\frac{\partial^{r-1} Q(0,0)}{\partial y^{r-1}}=0, \frac{\partial^{r} Q(0,0)}{\partial y^{r}}\neq 0, r>1$$

или (в случае выполнения условий (7)) на функцию g накладываются следующие условия

$$g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(r-1)}(0)=0, g^{(r)}(0)\neq 0, r>1,$$

т. е. функция g должна иметь в точке 0 производную второго порядка, более того, хотя бы одна из существующих в точке 0 производных функции g не ниже второго порядка должна быть отлична от нуля. Таким образом, имеем, что множество диффеоморфизмов, удовлетворяющее условиям теорем 1.1, 1.2, 2.1, 2.5, 2.9 диссертационной работы, не пересекается с множеством диффеоморфизмов, которое рассматривается в вышеперечисленных работах. Дальнейшее изучение множества таких диффеоморфизмов имеет научные перспективы.

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [2,4,8,12,13], в книге [14], также в трудах научной конференции [18].

Третья глава дисертационной работы посвящена изучению окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки диффеоморфизма $(n+m)$-мерного пространства. Основная цель этой главы – показать, что предыдущие результаты могут иметь место и в случае многомерного диффеоморфизма, а именно, при определенных условиях диффеоморфизм имеет в окрестности гомоклинической точки счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями

Пусть f − диффеоморфизм (n+m)-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат.

Обозначим через $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ векторы (n+m)-мерного пространства, где

$$x = \operatorname{col}(x_1, ..., x_m), \;\; y = \operatorname{col}(y_1, ..., y_n).$$

Предположим, что диффеоморфизм f линеен в некоторой ограниченной окрестности $\bar{V}$ начала координат.

Пусть

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где Λ, M – квадратные матрицы порядка m и n соответственно.

Предположим, что

$$\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_m], \;\; \mathrm{M} = \operatorname{diag}[\mu_1, ..., \mu_n],$$

где $0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_m < 1 < \mu_1 \leq ... \leq \mu_n$.

Обозначим

$$\lambda = \lambda_m, \;\; \mu = \mu_1 \mu_2 ... \mu_n.$$

Предположим, что

$$\lambda\mu < 1. \tag{14}$$

Ясно, что в окрестности $\bar{V}$ диффеоморфизм f задается как

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda x \\ \mathrm{M} y \end{pmatrix}.$$

Пусть, W^s, W^u – устойчивое и неустойчивое многообразия точки 0. Предположим, что в пересечении этих многообразий лежит отличная от нуля гомоклиническая точка. Зафиксируем две точки u_1, u_2 из орбиты гомоклинической точки, лежащие в $\bar{V}$, предположим, что эти точки имеют координаты

$$u_1 = \left(0,...,0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0\right), \ u_2 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0\right).$$

Пусть

$$x_i^0 > 0, \ i = 1, 2, ..., m, \ \ y_i^0 > 0, i = 1, 2, ..., n. \tag{15}$$

Считаем, что

$$\bar{V}_1 = \left\{\left(x, y\right) : \|x\| < \left(\lambda_1\right)^{-1}\|x^0\|, \|y\| < \mu\|y^0\|\right\} \subset \bar{V}, \tag{16}$$

где $\|...\|$ – евклидова норма вектора.

В дальнейшем будут приняты обозначения

$$x^0 = \mathrm{col}\left(x_1^0, ..., x_m^0\right), \ \ y^0 = \mathrm{col}\left(y_1^0, ..., y_n^0\right),$$

$$u_1 = \left(0,...,0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0\right) = \left(0, y^0\right), \ u_2 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0\right) = \left(x^0, 0\right).$$

Существует натуральное τ такое, что $f^\tau \begin{pmatrix} 0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть $\bar{U}$ – достаточно малая окрестность точки u_1 такая, что

$$\bar{U} \subset \bar{V}_1, \ \ f^\tau\left(\bar{U}\right) \subset \bar{V}_1, \ \bar{U} \cap f\left(\bar{U}\right) = \varnothing. \tag{17}$$

Обозначим через L сужение, $L = f^{\tau}\big|_{\bar{U}}$.

Отображение L, класса C^1, определяет характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке u_2.

Обозначим

$$\Omega = DL(0) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & S \end{pmatrix},$$

ясно, что Ω –такая квадратная матрица порядка (m+n), что

$$\det\Omega > 0,$$

а A, S − квадратные матрицы порядка m и n соответственно. Обозначим через $C_1,...,C_n,S_1,...,S_n$ строки матриц C и S соответственно.

Предположим, что S имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & ... & s_{1n} \\ 0 & 0 & s_{23} & ... & s_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & s_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

то есть все элементы, лежащие на главной диагонали и ниже, равны нулю. Ясно, что $\det S = 0$, поэтому точка u_2 является точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразия.

При m=n=1 матрица Ω имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

где a,b,c – такие действительные числа, что b<0, c>0. Этот случай рассмотрен в главах 1, 2 диссертации.

Предположим, что отображение L в координатах x, y, имеет вид

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} x \\ y - y^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi\left(x, y - y^0\right) \\ G\left(y - y^0\right) + \Psi\left(x, y - y^0\right) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где Φ – такая m-мерная вектор-функция (n+m) аргументов класса C^1, что

Φ(0,0)=0. G и Ψ –такие n-мерные вектор-функции класса C^1 своих аргументов, что G(0)=0, Ψ(0,0)=0, причем у этих функций все производные первого порядка равны нулю в начале координат.

Считаем, что производные первого порядка функций Φ, Ψ ограничены в окрестности $\bar{U}$ постоянной $\bar{M}$.

Ясно, что вектор-функции Φ, Ψ, G – многомерные аналоги функций φ, ψ, g из главы 1.

Опишем подробнее свойства вектор-функций G, Ψ. Пусть Ψ_i – координатная функция вектор-функции Ψ с номером i (i=1,2,…,n), предположим, что Ψ_i не зависит от $y_1, y_2, ..., y_i$, а именно,

$$\Psi_i = \Psi_i\left(x_1, ..., x_m, y_{i+1} - y_{i+1}^0, ..., y_n - y_n^0\right), \tag{20}$$

таким образом, Ψ_1 есть функция n+m-1 аргумента, а Ψ_n зависит только от x.

Положим

$$\bar{d} = \max\left[1, n\left(\|S\| + \bar{M}\right)\right].$$

Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке u_2 определяется свойствами вектор-функции G .

Запишем эту функцию в координатах

$$G\left(y-y^0\right)=\mathrm{col}\left(G_1,G_2,...,G_n\right).$$

предположим, что G_i (i=1,2,…,n) является функцией i переменных, а именно,

$$G_i=G_i\left(y_1-y_1^0,...,y_i-y_i^0\right),i=1,2,...,n, \tag{21}$$

ясно, что G_1 является функцией одной переменной.

Свойства функции G, которые определяют способ касания устойчивого и неустойчивого многообразий, как и в случае двумерного диффеоморфизма, опишем с помощью последовательностей σ_k, ε_k. Предположим, что элементы этих последовательностей удовлетворяют условиям (8), (9). Пусть j_k − некоторая достаточно быстро стремящаяся к бесконечности строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\left(\lambda\mu\right)^{j_k}<\left(4\bar{d}\right)^{-n}\varepsilon_k\ . \tag{22}$$

Пусть $\xi_k^2,...,\xi_k^n$ − такие произвольные положительные последовательности, стремящиеся к нулю, что произведения $\xi_k^i\left(\lambda\right)^{-j_k}$ ограничены при любых k и i = 2, … ,n.

Обозначим через ξ_k, $\bar{x}_k$ следующие последовательности векторов

$$\xi_k=\mathrm{col}\left(\sigma_k,\xi_k^2,...,\xi_k^n\right),$$

$$\bar{x}_k=\left[E-\Lambda^{j_k}A\right]^{-1}\Lambda^{j_k}\left(x^0+B\xi_k\right),$$

нетрудно видеть, что $\det\left[E-\Lambda^{j_k}A\right]\neq 0$, при достаточно больших номерах k, поэтому определение $\bar{x}_k$ корректно.

Определим последовательности $\Delta_k^i, i=1,2,...,n$ как

$$\Delta_k^1=\varepsilon_k, \Delta_k^i=\left(4\bar{d}\right)^{1-i}\varepsilon_k\left(\mu_1...\mu_{i-1}\right)^{-j_k}.$$

Предположим, что функция G удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}&\left|G_1\left(\sigma_k\right)-\mu_1^{-j_k}\left(y_1^0+\sigma_k\right)+C_1\bar{x}_k+S_1\xi_k\right|<0.25\mu_1^{-j_k}\varepsilon_k,\\&\left|G_i\left(\sigma_k,\xi_k^2,...,\xi_k^i\right)-\mu_i^{-j_k}\left(y_i^0+\xi_k^i\right)+C_i\bar{x}_k+S_i\xi_k\right|<0.25\mu_i^{-j_k}\Delta_k^i,\end{aligned}\tag{23}$$

где i=2,…,n.

Кроме того, предположим, что при некотором $\alpha>1$ и любом k производные функции G удовлетворяют следующим условиям

$\left|\dfrac{dG_1\left(t_1\right)}{dt_1}\right|<\mu^{-\alpha j_k}$, где $t_1\in\left(\sigma_k-\varepsilon_k,\sigma_k+\varepsilon_k\right)$,

$\left|\dfrac{dG_2\left(t_1,t_2\right)}{dt_1}\right|<\mu^{-\alpha j_k},\left|\dfrac{dG_2\left(t_1,t_2\right)}{dt_2}\right|<\mu^{-\alpha j_k}$

где $t_1\in\left(\sigma_k-\varepsilon_k,\sigma_k+\varepsilon_k\right)$, $t_2\in\left(\Delta_k^2-\xi_k^2,\Delta_k^2+\xi_k^2\right)$,

…, (24)

$\left|\dfrac{dG_n\left(t_1,t_2,...,t_n\right)}{dt_1}\right|<\mu^{-\alpha j_k},\left|\dfrac{dG_n\left(t_1,t_2,...,t_n\right)}{dt_2}\right|<\mu^{-\alpha j_k},...,\left|\dfrac{dG_n\left(t_1,t_2,...,t_n\right)}{dt_n}\right|<\mu^{-\alpha j_k}$,

где $t_1\in\left(\sigma_k-\varepsilon_k,\sigma_k+\varepsilon_k\right)$, $t_2\in\left(\Delta_k^2-\xi_k^2,\Delta_k^2+\xi_k^2\right)$,..., $t_n\in\left(\Delta_k^n-\xi_k^n,\Delta_k^n+\xi_k^n\right)$.

Из условий (23) и (24) следует, что производные первого порядка функции G в нуле равны нулю, также, эти условия определяют характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке u_2.

Ясно, что при m=n=1 условия (23), (24) представляют собой условия (10), (11).

Заметим, если характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий определяется условиями (23), (24), то у непрерывно дифференцируемой функции G может не существовать в точке нуль производных второго порядка, в этом случае диффеоморфизм f является диффеоморфизмом класса C^1, и он не может быть диффеоморфизмом класса $C^r\left(1<r\leq\infty\right)$.

Основной результат третьей главы состоит в следующем.

Теорема 3.1. *Пусть f − диффеоморфизм (n+m)-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть f линеен в некоторой окрестности нуля $\bar{V}$ и выполнены условия* (8), (9), (13)-(24), *тогда любая окрестность гомоклинической точки u_1 содержит счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Теорема 3.1 дает положительный ответ на давно стоящий вопрос о возможности существования в произвольной окрестности нетрансверсального гомоклинического решения периодической системы дифференциальных уравнений счетного множества устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями, при этом из доказательства теоремы следует, что эти точки являются однообходными периодическими точками.

Отметим, что множество диффеоморфизмов, удовлетворяющих условиям теоремы 3.1, не пересекается с множеством диффеоморфизмов, которое рассматривается в работах Ш.Ньюхауса, Л. П. Шильникова, С. В. Гонченко и других авторов, поэтому изучение таких диффеоморфизмов имеет научные перспективы.

Основные результаты третьей главы диссертации опубликованы в работах [3, 6, 9, 10, 11, 13], в книге [14], в тезисах [15] и в трудах научной конференции [19].

В заключении диссертационной работы приведены основные результаты работы и обозначены цели дальнейших исследований.

В диссертации получены следующие результаты:

Указан класс двумерных систем, имеющих в окрестности гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических траекторий с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Выделен класс двумерных систем, у которых вектор-функция Z является r раз непрерывно дифференцируемой по z ($1 < r < \infty$), имеющих счетное множество устойчивых периодических траекторий, лежащих в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории, причем характеристические показатели таких периодических решений отделены от нуля.

Показано, что существуют двумерные системы с бесконечно гладкой правой частью, обладающие тем же свойством.

Указаны условия, достаточные для того, чтобы многомерная система имела в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Перспективами дальнейшего исследования по теме диссертации являются следующие задачи.

1. Изучить вопрос устойчивости многообходных периодических решений, лежащих в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории.

2. Выделить класс систем дифференциальных уравнений, имеющих в окрестности гомоклинического контура бесконечно много устойчивых периодических траекторий.

3. Исследовать окрестность нетрансверсальной гомоклинической траектории многомерной системы дифференциальных уравнений при ином характере касания устойчивого и неустойчивого многообразия.

4. Исследовать проблемы, возникающие при бифуркации нетрансверсальной гомоклинической траектории, при условиях которые были наложены в диссертации на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых журналах и изданиях**:**

[1] *Васильева Е. В.* К вопросу устойчивости периодических точек, лежащих в окрестности гомоклинической точки // Доклады Академии наук. 2005. Т. 400, № 2. С. 151-152.

[2] *Васильева Е. В.* Гладкие диффеоморфизмы со счетным множеством устойчивых периодических точек // Доклады Академии наук. 2011. Т. 439, № 1. С.11-13.

[3] *Васильева Е. В.* Многомерные диффеоморфизмы с устойчивыми периодическими точками // Доклады Академии наук. 2011. Т. 441, № 3. С. 299-301.

[4] *Васильева Е. В.* Устойчивые периодические точки бесконечно гладких диффеоморфизмов // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 1. С.9-10.

[5] *Васильева Е. В.* Устойчивые периодические точки двумерных диффеоморфизмов класса C^1 // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер.1. 2007. Вып.2. С.20-26.

[6] *Васильева Е. В.* Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер.1. 2012. Вып. 3. С. 3-13.

[7] *Васильева Е. В.* Диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С.307-315.

[8] *Васильева Е. В.* Гладкие диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками, лежащими в окрестности гомоклинической точки // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 10. С. 1355-1360.

[9] *Васильева Е. В.* Гладкие диффеоморфизмы трехмерного пространства с устойчивыми периодическими точками // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер.1. 2013. Вып. 4. С. 25-29.

[10] *Василева Е.В.* О существовании периодических точек в окрестности гомоклинической точки n-мерного диффеоморфизма // Дифференц. уравнения. 1996, Т.32, №2. С.147-153.

[11] *Васильева Е. В.* Устойчивые периодические точки гладких диффеоморфизмов многомерного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С.27-35.

Публикации в других изданиях:

[12] *Васильева Е.В.* Гладкие диффеоморфизмы с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2010. № 4. С.20-25.

[13] *Васильева Е.В.* Периодические системы дифференциальных уравнений с бесконечным множеством устойчивых периодических решений / Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2014. №4. 136 с.

[14] *Васильева Е.В.* Периодические системы дифференциальных уравнений с бесконечным множеством устойчивых периодических решений. СПб.: Лань. 2014. 130 с.

[15] *Васильева Е. В.* К вопросу устойчивости периодических точек диффеоморфизмов евклидова пространства в себя // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 846-847.

[16] *Васильева Е.В.* Устойчивость траекторий, лежащих в окрестности гомоклинической кривой / Тезисы докладов международной конференции «Четвертые Окуневские чтения», симпозиума «Пуанкаре и проблемы нелинейной механики». СПб. 2004. С.137.

[17] *Васильева Е.В.* Устойчивость траекторий в окрестности гомоклинической кривой / Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». М. 2004. С.233.

[18] *Васильева Е.В.* Устойчивые периодические точки гладких диффеоморфизмов с гомоклинической точкой / Тезисы докладов международного конгресса «Нелинейный динамический анализ-2007». СПб. 2007. С.363.

[19] *Васильева Е.В.* Устойчивые периодические точки N-мерных диффеоморфизмов / Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология». М. 2008. С.110.