САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Васильева Екатерина Викторовна

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ УСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Диссертация посвящена проблеме существования бесконечного числа устойчивых периодических решений в окрестности гомоклинического решения периодической системы дифференциальных уравнений.

Задача о поведении решений, лежащих в окрестности гомоклинического решения периодической системы дифференциальных уравнений, исследуется достаточно давно. Исследованием решений, расположенных в окрестности нетрансверсального гомоклинического решения, занимались Ш.Ньюхаус, Ю.И.Неймарк, Б.Ф.Иванов, Л.П.Шильников, В.С.Гонченко и другие авторы. При этом лишь в немногочисленных работах рассматривается проблема устойчивости периодических решений, расположенных в окрестности гомоклинического решения. Хорошо известно, что если устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально, то в окрестности гомоклинического решения существует бесконечно много периодических решений, и все эти решения неустойчивы. Таким образом, появление устойчивых периодических решений в окрестности гомоклинического решения возможно, только если устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются нетрансверсально.

При исследовании окрестности гомоклинического решения различают однообходные и многообходные периодические решения. Решение называют s-обходным, если его траектория имеет s витков в окрестности цикла, образованного гомоклинической траекторией.

Ш.Ньюхаус, Н. К. Гаврилов и Л. П. Шильников рассматривали системы дифференциальных уравнений при специальных (впрочем, весьма естественных) условиях, наложенных на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий. Было установлено, что все однообходные периодические решения неустойчивы. Б.Ф.Иванов показал, что среди многообходных решений может появиться бесконечно много устойчивых решений. Однако, детальный анализ доказательств, показывает, что с ростом периодов один из характеристических показателей таких решений стремится к нулю.

В диссертации изучается окрестность гомоклинического решения произвольной периодической системы на предмет наличия счетного множества однообходных устойчивых периодических решений, с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Цель работы – показать, что существует класс систем, которые имеют в окрестности гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических решений, с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Научная новизна. Все результаты диссертационной работы являются новыми.

В диссертации получены следующие результаты:

Указан класс двумерных систем, имеющих в окрестности гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических траекторий с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Выделен класс двумерных систем с r раз непрерывно дифференцируемой по зависимой переменной правой частью ($1 < r < \infty$), имеющих счетное множество устойчивых периодических траекторий, лежащих в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории, причем характеристические показатели таких периодических решений отделены от нуля.

Показано, что существуют двумерные системы с бесконечно гладкой правой частью, обладающие тем же свойством.

Указаны условия, достаточные для того, чтобы многомерная система имела в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Методы исследования. В диссертации использованы методы качественной теории динамических систем и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Достоверность результатов. Основные результаты диссертационной работы получены с помощью строгих математических доказательств.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в качественной теории динамических систем, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также, при исследовании конкретных моделей. Они могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ им. М.В. Ломоносова, СПбГУ, МИАН им. В.А. Стеклова, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, ИПМ им. А.Ю. Ишлинского РАН и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях: «Четвертые Окуневские чтения» (симпозиум «Пуанкаре и проблемы нелинейной механики»), Санкт-Петербург, 2004; «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», Москва, 2004; «Дифференциальные уравнения и топология», Москва, 2008; «Dynamical Systems and Applications», Марибор, Словения, 2013; на международном конгрессе «Нелинейный динамический анализ-2007», Санкт-Петербург; на заседаниях Санкт-Петербургского городского семинара по дифференциальным уравнениям, 2012, 2013; на семинаре МИАН им. В.А. Стеклова и МГУ им. М.В.

Ломоносова «Динамические системы классической механики» под рук. акад. РАН В.В. Козлова, проф. С.В. Болотина и чл.-корр. РАН Д.В. Трещева, 2014; на семинаре Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН «Теория управления и динамика систем» под рук. акад. РАН Ф.Л. Черноусько, 2014; на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского под рук. проф. А.Д. Морозова, 2014; на семинаре «Спектральная теория дифференциальных операторов» под рук. акад. РАН В.А. Садовничего, 2015.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 19 работ, представленных в списке литературы [6-24]. Основные результаты диссертации опубликованы в научных журналах [6, 9, 10, 14-21] и других изданиях [7, 8, 11, 12, 13, 22, 23, 24].

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы, включающего 40 наименований.

Основное содержание работы. Диссертация посвящена проблеме существования бесконечного числа устойчивых периодических решений в окрестности гомоклинического решения периодической системы дифференциальных уравнений.

Рассматривается система уравнений вида

$$\frac{dz}{dt} = Z(t,z), \tag{0.1}$$

где *z*, *Z* – N-векторы, вектор Z непрерывен по (t,z) и r раз непрерывно дифференцируем по *z*, $1 \le r \le \infty$, кроме того, вектор-функция Z ω-периодична по *t*: $Z(t+\omega, z) = Z(t,z), \omega > 0$. Предполагается, что система (0.1) имеет ω-периодическое решение $z = \bar{\varphi}(t)$ с начальными данными $t = 0, z = 0$.

Наряду с системой (0.1) рассмотрим линейную однородную периодическую систему

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial Z\left(t, \bar{\varphi}(t)\right)}{\partial z} z.$$

Определение 1. Периодическое решение системы (0.1) $z = \bar{\varphi}(t)$ называется *гиперболическим решением*, если мультипликаторы линейной системы по модулю не равны единице.

Предполагается, что решение $z = \bar{\varphi}(t)$ является гиперболическим решением, причем среди мультипликаторов системы имеется хотя бы один мультипликатор, модуль которого больше единицы, также, имеется хотя бы один мультипликатор, модуль которого меньше единицы. Такие гиперболические решения называются седловыми.

Пусть $z\left(t, z^0\right)$ решение системы (0.1) с начальными данными $t = 0, z = z^0$. Определим

$$W^s(0) = \left\{ z^0 \in \mathbb{R}^N : \lim_{t \to +\infty} \left\| z\left(t, z^0\right) - \bar{\varphi}(t) \right\| = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ z^0 \in \mathbb{R}^N : \lim_{t \to -\infty} \left\| z\left(t, z^0\right) - \bar{\varphi}(t) \right\| = 0 \right\},$$

тогда устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(t), W^u(t)$ решения $\bar{\varphi}(t)$ определяются как

$$W^s(t) = \left\{ z = z\left(t, z^0\right) : z^0 \in W^s(0) \right\},$$

$$W^u(t) = \left\{ z = z\left(t, z^0\right) : z^0 \in W^u(0) \right\}.$$

Известно, что

$$\dim W^s(0) = m, \dim W^u(0) = N - m, 1 \le m < N.$$

Предполагается, что пересечение $W^s(0)\cap W^u(0)$ не сводится к точке 0 и любая точка $w\in W^s(0)\cap W^u(0)$, кроме точки 0, изолирована в $W^s(0)\cap W^u(0)$. Решение $z(t,w)$ системы (0.1) с начальными данными $t=0, z=w$, где $w\in W^s(0)\cap W^u(0)$ есть гомоклиническое к $\bar{\varphi}(t)$ решение. Имеют место следующие соотношения

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|z(t,w)-\bar{\varphi}(t)\right\|=\lim_{t\to-\infty}\left\|z(t,w)-\bar{\varphi}(t)\right\|=0.$$

Точку w также принято называть *гомоклинической точкой*.

Пусть $T_wW^s(0), T_wW^u(0)$ – касательные пространства к $W^s(0), W^u(0)$ в точке w.

Говорят, что многообразия $W^s(0), W^u(0)$ *трансверсально пересекаются в точке* w, если

$$\dim T_wW^s(0)+\dim T_wW^u(0)-\dim\left(T_wW^s(0)\cap T_wW^u(0)\right)=N.$$

В этом случае решение называется *трансверсальным гомоклиническим решением*, а точка w *трансверсальной гомоклинической точкой*. В противном случае решение называется *нетрансверсальным гомоклиническим реше*нием, а точка w – *нетрансверсальной гомоклинической точкой*.

Хорошо известно, что если пересечение $W^s(0)$ с $W^u(0)$ трансверсально, то в окрестности гомоклинического решения $z(t,w)$ существует бесконечно много периодических решений и все эти решения неустойчивы. Таким образом, появление устойчивых периодических решений в окрестности гомоклинического решения возможно, только если пересечение $W^s(0)$ с $W^u(0)$ нетрансверсально. В этом случае решение $z(t,w)$ часто называют нетрансверсальным гомоклиническим решением.

Исследованию решений, расположенных в окрестности нетрансверсального гомоклинического решения, посвящена обширная литература [1-3], [25-40]. Список литературы далеко не полон, в нем упомянуты лишь те работы, которые имеют непосредственное или хотя бы косвенное отношение к диссертации. При этом лишь в немногочисленных работах рассматривается проблема устойчивости периодических решений, расположенных в окрестности гомоклинического решения. При исследовании окрестности гомоклинического решения различают однообходные и многообходные периодические решения. Решение называют s-обходным, если его траектория имеет s витков в окрестности цикла, образованного гомоклинической траекторией. В работах [25, 26, 32] рассматривалась система дифференциальных уравнений (0.1). При специальных (впрочем, весьма естественных) условиях, наложенных на характер касания $W^s(0)$ и $W^u(0)$, было установлено, что все однообходные периодические решения неустойчивы. В работе [32] показано, что среди многообходных решений может появиться бесконечно много устойчивых решений. Однако, детальный анализ доказательств, представленных в работах [1] и [32] показывает, что с ростом периодов один из характеристических показателей таких решений стремится к нулю.

В 1977 году В.А. Плисс [35] привел пример двумерной системы (0.1), имеющей в окрестности гомоклинического контура бесконечно много устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

В связи с этим примером возникают следующие проблемы.

1. Нельзя ли указать класс двумерных систем, обладающих тем же свойством?

2. Нельзя ли сделать то же самое в случае, когда вектор Z непрерывно дифференцируем r раз по z с $r > 1$?

3. Существуют ли двумерные системы с бесконечно гладкой правой частью, имеющие бесконечное число однообходных устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями?

4. Указать класс многомерных систем с тем же свойством.

Пусть, как и ранее $z\left(t, z^0\right)$ решение с начальными данными $t=0, z=z^0$. Преобразование Пуанкаре $f\left(z^0\right)=z\left(\omega, z^0\right)$ есть диффеоморфизм N-мерного пространства в себя гладкости r, при этом, разумеется, предполагается, что все решения $z\left(t, z^0\right)$ продолжимы на период, предположение не нарушает общности, поскольку в дальнейшем изучается поведение решений в окрестности гомоклинического решения. Каждому диффеоморфизму евклидова пространства соответствует периодическая система дифференциальных уравнений, для которой он служит преобразованием Пуанкаре [5, 34], поэтому дальнейшее изложение удобнее вести на языке диффеоморфизмов. Отметим, что в большинстве упомянутых выше работ рассматриваются именно диффеоморфизмы.

Пусть f – диффеоморфизм N-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, т. е. $f(0)=0$, собственные числа матрицы $Df(0)$ по модулю не равны единице, причем среди этих чисел имеется хотя бы одно, модуль которого больше единицы, так же имеется хотя бы одно собственное число, модуль которого меньше единицы.

Устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической точки диффеоморфизма f W^s, W^u определяются как

$$W^s=\left\{z \in \mathbb{R}^N : \lim_{j \to +\infty}\left\| f^j(z)\right\|=0\right\},$$

$$W^u=\left\{z \in \mathbb{R}^N : \lim_{j \to +\infty}\left\| f^{-j}(z)\right\|=0\right\},$$

где f^{j}, f^{-j} – степени диффеоморфизмов f и f^{-1}.

Пусть w – нетрансверсальная гомоклиническая точка, а именно, $w \neq 0, w \in W^{s} \bigcap W^{u}$, причем точка w является точкой касания этих многообразий. Ясно, что имеют место следующие соотношения

$$\lim_{j \to +\infty} \left\| f^{j}(w) \right\| = \lim_{j \to +\infty} \left\| f^{-j}(w) \right\| = 0.$$

Зафиксируем V – малую окрестность начала координат.

Ясно, что орбита гомоклинической точки является ограниченным множеством, кроме того, существуют целые числа $i_1, i_2 \left(i_1 < i_2 \right)$ такие, что $f^{i}(w) \in V, i \leq i_1, i \geq i_2$ и $f^{i_1+k}(w), k = 1, 2, ..., i_2 - i_1 - 1$не лежат в замыкании V

Обозначим $\tau = i_2 - i_1 \geq 1$

Пусть $u_1 = f^{i_1}(w), u_2 = f^{i_2}(w)$. Ясно, что

$$f^{\tau}(u_1) = u_2.$$

Фиксируем U достаточно малую окрестность точки u_1 такую, что

$$U \subset V,\ f^{i}(U) \bigcap V = \varnothing, i = 1, ..., \tau - 1,\ f^{\tau}(U) \subset V.$$

Под расширенной окрестностью орбиты точки w будем понимать объединение

$$\widehat{V} = V \bigcup f(U) \bigcup f^{2}(U) \bigcup ... \bigcup f^{\tau-1}(U).$$

Обозначим через L следующее сужение, $L = f^{\tau}\Big|_{U}$. Периодическая точка $\overline{z} \in U$ диффеоморфизма f, называется *однообходной* периодической точкой, если эта периодическая точка является неподвижной точкой отображения $f^{j}L$, т. е. $f^{j}L\left(\overline{z}\right) = \overline{z}$ при некотором натуральном j, причем $f^{i}L\left(\overline{z}\right) \in V$, где $i = 1, 2, \dots, j$.

В свою очередь периодическая точка $\overline{z}$ диффеоморфизма f называется *s-обходной* (s > 1) периодической точкой, если она является неподвижной точкой отображения

$$f^{j_s}L\ldots f^{j_2}Lf^{j_1}L,$$

где $j_1, j_2, \ldots, j_s$ – натуральные числа, причем

$$f^{j_s}L\ldots f^{j_2}Lf^{j_1}L\left(\overline{z}\right)=\overline{z},$$
$$f^{j_l}L\ldots f^{j_2}Lf^{j_1}L\left(\overline{z}\right)\in U, l=1,2,\ldots,s-1,$$
$$f^{j_l}L\ldots f^{j_2}Lf^{j_1}L\left(\overline{z}\right)\neq \overline{z}, l=1,2,\ldots,s-1,$$
$$f^{i}L\ldots f^{j_2}Lf^{j_1}L\left(\overline{z}\right)\in V, i=0,1,\ldots,j_l, l=j_1, j_2,\ldots,j_s.$$

Ясно, что траектория точки $\overline{z}$ лежит в $\widehat{V}$.

В данной работе изучаются только однообходные периодические точки диффеоморфизма f, показано, что множество U содержит счетное множество устойчивых однообходных периодических точек $\overline{z}_k$, т. е. $f^{j_k}L\left(\overline{z}_k\right)=\overline{z}_k$, где j_k – стремящаяся к бесконечности последовательность натуральных чисел. Пусть $\rho_i\left(k\right), i=1,2,\ldots,N,$ собственные числа матрицы $Df^{j_k}L\left(\overline{z}_k\right)$. Определим *характеристические показатели точек* $\overline{z}_k$ как

$$\nu_i\left(k\right)=\left(j_k+\tau\right)^{-1}\ln\left|\rho_i\left(k\right)\right|, i=1,2,\ldots,N.$$

Перейдем к описанию содержания диссертации.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

В первой главе доказывается, что при некоторых условиях диффеоморфизм плоскости в себя имеет в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Во второй главе показывается, что результат первой главы может иметь место для диффеоморфизма плоскости произвольного класса гладкости, включая случай C^{∞}.

В третьей главе доказывается, что аналогичный результат имеет место и в случае диффеоморфизма многомерного пространства в себя.

Пусть f – диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, предположим, что в некоторой окрестности нуля V диффеоморфизм f имеет вид

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + p(x,y) \\ \mu y + q(x,y) \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

где λ и μ положительные действительные числа такие, что $0 < \lambda < 1 < \mu$,

а p, q непрерывно дифференцируемые в окрестности нуля функции такие, что

$$p(0,0) = q(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial p(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial p(0,0)}{\partial y} = \frac{\partial q(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial q(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Пусть

$$\lambda\mu < 1. \tag{0.3}$$

Предположим, что

$$\begin{gathered} p(0,y) = q(x,0) = 0, \\ (0,y) \in V, (x,0) \in V. \end{gathered} \tag{0.4}$$

Пусть W^s, W^u – устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической точки, w – гомоклиническая точка, а именно, $w \neq 0, w \in W^s \cap W^u$. Как и ранее, положим $u_1 = f^{i_1}(w), u_2 = f^{i_2}(w)$, введем $\tau \geq 1$, такое, что $f^{i_1+k}(w), k = 1, 2, \ldots, \tau - 1$ не лежат в замыкании V и $f^{\tau}(u_1) = u_2$.

Фиксируем U достаточно малую окрестность точки u_1 такую, что $U \subset V,\ f^{i}(U) \cap V = \varnothing, i = 1, \ldots, \tau - 1,\ f^{\tau}(U) \subset V$.

Обозначим координаты точек u_1, u_2 в окрестности V следующим образом $u_1 = (0, y^0), u_2 = (x^0, 0)$, предположим, что

$$x^0 > 0, y^0 > 0. \tag{0.5}$$

Предположим, что отображение $L = f^{\tau}\big|_U$ в координатах имеет следующий вид

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + ax + b\left(y - y^0\right) + \varphi\left(x, y - y^0\right) \\ cx + g\left(y - y^0\right) + \psi\left(x\right) \end{pmatrix}, \qquad (0.6)$$

где a, b, c действительные числа такие, что $b < 0$, $c > 0$, а g, φ, ψ непрерывно дифференцируемые функции такие, что

$$\varphi(0,0) = \psi(0) = g(0) = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(0,0)}{\partial y} = 0, \psi'(0) = g'(0) = 0.$$

Условие $g'(0) = 0$ означает, что точка u_2 является точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

Предположим, что производные первого порядка функций φ, ψ ограничены положительной постоянной M в окрестности нуля.

Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий определяется свойствами функции g. Для того чтобы сформулировать основные результаты первой главы работы, определим эти свойства.

Пусть $\left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right)$ − последовательность интервалов, причем

$$\begin{aligned} &\sigma_k > \sigma_{k+1} > 0, \varepsilon_k > 0, \\ &\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0, \end{aligned} \qquad (0.7)$$

кроме того,

$$\sigma_k - \varepsilon_k > \sigma_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, \qquad (0.8)$$

предполагается, что условия (0.7), (0.8) имеют место для любого k. Из (0.8) следует, что интервалы $\left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right)$ не пересекаются.

Обозначим через d следующую постоянную

$$d = \min\left[0.25, 0.25\left(|b| + M\right)^{-1}\right].$$

Пусть m_k − строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$(\lambda\mu)^{m_k} < \varepsilon_k. \tag{0.9}$$

Предположим, что непрерывно дифференцируемая функция g удовлетворяет следующим условиям

$$\left| g(\sigma_k) + \lambda^{m_k} c\left(x^0 + b\sigma_k\right)\left(1 - \lambda^{m_k} a\right)^{-1} - \left(y^0 + \sigma_k\right)\mu^{-m_k} \right| < 0.25 d\varepsilon_k \mu^{-m_k} \tag{0.10}$$

для любого k.

Кроме того, предположим, что при некотором $\alpha > 1$ и любом k справедливы неравенства

$$\left| g'(t) \right| < \mu^{-\alpha m_k}, t \in \left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right). \tag{0.11}$$

Условия (0.10), (0.11) определяют характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке u_2.

Первая глава работы разделена на три раздела, в первом разделе первой главы доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть f − диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предположим, что f линеен в окрестности нуля V. Пусть выполнены условия* (0.2) - (0.11), *тогда в любой окрестности гомоклинической точки* u_1 *лежит счетное множество устойчивых неподвижных точек отображения* $f^{m_k}L$, *которые являются одноходными устойчивыми периодическими точками диффеоморфизма f, причем характеристические показатели этих точек отрицательны и отделены от нуля.*

Таким образом, если касание устойчивого и неустойчивого многообразия определяется неравенствами (0.10), (0.11), то диффеоморфизм f имеет счетное множество однообходных устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Во втором разделе первой главы доказывается теорема 1.2, аналогичная теореме 1.1, но снимается предположение о том, что диффеоморфизм f является линейным в V, а именно, функции p, q, определенные в (0.2), могут быть не равны тождественно нулю в V. Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в этом случае задается условиями, аналогичными условиям (0.10), (0.11).

В третьем разделе первой главы показан способ построения функции, удовлетворяющей условиям (0.10), (0.11). Кроме того, строятся примеры функций p, q, удовлетворяющих условиям основной теоремы второго раздела первой главы.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [7-10,17].

Во второй главе работы рассматриваются диффеоморфизмы плоскости в себя класса $C^r\left(1\le r\le\infty\right)$, эта глава имеет два раздела.

В первом разделе второй главы изучаются диффеоморфизмы конечного класса гладкости, имеющие нетрансверсальную гомоклиническую точку. Здесь представлены теоремы аналогичные теоремам 1.1, 1.2 главы 1. Показан способ построения множества C^r гладких функций, определенных в окрестности нуля, удовлетворяющих условиям (0.10), (0.11). В этом разделе показано, что произвольная непрерывно дифференцируемая функция g, определенная в окрестности нуля, удовлетворяющая условиям (0.10), (0.11), может иметь в точке 0 производные до порядка r включительно, однако, все существующие в точке 0 производные этой функции равны 0.

Во втором разделе второй главы показано, что утверждения теорем 1.1, 1.2 первой главы справедливы и в случае диффеоморфизма плоскости в себя класса C^∞, также показан способ построения множества бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (0.10), (0.11). Кроме того, доказано, что у бесконечно дифференцируемой функции g, которая удовлетворяет всем вышеперечисленным свойствам, все производные в нуле равны нулю.

Заметим, что в работах Ш.Ньюхауса [1], Н.К.Гаврилова, Л.П.Шильникова [25], [26] и некоторых других авторов рассматривался диффеоморфизм плоскости в себя с нетрансверсальной гомоклинической точкой, но характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $\left(x^0,0\right)$ определялся следующими соотношениями

$$g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(r-1)}(0)=0, g^{(r)}(0)\neq 0 .$$

Из результатов этих работ следует, что при выполнении последних условий все однообходные периодические точки неустойчивы. Однако, в работе Б.Ф.Иванова [32] показано, что при выполнении некоторых дополнительных условий, диффеоморфизм f имеет в расширенной окрестности гомоклинической точки счетное множество двухобходных устойчивых периодических точек, но, по крайней мере, один из характеристических показателей у таких точек стремится к нулю с ростом периода.

Результаты второй главы опубликованы в работах [11, 13, 14, 18, 19].

Третья глава работы посвящена изучению окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки диффеоморфизма $(n+m)$-мерного пространства в себя. Основная цель этой главы – показать, что предыдущие результаты могут иметь место и в случае многомерного диффеоморфизма, а именно, при определенных условиях диффеоморфизм имеет в окрестности гомоклинической точки счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Пусть f − диффеоморфизм $(n+m)$-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат.

Обозначим через $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ векторы $(n+m)$-мерного пространства, где

$$x=\mathrm{col}\left(x_1,\ldots,x_m\right), y=\mathrm{col}\left(y_1,\ldots,y_n\right).$$

Предположим, что диффеоморфизм f линеен в некоторой окрестности $\bar{V}$ начала координат.

Считаем, что

$$Df(0)=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & \mathrm{M}\end{pmatrix}, \qquad (0.12)$$

где Λ, M квадратные матрицы порядка m и n соответственно.

Пусть

$$\Lambda=\operatorname{diag}[\lambda_1,\ldots,\lambda_m], \mathrm{M}=\operatorname{diag}[\mu_1,\ldots,\mu_n],$$

где $0<\lambda_1\le\ldots\le\lambda_m<1<\mu_1\le\ldots\le\mu_n$.

Обозначим $\lambda=\lambda_m, \mu=\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$. Предположим, что

$$\lambda\mu<1. \qquad (0.13)$$

Ясно, что в окрестности $\bar V$ диффеоморфизм f задается как

$$f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda x\\ \mathrm{M}y\end{pmatrix}.$$

Пусть, как обычно, W^s, W^u- устойчивое и неустойчивое многообразия точки 0. Предположим, что в пересечении этих многообразий лежит отличная от нуля точка, называемая гомоклинической точкой. Зафиксируем точки u_1, u_2 из орбиты гомоклинической точки, лежащие в $\bar V$, и запишем координаты этих точек в виде

$$u_1=\left(0,\ldots,0,y_1^0,y_2^0,\ldots,y_n^0\right), u_2=\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0,0,\ldots,0\right)$$

Пусть

$$x_i^0>0, i=1,2,\ldots,m, y_i^0>0, i=1,2,\ldots,n. \qquad (0.14)$$

Обозначим $x^0=\operatorname{col}\left(x_1^0,\ldots,x_m^0\right), y^0=\operatorname{col}\left(y_1^0,\ldots,y_n^0\right)$

Существует натуральное τ такое, что $f^\tau\begin{pmatrix}0\\ y^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^0\\ 0\end{pmatrix}$. Пусть $\bar U$ выпуклая окрестность точки u_1 такая, что

$$\bar U\subset\bar V, f^\tau\left(\bar U\right)\subset\bar V. \qquad (0.15)$$

Обозначим через L сужение: $L=f^\tau\big|_{\bar U}$.

Отображение L класса C^1 определяет характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке u_2.

Пусть

$$\Omega = DL(0) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & S \end{pmatrix};$$

ясно, что Ω – квадратная матрица порядка (m+n) такая, что

$$\det\Omega > 0, \tag{0.16}$$

а A, S − квадратные матрицы порядка m и n соответственно. Обозначим через $C_1,...,C_n,S_1,...,S_n$ строки матриц C и S соответственно.

Предположим, что S имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & ... & s_{1n} \\ 0 & 0 & s_{23} & ... & s_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & s_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \tag{0.17}$$

т.е. все элементы, лежащие на главной диагонали и ниже, равны нулю. Ясно, что $\det S = 0$, поэтому точка u_2 является точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

При m = n = 1 матрица Ω имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

где a,b,c действительные числа, такие что $bc < 0$. Этот случай рассмотрен в главах 1, 2 диссертации.

Предположим, что отображение L в координатах x, y, имеет вид

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Omega\begin{pmatrix} x \\ y-y^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi\left(x, y-y^0\right) \\ G\left(y-y^0\right) + \Psi\left(x, y-y^0\right) \end{pmatrix}, \tag{0.18}$$

где Φ – m-мерная вектор-функция (n+m) аргументов класса C^1 такая, что Φ (0,0)=0. G и Ψ – n-мерные вектор-функции класса C^1 своих аргументов, такие что G(0)=0, Ψ (0,0)=0, причем у этих функций все производные первого порядка равны нулю в начале координат.

Пусть производные первого порядка функций Ф, Ψ ограничены в окрестности $\bar{U}$ постоянной $\bar{M}$.

Ясно, что вектор-функции Φ, Ψ, G – многомерные аналоги функций φ, ψ, g из главы 1.

Опишем подробнее свойства вектор-функций G, Ψ. Пусть Ψ_i – координатная функция вектор-функции Ψ с номером i (i = 1,2, … , n), предположим, что Ψ_i не зависит от $y_1, y_2, ..., y_i$, а именно,

$$\Psi_i = \Psi_i\left(x_1, ..., x_m, y_{i+1} - y_{i+1}^0, ..., y_n - y_n^0\right), \quad (0.19)$$

таким образом, Ψ_1– функция n+m-1 аргумента, а Ψ_n зависит только от x.

Положим

$$\bar{d} = \max\left[1, n\left(\|S\| + \bar{M}\right)\right].$$

Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке u_2 определяется свойствами вектор-функции G.

Запишем эту функцию в координатах

$$G\left(y - y^0\right) = \begin{pmatrix} G_1 \\ . \\ . \\ . \\ G_n \end{pmatrix}$$

и предположим, что G_i (i = 1,2, … ,n) является функцией i переменных, а именно,

$$G_i = G_i\left(y_1 - y_1^0, ..., y_i - y_i^0\right), i = 1, 2, ..., n, \quad (0.20)$$

ясно, что G_1 является функцией одной переменной.

Свойства функции G, которые определяют способ касания многообразий, как и в случае двумерного диффеоморфизма, опишем с помощью последовательностей σ_k, ε_k. Предположим, что элементы этих последовательностей удовлетворяют условиям (0.7), (0.8). Пусть j_k- возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\left(\lambda\mu\right)^{j_k} < \left(4\bar{d}\right)^{-n} \varepsilon_k. \tag{0.21}$$

В дальнейшем уточним, насколько быстро последовательность j_k стремится к бесконечности.

Пусть $\xi_k^2,...,\xi_k^n-$ произвольные положительные последовательности, стремящиеся к нулю, и такие, что произведения $\xi_k^i\left(\lambda\right)^{-j_k}$ ограничены при любых k и i = 2, … , n.

Обозначим через ξ_k, $\bar{x}_k$ следующие последовательности векторов

$$\xi_k = \mathrm{col}\left(\sigma_k, \xi_k^2, ..., \xi_k^n\right),$$

$$\bar{x}_k = \left[E - \Lambda^{j_k} A\right]^{-1} \Lambda^{j_k}\left(x^0 + B\xi_k\right),$$

нетрудно видеть, что $\det\left[E - \Lambda^{j_k} A\right] \neq 0$, при достаточно больших номерах k, поэтому определение $\bar{x}_k$ корректно.

Определим последовательности $\Delta_k^i, i = 1, 2, ..., n$ как

$$\Delta_k^1 = \varepsilon_k, \Delta_k^i = \left(4\bar{d}\right)^{1-i} \varepsilon_k \left(\mu_1 ... \mu_{i-1}\right)^{-j_k}.$$

Пусть функция G при любом k удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}
&\left|G_1\left(\sigma_k\right) - \mu_1^{-j_k}\left(y_1^0 + \sigma_k\right) + C_1\bar{x}_k + S_1\xi_k\right| < 0.25\mu_1^{-j_k}\varepsilon_k, \\
&\left|G_i\left(\sigma_k, \xi_k^2, ..., \xi_k^i\right) - \mu_i^{-j_k}\left(y_i^0 + \xi_k^i\right) + C_i\bar{x}_k + S_i\xi_k\right| < 0.25\mu_i^{-j_k}\Delta_k^i,
\end{aligned} \tag{0.22}$$

где i = 2, … , n.

Предположим, что при некоторой постоянной α > 1 и любом k производные функции G удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{dG_1\left(t_1\right)}{dt_1}\right| < \mu^{-\alpha j_k}, t_1 \in \left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right), \\
&\left|\frac{\partial G_i\left(t_1, ..., t_i\right)}{\partial t_s}\right| < \mu^{-\alpha j_k}, \\
&t_1 \in \left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right), t_l \in \left(\xi_k^l - \Delta_k^l, \xi_k^l + \Delta_k^l\right),
\end{aligned} \tag{0.23}$$

где $i = 2,...,n, s = 1,2,...,i, \ l = 2,...,i$.

Из условий (0.22), (0.23) следует, что все производные первого порядка функции G в нуле равны нулю, также, эти условия определяют характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке u_2 .

Ясно, что при $m = n = 1$ условия (0.22), (0.23) представляют собой условия (0.10), (0.11).

Основной результат третьей главы состоит в следующем.

Теорема 3.1. *Пусть f − диффеоморфизм (n+m)-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, предположим, что существует нетрансверсальная гомоклиническая к ней точка. Пусть выполнены условия* (0.8), (0.9), (0.12)-(0.23)*, тогда любая окрестность гомоклинической точки u_1 содержит счетное множество устойчивых неподвижных точек отображения $f^{j_k}L$, характеристические показатели которых, отрицательны и отделены от нуля.*

Из сформулированной теоремы следует, что исходный диффеоморфизм имеет счетное множество однообходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отрицательны и отделены от нуля.

Основные результаты третьей главы диссертации опубликованы в [6, 12, 15, 16, 20, 21-24].

ГЛАВА 1 ДИФФЕОМОРФИЗМЫ ПЛОСКОСТИ

1.1 ДИФФЕОМОРФИЗМЫ ПЛОСКОСТИ, ЛИНЕЙНЫЕ В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЯ

Пусть f − диффеоморфизм плоскости в себя с седловой неподвижной точкой в начале координат, т.е. $f(0)=0$.

Считаем, что f в некоторой окрестности V начала координат имеет вид

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}, \quad (x,y)\in V, \tag{1.1}$$

где $0<\lambda<1<\mu$, т.е. предполагается, что f линеен в V. Этот случай является наиболее простым и наглядным. В последующих разделах этой главы диссертации предположение о линейности диффеоморфизма в малой окрестности начала координат снимается и рассматривается общий случай.

Ясно, что матрица $Df(0)$ имеет вид

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

причем λ, μ ее собственные числа.

Предположим, что

$$\lambda\mu<1. \tag{1.2}$$

Пусть, как обычно, W^s – устойчивое многообразие точки 0, а W^u – неустойчивое многообразие. Ясно, что в окрестности V W^s_{loc} совпадает с осью $(0x)$, а W^u_{loc} – с осью $(0y)$.

Предполагается наличие нетрасверсальной гомоклинической точки w, т.е. $w\neq 0, w\in W^s\cap W^u$, причем устойчивое и неустойчивое многообразия касаются в точке w.

Цель раздела – показать, что при определенном способе касания устойчивого и неустойчивого многообразий диффеоморфизм f имеет счетное множество устойчивых периодических точек с характеристическими показателями, отделенными от нуля.

Первоначально гомоклинические точки появились в работах А.Пуанкаре [36]. Позднее исследованием гомоклинических точек занимался Г. Д. Биркгоф [4]. Из работы С.Смейла [37] следует, что любая окрестность трансверсальной гомоклинической точки содержит инвариантное множество, на котором диффеоморфизм топологически сопряжен с гомеоморфизмом сдвига, откуда следует, что любая расширенная окрестность траектории гомоклинической точки содержит бесконечное множество периодических точек.

Задача о полном описании динамики малой окрестности трансверсальной гомоклинической точки была решена Ю.И.Неймарком [33] и Л.П.Шильниковым [40].

В диссертации рассматривается случай нетрансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий.

Ранее окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки двумерного диффеоморфизма изучалась в работах Б.Ф.Иванова [32], Н.К.Гаврилова и Л.П.Шильникова [25], [26], Ш. Ньюхауса [1] и других авторов при специальных (впрочем, весьма естественных) условиях, наложенных на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

В диссертационной работе рассматривается несколько иной способ касания этих многообразий, чем в вышеперечисленных работах.

Пусть $\left(x^0,0\right),\left(0,y^0\right)$ − точки из орбиты гомоклинической точки, лежащие в V, такие, что

$$x^0>0, y^0>0 . \qquad (1.3)$$

Определим множество V_1 как

$$V_1 = \{(x, y) : |x| < \lambda^{-1}x^0, |y| < \mu y^0\}.$$

Предположим, что

$$V_1 \subset V. \tag{1.4}$$

Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число τ такое, что

$$f^{\tau}\begin{pmatrix} 0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть U_1, U_2 – выпуклые окрестности точек $(0, y^0), (x^0, 0)$ такие, что

$$U_1 \subset V_1, U_2 \subset V_1, f^{\tau}(U_1) \subset V_1, U_2 \subset f^{\tau}(U_1).$$

Определим в U_1 отображение L как

$$L = f^{\tau}\big|_{U_1}.$$

Предполагается, что L имеет следующий вид

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + ax + b(y - y^0) + \varphi(x, y - y^0) \\ cx + g(y - y^0) + \psi(x) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где *a, b, c* – действительные числа такие, что

$$b < 0, c > 0 \tag{1.6}$$

а *g, φ, ψ* – непрерывно дифференцируемые функции одной или двух переменных, определенные в окрестности начала координат, такие, что

$$\varphi(0,0) = \psi(0) = g(0) = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial y} = 0,$$
$$\psi'(0) = g'(0) = 0.$$

Пусть все первые производные функций *φ, ψ* ограничены в окрестности точки 0 постоянной *M*, т. е.

$$\left|\frac{\partial\varphi\left(x, y-y^0\right)}{\partial x}\right| \le M,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi\left(x, y-y^0\right)}{\partial y}\right| \le M,$$

$$(x, y) \in U_1,$$

$$\left|\psi'(x)\right| \le M,$$

последнее неравенство справедливо в окрестности нуля.

Ясно, что характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $\left(x^0, 0\right)$ определяется свойствами функции g, определенной ранее. Опишем свойства этой функции с помощью последовательностей. Пусть $\sigma_k, \varepsilon_k -$ положительные, стремящиеся к нулю последовательности, такие, что при любых k

$$\sigma_k > \sigma_{k+1} > 0, \varepsilon_k > 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k = \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0.$$

Предположим, что для любых k выполняются неравенства

$$\sigma_k - \varepsilon_k > \sigma_{k+1} + \varepsilon_{k+1}. \tag{1.7}$$

Из неравенств (1.7) следует, что интервалы $\left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right)$ не пересекаются, а именно,

$$\left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right) \cap \left(\sigma_{k+1} - \varepsilon_{k+1}, \sigma_{k+1} + \varepsilon_{k+1}\right) = \varnothing,$$

таким образом, любая окрестность точки 0 содержит счетное множество непересекающихся интервалов $\left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right)$.

Пусть $m_k -$ строго возрастающая последовательность натуральных чисел, т. е.

$$m_{k+1} \ge m_k + 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} m_k = +\infty.$$

Предположим, что при любых k справедливы неравенства

$$\left(\lambda\mu\right)^{m_k} < \varepsilon_k, \tag{1.8}$$

в дальнейшем уточним, насколько быстро последовательность m_k стремится к бесконечности.

Обозначим

$$d = \min\left[0.25, 0.25\left(|b| + M\right)^{-1}\right].$$

Кроме того, рассмотрим последовательность точек $r_k = \left(x_k, y_k\right)$ с координатами

$$x_k = \left(x^0 + b\sigma_k\right)\left(1 - a\lambda^{m_k}\right)^{-1},$$
$$y_k = \left(y^0 + \sigma_k\right)\mu^{-m_k}.$$

Ясно,

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^0, \lim_{k\to+\infty} y_k = 0.$$

Считаем, что $r_k \in U_2$.

Отметим свойства функции g.

1. g – такая непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля функция одной переменной, что

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

2. Пусть

$$\left|g\left(\sigma_k\right) + \lambda^{m_k} c x_k - y_k\right| < 0.25 d\varepsilon_k \mu^{-m_k}, \qquad (1.9)$$

при любых k.

3. Существует $\alpha>1$ такое, что при $t \in \left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right)$ и любых k справедливо неравенство

$$\left|g'(t)\right| < \mu^{-\alpha m_k}. \qquad (1.10)$$

Из условий (1.9), (1.10) следует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g\left(\sigma_k\right)}{\sigma_k} = \lim_{k\to\infty}\left(\mu^{m_k}\sigma_k\right)^{-1} = 0,$$

последние соотношения показывают, насколько быстро последовательность m_k стремится к бесконечности.

Заметим, что по фиксированным последовательностям σ_k, ε_k, удовлетворяющим вышеперечисленным свойствам, можно определить последовательность m_k и построить функцию g. Способ построения функции g приведен в разделе 3 этой главы.

Обозначим через B_k следующие множества

$$B_k = \left\{ (x, y) : \left| x - x_k \right| < \sigma_k, \left| y - y_k \right| < d\varepsilon_k \mu^{-m_k} \right\}.$$

Считаем, что

$$B_k \subset U_2 \text{ при любых } k. \tag{1.11}$$

Для любого фиксированного номера k рассмотрим конечную последовательность множеств $f^j(B_k), j = 0,1,\ldots,m_k$. В силу условий (1.1), (1.4) имеем

$$f^j(B_k) = \left\{ (x, y) : \left| x - \lambda^j x_k \right| < \lambda^j \sigma_k, \left| y - \mu^j y_k \right| < d\varepsilon_k \mu^{-m_k + j} \right\},$$
$$f^j(B_k) \subset V_1, \; j = 0,1,\ldots,m_k.$$

Лемма 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.1)-(1.11)*, тогда существует* k_0 *такое, что при* $k > k_0$*, справедливы включения*

$$Lf^{m_k}\left(\overline{B}_k\right) \subset B_k, \tag{1.12}$$

где $\overline{B}_k$ *замыкание* B_k.

Доказательство. Пусть

$$\overline{r}_k = \left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right) = f^{m_k}(r_k),$$
$$\overline{\overline{r}}_k = \left(\overline{\overline{x}}_k, \overline{\overline{y}}_k\right) = L\left(\overline{r}_k\right) = Lf^{m_k}(r_k).$$

Ясно, что из (1.1), (1.5) следует

$$\overline{x}_k = \lambda^{m_k} x_k,$$
$$\overline{y}_k = \mu^{m_k} y_k,$$
$$\overline{\overline{x}}_k = x^0 + a\lambda^{m_k} x_k + b\sigma_k + \varphi\left(\overline{x}_k, \sigma_k\right),$$
$$\overline{\overline{y}}_k = c\lambda^{m_k} x_k + g(\sigma_k) + \psi\left(\overline{x}_k\right),$$

или

$$\overline{\overline{x}}_k = x_k + \varphi\left(\overline{x}_k, \sigma_k\right),$$
$$\overline{\overline{y}}_k = y_k + \left(cx_k + g(\sigma_k) - y_k\right) + \psi\left(\overline{x}_k\right).$$

Очевидно, что справедливы следующие соотношения

$$\lim_{k\to+\infty}\overline{x}_k=0,\ \lim_{k\to+\infty}\overline{y}_k=y^0,$$
$$\lim_{k\to+\infty}\overline{\overline{x}}_k=x^0,\ \lim_{k\to+\infty}\overline{\overline{y}}_k=0.$$

Ясно, что при достаточно больших номерах k справедливы включения

$$\overline{r}_k\in U_1,\overline{\overline{r}}_k\in U_2,\ f^{m_k}\left(B_k\right)\subset U_1.$$

В дальнейшем рассматриваются номера k, для которых справедливы условия (1.11) и последние включения.

При любом фиксированном k применим к функциям $\varphi,\ \psi$ теорему о среднем значении, в результате получим

$$\varphi\left(\overline{x}_k,\sigma_k\right)=\frac{\partial\varphi\left(\xi_{1k}\overline{x}_k,\xi_{2k}\sigma_k\right)}{\partial x}\overline{x}_k+\frac{\partial\varphi\left(\xi_{1k}\overline{x}_k,\xi_{2k}\sigma_k\right)}{\partial y}\sigma_k,$$
$$\psi\left(\overline{x}_k\right)=\psi'\left(\xi_{3k}\overline{x}_k\right)\overline{x}_k,$$

где

$$0\le\xi_{ik}\le1,i=1,2,3.$$

Обозначим

$$\Delta_{1k}=\left|\frac{\partial\varphi\left(\xi_{1k}\overline{x}_k,\xi_{2k}\sigma_k\right)}{\partial x}\right|,$$
$$\Delta_{2k}=\left|\frac{\partial\varphi\left(\xi_{1k}\overline{x}_k,\xi_{2k}\sigma_k\right)}{\partial y}\right|,$$
$$\Delta_{3k}=\left|\psi'\left(\xi_{3k}\overline{x}_k\right)\right|.$$

Из свойств функций $\varphi,\ \psi$ следует

$$\lim_{k\to\infty}\Delta_{ik}=0,i=1,2,3.$$

Из последних соотношений следуют неравенства (для достаточно больших значений k)

$$\Delta_{1k}<1,$$
$$\Delta_{2k}<0.25,$$
$$\Delta_{3k}<0.125d\left(x^0\right)^{-1}.$$

Легко видеть, что

$$\left|\varphi\left(\bar{x}_k,\sigma_k\right)\right| \le \Delta_{1k}\left|\bar{x}_k\right| + \Delta_{2k}\sigma_k .$$

Кроме того, из условий (1.7), (1.8) следует

$$\sigma_k > \varepsilon_k > 0,$$
$$\lambda^{m_k} < \mu^{-m_k}\varepsilon_k,$$

откуда получим

$$\left|\bar{x}_k\right| < 0.25\sigma_k,$$

$$\left|\bar{x}_k\right| < 2\varepsilon_k\mu^{-m_k}x^0.$$

Легко видеть, с учетом последних неравенств, что

$$\left|\bar{\bar{x}}_k - x_k\right| < 0.5\sigma_k,$$
$$\left|\bar{\bar{y}}_k - y_k\right| < 0.5d\varepsilon_k\mu^{-m_k}.$$

Последние неравенства показывают, что $\left(\bar{\bar{x}}_k,\bar{\bar{y}}_k\right)\in B_k$.

Выберем произвольную точку $\left(x,y\right)\in \bar{B}_k$, ясно, что

$$x = x_k + u, y = y_k + v,$$
$$\left|u\right| \le \sigma_k, \left|v\right| \le d\varepsilon_k\mu^{-m_k}.$$

Пусть

$$\bar{u} = \lambda^{m_k}u, \bar{v} = \mu^{m_k}v,$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\bar{x}}\\ \bar{\bar{y}}\end{pmatrix} = Lf^{m_k}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Учитывая (1.5), (1.11), имеем

$$\bar{\bar{x}} = x^0 + a\left(\bar{x}_k + \bar{u}\right) + b\left(\sigma_k + \bar{v}\right) + \varphi\left(\bar{x}_k + \bar{u},\sigma_k + \bar{v}\right),$$
$$\bar{\bar{y}} = c\left(\bar{x}_k + \bar{u}\right) + g\left(\sigma_k + \bar{v}\right) + \psi\left(\bar{x}_k + \sigma_k\right),$$

таким образом, получим

$$\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}_k + a\bar{u} + b\bar{v} + \varphi\left(\bar{x}_k + \bar{u},\sigma_k + \bar{v}\right) - \varphi\left(\bar{x}_k,\sigma_k\right)$$
$$\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{y}}_k + c\bar{u} + g\left(\sigma_k + \bar{v}\right) - g\left(\sigma_k\right) + \psi\left(\bar{x}_k + \bar{u}\right) - \psi\left(\bar{x}_k\right)$$

Зафиксируем номер k и применим теорему о среднем значении к функциям φ, ψ, g

$$\varphi\left(\bar{x}_k+\bar{u},\sigma_k+\bar{v}\right)-\varphi\left(\bar{x}_k,\sigma_k\right)=\frac{\partial\varphi\left(\bar{x}_k+\theta_1\bar{u},\sigma_k+\theta_2\bar{v}\right)}{\partial x}\bar{u}+\frac{\partial\varphi\left(\bar{x}_k+\theta_1\bar{u},\sigma_k+\theta_2\bar{v}\right)}{\partial y}\bar{v},$$

$$\psi\left(\bar{x}_k+\bar{u}\right)-\psi\left(\bar{x}_k\right)=\psi'\left(\bar{x}_k+\theta_3\bar{u}\right)\bar{u},$$

$$g\left(\sigma_k+\bar{v}\right)-g\left(\sigma_k\right)=g'\left(\sigma_k+\theta_4\bar{v}\right)\bar{v},$$
$$0\le\theta_i\le 1, i=1,2,3,4.$$

Учитывая определение u, v, свойства функций φ, ψ и условия (1.10), получим

$$\left|\bar{\bar{x}}-\bar{\bar{x}}_k\right|\le\left(|a|+M\right)\lambda^{m_k}\sigma_k+\left(|b|+M\right)d\varepsilon_k,$$
$$\left|\bar{\bar{y}}-\bar{\bar{y}}_k\right|\le\left(|c|+M\right)\lambda^{m_k}\sigma_k+\mu^{-\alpha m_k}d\varepsilon_k.$$

Из условий(1.7), (1.8), (1.10) имеем

$$d\le 0.25\left(|b|+M\right),$$
$$\lambda^{m_k}<\mu^{-m_k}\varepsilon_k,$$
$$\mu^{-(\alpha-1)m_k}<0.25,$$
$$0<\varepsilon_k<\sigma_k.$$

В результате получим

$$\left|\bar{\bar{x}}-x_k\right|\le\left|\bar{\bar{x}}-\bar{\bar{x}}_k\right|+\left|\bar{\bar{x}}_k-x_k\right|<\sigma_k,$$
$$\left|\bar{\bar{y}}-y_k\right|\le\left|\bar{\bar{y}}-\bar{\bar{y}}_k\right|+\left|\bar{\bar{y}}_k-y_k\right|<d\varepsilon_k\mu^{-m_k}.$$

Последние неравенства доказывают лемму.

Теорема 1.1. *Пусть f − диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть выполнены условия* (1.1) - (1.11)*, тогда в любой окрестности гомоклинической точки* $\left(x^0,0\right)$ *содержится счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что при достаточно большом номере k множество B_k содержит неподвижную точку отображения Lf^{m_k}, которая является периодической точкой диффеоморфизма f с периодом $(\tau + m_k)$. Обозначим такие точки через (x_k^*, y_k^*) и оценим их характеристические показатели.

Введем следующие обозначения

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_k^* \\ \overline{y}_k^* \end{pmatrix} = f^{m_k} \begin{pmatrix} x_k^* \\ y_k^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{m_k} x_k^* \\ \mu^{m_k} y_k^* \end{pmatrix},$$

$$a_k = a + \frac{\partial \varphi\left(\overline{x}_k^*, \overline{y}_k^* - y^0\right)}{\partial x},$$

$$b_k = b + \frac{\partial \varphi\left(\overline{x}_k^*, \overline{y}_k^* - y^0\right)}{\partial y},$$

$$c_k = c + \psi'\left(\overline{x}_k^*\right),$$

$$g_k = g'\left(\overline{y}_k^* - y^0\right).$$

Легко видеть, что

$$\left|\left(\overline{y}_k^* - y^0\right) - \sigma_k\right| < \varepsilon_k ,$$

откуда, учитывая свойства функций *φ, ψ, g*, получим

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a,$$

$$\lim_{k\to\infty} b_k = b,$$

$$\lim_{k\to\infty} c_k = c,$$

$$\lim_{k\to\infty} g_k = 0.$$

Обозначим

$$Z_k = DLf^{m_k} \begin{pmatrix} x_k^* \\ y_k^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{m_k} a_k & \mu^{m_k} b_k \\ \lambda^{m_k} c_k & \mu^{m_k} g_k \end{pmatrix}.$$

Пусть $\rho_i(k), i = 1, 2$, – собственные числа матрицы Z_k. Ясно, что

$$\rho_i(k) = 0.5\mathrm{Tr}Z_k \pm 0.5\left(\left(\mathrm{Tr}Z_k\right)^2 - 4\det Z_k\right)^{0.5},$$

$$i = 1, 2,$$

где $\mathrm{Tr}Z_k$ – след матрицы Z_k, точнее, $\mathrm{Tr}Z_k = \lambda^{m_k} a_k + \mu^{m_k} g_k$.

Предположим, что для бесконечного числа номеров k справедливо неравенство

$$\left(\mathrm{Tr} Z_k\right)^2 - 4\det Z_k < 0 . \qquad (1.13)$$

В этом случае $\rho_i\left(k\right), i=1,2$, являются комплексно сопряженными величинами, поэтому

$$\left|\rho_i\left(k\right)\right| = \left(\det Z_k\right)^{0.5} = \left(\lambda\mu\right)^{0.5m_k}\left(a_k g_k - b_k c_k\right)^{0.5},$$
$$i=1,2,$$

при этом

$$\lim_{k\to\infty}\left(a_k g_k - b_k c_k\right)^{0.5} = \left(-bc\right)^{0.5} > 0 .$$

Известно, что характеристические показатели точек $\left(x_k^*, y_k^*\right)$ определяются как

$$\nu_i\left(k\right) = \left(m_k + \tau\right)^{-1}\ln\left|\rho_i\left(k\right)\right|,$$
$$i=1,2.$$

Предположим, что неравенства (1.13) справедливы для всех k, начиная с некоторого номера, тогда получаем, что

$$\lim_{k\to\infty}\nu_i\left(k\right) = 0.5\ln\left(\lambda\mu\right) < 0,\ i=1,2.$$

Ясно, что последние условия доказывают теорему в случае выполнения условий (1.13).

Предположим, что условия (1.13) не выполняются для всех номеров k (может быть, начиная с какого-то номера). Таким образом, пусть

$$\left(\mathrm{Tr} Z_k\right)^2 - 4\det Z_k \ge 0 , \qquad (1.14)$$

тогда $\rho_i\left(k\right), i=1,2,$ являются действительными величинами.

Заметим, что неравенства (1.14) могут выполняться только при условии

$$\mu^{-2(\alpha-1)} \ge \lambda\mu .$$

Оценим $\rho_i\left(k\right), i=1,2$, в случае выполнения условий (1.14), получим

$$\left|\rho_i(k)\right| \le \left|\mathrm{Tr}Z_k\right| \le \lambda^{m_k}\left|a_k\right| + \mu^{m_k}\left|g_k\right|,$$

откуда, с учетом (1.10), имеем

$$\left|\rho_i(k)\right| \le C\mu^{-(\alpha-1)m_k},$$

где C − положительная постоянная величина, не зависящая от k.

В результате, получим

$$\nu_i(k) \le -(\alpha-1)m_k(m_k+\tau)^{-1}\ln\mu + (m_k+\tau)^{-1}\ln C,$$
$$i=1,2.$$

Ясно, что при достаточно больших номерах k, справедливо неравенство

$$\nu_i(k) \le -0.5(\alpha-1)\ln\mu,$$
$$i=1,2.$$

Последние неравенства завершают доказательство теоремы.

1.2 ДИФФЕОМОРФИЗМЫ ПЛОСКОСТИ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе главы не предполагается, что исходный диффеоморфизм f плоскости в себя с неподвижной седловой точкой в начале координат является линейным в окрестности начала координат V.

Предположим, что в этой окрестности f имеет вид

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + p(x,y) \\ \mu y + q(x,y) \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

где функции p и q непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют следующим условиям

$$p(0,0) = q(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial p}{\partial y}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial q}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Пусть, как обычно, через $W^s(0)$ и $W^u(0)$ обозначены устойчивое и неустойчивое многообразия точки 0. С помощью гладкой замены переменных можно получить, что в V

$$q(x,0)=0, \quad p(0,y)=0. \tag{1.16}$$

Из последних условий следует, что в V $W^s_{loc}(0)$ совпадает с осью $(0x)$, а $W^u_{loc}(0)$ − с осью $(0y)$.

Ясно, что $Df(0)$ имеет следующий вид

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $0 < \lambda < 1 < \mu$ и выполнено условие (1.2).

Допустим, что существует нетрансверсальная гомоклиническая точка w, лежащая в V, т. е. $w \neq 0$ и $w \in W^u(0) \cap W^s(0)$.

Цель раздела − показать, что при определенном способе касания устойчивого и неустойчивого многообразий, а также при некоторых дополнительных условиях, диффеоморфизм f имеет счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. В предыдущем разделе предполагалось, что f линеен в окрестности точки 0, однако, известно, что нельзя утверждать, что произвольный диффеоморфизм допускает гладкую линеаризацию в окрестности седловой точки.

Фиксируем положительную величину θ, зависящую только от постоянных λ и μ, такую что

$$0<\lambda-\theta<\lambda+\theta<1<\mu-\theta<\mu+\theta, (\lambda+\theta)(\mu+\theta)<1. \tag{1.17}$$

Пусть $\left(x^0,0\right)$ и $\left(0,y^0\right)$ − точки из орбиты гомоклинической точки, лежащие в V, предположим, что выполнено условие (1.3) и имеет место включение (1.4).

Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число τ такое, что

$$f^\tau\begin{pmatrix}0\\y^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^0\\0\end{pmatrix}.$$

Пусть U − выпуклая окрестность точки $\left(0,y^0\right)$ такая, что

$$U\subset V_1,$$
$$f^\tau\left(U\right)\subset V_1.$$

Пусть $L=f^\tau\big|_U$, предполагаем, что в U отображение L задается формулой (1.5), точнее

$$L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^0+ax+b\left(y-y^0\right)+\varphi\left(x,y-y^0\right)\\cx+g\left(y-y^0\right)+\psi\left(x\right)\end{pmatrix},$$

где a, b, c – постоянные, φ, ψ, g – непрерывно дифференцируемые функции одной или двух переменных, удовлетворяющие следующим условиям

$$\begin{aligned}
&\varphi(0,0)=\psi(0)=g(0)=0,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)=0,\\
&\psi'(0)=0,\\
&g'(0)=0.
\end{aligned}$$

Последнее условие означает, что точка $(x^0,0)$ является точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразий. Известно, что $bc<0$, предположим, что выполнено условие (1.6).

Пусть M − положительная постоянная такая, что

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y-y^0)\right|\le M,\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y-y^0)\right|\le M,\\
&\left|\psi'(x)\right|\le M,\\
&(x,y-y^0)\in U.
\end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, свойства функции g, которые определяют касание устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $(x^0,0)$, опишем с помощью нескольких последовательностей. Пусть σ_k, ε_k – положительные последовательности, стремящиеся к нулю, кроме того, предположим, что последовательность σ_k убывает. Считаем, что при любом k выполнены неравенства (1.7). Пусть последовательность m_k − строго возрастающая последовательность натуральных чисел, т.е.

$$m_{k+1}\ge m_k+1,$$

при любых k. Считаем, что m_k стремится к бесконечности настолько быстро, что выполняется для любого k следующее условие

$$(\lambda+\theta)^{m_k}(\mu+\theta)^{m_k}<\varepsilon_k. \qquad (1.18)$$

Обозначим через d следующую величину

$$d = \min\left[0.25, 0.25\left(|b| + M\right)^{-1}\right].$$

Пусть $r_k = (x_k, y_k)$ последовательность точек, лежащих в V_1, таких, что

$$x_k = \frac{x^0 + b\sigma_k}{1 - \lambda^{m_k} a},$$
$$y_k = \frac{y^0 + \sigma_k}{\mu^{m_k}}.$$

Предположим, что непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля функция g такова, что $g(0) = g'(0) = 0$, кроме того выполнены следующие неравенства

$$\left|g(\sigma_k) + \lambda^{m_k} c x_k - y_k\right| < 0.25 d \varepsilon_k (\mu + \theta)^{-m_k}; \tag{1.19}$$

существует положительная $\alpha > 1$, такая что

$$\left|g'(t)\right| < (\mu + \theta)^{-\alpha m_k}, \tag{1.20}$$

при любых $t \in (\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k)$.

Условия (1.19), (1.20) определяют характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $(x^0, 0)$, ясно, что характер касания аналогичен касанию, описанному в предыдущем разделе.

Из условий (1.19), (1.20) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(\sigma_k)}{\sigma_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\mu^{m_k} \sigma_k\right)^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda^{m_k}}{\sigma_k} = 0.$$

Зафиксируем A_0 выпуклую окрестность точки $(x^0, 0)$ такую, что

$$A_0 \subset f^{\tau}(U) \subset V_1,$$
$$f(A_0) \cap A_0 = \varnothing.$$

Рассмотрим последовательность образов $f^j(A_0)$, где $j \geq 1$. Ясно, что $f^j\begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$, поэтому $f^j(A_0) \cap V_1 \neq \varnothing$.

Пусть A_j − компонента связности множества $f^j\left(A_0\right)\cap V_1$, содержащая точку $f^j\begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Определим окрестности точек r_k следующим образом

$$B_k^0 = \left\{\left(x,y\right): \left|x-x_k\right| < \sigma_k, \left|y-y_k\right| < \varepsilon_k d\left(\mu+\theta\right)^{-m_k}\right\}.$$

Считаем, что для любого *k* справедливо включение

$$B_k^0 \subset A_0, \tag{1.21}$$

заметим, что это условие может выполняться не для всех номеров k, а только для достаточно больших, в дальнейшем рассматриваются только такие номера *k*.

Для каждого фиксированного номера k определим конечную последовательность множеств

$$B_k^j = \left\{\left(x,y\right): \left|x-\lambda^j x_k\right| < \left(\lambda+\theta\right)^j \sigma_k, \left|y-\mu^j y_k\right| < \varepsilon_k d\left(\mu+\theta\right)^{-m_k+j}\right\},$$

где $j = 0,1,...,m_k$.

Ясно, что

$$B_k^j \subset V_1, \tag{1.22}$$

при достаточно больших номерах *k* и $j = 0,1,...,m_k$.

Обозначим через β и Δ следующие положительные величины, удовлетворяющие условиям

$$0 < \Delta < 0.5\theta,$$

$$\beta > -\frac{\ln\left(\lambda+\theta\right)}{\ln\left(\mu+\theta\right)}.$$

Пусть функции *p* и *q* таковы, что при любых k выполняются условия

$$\begin{aligned} &\left|p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| < 0.5\theta\left(\lambda+\theta\right)^j \sigma_k, \\ &\left|q\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| < 0.5\theta\varepsilon_k d\left(\mu+\theta\right)^{-m_k+j}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

где $0 \le j \le m_k - 1$,

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}(x.y)\right| < \Delta,$$
$$\left|\frac{\partial q}{\partial y}(x,y)\right| < \Delta,$$
$$\left|\frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right| < (\mu+\theta)^{-\beta m_k},$$
$$\left|\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)\right| < (\mu+\theta)^{-\beta m_k},$$
$$(x,y)\in B_k^j, 0\le j\le m_k-1. \tag{1.24}$$

Из условий (1.24) следует

$$p\left(\lambda^j x^0,0\right)=q\left(\lambda^j x^0,0\right)=0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}\left(\lambda^j x^0,0\right)=\frac{\partial q}{\partial x}\left(\lambda^j x^0,0\right)=0,$$

последние равенства означают, что точки $\left(\lambda^j x^0,0\right)$, при $j\ge 0$, принадлежат орбите гомоклинической точки, причем характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в этих точках аналогичен характеру касания этих многообразий в точке $\left(x^0,0\right)$. Отметим, что в разделе 1 данной главы предполагалось, что функции p, q тождественно равны нулю в V, поэтому условия (1.23), (1.24) для этих функций выполняются, однако, не каждый диффеоморфизм допускает гладкую линеаризацию в окрестности седловой точки, поэтому общий случай рассматривается отдельно.

Прежде чем доказывать основное утверждение раздела докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены условия* (1.2)-(1.7), (1.15)-(1.24), *тогда при достаточно больших номерах k справедливо следующее включение*

$$f\left(\bar{B}_k^j\right)\subset \bar{B}_k^{j+1}, j=0,1,...,m_k-1. \tag{1.25}$$

Доказательство. Пусть натуральная величина k настолько велика, что выполнено (1.22). Кроме того, считаем, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned}&\sigma_k < 0.5\theta - \Delta,\\ &\left[(\lambda+\theta)(\mu+\theta)^{\beta}\right]^{-m_k} < 0.5\theta - \Delta.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Фиксируем произвольную точку $(x, y) \in \overline{B}_k^0$. Ясно, что ее можно представить как

$$x = x_k + u, y = y_k + v,$$

где

$$|u| \le \sigma_k, |v| \le \varepsilon_k d(\mu+\theta)^{-m_k}.$$

Пусть

$$\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

тогда

$$\overline{x} = \lambda(x_k + u) + p(x_k + u, y_k + v) - p(x_k, y_k) + p(x_k, y_k).$$

Используя условия (1.23), (1.24), а также теорему о среднем значении функции, получим

$$\begin{aligned}&|\overline{x} - \lambda x_k| \le \lambda|u| + |p(x_k, y_k)| + |p(x_k + u, y_k + v) - p(x_k, y_k)| <\\ &< \lambda|u| + 0.5\theta\sigma_k + \left|\frac{\partial p}{\partial x}(x_k + \xi_1 u, y_k + \xi_2 v)\right||u| + \left|\frac{\partial p}{\partial y}(x_k + \xi_1 u, y_k + \xi_2 v)\right||v|,\end{aligned}$$

$$\text{где } 0 \le \xi_1 \le 1, 0 \le \xi_2 \le 1,$$

откуда

$$|\overline{x} - \lambda x_k| < (\lambda + 0.5\theta + \Delta)\sigma_k + \varepsilon_k d(\mu+\theta)^{-\beta m_k}.$$

Пусть k настолько велика, что

$$\begin{aligned}&d(\mu+\theta)^{-\beta m_k} < 0.5\theta - \Delta,\\ &0 < \varepsilon_k < \sigma_k,\end{aligned}$$

поэтому, при таких k имеем

$$|\overline{x} - \lambda x_k| < (\lambda+\theta)\sigma_k. \tag{1.27}$$

Аналогично,

$$\bar{y} = \mu(y_k + v) + q(x_k + u, y_k + v) - q(x_k, y_k) + q(x_k, y_k),$$

оценим, используя теорему о среднем значении и условия (1.23), (1.24), получим

$$|\bar{y} - \mu y_k| \le \mu |v| + |q(x_k, y_k)| + |q(x_k + u, y_k + v) - q(x_k, y_k)| <$$

$$< \mu |v| + 0.5\theta\varepsilon_k d(\mu+\theta)^{-m_k} + \left|\frac{\partial q}{\partial x}(x_k + \xi_1 u, y_k + \xi_2 v)\right| |u| + \left|\frac{\partial q}{\partial y}(x_k + \xi_1 u, y_k + \xi_2 v)\right| |v|$$

где $0 \le \xi_1 \le 1, 0 \le \xi_2 \le 1$.

В результате

$$|\bar{y} - \mu y_k| < (\mu + 0.5\theta + \Delta)\varepsilon_k d(\mu+\theta)^{-m_k} + \sigma_k (\mu+\theta)^{-\beta m_k}.$$

В силу условий (1.17), (1.18) имеем для больших значений k

$$\varepsilon_k d(\mu+\theta)^{-m_k} > d(\lambda+\theta)^{m_k} > d(\mu+\theta)^{-\beta m_k} > (0.5\theta - \Delta)^{-1} \sigma_k (\mu+\theta)^{-\beta m_k}, \quad (1.28)$$

окончательно имеем

$$|\bar{y} - \mu y_k| < (\mu+\theta)\varepsilon_k d(\mu+\theta)^{-m_k}.$$

Последние неравенства и неравенства (1.27) показывают, что справедливо включение

$$f(\bar{B}_k^0) \subset B_k^1.$$

Рассмотрим общий случай.

Пусть

$$(x, y) \in \bar{B}_k^j, 0 \le j \le m_k - 1.$$

Ясно, что

$$x = \lambda^j x_k + u,$$
$$y = \mu^j y_k + v,$$
$$|u| \le (\lambda+\theta)^j \sigma_k,$$
$$|v| \le \varepsilon_k d(\mu+\theta)^{-m_k + j}$$

Пусть, как и в предыдущем случае,

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

откуда

$$\overline{x} = \lambda\left(\lambda^j x_k + u\right) + p\left(\lambda^j x_k + u, \mu^j y_k + v\right) - p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right) + p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right).$$

Аналогично, применяя теорему о среднем значении и условия (1.23), (1.24), получим

$$\left|\overline{x} - \lambda^{j+1} x_k\right| \le \lambda |u| + \left|p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| + \left|p\left(\lambda^j x_k + u, \mu^j y_k + v\right) - p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| <$$

$$< \lambda |u| + 0.5\theta\left(\lambda + \theta\right)^j \sigma_k + \left|\frac{\partial p}{\partial x}\left(\lambda^j x_k + \xi_1 u, \mu^j y_k + \xi_2 v\right)\right| |u| +$$

$$+ \left|\frac{\partial p}{\partial y}\left(\lambda^j x_k + \xi_1 u, \mu^j y_k + \xi_2 v\right)\right| |v|,$$

где $0 \le \xi_1 \le 1, 0 \le \xi_2 \le 1$, откуда

$$\left|\overline{x} - \lambda^{j+1} x_k\right| < \left(\lambda + 0.5\theta + \Delta\right)\left(\lambda + \theta\right)^j \sigma_k + \left(\mu + \theta\right)^{-\beta m_k} \varepsilon_k d \left(\mu + \theta\right)^{-m_k + j}.$$

Используя условия (1.17), (1.18), имеем

$$\left(\mu + \theta\right)^{-\beta m_k} \varepsilon_k d \left(\mu + \theta\right)^{-m_k + j} < \sigma_k \left(\mu + \theta\right)^{-\beta m_k} \left(\mu + \theta\right)^{-m_k + j} <$$

$$< \left(0.5\theta - \Delta\right) \sigma_k \left(\lambda + \theta\right)^{m_k} \left(\mu + \theta\right)^{-m_k + j} < \left(0.5\theta - \Delta\right) \sigma_k \left(\lambda + \theta\right)^j,$$

таким образом

$$\left|\overline{x} - \lambda^{j+1} x_k\right| < \left(\lambda + \theta\right)^{j+1} \sigma_k. \tag{1.29}$$

Аналогично,

$$\overline{y} = \mu\left(\mu^j y_k + v\right) + q\left(\lambda^j x_k + u, \mu^j y_k + v\right) - q\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right) + q\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right),$$

откуда

$$\left|\overline{y} - \mu^{j+1} y_k\right| \le \mu |v| + \left|q\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| + \left|q\left(\lambda^j x_k + u, \mu^j y_k + v\right) - q\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| <$$

$$< \mu |v| + 0.5\theta \varepsilon_k d \left(\mu + \theta\right)^{-m_k + j} + \left|\frac{\partial q}{\partial x}\left(\lambda^j x_k + \xi_1 u, \mu^j y_k + \xi_2 v\right)\right| |u| +$$

$$+ \left|\frac{\partial q}{\partial y}\left(\lambda^j x_k + \xi_1 u, \mu^j y_k + \xi_2 v\right)\right| |v|,$$

где $0 \le \xi_1 \le 1, 0 \le \xi_2 \le 1$, следовательно,

$$\left|\overline{y} - \mu^{j+1} y_k\right| < \left(\mu + 0.5\theta + \Delta\right) \varepsilon_k d \left(\mu + \theta\right)^{-m_k + j} + \left(\lambda + \theta\right)^j \sigma_k \left(\mu + \theta\right)^{-\beta m_k}.$$

Из неравенства (1.28) следует

$$(\lambda+\theta)^{j}\sigma_k(\mu+\theta)^{-\beta m_k} < (0.5\theta-\Delta)\varepsilon_k d(\mu+\theta)^{-m_k+j}.$$

Окончательно получим

$$\left|\bar{y}-\mu^{j+1}y_k\right| < \varepsilon_k d(\mu+\theta)^{-m_k+j+1}.$$

Последние неравенства и неравенства (1.29) доказывают лемму.

Из леммы 1.2 следуют включения

$$B_k^j \subset A_j,\ j=0,1,\dots,m_k,$$
$$f^{m_k}\left(\bar{B}_k^0\right) \subset B_k^{m_k} \subset A_{m_k}.$$

Рассмотрим подробнее

$$B_k^{m_k} = \left\{(x,y): \left|x-\lambda^{m_k}x_k\right| < (\lambda+\theta)^{m_k}\sigma_k, \left|y-\mu^{m_k}y_k\right| < \varepsilon_k d\right\},$$

в дальнейшем, считаем k настолько большой, что

$$\bar{B}_k^{m_k} \subset U. \tag{1.30}$$

Лемма 1.3. *Пусть выполнены условия* (1.2)-(1.7), (1.15) (1.24),(1.30), *тогда при достаточно больших k справедливы следующие включения*

$$L\left(\bar{B}_k^{m_k}\right) \subset B_k^0. \tag{1.31}$$

Доказательство. Обозначим

$$\bar{x}_k = \lambda^{m_k}x_k = \lambda^{m_k}\frac{x^0+b\sigma_k}{1-\lambda^{m_k}a},$$
$$\bar{y}_k = \mu^{m_k}y_k = y^0+\sigma_k,$$
$$\begin{pmatrix}\bar{\bar{x}}_k\\ \bar{\bar{y}}_k\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}\bar{x}_k\\ \bar{y}_k\end{pmatrix}.$$

Из определения L имеем

$$\bar{\bar{x}}_k = x^0 + a\bar{x}_k + b\sigma_k + \varphi(\bar{x}_k,\sigma_k),$$
$$\bar{\bar{y}}_k = c\bar{x}_k + g(\sigma_k) + \psi(\bar{x}_k).$$

Легко видеть, что

$$x_k = x^0 + a\bar{x}_k + b\sigma_k,$$

таким образом

$$\left|\overline{\overline{x}}_k - x_k\right| = \left|\varphi\left(\overline{x}_k, \sigma_k\right)\right|.$$

Применив теорему о среднем значении, получим

$$\varphi\left(\overline{x}_k, \sigma_k\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\xi_1\overline{x}_k, \xi_2\sigma_k\right)\overline{x}_k + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\xi_1\overline{x}_k, \xi_2\sigma_k\right)\sigma_k,$$

где $0 \le \xi_1 \le 1, 0 \le \xi_2 \le 1$.

Обозначим

$$\Delta_{1k} = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\xi_1\overline{x}_k, \xi_2\sigma_k\right)\right|,$$

$$\Delta_{2k} = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\xi_1\overline{x}_k, \xi_2\sigma_k\right)\right|.$$

Ясно, что

$$\lim_{k\to\infty}\Delta_{1k} = \lim_{k\to\infty}\Delta_{2k} = 0,$$

$$\left|\varphi\left(\overline{x}_k, \sigma_k\right)\right| \le \Delta_{1k}\left|\overline{x}_k\right| + \Delta_{2k}\sigma_k,$$

$$\left|\overline{x}_k\right| < 0.25\sigma_k.$$

Пусть величина k такова, что

$$\Delta_{1k} < 1, \Delta_{2k} < 0.25,$$

тогда

$$\left|\overline{\overline{x}}_k - x_k\right| < 0.5\sigma_k. \tag{1.32}$$

Далее, применим теорему Лагранжа к функции ψ, т.е.

$$\psi\left(\overline{x}_k\right) = \psi'\left(\xi_3\overline{x}_k\right)\overline{x}_k,$$
$$0 \le \xi_3 \le 1.$$

Обозначим

$$\Delta_{3k} = \left|\psi'\left(\xi_3\overline{x}_k\right)\right|.$$

Ясно, что эта последовательность стремится к нулю, если k стремится к бесконечности, поэтому считаем, что $\Delta_{3k} < 1$.

Следовательно, имеем

$$\left|\bar{\bar{y}}_k - y_k\right| \le \left|c\bar{x}_k + g\left(\sigma_k\right) - y_k\right| + \left|\psi\left(\sigma_k\right)\right| < 0.25\varepsilon_k d\left(\mu+\theta\right)^{-m_k} + \Delta_{3k}\left|\bar{x}_k\right|.$$

Из (1.18) следует

$$\lambda^{m_k} < \varepsilon_k\left(\mu+\theta\right)^{-m_k}\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-m_k},$$

откуда, при достаточно больших значениях k получим

$$\left|\bar{\bar{y}}_k - y_k\right| < 0.5\varepsilon_k d\left(\mu+\theta\right)^{-m_k}.$$

Из последних неравенств и неравенства (1.32) следует

$$\left(\bar{\bar{x}}_k, \bar{\bar{y}}_k\right) \in B_k^0.$$

Пусть величина k такова, что имеют место последние включения, возьмем произвольную точку

$$\left(x, y\right) \in \bar{B}_k^{m_k}.$$

Ясно, что

$$x = \bar{x}_k + u, y = \bar{y}_k + v,$$
$$|u| \le \left(\lambda+\theta\right)^{m_k}\sigma_k, |v| \le \varepsilon_k d.$$

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{\bar{x}} = x^0 + a\left(\bar{x}_k + u\right) + b\left(\sigma_k + v\right) + \varphi\left(\bar{x}_k + u, \sigma_k + v\right),$$
$$\bar{\bar{y}} = c\left(\bar{x}_k + u\right) + g\left(\sigma_k + v\right) + \psi\left(\bar{x}_k + u\right).$$

Оценим разность

$$\left|\bar{\bar{x}} - x_k\right| \le \left|\bar{\bar{x}} - \bar{\bar{x}}_k\right| + \left|\bar{\bar{x}}_k - x_k\right|,$$

точнее

$$\left|\bar{\bar{x}} - \bar{\bar{x}}_k\right| \le |au| + |bv| + \left|\varphi\left(\bar{x}_k + u, \sigma_k + v\right) - \varphi\left(\bar{x}_k, \sigma_k\right)\right|.$$

Еще раз, применив теорему о среднем значении, получим

$$\left|\varphi\left(\overline{x}_k+u,\sigma_k+v\right)-\varphi\left(\overline{x}_k,\sigma_k\right)\right|\le\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\overline{x}_k+\xi_1 u,\sigma_k+\xi_2 v\right)\right||u|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\overline{x}_k+\xi_1 u,\sigma_k+\xi_2 v\right)\right||v|$$

где $0\le\xi_1\le1, 0\le\xi_2\le1$, откуда

$$\left|\overline{\overline{x}}-\overline{\overline{x}}_k\right|\le\left(|a|+M\right)|u|+\left(|b|+M\right)|v|\le\left(|a|+M\right)\left(\lambda+\theta\right)^{m_k}\sigma_k+\left(|b|+M\right)\varepsilon_k d\ ,$$

следовательно, при достаточно больших значениях k, получим

$$\left|\overline{\overline{x}}-x_k\right|<\sigma_k. \tag{1.33}$$

Аналогично, оценим разность

$$\left|\overline{\overline{y}}-y_k\right|\le\left|\overline{\overline{y}}-\overline{\overline{y}}_k\right|+\left|\overline{\overline{y}}_k-y_k\right|,$$

точнее

$$\left|\overline{\overline{y}}-\overline{\overline{y}}_k\right|\le|cu|+\left|g\left(\sigma_k+v\right)-g\left(\sigma_k\right)\right|+\left|\psi\left(\overline{x}_k+u\right)-\psi\left(\overline{x}_k\right)\right|.$$

Применяя теорему Лагранжа к функциям ψ и g, а также, учитывая условия (1.20), имеем

$$\left|\overline{\overline{y}}-\overline{\overline{y}}_k\right|\le\left(|c|+M\right)|u|+\left(\mu+\theta\right)^{-\alpha m_k}|v|.$$

Используя условия (1.18), получим, что при достаточно больших значениях k, справедливо следующее неравенство

$$\left|\overline{\overline{y}}-y_k\right|<\varepsilon_k d\left(\mu+\theta\right)^{-m_k}.$$

Последние неравенства и неравенства (1.33) доказывают лемму.

Лемма 1.4. *Дана последовательность матриц второго порядка*

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}(l) & \alpha_{12}(l)\\ \alpha_{21}(l) & \alpha_{22}(l)\end{pmatrix},$$
$$l=1,2...,$$

пусть $\left|\alpha_{ij}(l)\right|\le\beta_{ij}$, *где* i=1,2, j=1,2, l=1,2,*…. Обозначим через*

$$\prod_{l=1}^{k}\begin{pmatrix}\alpha_{11}(l) & \alpha_{12}(l)\\ \alpha_{21}(l) & \alpha_{22}(l)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k)\\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k)\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\delta_{11}(k) & \delta_{12}(k)\\ \delta_{21}(k) & \delta_{22}(k)\end{pmatrix},$$

тогда

$$\left|\gamma_{ij}(k)\right| \le \delta_{ij}(k), \text{ где } i=1,2,\ j=1,2,\ k=1,2,\ldots$$

Доказательство. Доказательство проведем с помощью метода математической индукции. При $k=1$ утверждение очевидно, следовательно, база индукции установлена. Докажем индукционный переход, используя следующие очевидные соотношения

$$\gamma_{ij}(k+1) = \gamma_{i1}(k)\alpha_{1j}(k+1) + \gamma_{i2}(k)\alpha_{2j}(k+1),$$
$$\delta_{ij}(k+1) = \delta_{i1}(k)\beta_{1j} + \delta_{i2}(k)\beta_{2j}.$$

Применив индукционное предположение, получим

$$\left|\gamma_{ij}(k+1)\right| \le \left|\gamma_{i1}(k)\right|\left|\alpha_{1j}(k+1)\right| + \left|\gamma_{i2}(k)\right|\left|\alpha_{2j}(k+1)\right| \le \delta_{i1}(k)\beta_{1j} + \delta_{i2}(k)\beta_{2j},$$

где $I = 1,2$, $j = 1,2$.

Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. *Пусть* $0<\lambda<1<\mu<\gamma$, $\lambda\mu<1$, $\lambda\gamma>1$, $\tau = \max\left[\lambda, \mu\gamma^{-2}\right]$, *тогда*

$$\begin{pmatrix} \lambda & \gamma^{-k} \\ \gamma^{-k} & \mu \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \tau^k\left(c_1 + \delta_1(k)\right) & \left(\mu\gamma^{-1}\right)^k\left(c_2 + \delta_2(k)\right) \\ \left(\mu\gamma^{-1}\right)^k\left(c_2 + \delta_2(k)\right) & \mu^k\left(1 + \delta_3(k)\right) \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 *– постоянные, а* $\delta_1(k), \delta_2(k), \delta_3(k)$ *– бесконечно малые при* $k \to \infty$.

Доказательство. Найдем собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma^{-k} \\ \gamma^{-k} & \mu \end{pmatrix},$$

ясно, что они имеют следующий вид

$$\rho_1 = 0.5(\lambda+\mu) - 0.5(\mu-\lambda)\left(1 + 4(\mu-\lambda)^{-2}\gamma^{-2k}\right)^{0.5},$$
$$\rho_2 = 0.5(\lambda+\mu) + 0.5(\mu-\lambda)\left(1 + 4(\mu-\lambda)^{-2}\gamma^{-2k}\right)^{0.5},$$

или, учитывая известную формулу,

$$(1+x)^{0.5} = 1 + 0.5x\left(1 + \alpha(x)\right),$$

где $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = 0$, получим

$$\rho_1 = \lambda - (\mu-\lambda)^{-1}\gamma^{-2k}\left(1+\alpha(k)\right),$$
$$\rho_2 = \mu + (\mu-\lambda)^{-1}\gamma^{-2k}\left(1+\alpha(k)\right),$$

где $\alpha(k)$ − бесконечно малая.

Известно, что
$$A^k = TJ^kT^{-1},$$
где J – каноническая жорданова форма матрицы A, а T − матрица перехода.

Легко видеть, что
$$J = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix},$$
$$T = \begin{pmatrix} \gamma^{-k} & \rho_2-\mu \\ \rho_1-\lambda & \gamma^{-k} \end{pmatrix},$$
$$T^{-1} = (\det T)^{-1}\begin{pmatrix} \gamma^{-k} & \mu-\rho_2 \\ \lambda-\rho_1 & \gamma^{-k} \end{pmatrix},$$
$$\det T = \gamma^{-2k} - (\rho_1-\lambda)(\rho_2-\mu) = \gamma^{-2k}\left[1+\gamma^{-2k}(\mu-\lambda)^{-2}\left(1+\alpha(k)\right)^2\right],$$
таким образом
$$(\det T)^{-1} = \gamma^{2k}\left(1+\delta(k)\right),$$
где $\delta(k)$ − бесконечно малая.

В результате вычислений получим
$$A^k = (\det T)^{-1}\begin{pmatrix} \gamma^{-2k}\rho_1^k + (\rho_2-\mu)(\lambda-\rho_1)\rho_2^k & \gamma^{-k}(\rho_2-\mu)(\rho_2^k-\rho_1^k) \\ \gamma^{-k}(\lambda-\rho_1)(\rho_2^k-\rho_1^k) & \gamma^{-2k}\rho_2^k + (\rho_1-\lambda)(\mu-\rho_2)\rho_1^k \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим
$$\rho_1^k = \left[\lambda-(\mu-\lambda)\gamma^{-2k}\left(1+\alpha(k)\right)\right]^k = \lambda^k\left[1-\lambda^{-1}(\mu-\lambda)^{-1}\gamma^{-2k}\left(1+\alpha(k)\right)\right]^k,$$
легко видеть, что
$$\lim_{k\to\infty}\left[1-\lambda^{-1}(\mu-\lambda)^{-1}\gamma^{-2k}\left(1+\alpha(k)\right)\right]^k = 1,$$

откуда

$$\rho_1^k = \lambda^k \left(1 + \beta_1(k)\right),$$

где $\beta_1(k)$ − бесконечно малая.

Аналогично получим

$$\rho_2^k = \mu^k \left(1 + \beta_2(k)\right),$$

$$\rho_2^k - \rho_1^k = \mu^k \left(1 + \beta_3(k)\right),$$

где $\beta_2(k), \beta_3(k)$ − бесконечно малые.

Обозначим элементы матрицы

$$A^k = \left\{a_{ij}(k)\right\}, i = 1,2, j = 1,2,$$

тогда

$$a_{11}(k) = \left(1+\delta(k)\right)\left[\lambda^k\left(1+\beta_1(k)\right) + \left(\mu\gamma^{-2}\right)^k (\mu-\lambda)^{-2}\left(1+\alpha(k)\right)^2\left(1+\beta_2(k)\right)\right],$$

$$a_{12}(k) = a_{21}(k) = \left(1+\delta(k)\right)\left(\mu\gamma^{-1}\right)^k (\mu-\lambda)^{-1}\left(1+\alpha(k)\right)\left(1+\beta_3(k)\right),$$

$$a_{22}(k) = \left(1+\delta(k)\right)\left[\mu^k\left(1+\beta_3(k)\right) + \left(\lambda\gamma^{-2}\right)^k (\mu-\lambda)^{-2}\left(1+\alpha(k)\right)^2\left(1+\beta_1(k)\right)\right].$$

Ясно, что из последних соотношений следует утверждение леммы 1.5.

Теорема 1.2. *Пусть f − диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предположим, что выполнены условия* (1.2) - (1.7), (1.15) - (1.24), (1.30), *тогда в любой окрестности гомоклинической точки* $\left(x^0, 0\right)$ *содержится счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательство. Из лемм 1.2, 1.3 следует, что для достаточно больших номеров k справедливо включение

$$Lf^{m_k}\left(\bar{B}_k^0\right) \subset B_k^0 .$$

Таким образом, внутри множества B_k^0 лежит неподвижная точка отображения Lf^{m_k}, которая является периодической точкой диффеоморфизма f с периодом $\tau + m_k$. Обозначим эти точки (x_{k0}, y_{k0}), кроме того, для каждой такой точки при фиксированном k рассмотрим точки из ее орбиты

$$\begin{pmatrix} x_{kj} \\ y_{kj} \end{pmatrix} = f^j \begin{pmatrix} x_{k0} \\ y_{k0} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \ldots, m_k.$$

Ясно, что $(x_{kj}, y_{kj}) \in B_k^j$, $j = 0, 1, \ldots, m_k$.

Пусть

$$\begin{aligned} a_k &= a + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x_{km_k}, y_{km_k} - y^0\right), \\ b_k &= b + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(x_{km_k}, y_{km_k} - y^0\right), \\ c_k &= c + \psi'\left(x_{km_k}\right), \\ g_k &= g'\left(y_{km_k} - y^0\right). \end{aligned}$$

Ясно, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a, \lim\limits_{k\to\infty} b_k = b, \lim\limits_{k\to\infty} c_k = c, \lim\limits_{k\to\infty} g_k = 0.$

Пусть

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{m_k - 1} \begin{pmatrix} \lambda + \frac{\partial p}{\partial x}\left(x_{kj}, y_{kj}\right) & \frac{\partial p}{\partial y}\left(x_{kj}, y_{kj}\right) \\ \frac{\partial q}{\partial x}\left(x_{kj}, y_{kj}\right) & \mu + \frac{\partial q}{\partial y}\left(x_{kj}, y_{kj}\right) \end{pmatrix},$$

$$Z_k = DLf^{m_k} \begin{pmatrix} x_{k0} \\ y_{k0} \end{pmatrix},$$

тогда

$$Z_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & g_k \end{pmatrix} \Gamma .$$

Наша задача − оценить собственные числа матрицы Z_k, для этого рассмотрим матрицу

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \Delta & \left(\mu + \theta\right)^{-\beta m_k} \\ \left(\mu + \theta\right)^{-\beta m_k} & \mu + \Delta \end{pmatrix}^{m_k},$$

согласно условиям (1.24) и лемме 1.4 для элементов матриц Г и Ω справедливы неравенства

$$\left|\gamma_{ij}\right| \le \omega_{ij}, \text{ где } i=1,2,\ j=1,2.$$

Обозначим через η_1, η_2 следующие величины

$$\eta_1 = \max\left[\lambda + \Delta, \left(\mu + \Delta\right)\left(\mu + \theta\right)^{-2\beta}\right],$$
$$\eta_2 = \left(\mu + \Delta\right)\left(\mu + \theta\right)^{-\beta}.$$

Ясно, что

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < 1.$$

Применив лемму 1.5, получим

$$\left|\gamma_{11}\right| \le \omega_{11} \le \eta_1^{m_k}\left(C_1 + \delta_1\left(k\right)\right),$$
$$\left|\gamma_{12}\right| \le \omega_{12} \le \eta_2^{m_k}\left(C_2 + \delta_2\left(k\right)\right),$$
$$\left|\gamma_{21}\right| \le \omega_{21} \le \eta_2^{m_k}\left(C_2 + \delta_2\left(k\right)\right),$$
$$\left|\gamma_{22}\right| \le \omega_{22} \le \left(\mu + \Delta\right)^{m_k}\left(C_3 + \delta_3\left(k\right)\right).$$

В последних неравенствах C_1, C_2, C_3 − постоянные величины, а $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ − бесконечно малые при $k \to \infty$.

Пусть ρ_1, ρ_2 − собственные числа матрицы Z_k, ясно, что

$$\rho_1 + \rho_2 = \mathrm{Tr} Z_k = a_k\gamma_{11} + b_k\gamma_{21} + c_k\gamma_{12} + g_k\gamma_{22},$$
$$\rho_1\rho_2 = \det Z_k = \det\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & g_k \end{pmatrix}\det\Gamma = \left(a_k g_k - b_k c_k\right)\left(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}\right).$$

Очевидно, что $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ и произведения $g_k\gamma_{22}$, $\gamma_{11}\gamma_{22}$ являются бесконечно малыми величинами при $k \to \infty$. Последовательности a_k, b_k, c_k ограничены, поэтому $\left(\rho_1 + \rho_2\right), \rho_1\rho_2$ − бесконечно малые величины при $k \to \infty$.

Пусть

$$z_1 = \max\left[\eta_2, (\mu+\Delta)(\mu+\theta)^{-\alpha}\right],$$
$$z_2 = \max\left[(\eta_2)^2, (\lambda+\Delta)(\mu+\Delta)\right].$$

Ясно, что

$$0 < z_1 < 1, 0 < z_2 < 1,$$

поэтому получим

$$|\rho_1 + \rho_2| \le h_1(k) z_1^{m_k},$$
$$\rho_1\rho_2 \le h_2(k) z_2^{m_k},$$

где $h_1(k), h_2(k)$ ограничены при $k\to\infty$.

Предположим, что неравенство

$$(\mathrm{Tr}Z_k)^2 - 4\det Z_k < 0 \qquad (1.34)$$

выполнено для бесконечного числа номеров k, это значит, что соответствующие собственные числа являются комплексно сопряженными, т.е.

$$|\rho_1| = |\rho_2| = (\det Z_k)^{0.5} \le \left(h_2(k) z_2^{m_k}\right)^{0.5}.$$

Известно, что характеристические показатели периодических точек (x_{k0}, y_{k0}) определяются как

$$\nu_i = (m_k + \tau)^{-1} \ln|\rho_i|, i = 1, 2.$$

Если неравенства (1.34) справедливы, то

$$\nu_i \le (m_k + \tau)^{-1}\left[\ln h_2(k) + 0.5 m_k \ln z_2\right] \le 0.25 \ln z_2 < 0, \qquad (1.35)$$

где i = 1,2, а номера k достаточно большие.

Если неравенство (1.34) не выполняется для всех k (начиная с некоторого номера), то соответствующие собственные числа будут действительными числами одного знака, поэтому

$$|\rho_i| \le |\mathrm{Tr}Z_k| \le h_1(k) z_1^{m_k}, \text{ где } i=1,2,$$

откуда, так же, как и в предыдущем случае, получим

$$\nu_i \le 0.5 \ln z_1 < 0,$$

где $i = 1,2$, а номера k достаточно велики.

Последние неравенства и неравенства (1.35) доказывают теорему 1.2.

1.3 СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ ТЕОРЕМ 1.1, 1.2

Основная задача данного раздела – описать способ построения функций, удовлетворяющих условиям (1.19), (1.20), которые определяют характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, кроме того, в этом разделе приведен способ построения функций, удовлетворяющих условиям (1.23), (1.24).

Пусть, как и раньше, f − исходный диффеоморфизм, предполагаем, что в некоторой окрестности начала координат V он задается формулами

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + p(x,y) \\ \mu y + q(x,y) \end{pmatrix},$$

где λ, μ положительные действительные числа такие, что $\lambda < 1 < \mu$, $\lambda\mu < 1$, функции p, q являются непрерывно дифференцируемыми в окрестности нуля и равны нулю вместе со своими производными в начале координат, а именно

$$p(0,0) = q(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial p(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial p(0,0)}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial q(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial q(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Предполагается, что в исходной окрестности начала координат

$$p(0,y) = q(x,0) = 0 .$$

Пусть постоянная R>0 такова, что

$$\tilde{V} = \{(x,y) : |x| < R, |y| < R\} \subset V .$$

Допустим, что существует нетрансверсальная гомоклиническая точка w, лежащая в V, т.е. $w \neq 0$ и $w \in W^u(0) \cap W^s(0)$.

Предполагаем, что

$$x^0 > 0, y^0 > 0.$$

Пусть $(x^0,0),(0,y^0)$ − точки из орбиты гомоклинической точки, лежащие в V, такие, что

$$x^0 > 0, y^0 > 0.$$

Определим множество V_1 как

$$V_1 = \{(x,y): |x| < \lambda^{-1}x^0, |y| < \mu y^0\}.$$

Предположим, что

$$V_1 \subset \tilde{V} \subset V.$$

Пусть L − отображение выпуклой окрестности $U \subset V_1$ точки $(0,y^0)$ на некоторую окрестность точки $(x^0,0)$, которое является сужением степени исходного диффеоморфизма на эту окрестность. Предположим, что в координатах L записывается так

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + ax + b(y - y^0) + \varphi(x, y - y^0) \\ cx + g(y - y^0) + \psi(x) \end{pmatrix},$$

где a, b, c − действительные числа, такие что $b < 0, c > 0$.

Считаем, что

$$L(U) \subset V_1.$$

Функции $\varphi,\ g\ ,\ \psi$ − непрерывно дифференцируемые функции одной или двух переменных в окрестности нуля, которые равны нулю вместе со своими производными в нуле. Предполагается, что производные функций $\psi,\ \varphi$ ограничены постоянной M в окрестности нуля.

Ясно, что характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $(x^0,0)$ определяется свойствами функции g.

Для построения функции $g(t)$, удовлетворяющей условиям (1.19), (1.20), надо определить положительные стремящиеся к нулю последовательности σ_k, ε_k, причем последовательность σ_k должна быть убывающей. Кроме того, элементы этих последовательностей должны удовлетворять условиям (1.7), точнее

$$\sigma_k - \varepsilon_k > \sigma_{k+1} + \varepsilon_{k+1}.$$

Пусть, как и ранее,

$$x_k = \left(x^0 + b\sigma_k\right)\left(1 - \lambda^{m_k} a\right)^{-1},$$
$$y_k = \left(y^0 + \sigma_k\right)\mu^{-m_k},$$
$$d = \min\left[0.25, 0.25\left(|b| + M\right)\right],$$

а m_k − строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\left(\lambda + \theta\right)^{m_k}\left(\mu + \theta\right)^{m_k} < \varepsilon_k,$$

где θ, неотрицательная величина, удовлетворяющая условиям (1.17).

Задача этого раздела − построить непрерывно дифференцируемую функцию g, удовлетворяющую условиям (1.19), (1.20), точнее такую функцию, чтобы при любом k и $t \in \left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right)$ выполнялись следующие неравенства

$$\left|g\left(\sigma_k\right) + c\lambda^{m_k} x_k - y_k\right| < 0.25\varepsilon_k d\left(\mu + \theta\right)^{-m_k},$$

$$\left|g'(t)\right| < \left(\mu + \theta\right)^{-\alpha m_k}, \text{ где } \alpha > 1.$$

Для построения функции g определим последовательности, удовлетворяющие всем вышеперечисленным условиям, для этого зафиксируем положительную σ такую что

$$\max\left[\lambda\mu, \mu^{-1}\right] < \sigma < 1. \tag{1.36}$$

По выбранному σ зафиксируем неотрицательную θ, такую что

$$\begin{aligned} &\left(\lambda + \theta\right)\left(\mu + \theta\right) < \sigma < 1, \\ &\left(1 + \theta\lambda^{-1}\right)\sigma < 1. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Отметим, что если исходный диффеоморфизм линеен в окрестности нуля, то в этом случае полагаем θ = 0. Этот случай рассмотрен в разделе 1.

Определим последовательности из условий σ_k, ε_k, m_k как

$$\begin{aligned} &\sigma_k = \sigma^k, \\ &\varepsilon_k = 2(\lambda+\theta)^k(\mu+\theta)^k, \\ &m_k = k. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Условия (1.18) выполнены, проверим условия (1.7). Из (1.37), (1.38) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\sigma-\varepsilon_k\sigma^{-k}-\varepsilon_{k+1}\sigma^{-k}\right)=1-\sigma>0.$$

Таким образом, для достаточно больших номеров k имеет место (1.7) или

$$\left(\sigma^k-\varepsilon_k,\sigma^k+\varepsilon_k\right)\cap\left(\sigma^{k+1}-\varepsilon_{k+1},\sigma^{k+1}+\varepsilon_{k+1}\right)=\varnothing.$$

Пусть

$$\gamma_k = y_k - c\lambda^k x_k,$$

где x_k, y_k определены ранее. Ясно, что

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty}\mu^k\gamma_k = y^0 > 0, \\ &\lim_{k\to\infty}\mu^k\left(\gamma_k-\gamma_{k+1}\right) = y^0\left(1-\mu^{-1}\right) > 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\gamma_k - \gamma_{k+1} > 0.$$

Из определения γ_k имеем

$$\lim_{k\to\infty}\gamma_k\sigma^{-k} = 0.$$

Пусть

$$u_k = \sigma^k - \varepsilon_k, v_k = \sigma^k + \varepsilon_k.$$

На каждом промежутке $\left[v_{k+1},u_k\right]$ рассмотрим произвольную непрерывную неотрицательную функцию $h_k(t)$, не равную тождественно нулю.

Пусть, кроме того,

$$
\begin{aligned}
&h_k\left(v_{k+1}\right)=h_k\left(u_k\right)=0, \\
&\max_{t\in\left[v_{k+1},u_k\right]} h_k\left(t\right)\le H,
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

т.е. $h_k\left(t\right)$ обращаются в нуль на концах промежутка задания и их значения ограничены величиной *H*, не зависящей от *k*.

Обозначим через

$$
I_k=\int\limits_{v_{k+1}}^{u_k} h_k\left(t\right)dt,
$$

предположим, что существует положительная величина *h,* не зависящая от *k* такая, что

$$
I_k\ge h\left(u_k-v_{k+1}\right)>0. \tag{1.40}
$$

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия* (1.36)-(1.40), *тогда функция*

$$
g\left(t\right)=\begin{cases}\left(\gamma_k-\gamma_{k+1}\right)\left(I_k\right)^{-1}\int\limits_{v_{k+1}}^{t} h_k\left(s\right)ds+\gamma_{k+1}, t\in\left[v_{k+1},u_k\right]\\ \gamma_k, t\in\left[u_k,v_k\right]\\ 0, t=0\end{cases} \tag{1.41}
$$

является непрерывно дифференцируемой функцией на $\left[0,\sigma^{\bar{k}}\right)$, *где* $\bar{k}$ *достаточно большое натуральное число.*

Доказательство. Считаем, что натуральное число $\bar{k}$ настолько велико, что при $k\ge\bar{k}$ функция g, определенная в (1.41) является положительной неубывающей функцией класса C^1 на $\left(0,\sigma^{\bar{k}}\right)$, более того, очевидно, что $\lim\limits_{t\to+0} g\left(t\right)=0$. Таким образом, функция g непрерывна на $\left[0,\sigma^{\bar{k}}\right)$.

Функция g является непрерывно дифференцируемой функцией на $\left(0,\sigma^{\bar{k}}\right)$, причем ее производная имеет вид

$$
g'\left(t\right)=\begin{cases}\left(\gamma_k-\gamma_{k+1}\right)\left(I_k\right)^{-1}h_k\left(t\right), t\in\left[v_{k+1},u_k\right]\\ 0, t\in\left[u_k,v_k\right]\end{cases}.
$$

Покажем, что g дифференцируема в нуле. Для этого рассмотрим произвольную положительную последовательность w_j, стремящуюся к нулю, и оценим отношение $\frac{|g(w_j)|}{w_j}$.

Для любого *j* найдется номер k_j такой, что

$$w_j \in \left[v_{k_j+1}, v_{k_j}\right],$$

при этом последовательность номеров k_j стремится к бесконечности с ростом *j*.

Рассмотрим неравенство

$$0 < \frac{|g(w_j)|}{w_j} \le \frac{\gamma_{k_j}}{v_{k_j+1}},$$

с учетом определения v_k имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_k}{v_{k+1}} = 0,$$

откуда

$$\lim_{j\to\infty} \frac{g(w_j)}{w_j} = 0.$$

Последовательность w_j была выбрана произвольно, следовательно,

$$\lim_{t\to+0} \frac{g(t)}{t} = 0.$$

Последнее равенство показывает, что функция g имеет в нуле правостороннюю производную равную нулю.

Покажем, что производная функции g непрерывна в нуле. Аналогично, фиксируем положительную последовательность w_j, стремящуюся к нулю. Для любого j найдется натуральное число k_j такое, что

$$w_j \in \left[v_{k_j+1}, v_{k_j}\right].$$

В силу (1.40) получим

$$0 < g'\left(w_j\right) \le \left(\gamma_{k_j} - \gamma_{k_j+1}\right) I_{k_j}^{-1} H \le \left(\gamma_{k_j} - \gamma_{k_j+1}\right)\left(u_{k_j} - v_{k_j+1}\right)^{-1} h^{-1} H,$$

учитывая (1.36), имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_k - \gamma_{k+1}}{u_k - v_{k+1}} = 0,$$

откуда

$$\lim_{j\to+\infty} g'\left(w_j\right) = 0.$$

Окончательно, в силу произвольного выбора последовательности w_j функция g, определенная на $\left[0, \sigma^{\bar{k}}\right)$, является непрерывно дифференцируемой на этом промежутке.

Теорема 1.3 доказана.

Ясно, что функцию g, определенную формулами (1.41) можно доопределить с сохранением гладкости на $\left(-\sigma^{\bar{k}}, \sigma^{\bar{k}}\right)$, построенная таким образом функция удовлетворяет условиям (1.19), (1.20).

В результате, если сужение степени исходного диффеоморфизма f в окрестности U имеет вид (1.5), а функция g в окрестности начала координат задана формулами (1.41), то эта функция удовлетворяет условиям теорем 1.1, 1.2 этой главы.

В качестве примера, на каждом промежутке $\left[v_{k+1}, u_k\right]$ рассмотрим функцию

$$h_k\left(t\right) = \begin{cases} 2r_k^{-1}t - 2v_{k+1}r_k^{-1}, t \in \left[v_{k+1}, s_k\right] \\ -2r_k^{-1}t + 2u_k r_k^{-1}, t \in \left[s_k, u_k\right] \end{cases},$$

где

$$s_k = 0.5\left(u_k + v_{k+1}\right),$$
$$r_k = u_k - v_{k+1},$$

т.е. s_k – середина отрезка $\left[v_{k+1}, u_k\right]$, а r_k − его длина, в этом случае условия (1.39), (1.40) выполнены, причем $H = 1, h = 0.5$.

Предположим, что диффеоморфизм f не является линейным в окрестности начала координат V. Считаем, что функция g, определенная в (1.5), удовлетворяет условиям теоремы 1.3, таким образом, определен характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в соответствующей точке. В этих условиях построим функции p, q, которые не являются тождественно равными нулю, и удовлетворяют условиям (1.23), (1.24) в окрестности $V_1 \subset V$.

Заметим, что функции p, q равны нулю вместе со своими производными в нуле, кроме того,

$$p(0,y) = q(x,0) = 0,$$

т.е. в окрестности нуля устойчивое многообразие W_{loc}^s совпадает с осью $(0,x)$, а неустойчивое многообразие – с осью $(0, y)$.

По определенным ранее положительным величинам σ, θ выберем еще две положительные величины

$$0 < \Delta < 0.5\theta,$$

$$\beta > -\frac{\ln(\lambda+\theta)}{\ln(\mu+\theta)} > 1.$$

По последовательностям σ_k, ε_k, m_k, заданным формулами (1.38), определим конечную последовательность множеств

$$B_k^j = \left\{(x,y) : \left|x - \lambda^j x_k\right| < (\lambda+\theta)^j \sigma^k, \left|y - \mu^j y_k\right| < d\varepsilon_k (\mu+\theta)^{-k+j}\right\},$$
$$j = 0,1,\ldots,k.$$

Ясно, что если величина k велика, то имеют место следующие включения

$$B_k^0 \subset L(U), B_k^j \subset V_1, j = 0,1,\ldots,k.$$

В дальнейшем предполагается, что последние включения выполняются для всех $k > 1$.

Условия (1.23), (1.24) имеют вид

$$\left|p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| < 0.5\left(\lambda+\theta\right)^j \sigma^k,$$

$$\left|q\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| < 0.5 d\varepsilon_k \left(\mu+\theta\right)^{-k+j},$$

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right| < \Delta,$$

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right| < \left(\mu+\theta\right)^{-\beta k},$$

$$\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right| < \left(\mu+\theta\right)^{-\beta k}, \tag{1.42}$$

$$\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}\right| < \Delta,$$

$$\left(x,y\right) \in B_k^j,\ j = 0,1,\ldots k-1.$$

Вышеперечисленные свойства функций *p, q* означают, что характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точках $f^j\begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}, j \geq 0$ должен быть аналогичен характеру касания этих многообразий в точке $\left(x^0, 0\right)$.

Для построения функций, удовлетворяющих условиям (1.42), введем следующие обозначения. Пусть

$$\eta = -\frac{\ln\lambda}{\ln\mu} > 1,$$

последнее неравенство имеет место в силу условия (1.2).

Определим

$$t_k = x_k y_k^{\eta},$$

$$r_k = \left(x_k - \left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^k \sigma^k\right)\left(y_k - d\varepsilon_k \mu^{-k}\right)^{\eta},$$

$$s_k = \left(x_k + \left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^k \sigma^k\right)\left(y_k + d\varepsilon_k \mu^{-k}\right)^{\eta},$$

где последовательности x_k, y_k введены ранее.

Из условий (1.37), (1.38) следуют соотношения

$$
\begin{aligned}
&0 < r_k < t_k < s_k, k = 1, 2, ...,\\
&\lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} s_k = 0,\\
&\lim_{k\to\infty} \mu^{k\eta} t_k = \lim_{k\to\infty} \mu^{k\eta} r_k = \lim_{k\to\infty} \mu^{k\eta} s_k = \left(x^0\right)\left(y^0\right)^\eta,\\
&\lim_{k\to\infty} \mu^{k\eta}\left(r_k - s_{k+1}\right) = \left(x^0\right)\left(y^0\right)^\eta\left(1-\mu^{-1}\right) > 0.
\end{aligned}
$$

Из последних соотношений имеем

$$\left(r_k - s_{k+1}\right) > 0, \tag{1.43}$$

при достаточно больших *k*. В дальнейшем считаем, что эти неравенства справедливы для любых *k*.

Пусть *F(t)* − произвольная непрерывно дифференцируемая функция, определенная в окрестности нуля, причем $F(0) = F'(0) = 0$. Кроме того, пусть для любого k имеют место неравенства

$$
\begin{gathered}
\left|F\left(t_k\right)\right| < 0.5\theta\left(\lambda+\theta\right)^k \sigma^k,\\
\left|F'(t)\right| < \left(\eta R^\eta\right)^{-1}\left(\mu+\theta\right)^{-\beta k}, t \in \left[r_k, s_k\right].
\end{gathered} \tag{1.44}
$$

Теорема 1.4. *Пусть F(t) удовлетворяет условиям* (1.44)*, тогда функции p, q, определенные как*

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= F\left(xy^\eta\right),\\
q(x,y) &= F\left(xy^\eta\right)
\end{aligned} \tag{1.45}
$$

являются непрерывно дифференцируемыми в окрестности нуля и удовлетворяют условиям (1.42).

Доказательство. Проверим выполнение условий (1.42), с учетом определения величины *η*, имеем

$$
\begin{aligned}
&p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right) = F\left(\lambda^j \mu^{j\eta} x_k y_k^\eta\right) = F\left(t_k\right),\\
&q\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right) = F\left(t_k\right).
\end{aligned}
$$

Зафиксируем произвольные *j*, *k* такие, что 0 ≤ *j* ≤ *k*, и рассмотрим $(x, y) \in B_k^j$. Ясно, что

$$x = \lambda^j x_k + z_1,$$
$$y = \mu^j y_k + z_2,$$

где

$$|z_1| < (\lambda + \theta)^j \sigma^k,$$
$$|z_2| < d\varepsilon_k (\mu + \theta)^{-k+j} = 2d(\lambda + \theta)^k (\mu + \theta)^j.$$

Вычислим

$$xy^\eta = (\lambda^j x_k + z_1)(\mu^j y_k + z_2)^\eta = (x_k + \lambda^{-j} z_1)(y_k + \mu^{-j} z_2)^\eta,$$

где

$$|\lambda^{-j} z_1| < \lambda^{-j} (\lambda + \theta)^j \sigma^k \le (1 + \theta\lambda^{-1})^k \sigma^k,$$
$$|\mu^{-j} z_2| < 2d\mu^{-j} (\mu + \theta)^j (\lambda + \theta)^k \le 2d\mu^{-k} (\mu + \theta)^k (\lambda + \theta)^k = d\varepsilon_k \mu^{-k}.$$

В результате получим

$$r_k \le xy^\eta \le s_k$$

если $(x, y) \in B_k^j$.

Продифференцируем функции p, q

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} = y^\eta F'(xy^\eta),$$
$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \eta xy^{\eta-1} F'(xy^\eta),$$

для функции q имеем аналогичные производные. Оценим эти величины с учетом (1.45)

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right| \le R^\eta \left|F'(xy^\eta)\right| < (\mu + \theta)^{-\beta k},$$
$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right| \le \eta R^\eta \left|F'(xy^\eta)\right| < (\mu + \theta)^{-\beta k}.$$

Аналогично

$$\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right| < (\mu+\theta)^{-\beta k},$$
$$\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}\right| < (\mu+\theta)^{-\beta k}.$$

Последние неравенства выполняются при $(x,y)\in B_k^j, 0\le j\le k$. В результате получено, что если функции *p, q* определяются формулами (1.45) , то они удовлетворяют условиям (1.42) при достаточно больших номерах *k*.

Теорема 1.4 доказана.

Таким образом, если исходный диффеоморфизм f в окрестности нуля V_1 задается формулами (1.15), причем функции *p, q, g* , определенные в (1.5), (1.15), удовлетворяют условиям теорем 1.3, 1.4, тогда, как следует из теоремы 1.2, f имеет счетное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

В конце раздела построим пример функции *F(t)*, удовлетворяющей условиям (1.44).

Из условий (1.43) следует, что промежутки $[s_{k+1}, r_k]$ не пересекаются. На каждом таком промежутке рассмотрим произвольную непрерывную функцию $F_k(t)$, удовлетворяющую следующим свойствам:

$$F_k(s_{k+1}) = F_k(r_k) = 0,$$
$$\int_{s_{k+1}}^{r_k} F_k(t)\,dt = 0. \tag{1.46}$$

Пусть $A_k = \max_{t\in[s_{k+1},r_k]} |F_k(t)| \ge 0$,

предположим, что

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 0\,. \qquad (1.47)$$

Имеет место следующая теорема

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия* (1.46), (1.47), *а функция F(t) определена на интервале* $[0, s_1]$ *следующим образом*

$$F(t) = \begin{cases} \int\limits_{s_{k+1}}^{t} F_k(s)\,ds, t \in [s_{k+1}, r_k] \\ 0, t \in [r_k, s_k] \\ 0, t = 0 \end{cases}, \qquad (1.48)$$

тогда F(t) является непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, s_1]$*, и ее производная равна*

$$F'(t) = \begin{cases} F_k(t), t \in [s_{k+1}, r_k] \\ 0, t \in [r_k, s_k] \\ 0, t = 0 \end{cases}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\max_{t\in[s_{k+1}, s_k]} |F(t)| \le A_k (r_k - s_{k+1})\,.$$

Из определения функции F следует, что она непрерывно дифференцируема на $(0, s_1]$, причем $\lim\limits_{t\to+0} F(t) = \lim\limits_{t\to+0} F'(t) = 0$, из этих соотношений следует непрерывность F в нуле.

Покажем, что F имеет непрерывную правостороннюю производную в нуле, равную нулю. Пусть w_j – произвольная положительная, стремящаяся к нулю последовательность. Ясно, что для любого номера k найдется натуральное число k_j такое, что $w_j \in \left[s_{k_j+1}, s_{k_j}\right)$, причем $\lim\limits_{j\to\infty} k_j = +\infty$.

Оценим отношение

$$\left|\frac{F\left(w_j\right)}{w_j}\right| \le \frac{A_{k_j}\left(r_{k_j} - s_{k_j+1}\right)}{s_{k_j+1}}.$$

С учетом условий (1.43), (1.47), имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A_k\left(r_k - s_{k+1}\right)}{s_{k+1}} = 0,$$

откуда

$$\lim_{j\to\infty}\frac{F\left(w_j\right)}{w_j} = 0.$$

Последовательность w_j выбрана произвольно, поэтому

$$\lim_{t\to+0}\frac{F\left(t\right)}{t} = 0.$$

Окончательно, если функция *F(t),* определена на промежутке $\left[0, s_1\right]$формулами (1.48), то она имеет в нуле непрерывную производную.

Теорема 1.5 доказана.

Пусть A_k − произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} &A_k > 0, \\ &\lim_{k\to\infty} A_k = 0, \end{aligned}$$

тогда функцию $F_k\left(t\right)$ определим на $\left[s_{k+1}, r_k\right]$следующим образом

$$F_k\left(t\right) = \begin{cases} 4A_k\left(r_k - s_{k+1}\right)^{-1}\left(t - s_k\right), t\in\left[s_{k+1}, 0.25\left(3s_{k+1} + r_k\right)\right], \\ 4A_k\left(s_{k+1} - r_k\right)^{-1}\left(t - 0.5\left(s_{k+1} + r_k\right)\right), t\in\left[0.25\left(3s_{k+1} + r_k\right), 0.25\left(s_{k+1} + 3r_k\right)\right], \\ 4A_k\left(r_k - s_{k+1}\right)^{-1}\left(t - r_k\right), t\in\left[0.25\left(s_{k+1} + 3r_k\right), r_k\right]. \end{cases}$$

Очевидно, что в этом случае условия (1.46), (1.47) выполнены.

Ясно, что функцию *F*, определенную в (1.48), можно доопределить произвольным образом на промежуток $\left[-s_1, s_1\right]$ с сохранением гладкости, получим функцию, удовлетворяющую условиям (1.44).

Таким образом, если функции p, q, g удовлетворяют условиям теорем 1.3, 1.4, то диффеоморфизм f имеет счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

ГЛАВА 2 ГЛАДКИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ ПЛОСКОСТИ

2.1 ДИФФЕОМОРФИЗМЫ ПЛОСКОСТИ КОНЕЧНОГО КЛАССА ГЛАДКОСТИ

Пусть, как и ранее, f − диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной седловой точкой в начале координат, т.е. $f\ (0) = 0$; предположим, что f класса C^r, где $1 < r < \infty$. Заметим, что случай $r = 1$ подробно описан в главе 1, а случай $r = \infty$ рассматривается ниже.

Считаем, что в некоторой выпуклой окрестности V точки 0 диффеоморфизм имеет следующий вид

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + p(x,y) \\ \mu y + q(x,y) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где функции p, q того же класса гладкости, что и f, причем

$$p(0,0) = q(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial p(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial p(0,0)}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial q(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial q(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Предполагаем, что

$$0 < \lambda < 1 < \mu, \quad \lambda\mu < 1. \tag{2.2}$$

Пусть в V выполняются следующие условия

$$p(0,y) = q(x,0) = 0\,. \tag{2.3}$$

Фиксируем положительную величину θ , такую что

$$0 < \lambda - \theta < \lambda + \theta < 1 < \mu - \theta\,,$$
$$(\lambda + \theta)(\mu + \theta) < 1.$$

Предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической точки.

Пусть $(x^0,0),(0,y^0)$ − точки из орбиты гомоклинической точки, лежащие в V, такие, что

$$x^0 > 0, y^0 > 0\,. \tag{2.4}$$

Определим множество V_1 как

$$V_1 = \left\{ (x, y) : |x| < \lambda^{-1} x^0, |y| < \mu y^0 \right\}.$$

Предположим, что

$$V_1 \subset V\,.$$

Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число τ такое, что

$$f^{\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть U − выпуклая окрестность точки $\left(0, y^0\right)$ такая, что

$$U \subset V_1,$$
$$f^{\tau}(U) \subset V_1.$$

Рассмотрим сужение f^{τ} на U, обозначим его через L, предположим, что L в координатах имеет вид

$$f^{\tau}\big|_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + ax + b\left(y - y^0\right) + \varphi\left(x, y - y^0\right) \\ cx + g\left(y - y^0\right) + \psi(x) \end{pmatrix},$$

где *a, b, c* – действительные числа такие, что

$$b < 0, c > 0\,, \tag{2.5}$$

а функции *g, φ, ψ* определены в окрестности начала координат, имеют тот же класс гладкости, что и исходный диффеоморфизм *f*, и обращаются в нуль вместе со своими первыми производными в начале координат, т.е.

$$\varphi(0,0) = \psi(0) = g(0) = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial y} = 0,$$
$$\psi'(0) = 0,$$
$$g'(0) = 0.$$

Пусть производные первого порядка функций ψ и φ ограничены в окрестности U постоянной M>0, а d – следующая постоянная

$$d = \min\left[0.25, 0.25\left(|b| + M\right)^{-1}\right].$$

Касание устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $\left(x^0, 0\right)$ определяется свойствами функции g, как и в главе 1 характер касания описывается с помощью последовательностей. Пусть σ_k, ε_k – положительные, стремящиеся к нулю, последовательности действительных чисел, причем последовательность σ_k убывает. Пусть для любого k

$$\sigma_k - \varepsilon_k > \sigma_{k+1} + \varepsilon_{k+1} \ . \tag{2.6}$$

Пусть m_k – строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\left(\lambda + \theta\right)^{m_k} \left(\mu + \theta\right)^{m_k} < \varepsilon_k . \tag{2.7}$$

Обозначим через

$$x_k = \left(x^0 + b\sigma_k\right)\left(1 - \lambda^{m_k} a\right)^{-1},$$
$$y_k = \left(y^0 + \sigma_k\right)\mu^{-m_k}.$$

Предположим, что функция g является функцией класса C^r $(1 < r < \infty)$ в окрестности начала координат, причем $g(0)$=0.

Кроме того, пусть для любых k справедливы неравенства

$$\left|g\left(\sigma_k\right)+c\lambda^{m_k}x_k-y_k\right|<d\varepsilon_k\left(\mu+\theta\right)^{-m_k}. \tag{2.8}$$

Предположим, что существует $\alpha > 1$, не зависящая от k, такая, что при любых k

$$\left|g'\left(t\right)\right|<\left(\mu+\theta\right)^{-\alpha m_k},\ t\in\left(\sigma_k-\varepsilon_k,\sigma_k+\varepsilon_k\right). \tag{2.9}$$

Таким образом, основные условия, которые накладываются на C^r-гладкую функцию g, совпадают с условиями, сформулированными в главе 1 в разделах 1.1 и 1.2. Основная задача этой главы – убедиться, что можно построить функцию g с вышеуказанными свойствами.

Для выполнения условий (2.8), (2.9) последовательность m_k должна стремиться к бесконечности достаточно быстро.

Для любого фиксированного k определим конечную последовательность множеств

$$B_k^j=\left\{\left(x,y\right):\left|x-\lambda^j x_k\right|<\left(\lambda+\theta\right)^j\sigma_k,\left|y-\mu^j y_k\right|<d\varepsilon_k\left(\mu+\theta\right)^{j-m_k}\right\},$$

где $j=0,1,...,m_k$.

Считаем, что $B_k^j\subset V_1$.

Фиксируем положительную постоянную β такую, что

$$\beta>-\frac{\ln\left(\lambda+\theta\right)}{\ln\left(\mu+\theta\right)}>1.$$

Пусть функции p, q удовлетворяют следующим условиям

$$
\begin{aligned}
&\left|p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| < 0.5\theta\left(\lambda+\theta\right)^j \sigma_k, \\
&\left|q\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| < 0.5\theta d\varepsilon_k\left(\mu+\theta\right)^{j-m_k}, \\
&\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right| < 0.25\theta, \\
&\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right| < \left(\mu+\theta\right)^{-\beta m_k}, \\
&\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right| < \left(\mu+\theta\right)^{-\beta m_k}, \\
&\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}\right| < 0.25\theta,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

$$\left(x,y\right)\in B_k^j,\; j=0,1,\ldots,m_k-1.$$

Условия (2.10) означают, что характер касания устойчивого и неустойчивого многообразия в точках $f^j\begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $j > 0$, аналогичен характеру касания этих многообразий в точке $\left(x^0,0\right)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть f − диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предположим, что выполнены условия* (2.1) - (2.10), *тогда в любой окрестности гомоклинической точки $\left(x^0,0\right)$ содержится счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательству теоремы 1.2 главы 1.

Основная задача этой главы – показать способ построения C^r-гладкой функции g, которая удовлетворяет условиям (2.8), (2.9) и, тем самым, определяет характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $\left(x^0,0\right)$, а также, указать на некоторые свойства этой функции, которые появляются с увеличением класса гладкости.

Теорема 2.2. *Пусть* g *произвольная* C^r*-гладкая функция, определенная в окрестности нуля, пусть выполнены условия* (2.8), (2.9), *тогда*

$$g(0)=g'(0)=...=g^{(r)}(0)=0. \qquad (2.11)$$

Доказательство. Пусть $r>1$, при $r=1$ утверждение теоремы

следует из условий (2.8), (2.9).

Равенства $g(0)=g'(0)=0$ очевидны, поэтому, рассмотрим производные более высоких порядков. Применив теорему Лагранжа к промежутку $[\sigma_{k+1},\sigma_k]$, получим

$$g(\sigma_k)-g(\sigma_{k+1})=g'(\xi_k)(\sigma_k-\sigma_{k+1}),$$

где $\xi_k\in(\sigma_{k+1},\sigma_k)$. Таким образом,

$$\max_{t\in[\sigma_{k+1},\sigma_k]} g'(t)\ge\frac{g(\sigma_k)-g(\sigma_{k+1})}{\sigma_k-\sigma_{k+1}}.$$

Определим

$$A_k=\mu^{m_k}g(\sigma_k),$$

ясно, что

$$\lim_{k\to\infty}A_k=y^0>0.$$

В результате получим, с учетом определения последовательности m_k,

$$\max_{t\in[\sigma_{k+1},\sigma_k]} g'(t)\ge\mu^{-m_k}\left(A_k-\mu^{-(m_{k+1}-m_k)}A_{k+1}\right)(\sigma_k-\sigma_{k+1})^{-1}>\mu^{-\alpha m_k}\ge(\mu+\theta)^{-\alpha m_k}$$

Функция g является r раз непрерывно дифференцируемой следовательно, ее производная достигает своего максимального значения на промежутке $[\sigma_{k+1},\sigma_k]$. Из последних неравенств и условий (2.9) следует, что это максимальное значение достигается в точке δ_k, которая лежит внутри промежутка, т.е. $\delta_k\in(\sigma_{k+1},\sigma_k)$. При $r>1$ производная функции g является непрерывно дифференцируемой функцией, следовательно, по теореме Ролля $g''(\delta_k)=0$. Последовательность δ_k является убывающей положительной последовательностью, стремящейся к нулю с ростом *k*. В результате имеем

$$g''(0)=0.$$

При $r > 2$ все производные функции g до порядка r включительно обращаются в нуль бесконечное число раз в любой окрестности начала координат, потому что между двумя нулями дифференцируемой функции лежит хотя бы один нуль ее производной. Следовательно,

$$g^{(i)}(0)=0, i=0,1,...,r.$$

Теорема 2.2 доказана.

По формуле Тейлора имеем $g(\sigma_k)=o\left((\sigma_k)^r\right)$, откуда

$$\lim_{k\to\infty}\left(\mu^{m_k}(\sigma_k)^r\right)^{-1}=0.$$

Опишем подробно способ построения функции g, удовлетворяющей условиям (2.8), (2.9).

Пусть σ_k, ε_k − произвольные положительные, стремящиеся к нулю последовательности, удовлетворяющие условиям (2.6).

Обозначим через

$$v_k=\sigma_k-\varepsilon_k,$$
$$u_k=\sigma_k+\varepsilon_k.$$

Ясно, что эти последовательности стремятся к нулю и удовлетворяют неравенствам

$$u_k>v_k>u_{k+1}>v_{k+1}>0.$$

Пусть $h_k(t)$ − произвольная неотрицательная, не равная тождественно нулю, функция класса C^{r-1}, определенная на промежутке $[u_{k+1}, v_k]$, такая, что

$$h_k^{(i)}(u_{k+1}) = h_k^{(i)}(v_k) = 0,$$
$$i = 0,1,\dots,r-1. \tag{2.12}$$

Например, в качестве такой функции можно взять

$$h_k(t) = \left[0.25(v_k - u_{k+1})^2 - \left(t - 0.5(v_k + u_{k+1})\right)^2\right]^r.$$

Пусть на всех промежутках $[u_{k+1}, v_k]$ определены функции $h_k(t)$ с вышеперечисленными свойствами.

Введем следующие положительные последовательности

$$I_k = \int_{u_{k+1}}^{v_k} h_k(t)\,dt,$$
$$\overline{h}_{ki} = \max_{t\in[u_{k+1},v_k]} \left|h_k^{(i)}(t)\right|,$$
$$i = 0,1,\dots,r-1,$$
$$H_k = \max_{0\le i\le(r-1)} \overline{h}_{ki}.$$

Ясно, что

$$0 < I_k \le \overline{h}_{k0}(v_k - u_{k+1}).$$

Для дальнейших рассуждений потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть на каждом промежутке* $[u_{k+1}, v_k]$ *задана произвольная неотрицательная не равная тождественно нулю функция, удовлетворяющая условиям* (2.12)*, тогда для любых k справедливы неравенства*

$$H_k \ge \frac{\overline{h}_{k0}}{(v_k - u_{k+1})^{r-1}}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Заметим, что при $r = 1$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что $r > 1$, по индукции докажем. что

$$\overline{h}_{ki} \ge \frac{\overline{h}_{ki-1}}{(v_k - u_{k+1})},$$
$$i = 1,2,\dots,r-1.$$

Обозначим точку максимума функции $h_k(t)$ на промежутке $[u_{k+1}, v_k]$ через ξ_{k0}, ясно, что эта точка лежит внутри промежутка. Применим теорему Лагранжа, в результате получим

$$h_k(\xi_{k0}) - h_k(u_{k+1}) = h_k'(\eta_{k0})(\xi_{k0} - u_{k+1}),$$
$$\eta_{k0} \in (u_{k+1}, \xi_{k0}] \subset (u_{k+1}, v_k).$$

Откуда

$$h_k'(\eta_{k0}) \geq \frac{h_k(\xi_{k0})}{(v_k - u_{k+1})},$$

но

$$h_k(\xi_{k0}) = \overline{h}_{k0},$$
$$\left|h_k'(\eta_{k0})\right| \leq \overline{h}_{k1},$$

следовательно,

$$\overline{h}_{k1} \geq \frac{\overline{h}_{k0}}{(v_k - u_{k+1})}.$$

Таким образом, база индукции доказана. Установим индукционный переход. Пусть нужное неравенство доказано до номера $i<r-1$ включительно. Рассмотрим непрерывную функцию $\left|h_k^{(i)}(t)\right|$, она достигает своего максимального значения на промежутке $[u_{k+1}, v_k]$ в некоторой внутренней точке промежутка ξ_{ki}. Применив теорему Лагранжа, получим

$$h_k^{(i)}(\xi_{ki}) = h_k^{(i+1)}(\eta_{ki})(\xi_{ki} - u_{k+1}),$$
$$\eta_{ki} \in (u_{k+1}, \xi_{ki}] \subset (u_{k+1}, v_k),$$

следовательно,

$$\overline{h}_{k(i+1)} \geq \left|h_k^{(i+1)}(\eta_{ki})\right| \geq \frac{\overline{h}_{ki}}{(v_k - u_{k+1})},$$

т.е. индукционный переход доказан. Из этих неравенств следуют неравенства (2.13).

Лемма 2.1 доказана.

Из свойств интеграла и условий (2.13) следует

$$H_k\left(I_k\right)^{-1} \geq \left(v_k - u_{k+1}\right)^{-r},$$

откуда, как легко видеть, следует

$$\lim_{k\to\infty} H_k\left(I_k\right)^{-1} = +\infty.$$

Пусть

$$\zeta_k = \left(\ln\left(\mu+\theta\right)\right)^{-1} \ln\left[H_k\left(I_k u_{k+1}\right)^{-1}\right],$$

ясно, что $\lim_{k\to\infty} \varsigma_k = +\infty$.

Пусть l_k – возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\left(\left(\lambda+\theta\right)\left(\mu+\theta\right)\right)^{l_k} < \varepsilon_k.$$

Определим

$$m_k = \max_{1\le i\le k}\left[\zeta_i\right] + l_k,$$

где […] − целая часть величины.

В результате, если числовые последовательности σ_k, ε_k, m_k обладают всеми вышеперечисленными свойствами, а на каждом промежутке $\left[u_{k+1}, v_k\right]$ определена соответствующая функция $h_k\left(t\right)$, то справедливо следующее соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\left(\mu\right)^{-m_k} H_k\left(I_k u_{k+1}\right)^{-1} = 0. \qquad (2.14)$$

Пусть

$$\gamma_k = \mu^{-m_k}\left(y^0 + \sigma_k\right) - c\lambda^{m_k}\left(x^0 + b\sigma_k\right)\left(1 - \lambda^{m_k} a\right)^{-1}.$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 2.3. *Пусть функция g определена на интервале* $\left[0, u_1\right)$ *как*

$$g\left(t\right) = \begin{cases} \gamma_k, t \in \left[v_k, u_k\right] \\ \left(\gamma_k - \gamma_{k+1}\right)\left(I_k\right)^{-1} \int\limits_{u_{k+1}}^{t} h_k\left(s\right)ds + \gamma_{k+1}, t \in \left[u_{k+1}, v_k\right], \\ 0, t = 0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

тогда эта функция является r раз непрерывно дифференцируемой.

Доказательство. Ясно, что g – класса C^r на $(0,u_1)$, докажем, что при $t = 0$ функция g имеет r непрерывных производных, и все они равны нулю.

Пусть w_j – произвольная положительная последовательность, стремящаяся к нулю. Очевидно, что для любого j существует номер k_j такой, что

$$w_j \in \left[u_{k_j+1}, u_{k_j}\right),$$
$$\lim_{j\to\infty} k_j = +\infty,$$

если бы последнее условие не выполнялось, то последовательность k_j имела ограниченную подпоследовательность, а последовательность w_j имела бы подпоследовательность, отделенную от нуля.

Ясно, что

$$0 < g\left(w_j\right) \le \gamma_{k_j},$$

откуда

$$\lim_{j\to\infty} g\left(w_j\right) = 0.$$

В результате, в силу произвольного выбора последовательности w_j, имеем $\lim\limits_{t\to 0+} g(t) = 0$, таким образом, функция g является непрерывной в точке 0.

Ясно, что

$$0 < \frac{g\left(w_j\right)}{w_j} \le \frac{\gamma_{k_j}}{u_{k_j+1}}.$$

В силу условий (2.14) имеем

$$\lim_{j\to\infty} \frac{g\left(w_j\right)}{w_j} = 0,$$

откуда, в силу произвольного выбора последовательности w_j, имеем

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{t}=0,$$

следовательно, функция g имеет в точке 0 правостороннюю производную равную нулю.

Рассмотрим производную функции g порядка i, где $1\leq i\leq r$, на интервале $(0,u_1)$, получим

$$g^{(i)}(t)=\begin{cases}0, t\in[v_k,u_k],\\ (\gamma_k-\gamma_{k+1})(I_k)^{-1}h_k^{(i-1)}(t), t\in[u_{k+1},v_k]\end{cases}.$$

Аналогично, пусть w_j – произвольная положительная последовательность, стремящаяся к нулю, тогда имеем

$$\left|g^{(i)}(w_j)\right|\leq\left(\gamma_{k_j}-\gamma_{k_j+1}\right)\left(I_{k_j}\right)^{-1}H_{k_j},$$
$$\frac{\left|g^{(i)}(w_j)\right|}{w_j}\leq\frac{\left(\gamma_{k_j}-\gamma_{k_j+1}\right)}{u_{k_j+1}}\left(I_{k_j}\right)^{-1}H_{k_j},$$
$$i=1,2,...,r.$$

Из последних условий, учитывая (2.14), получаем

$$\lim_{j\to\infty}\left|g^{(i)}(w_j)\right|=0,$$
$$\lim_{j\to\infty}\frac{\left|g^{(i)}(w_j)\right|}{w_j}=0,$$
$$i=1,2,...,r.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\lim_{t\to 0+}\left|g^{(i)}(t)\right|=0,$$
$$\lim_{t\to 0+}\frac{\left|g^{(i)}(t)\right|}{t}=0,$$

таким образом, функция g имеет вточке 0 r непрерывных правосторонних производных, равных 0.

Теорема 2.3 доказана.

Окончательно, если доопределить функцию g, заданную формулами (2.15), на интервал $(-u_1, u_1)$ с сохранением класса гладкости, то построенная таким способом функция g, удовлетворяет условиям (2.8), (2.9).

Таким образом, если выполнены условия (2.1)-(2.7), (2.10), а функция g на промежутке $[0, u_1)$ задана формулами (2.15) и продолжена на $(-u_1, u_1)$ с сохранением гладкости, то исходный диффеоморфизм имеет счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Заметим, что условия (2.3), (2.10) наложены на функции p, q, поэтому следует указать способ построения таких функций. Для этого, зафиксируем последовательности, определяющие свойства функции g следующим образом. Пусть $\sigma>0$, $\theta>0$ такие, что

$$\max\left[(\lambda\mu)^{(r+1)^{-1}}, \mu^{-(r+1)^{-1}}\right] < \sigma < 1,$$

$$\begin{aligned} &(\lambda+\theta)(\mu+\theta) < \sigma < 1, \\ &(1+\theta\lambda^{-1})\sigma < 1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

В качестве последовательностей $\sigma_k, \varepsilon_k, m_k$, определенных при описании свойств функции g, удовлетворяющих (2.6), (2.7), возьмем

$$\begin{aligned} &\sigma_k = \sigma^k, \\ &\varepsilon_k = 2(\lambda+\theta)^k(\mu+\theta)^k, \\ &m_k = k. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Проверим выполнение условий (2.6), пусть

$$A_k = \sigma^{-k}\left[\sigma^k - \varepsilon_k - \sigma^{k+1} - \varepsilon_{k+1}\right],$$

тогда

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 1 - \sigma > 0,$$

следовательно, условия (2.6) выполняются для всех номеров k, начиная с некоторого k_0.

Пусть, как и ранее,

$$v_k = \sigma^k - \varepsilon_k,$$
$$u_k = \sigma^k + \varepsilon_k,$$

где ε_k определены в (2.17).

На каждом промежутке $\left[u_{k+1}, v_k\right]$ определим неотрицательную, не равную тождественно нулю, функцию $h_k(t)$ класса C^{r-1}, удовлетворяющую свойствам (2.12). Предположим, что имеют место следующие соотношения

$$\lim_{k\to\infty}\left[\mu^{-k} H_k\left(I_k\right)^{-1}\sigma^{-(k+1)}\right] = 0,$$

последовательности H_k, I_k определены ранее, а сами соотношения есть условия (2.14) в нашем случае.

Покажем, что в качестве функций $h_k(t)$ можно взять функции

$$h_k(t) = \left[R_k^2 - \left(t - S_k\right)^2\right]^r, \tag{2.18}$$

где

$$R_k = 0.5\left(v_k - u_{k+1}\right),$$
$$S_k = 0.5\left(u_{k+1} + v_k\right),$$

причем, ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} 2\sigma^{-k} R_k = 1 - \sigma > 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} 2\sigma^{-k} S_k = 1 + \sigma > 0.$$

В случае если функции $h_k(t)$ заданы формулами (2.18), то

$$I_k = \int_{u_{k+1}}^{v_k}\left[R_k^2 - \left(t - S_k\right)^2\right]^r dt = r!\,2^{2r+1}\left[(2r+1)!\right]^{-1} R_k^{2r+1}.$$

Для того, что бы оценить элементы последовательности H_k, вычислим производные функции $h_k(t)$ до порядка r - 1 включительно, получим

$$h_k^{(i)}(t)=\left[\left(R_k-(t-S_k)\right)^r\left(R_k+(t-S_k)\right)^r\right]^{(i)}=$$
$$=\sum_{j=0}^{i}C_i^j\left[\left(R_k-(t-S_k)\right)^r\right]^{(j)}\left[\left(R_k+(t-S_k)\right)^r\right]^{(i-j)}=$$
$$=\sum_{j=0}^{i}C_i^j r(r-1)\ldots(r-j+1)(-1)^j\left(R_k-(t-S_k)\right)^{r-j}r\ldots(r-i+j+1)\left(R_k+(t-S_k)\right)^{r-i+j}$$

(где C_i^j – число сочетаний).

Из последних соотношений следует, что при $t\in[u_{k+1},v_k]$ и фиксированном номере *k*, существует положительная постоянная *K*, зависящая от *r, i*, но не зависящая от *k*, такая, что

$$\left|h_k^{(i)}(t)\right|\le KR_k^{2r-i}, \text{ где } i=0,1,\ldots,r-1$$

Из последних неравенств следует существование положительной постоянной *H*, независящей от *k*, такой, что $0<H_k\le HR_k^{r+1}$.

Легко видеть, что из условий (2.16), (2.17), (2.18) следует соотношение (2.14).

Пусть выполнены условия (2.16), (2.17), (2.18), (2.14), функция *g* задана формулами (2.15) и продолжена на интервал $\left(-\sigma^{k_0},\sigma^{k_0}\right)$ с сохранением класса гладкости. При этих предположениях построим функции *p*, *q*, с вышеперечисленными свойствами.

Пусть

$$\eta=-\frac{\ln\lambda}{\ln\mu}>1.$$

Зафиксируем натуральное число ω, удовлетворяющее следующим свойствам

$$\omega>r,$$
$$\omega>\eta^{-1}\left(1+\beta\frac{\ln(\mu+\theta)}{\ln\mu}\right),$$
$$\omega>-\eta^{-1}(\ln\mu)^{-1}\left(\ln(\lambda+\theta)+\ln\sigma\right). \qquad (2.19)$$

Определим

$$t_k = x_k^{\ \omega} y_k^{\ \omega},$$

где, как и ранее,

$$x_k = \left(x^0 + b\sigma_k\right)\left(1-\lambda^{m_k} a\right)^{-1},$$
$$y_k = \left(y^0 + \sigma_k\right)\mu^{-m_k},$$

а последовательности $\sigma_k, \varepsilon_k, m_k$ определены в (2.17). Ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{k\omega\eta} t_k = \left(x^0\right)^{\omega}\left(y^0\right)^{\omega\eta} > 0.$$

Наряду с последовательностью t_k, введем в рассмотрение последовательности

$$\xi_k = \left[x_k - \left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^k \sigma^k\right]^{\omega}\left[y_k - d\varepsilon_k\mu^{-k}\right]^{\omega\eta},$$
$$\upsilon_k = \left[x_k + \left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^k \sigma^k\right]^{\omega}\left[y_k + d\varepsilon_k\mu^{-k}\right]^{\omega\eta}.$$

Ясно, что справедливы неравенства

$$0 < \xi_k < t_k < \upsilon_k.$$

В силу условий (2.16), имеем

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{k\omega\eta}\xi_k = \lim_{k\to\infty} \mu^{k\omega\eta}\upsilon_k = \left(x^0\right)^{\omega}\left(y^0\right)^{\omega\eta},$$
$$\lim_{k\to\infty} \mu^{k\omega\eta}\left(\upsilon_k - \xi_{k+1}\right) = \left(x^0\right)^{\omega}\left(y^0\right)^{\omega\eta}\left(1-\mu^{-\omega\eta}\right) > 0.$$

Ранее определенная для любого фиксированного k последовательность множеств B_k^j имеет вид

$$B_k^j = \left\{(x,y): \left|x-\lambda^j x_k\right| < \left(\lambda+\theta\right)^j\sigma^k, \left|y-\mu^j y_k\right| < d\varepsilon_k\left(\mu+\theta\right)^{j-k}\right\},$$

где j = 0,1, … , k-1.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.16), (2.17), (2.19)*, определены последовательности* ξ_k, υ_k*, тогда при любых* $(x,y)\in B_k^j$*, где j=0,1,...,k-1 справедливо следующее неравенство*

$$\xi_k < x^{\omega} y^{\omega\eta} < \upsilon_k, \tag{2.20}$$

где $(x,y)\in B_k^j$*, j = 0,1, … , k-1.*

Доказательство. Пусть $(x,y)\in B_k^j$, запишем

$$x=\lambda^j x_k+z_1(k),$$
$$y=\mu^j y_k+z_2(k),$$

где

$$|z_1(k)|<(\lambda+\theta)^j\sigma^k,$$
$$|z_2(k)|<d\varepsilon_k(\mu+\theta)^{j-k},$$

откуда

$$x^{\omega}y^{\omega\eta}=\left(\lambda^j x_k+z_1(k)\right)^{\omega}\left(\mu^j y_k+z_2(k)\right)^{\omega\eta}=$$
$$=\left(\lambda\mu^{\eta}\right)^{\omega j}\left(x_k+\lambda^{-j}z_1(k)\right)^{\omega}\left(y_k+\mu^{-j}z_2(k)\right)^{\omega\eta}.$$

Рассмотрим

$$\left|z_1(k)\lambda^{-j}\right|<\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^j\sigma^k<\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^k\sigma^k,$$
$$\left|z_2(k)\mu^{-j}\right|<d\varepsilon_k\left(1+\theta\mu^{-1}\right)^j(\mu+\theta)^{-k}<d\varepsilon_k\mu^{-k},$$

где $j=0,1,\ \dots\ ,k\text{-}1$.

Из последних неравенств следует утверждение леммы.

Лемма 2.2 доказана.

Следующая теорема определяет множество функций, удовлетворяющих условиям (2.10).

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия* (2.16), (2.17)*, а F(t) – произвольная функция класса* C^r *на* $(-\delta,\delta)$*, где δ>0, такая, что* $|F(t)|\le t, |F'(t)|\le 1,$ *при любом t. Определим*

$$p(x,y)=q(x,y)=F\left(x^{\omega}y^{\omega\eta}\right),(x,y)\in V_1, \tag{2.21}$$

тогда функции p, q, являются функциями класса C^r *в* V_1 *и удовлетворяют условиям* (2.10).

Доказательство. Зафиксируем k и оценим

$$|p(x_k,y_k)|=|q(x_k,y_k)|=\left|F\left(x_k{}^{\omega}y_k{}^{\omega\eta}\right)\right|\le x_k{}^{\omega}y_k{}^{\omega\eta}=t_k.$$

Из свойств последовательности t_k следует, что существует постоянная $N>0$ такая, что

$$0 < t_k \le \mu^{-k\omega\eta} N .$$

Кроме того, из условий (2.19) имеем

$$\mu^{-\omega\eta} < (\lambda + \theta)\sigma ,$$

откуда следует, что при достаточно больших номерах k справедливы следующие неравенства

$$\left| p(x_k, y_k) \right| \le \mu^{-k\omega\eta} N < (\lambda + \theta)^k \sigma^k \le (\lambda + \theta)^j \sigma^k ,$$

где $j = 0,1, \dots , k$-1.

Аналогично, имеем

$$\left| q(x_k, y_k) \right| \le N \mu^{-\omega\eta k} ,$$

в силу (2.19) имеем

$$\mu^{-\omega\eta} < \lambda + \theta ,$$

таким образом, получим

$$\left| q(x_k, y_k) \right| < d\theta (\lambda + \theta)^k \le 0.5 d\theta \varepsilon_k (\mu + \theta)^{j-k} ,$$

последние неравенства справедливы для достаточно больших k и $j = 0,1, \dots , k$-1.

Оценим производную по x функции p при $(x, y) \in B_k^j$, получим с учетом (2.19), (2.20),

$$\left| \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right| = \omega \left| F'(x^\omega y^{\omega\eta}) \right| x^\omega y^{\omega\eta} x^{-1} \le \omega \upsilon_k x^{-1} .$$

Если точка $(x, y) \in B_k^j$, то

$$x > \lambda^j \left(x_k - (1 + \theta\lambda^{-1})^j \sigma^k \right) > \lambda^k \left(x_k - (1 + \theta\lambda^{-1})^k \sigma^k \right),$$

причем

$$\lim_{k \to \infty} \left[x_k - (1 + \theta\lambda^{-1})^k \sigma^k \right] = x^0 > 0 .$$

В результате, получим, что существует постоянная $L_1 > 0$, не зависящая от j, такая, что

$$\left| \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right| \le L_1 (\lambda \mu^{\omega\eta})^{-k} .$$

Окончательно имеем, что при $(x,y)\in B_k^j$, для достаточно больших k и произвольного $j = 0,1,\ \dots\ , k$-1,

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right| < 0.25\theta .$$

Аналогично, оценим производную функции p по y при $(x,y)\in B_k^j$, получим

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right| = \omega\eta\left|F'\left(x^{\omega}y^{\omega\eta}\right)\right|x^{\omega}y^{\omega\eta}y^{-1} \le \omega\eta\upsilon_k y^{-1}.$$

При $(x,y)\in B_k^j$, имеем

$$y > \mu^{j-k}\left(y^0+\sigma^k - d\varepsilon_k\left(1+\theta\mu^{-1}\right)^{j-k}\right) > \mu^{-k}\left(y^0+\sigma^k-d\varepsilon_k\right).$$

В результате, получим, что существует постоянная $L_2 > 0$, не зависящая от j, такая, что

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right| \le L_2\mu^{-(\omega\eta-1)k} .$$

В силу условий (2.19) имеем

$$\mu^{\omega\eta-1} > (\mu+\theta)^{\beta} ,$$

откуда следует, что при $j = 0,1,\ \dots\ , k$-1,

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right| < (\mu+\theta)^{-\beta k} .$$

Продифференцируем функцию q при $(x,y)\in B_k^j$, получим

$$\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right| \le L_1\left(\lambda\mu^{\omega\eta}\right)^{-k} ,$$

$$\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}\right| \le L_2\mu^{-(\omega\eta-1)k}.$$

В силу условий (2.19), имеем $\lambda\mu^{\omega\eta} > (\mu+\theta)^{\beta}$, поэтому при $(x,y)\in B_k^j$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\right| < (\mu+\theta)^{-\beta k},$$

$$\left|\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}\right| < 0.25\theta.$$

Последние неравенства доказывают теорему 2.4.

Таким образом, если функции g, p, q удовлетворяют условиям теорем 2.3, 2.4, тогда диффеоморфизм f имеет счетное множество устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

2.2 БЕСКОНЕЧНО ГЛАДКИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ ПЛОСКОСТИ

В этом разделе рассматривается диффеоморфизм f плоскости в себя класса C^{∞} с седловой неподвижной точкой в начале координат. Так же, как в предыдущем разделе, предполагается, что в некоторой окрестности нуля V диффеоморфизм f задан формулами (2.1), точнее

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + p(x,y) \\ \mu y + q(x,y) \end{pmatrix},$$

где функции p, q в начале координат равны нулю вместе со своими производными первого порядка. Предполагаем, что выполнены условия (2.2), (2.3).

Аналогично, предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической точки.

Пусть $(x^0,0),(0,y^0)$ – точки из орбиты гомоклинической точки, лежащие в V, такие, что

$$x^0 > 0, y^0 > 0. \tag{2.4}$$

Определим множество V_1 как

$$V_1 = \left\{(x,y): |x| < \lambda^{-1}x^0, |y| < \mu y^0\right\}.$$

Предположим, что

$$V_1 \subset V.$$

Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число τ такое, что

$$f^{\tau}\begin{pmatrix} 0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть U – выпуклая окрестность точки $(0,y^0)$ такая, что

$$U \subset V_1,$$
$$f^{\tau}(U) \subset V_1.$$

Рассмотрим сужение f^{τ} на U, обозначим его через L, предположим, что L в координатах имеет вид

$$f^{\tau}\big|_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + ax + b\left(y - y^0\right) + \varphi\left(x, y - y^0\right) \\ cx + g\left(y - y^0\right) + \psi\left(x\right) \end{pmatrix},$$

где a, b, c – действительные числа, а g, φ, ψ – функции класса C^{∞} одной или двух переменных, определенные в окрестности точки 0. Считаем, что выполнены условия (2.5). Предположим, что функции g, φ, ψ равны нулю вместе со своими первыми производными в начале координат. Пусть в окрестности U все производные первого порядка у функций φ, ψ ограничены постоянной $M > 0$.

Обозначим через d следующую величину

$$d = \min\left[0.25, 0.25\left(|b| + M\right)^{-1}\right].$$

Фиксируем $\theta \geq 0$ такую, что

$$0 < \lambda - \theta < \lambda + \theta < 1 < \mu - \theta,$$
$$\left(\lambda + \theta\right)\left(\mu + \theta\right) < 1.$$

Касание устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $\left(x^0, 0\right)$ определяется свойствами функции g. Эти свойства были описаны в предыдущем разделе этой главы для диффеоморфизма класса $C^r, 1 \leq r < \infty$. В данном разделе рассматривается бесконечно гладкий диффеоморфизм, и, поэтому, функция g является функцией класса C^{∞}в окрестности нуля.

Касание устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $\left(x^0, 0\right)$определяется свойствами функции g, характер касания описывается с помощью последовательностей. Пусть σ_k, ε_k – положительные, стремящиеся к нулю, последовательности действительных чисел, причем последовательность σ_k убывает. Считаем, что выполнены условия (2.6).

Пусть m_k – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условиям (2.7). Обозначим

$$x_k = \left(x^0 + b\sigma_k\right)\left(1-\lambda^{m_k}a\right)^{-1},$$
$$y_k = \left(y^0 + \sigma_k\right)\mu^{-m_k}.$$

Пусть g – функция одной переменной класса C^∞, определенная в окрестности точки 0, удовлетворяющая условиям (2.8), (2.9).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть f − диффеоморфизм плоскости в себя класса* C^∞ *с неподвижной седловой точкой в начале координат. Предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической точки. Пусть выполнены* (2.1)-(2.9), *предположим, что функции p, q, определенные в* (2.1), *тождественно равны нулю в окрестности V начала координат, тогда в любой окрестности гомоклинической точки* $\left(x^0,0\right)$ *содержится счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательство теоремы для случая диффеоморфизма класса C^1приведено в главе 1 (раздел 1), это доказательство годится как для случая диффеоморфизма класса $C^r\left(1 \le r < \infty\right)$, так и для случая диффеоморфизма класса C^∞, потому что они являются частными случаями диффеоморфизмов класса C^1.

Из вышеперечисленных свойств функции g следует теорема.

Теорема 2.6. *Пусть функция g является функцией класса* C^∞*в окрестности нуля. Пусть выполнены условия* (2.6), (2.8), (2.9), *тогда*

$g^{(i)}\left(0\right) = 0$ *для любого i = 0,1,… .*

Аналогичная теорема сформулирована и доказана в предыдущем разделе.

Применив формулу Тейлора к g, получим $g\left(\sigma_k\right) = o\left(\sigma_k{}^i\right)$ для любого i, откуда $\lim\limits_{k\to\infty}\mu^{-m_k}\left(\sigma_k\right)^{-i} = 0$ при любом i.

Далее в этом разделе представлен способ построения множества бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (2.8), (2.9).

Пусть σ_k, ε_k – произвольные положительные последовательности,
удовлетворяющие всем вышеперечисленным свойствам, т.е. они стремятся к нулю, σ_k убывают, и выполнено условие (2.6).

Пусть

$$v_k = \sigma_k - \varepsilon_k, u_k = \sigma_k + \varepsilon_k.$$

Легко видеть, что

$$v_k - u_{k+1} > 0.$$

На каждом промежутке $[u_{k+1}, v_k]$ рассмотрим функцию $h_k(t)$ класса C^∞, неотрицательную, не равную тождественно нулю, и такую, что

$$\begin{aligned} &h_k^{(i)}(u_{k+1}) = h_k^{(i)}(v_k) = 0, \\ &i = 0,1,.... \end{aligned} \tag{2.22}$$

Обозначим, как и ранее,

$$\begin{aligned} &I_k = \int_{u_{k+1}}^{v_k} h_k(t)dt, \\ &h_{ki} = \max_{t\in[u_{k+1},v_k]} \left|h_k^{(i)}(t)\right|, \\ &i = 0,1,.... \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$0 < I_k \le h_{k0}(v_k - u_{k+1}).$$

Из доказательства леммы 2.1 следует, что при фиксированном k при любом целом неотрицательном i справедливы неравенства

$$h_{ki} \ge \frac{h_{k0}}{(v_k - u_{k+1})^i}, i = 0,1,... .$$

В отличие от случая диффеоморфизма конечной гладкости, рассмотренного в предыдущем разделе, в этом случае для любого фиксированного k имеется бесконечная последовательность положительных действительных чисел h_{ki}. Очевидно, что в этом случае при произвольном выборе функций $h_k(t)$ мы не можем утверждать, что при любом фиксированном k существует постоянная положительная H_k, ограничивающая h_{ki}.

Пусть последовательность m_k и функции $h_k(t)$ таковы, что справедливы следующие соотношения

$$\lim_{k\to\infty}\mu^{-m_k}h_{ki}\left(I_k\right)^{-1}\left(u_{k+1}\right)^{-1}=0, i=0,1,\dots. \tag{2.23}$$

Обозначим

$$\gamma_k=\mu^{-m_k}\left(y^0+\sigma_k\right)-\lambda^{m_k}c\left(x^0+b\sigma_k\right)\left(1-\lambda^{m_k}a\right)^{-1}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия* (2.6), *и на каждом промежутке* $\left[u_{k+1},v_k\right]$ *задана функция* $h_k(t)$, *класса* C^∞, *неотрицательная, не равная тождественно нулю, удовлетворяющая условиям* (2.22). *Пусть выполнены условия* (2.23), *тогда функция g, определенная как*

$$g(t)=\begin{cases}\left(\gamma_k-\gamma_{k+1}\right)\left(I_k\right)^{-1}\int\limits_{u_{k+1}}^{t}h_k(s)ds+\gamma_{k+1}, t\in\left[u_{k+1},v_k\right]\\ \gamma_k, t\in\left[v_k,u_k\right]\\ 0, t=0\end{cases} \tag{2.24}$$

является функцией класса C^∞ *на* $\left[0,\sigma_1\right)$.

Доказательство. Пусть w_j – произвольная положительная последовательность, стремящаяся к нулю. По любому номеру j найдется номер k_j такой, что $w_j\in\left[u_{k_j+1},u_{k_j}\right)$, причем

$$\lim_{j\to\infty}k_j=+\infty.$$

Применяя аналогичные рассуждения, как в теореме 2.3 предыдущего раздела, получим с учетом (2.23)

$$\lim_{j\to\infty}\left|g^{(i)}\left(w_j\right)\right| = 0,$$
$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{g^{(i)}\left(w_j\right)}{w_j}\right| = 0,$$
$$i = 0,1,....$$

Последние соотношения справедливы для всех целых неотрицательных i в случае произвольной последовательности w_j, поэтому ясно, что функция g, определенная в (2.24), является функцией класса C^∞ на $\left[0,\sigma_1\right)$, причем $g^{(i)}\left(0\right)=0, i=0,1,....$

Теорема 2.7 доказана.

Функцию g можно доопределить на $\left(-\sigma_1,\sigma_1\right)$ с сохранением класса гладкости, т.е. в точке нуль сама функция и все ее производные должны быть равны нулю.

Следующая теорема посвящена вопросу существования функции $h_k\left(t\right)$, удовлетворяющей условиям (2.22), (2.23).

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия* (2.6) *и на каждом промежутке* $\left[u_{k+1},v_k\right]$ *задана функция*

$$h_k\left(t\right)=\exp\left[\left(t-s_k\right)^2-r_k{}^2\right]^{-1}, \tag{2.25}$$

где

$$s_k = 0.5\left(u_{k+1}+v_k\right),$$
$$r_k = 0.5\left(v_k-u_{k+1}\right),$$

тогда выполняются условия (2.22), *и существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел* m_k *такая, что выполняются условия* (2.7), (2.23).

Доказательство. Известно, что функцию $h_k(t)$ при фиксированном k можно доопределить нулем на концах промежутка $[u_{k+1}, v_k]$, в этом случае условия (2.22) имеют место.

Зафиксируем k и обозначим

$$z = t - s_k,$$

и определим

$$\bar{h}_k(z) = \exp\left[z^2 - r_k^{\,2}\right]^{-1} = h_k(z + s_k).$$

Ясно, что

$$\bar{h}_k'(z) = -2z\left(z^2 - r_k^{\,2}\right)^{-2} \exp\left[z^2 - r_k^{\,2}\right]^{-1},$$

покажем по индукции, что

$$\bar{h}_k^{(i)}(z) = P_{3i-2}(z)\left(z^2 - r_k^{\,2}\right)^{-2i} \exp\left[z^2 - r_k^{\,2}\right]^{-1}, \tag{2.26}$$

где $P_{3i-2}(z)$ – многчлен степени $3i$-2 от z, причем коэффициенты этого многочлена зависят от i и r_k. База индукции очевидна, установим индукционный переход, для этого продифференцируем функцию $\bar{h}_k(z)$ i+1 раз, получим

$$\bar{h}_k^{(i+1)}(z) = P_{3i+1}(z)\left(z^2 - r_k^{\,2}\right)^{-2(i+1)} \exp\left[z^2 - r_k^{\,2}\right]^{-1},$$

где

$$P_{3i+1}(z) = \left(z^2 - r_k^{\,2}\right)^2 P_{3i-2}'(z) - 2z\left(2iP_{3i-2}(z)\left(z^2 - r_k^{\,2}\right) + P_{3i-2}(z)\right).$$

Ясно, что $P_{3i+1}(z)$ – многочлен степени $3i+1$ от z. Таким образом, формула (2.26) доказана.

Известно, что

$$\lim_{x \to 0-} x^k \exp\left(x^{-1}\right) = 0,$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

откуда

$$\bar{h}_k^{(i)}(-r_k) = \bar{h}_k^{(i)}(r_k) = 0,$$
$$k = 0, 1, \ldots,$$

в свою очередь, с учетом определения z, имеем

$$h_k^{(i)}(u_{k+1}) = h_k^{(i)}(v_k) = 0,$$
$$i = 0,1,\ldots.$$

Легко видеть, что при фиксированном *i* многочлен $P_{3i-2}(z)$ ограничен при $z \in [-r_k, r_k]$. Более того, из предыдущих рассуждений следует, что существует постоянная *N(i),* не зависящая от *k*, такая, что

$$\left|P_{3i-2}(z)\right| \le N(i),$$
$$z \in [-r_k, r_k],$$

при любых $k = 1,2, \ldots$.

Оценим производную порядка i функции $\overline{h}_k(z)$ на промежутке $[-r_k, r_k]$, для этого рассмотрим на этом промежутке при фиксированном i следующую функцию

$$\chi(z) = \left(z^2 - r_k^{\,2}\right)^{-2i} \exp\left[z^2 - r_k^{\,2}\right]^{-1}.$$

Ясно, что эта функция неотрицательна и обращается в нуль на концах промежутка. Продифференцируем эту функцию, получим

$$\chi'(z) = -2z\left[2i\left(z^2 - r_k^{\,2}\right) + 1\right]\left(z^2 - r_k^{\,2}\right)^{-2(i+1)} \exp\left[z^2 - r_k^{\,2}\right]^{-1}.$$

Из последнего соотношения следует, что, если $r_k^{\,2} < (2i)^{-1}$, то функция *χ(z)* достигает своего максимального значения на нашем промежутке при $z = 0$.

Следовательно, получим, что при фиксированном i для любого достаточно большого *k* справедливо неравенство

$$\left|\overline{h}_k^{(i)}(z)\right| \le N(i) r_k^{-2i} \exp\left[-\left(r_k^{-2}\right)\right],$$

где $z \in [-r_k, r_k]$.

Таким образом, если функции $h_k(t)$ заданы формулами (2.25), где $t \in [u_{k+1}, v_k]$, то, учитывая последние неравенства и определение *z*, имеем

$$\lim_{k\to\infty} h_{ki} = 0, i = 0,1,2,\ldots\ .$$

Из свойств интеграла следует, что

$$r_k \exp\left(-\frac{4}{3} r_k^{-2}\right) \le I_k \le 2 r_k \exp\left(-r_k^{-2}\right).$$

Определим

$$\varsigma_k = \left(\ln \mu\right)^{-1} \ln\left(I_k u_{k+1}\right)^{-1},$$

ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} \varsigma_k = +\infty.$$

Кроме того, пусть l_k − возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $\left(\lambda+\theta\right)^{l_k}\left(\mu+\theta\right)^{l_k} < \varepsilon_k$, определим

$$m_k = \max_{1\le i\le k}\left[\varsigma_i\right] + l_k,$$

где [...] − целая часть числа.

В результате, определили последовательность m_k, удовлетворяющую условиям (2.7), и показали, что если на каждом промежутке $\left[u_{k+1}, v_k\right]$функцию $h_k\left(t\right)$определить формулами (2.25), то условия (2.23) выполняются.

Теорема 2.8 доказана.

Окончательно, пусть выполнены условия теорем 2.7, 2.8, тогда, функция g удовлетворяет условиям (2.8), (2.9). Доопределив функцию g как функцию класса C^∞ на $\left(-\sigma_1, \sigma_1\right)$ произвольным образом, получим искомую функцию.

Зафиксируем положительную θ и при любом фиксированном k рассмотрим конечную последовательность множеств

$$B_k^j = \left\{\left(x,y\right) : \left|x - \lambda^j x_k\right| < \left(\lambda+\theta\right)^j \sigma_k, \left|y - \mu^j y_k\right| < d\varepsilon_k\left(\mu+\theta\right)^{j-m_k}\right\},$$

где $j = 0,1,...,m_k$. Считаем, что $B_k^j \subset V_1$.

Фиксируем произвольную положительную β такую, что

$$\beta > -\frac{\ln\left(\lambda+\theta\right)}{\ln\left(\mu+\theta\right)} > 1.$$

Теорема 2.9. *Пусть f – диффеоморфизм плоскости в себя класса* C^{∞} *с неподвижной седловой точкой в начале координат. Предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической точки. Пусть выполнены условия* (2.1)-(2.9). *Предположим, что функции p, q, определенные в* (2.1), *удовлетворяют условиям* (2.10) *с положительной постоянной θ, тогда в любой окрестности гомоклинической точки* $\left(x^{0},0\right)$ *содержится счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательство теоремы приведено в разделе 2 главы 1 для C^{1}-гладкого диффеоморфизма, в связи с тем, что C^{∞}-гладкий диффеоморфизм является частным случаем C^{1}-гладкого диффеоморфизма, доказательство теоремы 2.9 уже представлено.

Пусть, как и ранее,

$$\eta=-\frac{\ln\lambda}{\ln\mu}>1,$$

предположим, что η рационально.

Перейдем к построению множества C^{∞}- гладких функций p, q, удовлетворяющих условиям (2.3), (2.10), причем предполагается, что последовательности, определяющие свойства функции g фиксированы.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть* $\sigma_{k},\varepsilon_{k}$ *– положительные последовательности, стремящиеся к нулю, причем* σ_{k} *убывают, и предположим, что выполнено условие* (2.6). *Пусть* m_{k} *– строго возрастающая последовательность натуральных чисел, такая, что выполнены условия* (2.7), *а* g C^{∞}*-гладкая функция, удовлетворяющая условиям* (2.8), (2.9), *тогда справедливо следующее соотношение*

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{m_{k}}\sigma_{k}=+\infty. \tag{2.27}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, тогда существует положительная постоянная D и подпоследовательность номеров k_j такая, что

$$\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{m_{k_j}} \sigma_{k_j} \le D.$$

Однако, из доказательства теоремы 2.6 следует, что при любом целом неотрицательном *i* имеет место соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{m_k} \left(\sigma_k\right)^i = +\infty.$$

Зафиксируем натуральное число *i* такое, что

$$\mu\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-i} < 1,$$

ясно, что

$$\left(\sigma_{k_j}\right)^i \le D^i \left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-im_{k_j}}.$$

Откуда

$$\lim_{j\to\infty} \mu^{m_{k_j}} D^i \left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-im_{k_j}} = \lim_{j\to\infty} \mu^{m_{k_j}} \left(\sigma_{k_j}\right)^i = 0.$$

Таким образом, соотношение (2.27) доказано.

Лемма 2.2 доказана.

Пусть Δ натуральное число такое, что

$$\Delta\eta \in N, \tag{2.28}$$

и справедливы неравенства

$$\begin{gathered}
\Delta > -\eta^{-1} \ln\left[\left(\lambda+\theta\right)^2\left(\mu+\theta\right)\right]\left[\ln\mu\right]^{-1}, \\
\Delta > -\left[\beta\ln\left(\mu+\theta\right)+\ln\mu\right]\left[\ln\left(\lambda+\theta\right)\right]^{-1}, \\
\Delta > 1-\beta\ln\left(\mu+\theta\right)\left[\ln\left(\lambda+\theta\right)\right]^{-1}.
\end{gathered} \tag{2.29}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.10. *Пусть F(t) – произвольная функция класса* C^∞, *определенная в достаточно малой окрестности нуля такая, что*

$$\left|F(t)\right| \le |t|, \left|F'(t)\right| \le 1.$$

*Пусть выполнены условия (*2.6)-(2.8), (2.28), (2.29), *тогда функции p, q, определенные как*

$$p(x,y) = q(x,y) = F\left(x^{\Delta} y^{\Delta\eta}\right), \tag{2.30}$$

являются C^{∞}*-гладкими функциями, удовлетворяющими условиям* (2.3),(2.10).

Доказательство. Пусть функции *p, q* определены формулами (2.30). Ясно, что эти функции являются бесконечно дифференцируемыми в окрестности начала координат. Кроме того, они и их производные первого порядка равны нулю в нуле. Условия (2.3) выполнены очевидным образом. Осталось проверить выполнение условий (2.10).

Пусть

$$\xi_k = \mu^{\eta\Delta m_k}\left(x_k y_k^{\ \eta}\right)^{\Delta},$$

ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \left(x^0\left(y^0\right)^{\eta}\right)^{\Delta} > 0.$$

В силу определения η имеем $\lambda\mu^{\eta} = 1$, следовательно,

$$\left|p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| = \left|F\left(\left(x_k y_k^{\ \eta}\right)^{\Delta}\right)\right| \le \left(x_k y_k^{\ \eta}\right)^{\Delta} = \mu^{-\Delta\eta m_k}\xi_k,$$

где $j = 0,1,\ldots,m_k$.

Из условий (2.29) следует, что $\mu^{-\Delta\eta} < (\lambda+\theta)^2(\mu+\theta)$, откуда

$$\lim_{k\to\infty}\left[\mu^{-\Delta\eta}(\lambda+\theta)^{-2}(\mu+\theta)^{-1}\right]^{m_k} = 0.$$

Из последних соотношений следует, что

$$\mu^{-\Delta\eta}(\lambda+\theta)^{-1} = (\lambda+\theta)(\mu+\theta)s,$$

где $0 < s < 1$, откуда, учитывая свойства последовательностей σ_k, ε_k, получим

$$\lim_{k\to\infty}\left[\mu^{-\Delta\eta}(\lambda+\theta)^{-1}\right]^{m_k}(\varepsilon_k)^{-1} = \lim_{k\to\infty}\left[\mu^{-\Delta\eta}(\lambda+\theta)^{-1}\right]^{m_k}(\sigma_k)^{-1} = 0.$$

В результате имеем, для достаточно больших номеров *k*,

$$0 < \mu^{-\Delta\eta m_k}\xi_k < 0.5\theta(\lambda+\theta)^{m_k}\sigma_k, \text{ где } j = 0,1,\ldots,m_k.$$

Окончательно, получим

$$\left|p\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| < 0.5\theta\left(\lambda+\theta\right)^j \sigma_k, \qquad (2.31)$$

где $j = 0,1,...,m_k - 1$.

Продифференцируем функцию *p*, ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial p\left(x,y\right)}{\partial x} &= \Delta F'\left(x^{\Delta} y^{\Delta\eta}\right) x^{\Delta-1} y^{\Delta\eta}, \\ \frac{\partial p\left(x,y\right)}{\partial y} &= \Delta\eta F'\left(x^{\Delta} y^{\Delta\eta}\right) x^{\Delta} y^{\Delta\eta-1}. \end{aligned} \qquad (2.32)$$

Зафиксируем k и j и рассмотрим $\left(x,y\right) \in B_k^j$, тогда можно представить x, y как

$$\begin{aligned} x &= \lambda^j x_k + z_1\left(k\right), \\ y &= \mu^j y_k + z_2\left(k\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \left|z_1\left(k\right)\right| &< \left(\lambda+\theta\right)^j \sigma_k, \\ \left|z_2\left(k\right)\right| &< d\varepsilon_k\left(\mu+\theta\right)^{j-m_k}. \end{aligned}$$

Оценим

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial p\left(x,y\right)}{\partial x}\right| \le \Delta\left(\lambda^j x_k + \left|z_1\left(k\right)\right|\right)^{\Delta-1}\left(\mu^j y_k + \left|z_2\left(k\right)\right|\right)^{\Delta\eta} \le \\ &\le \Delta\lambda^{-j}\left(x_k + \left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^j \sigma_k\right)^{\Delta-1}\left(y_k + d\varepsilon_k\left(\mu+\theta\right)^{-m_k}\left(1+\theta\mu^{-1}\right)^j\right)^{\Delta\eta} \le \\ &\le \Delta\lambda^{-m_k}\left(x_k + \left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{m_k} \sigma_k\right)^{\Delta-1}\left(y_k + d\varepsilon_k\mu^{-m_k}\right)^{\Delta\eta}. \end{aligned}$$

Рассмотрим произведение

$$\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-(\Delta-1)m_k} \sigma_k^{-(\Delta-1)} \lambda^{m_k}\left|\frac{\partial p\left(x,y\right)}{\partial x}\right|,$$

учитывая определение y_k, получим следующую оценку

$$\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-(\Delta-1)m_k}\sigma_k^{-(\Delta-1)}\lambda^{m_k}\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right|\leq$$
$$\leq\Delta\left(x_k\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-m_k}\sigma_k^{-1}+1\right)^{\Delta-1}\left(y^0+\sigma_k+d\varepsilon_k\right)^{\Delta\eta}\mu^{-\Delta\eta m_k}.$$

По лемме 2.2, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-m_k}\left(\sigma_k\right)^{-1}=0,$$

откуда

$$\lim_{k\to\infty}\left(x_k\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-m_k}\sigma_k^{-1}+1\right)^{(\Delta-1)}\left(y^0+\sigma_k+d\varepsilon_k\right)^{\Delta\eta}=\left(y^0\right)^{\Delta\eta}>0,$$

таким образом, получим

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right|\leq\left(\lambda+\theta\right)^{(\Delta-1)m_k}\sigma_k^{(\Delta-1)}S_1, \tag{2.33}$$

где S_1 − постоянная положительная величина.

Из последнего неравенства следует, что при достаточно больших номерах k справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\right|<0.25\theta,$$
$$(x,y)\in B_k^j,\ j=0,1,...,m_k-1.$$

Аналогично оценим производную функции p по y. С учетом (2.29), (2.32) получим

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right|\leq\Delta\eta\left(\lambda^j x_k+\left|z_1(k)\right|\right)^{\Delta}\left(\mu^j y_k+\left|z_2(k)\right|\right)^{\Delta\eta-1}\leq$$
$$\leq\Delta\eta\mu^{-j}\left(x_k+\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^j\sigma_k\right)^{\Delta}\left(y_k+d\varepsilon_k\left(\mu+\theta\right)^{-m_k}\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^j\right)^{\Delta\eta-1}\leq$$
$$\leq\Delta\eta\left(x_k+\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{m_k}\sigma_k\right)^{\Delta}\left(y_k+d\varepsilon_k\mu^{-m_k}\right)^{\Delta\eta-1}.$$

Кроме того, применяя аналогичные рассуждения, получим

$$\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-\Delta m_k}\sigma_k^{-\Delta}\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right|\le$$
$$\le\Delta\eta\left(x_k\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-m_k}\sigma_k^{-1}+1\right)^{\Delta}\left(y^0+\sigma_k+d\varepsilon_k\right)^{\Delta\eta-1}\mu^{-m_k(\Delta\eta-1)}$$

Откуда, по лемме 2.2 имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(x_k\left(1+\theta\lambda^{-1}\right)^{-m_k}\sigma_k^{-1}+1\right)^{\Delta}\left(y^0+\sigma_k+d\varepsilon_k\right)^{\Delta\eta-1}=\left(y^0\right)^{\Delta\eta-1}>0.$$

В результате

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right|\le S_2\mu^{m_k}\left(\lambda+\theta\right)^{\Delta m_k}\left(\sigma_k\right)^{\Delta}, \tag{2.34}$$

где S_2 − положительная постоянная.

В силу условий (2.29), при достаточно больших k справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\right|<\left(\mu+\theta\right)^{-\beta m_k},$$
$$\left(x,y\right)\in B_k^j,$$
$$j=0,1,...,m_k-1.$$

Таким образом, соотношения (2.10) для функции p установлены, рассмотрим функцию q, определенную в (2.30), и проведем для нее аналогичные рассуждения. Требуется проверить выполнение условий (2.10) для функции q.

Сначала оценим

$$\left|q\left(\lambda^j x_k,\mu^j y_k\right)\right|=\left|F\left(x_k^{\Delta}y_k^{\Delta\eta}\right)\right|\le x_k^{\Delta}y_k^{\Delta\eta}=\mu^{-\Delta m_k\eta}\tau_k,\text{ где } j=0,1,...,m_k-1.$$

Из условий (2.29) следует

$$\mu^{-\Delta\eta}<\left(\lambda+\theta\right)^2\left(\mu+\theta\right)<\lambda+\theta,$$

откуда,

$$\left(\mu+\theta\right)\mu^{-\Delta\eta}=\left(\mu+\theta\right)\left(\lambda+\theta\right)s,\text{ где } 0<s<1.$$

Следовательно, имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\left[\left(\mu+\theta\right)\mu^{-\Delta\eta}\right]^{m_k}\left(\varepsilon_k\right)^{-1}=0$.

Из последних соотношений следует, что для достаточно больших номеров k справедливы неравенства

$$\left|q\left(\lambda^j x_k, \mu^j y_k\right)\right| < 0.5\theta d\varepsilon_k \left(\mu+\theta\right)^{j-m_k},$$
$$j = 0,1,...,m_k - 1.$$

Производные первого порядка функции q совпадают с соответствующими производными функции p, которые представлены в (2.32). Ясно, что справедливы неравенства, аналогичные неравенствам (2.33),(2.34) , которые имеют вид

$$\left|\frac{\partial q\left(x,y\right)}{\partial x}\right| \le S_1\left(\lambda+\theta\right)^{(\Delta-1)m_k} \sigma_k^{(\Delta-1)},$$
$$\left|\frac{\partial q\left(x,y\right)}{\partial y}\right| \le S_2\mu^{m_k}\left(\lambda+\theta\right)^{\Delta m_k} \sigma_k^{\Delta}.$$

Из условий (2.29) и последних оценок, получим, что при достаточно больших k, справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial q\left(x,y\right)}{\partial x}\right| < \left(\mu+\theta\right)^{-\beta m_k},$$
$$\left|\frac{\partial q\left(x,y\right)}{\partial y}\right| < 0.25\theta,$$
$$\left(x,y\right)\in B_k^j,\ j = 0,1,...,m_k - 1.$$

Теорема 2.10 доказана.

Таким образом, если η является рациональной величиной, а функции g, p, q являются функциями класса C^∞ и удовлетворяют условиям теорем 2.7, 2.10, тогда по теореме 2.5 диффеоморфизм f имеет счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Предположим, что η, определенная как $\eta = -\dfrac{\ln\lambda}{\ln\mu}$, является иррациональной величиной, тогда в малой окрестности нуля существует C^∞-гладкое сопряжение диффеоморфизма f с линейным диффеоморфизмом, т.е. существует диффеоморфизм G класса C^{∞} такой, что справедливо равенство $f = G\bar{f}G^{-1}$, где $\bar{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}$ в этой окрестности нуля, а вне этой окрестности $\bar{f}$ совпадает с *f*.

Это утверждение следует из [39]. Если диффеоморфизм $\bar{f}$ удовлетворяет теореме 2.5, тогда исходный диффеоморфизм f также имеет счетное множество устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

ГЛАВА 3 МНОГОМЕРНЫЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ

В главах 1, 2 диссертации рассматривался диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат. Предполагалось наличие нетрансверсальной гомоклинической точки, доказывалось, что при определенных условиях, наложенных, прежде всего, на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, диффеоморфизм имеет счетное множество устойчивых периодических точек с характеристическими показателями, отделенными от нуля.

Основная задача этой главы – показать, что этот результат имеет место ив случае диффеоморфизма многомерного пространства в себя.

Ранее окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки многомерного диффеоморфизма изучалась во многих работах, например, [27, 29, 30, 38], однако, в этих работах рассматривается случай простейшего квадратичного касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

В данной главе рассматривается иной способ касания этих многообразий, чем в упомянутых работах.

В этой главе рассматривается диффеоморфизм $(n+m)$-мерного пространства в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат, предполагается существование нетрансверсальной гомоклинической точки, а именно, отличной от нуля точки, которая лежит в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки, причем эти многообразия касаются в этой точке.

Цель главы – показать, что при выполнении некоторых условий, наложенных, прежде всего, на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, окрестность гомоклинической точки содержит счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Пусть f – указанный диффеоморфизм. В дальнейшем через $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ обозначаются векторы ($m+n$)-мерного пространства, где

$$x = \mathrm{col}\left(x_1, \ldots, x_m\right),$$
$$y = \mathrm{col}\left(y_1, \ldots, y_n\right).$$

Предположим, что f линеен в некоторой окрестности V точки 0. В этой главе, в отличие от предыдущих глав, рассматриваются только такие диффеоморфизмы.

Пусть

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda x \\ \mathrm{M} y \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$, через Λ и M обозначены диагональные квадратные матрицы порядка m и n соответственно, а именно, эти матрицы имеют следующий вид

$$\Lambda = \mathrm{diag}\left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right],$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{diag}\left[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\right].$$

Считаем, что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ − действительные числа, и матрица $Df\left(0\right)$ − диагональная матрица порядка $m+n$. В диссертации рассматривается только этот случай, однако, даже в этом самом простом случае при $m > 1$ или $n > 1$ доказательства соответствующих теорем становятся более сложными.

Предположим, что выполнены следующие неравенства

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots. \le \lambda_m < 1 < \mu_1 \le \mu_2 \le \ldots. \le \mu_n. \tag{3.2}$$

Обозначим через

$$\lambda = \lambda_m,$$
$$\mu = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n.$$

Пусть

$$\lambda\,\mu < 1. \tag{3.3}$$

Пусть $W^s(0), W^u(0)$ – устойчивое и неустойчивое многообразия точки 0. Ясно, что в окрестности V многообразие $W^s_{loc}(0)$ совпадает с линейным пространством, натянутым на оси $(0,x_1),\ldots,(0,x_m)$, а многообразие $W^u_{loc}(0)$ – с линейным пространством, натянутым на оси $(0,y_1),\ldots,(0,y_n)$. Предположим, что существует нетрансверсальная гомоклиническая точка, а именно, пусть в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразия лежит отличная от нуля точка.

Рассмотрим две точки из орбиты гомоклинической точки, лежащие в V.

Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots, 0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ – координаты эти точек.

В дальнейшем будут приняты обозначения

$$x^0 = \mathrm{col}(x_1^0, \ldots, x_m^0), y^0 = \mathrm{col}(y_1^0, \ldots, y_n^0),$$

$$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0) = (x^0, 0), (0, \ldots, 0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) = (0, y^0).$$

Пусть

$$x_i^0 > 0, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, m, \; y_i^0 > 0, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Пусть

$$V_1 = \left\{(x,y) : \|x\| < (\lambda_1)^{-1}\|x^0\|, \|y\| < \mu\|y^0\|\right\} \subset V,$$

где $\|\ldots\|$ − евклидова норма вектора.

Точки $(x^0,0),(0,y^0)$ принадлежат орбите гомоклинической точки, поэтому существует такое натуральное число τ, что

$$f^\tau \begin{pmatrix} 0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть U − такая выпуклая окрестность точки $(0, y^0)$, что

$$U \subset V_1, f^\tau(U) \subset V_1.$$

Обозначим через L следующее сужение: $L = f^{\tau}\big|_U$. Отображение L имеет класс гладкости C^1. Свойства этого отображения определяют характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точке $\left(x^0, 0\right)$.

Опишем эти свойства подробнее.

Пусть $\Omega = DL(0)$, ясно, что это матрица порядка ($m+n$). Считаем, что она имеет вид

$$\Omega = DL(0) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & S \end{pmatrix},$$

где A и S квадратные матрицы порядка m и n соответственно.

Известно, что

$$\det\Omega > 0. \tag{3.5}$$

Предположим, что матрица S имеет следующий вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ 0 & 0 & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

т. е. $s_{ij} = 0$, если $i \leq j$.

Ясно, что $\det S = 0$, поэтому точка $\left(x^0, 0\right)$ является точкой касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

В предыдущих главах рассматривался двумерный диффеоморфизм, предполагалось, что $m = n = 1$, и матрица Ω имела вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

В многомерном случае, также, матрица S может быть нулевой, если это не противоречит условию (3.5). Однако, если, например, $m = 1$, а $n \geq 2$, то матрица S должна быть ненулевой. В качестве примера, можно рассмотреть случай, когда m = 1, а n = 2, причем матрицы Ω и S имеют вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что отображение L имеет вид

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Omega\begin{pmatrix} x \\ y - y^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi\left(x, y - y^0\right) \\ G\left(y - y^0\right) + \Psi\left(x\right) \end{pmatrix}$$

или

$$f^{\tau}\big|_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + Ax + B\left(y - y^0\right) + \Phi\left(x, y - y^0\right) \\ Cx + S\left(y - y^0\right) + G\left(y - y^0\right) + \Psi\left(x\right) \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где Φ, Ψ, G – непрерывно дифференцируемые вектор-функции, которые равны нулю вместе со своими частными производными при x = 0 и $y = y^0$.

Рассмотрим подробнее свойства вектор-функции Ψ. В координатах

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_n \end{pmatrix}.$$

Предположим, что для любого i = 1,2, … , m функция Ψ_i зависит от (n+m-i) аргументов, а именно

$$\Psi_i = \Psi_i\left(x_1, ..., x_m, y_{i+1} - y_{i+1}^0, ..., y_n - y_n^0\right) \tag{3.8}$$

т.е. Ψ_1 − функция $\left(n + m - 1\right)$ аргумента, Ψ_n зависит только от x.

Пусть, существует такая положительная постоянная $\bar{M}$, что

$$\left\|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right\| \le \bar{M}, \left\|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right\| \le \bar{M}, \left\|\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right\| \le \bar{M}, \left\|\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right\| \le \bar{M}, \tag{3.9}$$

при $(x,y)\in U$.

Обозначим через $\bar{d}$ следующую величину

$$\bar{d} = \max\left[n\left(\|S\| + \bar{M}\right), 1\right],$$

где $\|S\|$ − норма матрицы S, согласованная с евклидовой векторной нормой.

Рассмотрим в координатах вектор-функцию G, т.е.

$$G\left(y - y^0\right) = \begin{pmatrix} G_1 \\ . \\ . \\ . \\ G_n \end{pmatrix}.$$

Предположим, что G_i являются функциями i переменных, а именно,

$$G_i = G_i\left(y_1 - y_1^0, ..., y_i - y_i^0\right), \qquad (3.10)$$

где i = 1,2, … , n, таким образом, G_1 есть функция одной переменной, а G_n − функция n переменных.

Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий определяют свойства функции G, для описания которых надо рассмотреть несколько положительных последовательностей.

Пусть σ_k, ε_k − положительные последовательности, стремящиеся к нулю, причем последовательность σ_k убывает. Предположим, что для любого k верно следующее неравенство

$$\sigma_k - \varepsilon_k > \sigma_{k+1} + \varepsilon_{k+1}. \qquad (3.11)$$

Пусть l_k − возрастающая последовательность натуральных чисел, такая что

$$\left(\lambda\mu\right)^{l_k} < \frac{\varepsilon_k}{(8\bar{d})^n}. \qquad (3.12)$$

В дальнейшем уточним, насколько быстро l_k должны стремиться к бесконечности.

Пусть $\xi_2^k, \xi_3^k, ..., \xi_n^k$ − положительные последовательности такие, что при любых номерах k и i = 2, … , n справедливы неравенства

$$0 < \frac{\xi_i^k}{\lambda^{l_k}} \leq 1 \ . \tag{3.13}$$

Обозначим через y_k, ξ_k следующие последовательности n-мерных векторов

$$\xi_k = \mathrm{col}\left(\sigma_k, \xi_2^k, ..., \xi_n^k\right),$$
$$y_k = y^0 + \xi_k.$$

В дальнейшем элементы последовательности y_k обозначаются как $y_k = \mathrm{col}\left(y_1^k, ..., y_n^k\right)$.

Ясно, что при n = 1 последовательности y_k, ξ_k являются обычными числовыми последовательностями.

Очевидно, что

$$\lim_{k \to \infty} y_k = y^0 .$$

Ранее была введена диагональная матрица Λ, пусть Λ^{l_k} степень матрицы порядка l_k. Ясно, что при достаточно больших номерах k $\det\left[\Lambda^{l_k} A - E\right] \neq 0$, поэтому можно определить последовательность m-мерных векторов

$$x_k = \left[E - \Lambda^{l_k} A\right]^{-1} \Lambda^{l_k} \left[x^0 + B\xi_k\right].$$

Ясно, что справедливо соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \left\| x_k \right\| = 0 .$$

Пусть $C_1, ..., C_n, S_1 ..., S_n$ − строки матриц C и S соответственно.

Обозначим через Δ_i^k, где i = 1,2, … , n, элементы следующих последовательностей

$$\Delta_1^k = \varepsilon_k, \ \ \Delta_i^k = \left(4\bar{d}\right)^{1-i} \varepsilon_k \left(\mu_1 ... \mu_{i-1}\right)^{-l_k} .$$

Ясно, что

$$\Delta_1^k > \Delta_2^k > ... > \Delta_n^k > 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} \Delta_i^k = 0, i = 1, 2, ..., n.$$

Рассмотрим подробно свойства непрерывно дифференцируемой n-мерной функции G. Как отмечалось в (3.10), G_i является функцией i переменных, т.е.

$$G_i = G_i\left(y_1 - y_1^0, ..., y_i - y_i^0\right), \text{ где } i = 1, \dots, n.$$

Пусть

$$z_k = G\left(\xi_k\right) - \mathrm{M}^{-l_k} y_k + Cx_k + S\xi_k,$$

т.е. z_k – последовательность n-мерных векторов, которая в координатах записывается как

$$z_k = \mathrm{col}\left(z_1^k, ..., z_n^k\right),$$

Причем

$$\left|z_1^k\right| = \left|G_1\left(\sigma_k\right) - \mu_1^{-l_k}\left(y_1^0 + \sigma_k\right) + C_1 x_k + S_1\xi_k\right|,$$
$$\left|z_i^k\right| = \left|G_i\left(\sigma_k, \xi_2^k, ..., \xi_i^k\right) - \mu_i^{-l_k}\left(y_i^0 + \xi_i^k\right) + C_i x_k + S_i\xi_k\right|,$$

где $i = 2, \dots, n$.

Предположим, что

$$\left|z_1^k\right| < \frac{\varepsilon_k}{4\mu_1^{l_k}},$$
$$\left|z_i^k\right| < \frac{\Delta_i^k}{4\mu_i^{l_k}}, \qquad (3.14)$$

где $i = 2, \dots, n$.

Предположим, что существует постоянная величина $\alpha > 1$ такая, что справедливы следующие неравенства

$$\left|\frac{dG_1\left(t_1\right)}{dt_1}\right| < \mu^{-\alpha l_k}, t_1 \in \left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right),$$
$$\left|\frac{\partial G_i\left(t_1, ..., t_i\right)}{\partial t_j}\right| < \mu^{-\alpha l_k}, t_1 \in \left(\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k\right), t_s \in \left(\xi_s^k - \Delta_s^k, \xi_s^k + \Delta_s^k\right), \qquad (3.15)$$

где $i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, i, s = 2, \dots, i$.

Функция G_1 – непрерывно дифференцируемая функция одной переменной, ясно, что из (3.15) следует, что $G_1(0)=G_1'(0)=0$, откуда получим соотношения

$$\lim_{k\to\infty}\frac{G_1(\sigma_k)}{\sigma_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mu_1^{l_k}\sigma_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda^{l_k}}{\sigma_k}=0.$$

Из результатов главы 1, 2 данной работы следует, что по заранее заданным последовательностям σ_k,ε_k можно найти последовательность l_k, удовлетворяющую условиям (3.12), достаточно быстро стремящуюся к бесконечности, и построить непрерывно дифференцируемую функцию G_1, удовлетворяющую свойствам (3.14), (3.15). Более того, эта функция может иметь в нуле производную второго порядка равную нулю. Функции $G_2,...,G_n$, удовлетворяющие свойствам (3.14), (3.15), также могут быть построены.

Определим элементы еще одной числовой последовательности как

$$\delta_k=\max\left[2\lambda^{l_k}\sigma_k,4n\left(\|B\|+\bar{M}\right)\lambda^{l_k}\varepsilon_k\right].$$

Пусть

$$U_k=\left\{(x,y):\|x-x_k\|<\delta_k,\left|y_1-y_1^k\right|<\varepsilon_k,\left|y_i-y_i^k\right|<\Delta_i^k,i=2,...,n\right\}.$$

Ясно, что для достаточно больших номеров k справедливы включения

$$U_k\subset U\subset V_1,\ L(U_k)\subset L(U)\subset V_1. \qquad (3.16)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.1)-(3.16), *тогда для достаточно больших номеров k справедливы включения*

$$f^{l_k}L\left(\bar{U}_k\right)\subset U_k, \qquad (3.17)$$

где $\bar{U}_k$ *замыкание* U_k.

Доказательство. Ясно, что при выполнении условий (3.16) имеют место включения

$$f^{j}L\left(\bar{U}_k\right)\subset V_1,\; j=0,1,...,l_k\ .$$

Пусть

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_k\\ \bar{y}_k\end{pmatrix}=f^{l_k}L\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\bar{x}_k&=x_k+\Lambda^{l_k}\Phi\left(x_k,\xi_k\right),\\ \bar{y}_k&=y_k+\mathrm{M}^{l_k}\left(z_k+\Psi\left(x_k,\xi_k\right)\right),\end{aligned}\tag{3.18}$$

причем

$$\begin{aligned}\bar{x}_k&=\mathrm{col}\left(\bar{x}_1^k,...,\bar{x}_m^k\right),\\ \bar{y}_k&=\mathrm{col}\left(\bar{y}_1^k,...,\bar{y}_n^k\right).\end{aligned}$$

Пусть θ^1,u − произвольные m-мерные векторы, а θ^2,v − произвольные n-мерные векторы. Введем обозначения θ^1u,θ^2v

$$\theta^1u=\mathrm{col}\left(\theta_1^1u_1,...,\theta_m^1u_m\right),\theta^2v=\mathrm{col}\left(\theta_1^2v_1,...,\theta_n^2v_n\right).$$

U – выпуклая окрестность точки $\left(0,y^0\right)$, поэтому, применив теорему о среднем значении, получим

$$\Phi\left(x_k,\xi_k\right)=\frac{\partial\Phi\left(\theta^1x_k,\theta^2\xi_k\right)}{\partial x}x_k+\frac{\partial\Phi\left(\theta^1x_k,\theta^2\xi_k\right)}{\partial y}\xi_k.$$

Известно, что элементы векторов θ^1,θ^2 зависят от k, но при этом ограничены, точнее, они принадлежат промежутку [0,1] при любых k.

Из свойств функции Φ следует

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{\partial\Phi\left(\theta^1x_k,\theta^2\xi_k\right)}{\partial x}\right\|=\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{\partial\Phi\left(\theta^1x_k,\theta^2\xi_k\right)}{\partial y}\right\|=0.$$

Из последних соотношений, условий (3.13), определения x_k,ξ_k получим, что при достаточно больших номерах k справедливы неравенства

$$\left\| \frac{\partial \Phi\left(\theta^1 x_k, \theta^2 \xi_k\right)}{\partial x} \right\| \le \left(4\left\|x^0\right\|\right)^{-1},$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi\left(\theta^1 x_k, \theta^2 \xi_k\right)}{\partial y} \right\| \le 0.25,$$

$$\left\|x_k\right\| \le 2\lambda^{l_k} \left\|x^0\right\|,$$

$$\left\|\xi_k\right\| \le 2\sigma_k,$$

$$\lambda^{l_k} < \sigma_k,$$

откуда, учитывая (3.18), получим

$$\left\|\overline{x}_k - x_k\right\| \le \left\|\Lambda^{l_k}\right\| \left\|\Phi\left(x_k, \xi_k\right)\right\| < \lambda^{l_k} \sigma_k \le 0.5\delta_k. \tag{3.19}$$

Аналогично, применив теорему о среднем значении к функции Ψ, получим

$$\Psi\left(x_k, \xi_k\right) = \frac{\partial \Psi\left(\theta^1 x^k, \theta^2 \xi_k\right)}{\partial x} x_k + \frac{\partial \Psi\left(\theta^1 x_k, \theta^2 \xi_k\right)}{\partial y} \xi_k,$$

где элементы векторов θ^1, θ^2 удовлетворяют вышеуказанным свойствам, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{\partial \Psi\left(\theta^1 x_k, \theta^2 \xi_k\right)}{\partial x} \right\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \frac{\partial \Psi\left(\theta^1 x_k, \theta^2 \xi_k\right)}{\partial y} \right\| = 0.$$

Учитывая условия (3.8) и определение вектора ξ_k, получим

$$\Psi_i\left(x_k, \xi_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Psi_i\left(\theta^1 x_k, \theta^2 \xi_k\right)}{\partial x_j} x_j^k + \sum_{s=i+1}^{n} \frac{\partial \Psi_i\left(\theta^1 x_k, \theta^2 \xi_k\right)}{\partial y_s} \xi_s^k,$$

$i = 1,2, \dots, n$.

Из равенств (3.18) следует оценка

$$\left|y_i^k - \overline{y}_i^k\right| \le \mu_i^{l_k} \left|z_i^k\right| + \mu_i^{l_k} \left|\Psi_i\left(x_k, \xi_k\right)\right|,$$

$$i = 1,2,\dots,n,$$

откуда, принимая во внимание неравенства (3.13), имеем

$$\left|y_i^k - \overline{y}_i^k\right| < 0.25\Delta_i^k + \left(\lambda\mu_i\right)^{l_k},$$

$$i=1,2,\dots,n.$$

Из неравенств (3.12) и определения Δ_i^k следует

$$\left(\lambda\mu_i\right)^{l_k} < 0.25\Delta_i^k,$$

откуда

$$\left|\bar{y}_i^k - y_i^k\right| < 0.5\Delta_i^k,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Последние неравенства и соотношения (3.19) означают, что имеют место следующие включения (для достаточно больших номеров k)

$$\left(\bar{x}_k, \bar{y}_k\right) \in U_k .$$

Пусть $\left(x, y\right) \in \bar{U}_k$, тогда представим x, y как

$$x = x_k + u,$$
$$y = y_k + v,$$

где

$$u = \mathrm{col}\left(u_1, \ldots, u_m\right),$$
$$\left\|u\right\| \le \delta_k,$$
$$v = \mathrm{col}\left(v_1, \ldots, v_n\right),$$
$$\left|v_i\right| \le \Delta_i^k, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = f^{l_k} L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

легко видеть, учитывая (3.18), что

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_k + \Lambda^{l_k}\left(Au + Bv + \Phi\left(x_k + u, \xi_k + v\right) - \Phi\left(x_k, \xi_k\right)\right), \\ \bar{y} &= \bar{y}_k + \mathrm{M}^{l_k}\left(Cu + Sv + G\left(\xi_k + v\right) - G\left(\xi_k\right) + \Psi\left(x_k + u, \xi_k + v\right) - \Psi\left(x_k, \xi_k\right)\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

В дальнейшем через $\bar{y}_j, j = 1, 2, \ldots, n$, обозначаются координаты вектора $\bar{y}$.

Применив теорему о среднем значении к разности $\Phi\left(x_k + u, \xi_k + v\right) - \Phi\left(x_k, \xi_k\right)$, также учитывая неравенства (3.9), легко получить, что при достаточно больших номерах k, справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
&\left\|\Phi\left(x_k+u,\xi_k+v\right)-\Phi\left(x_k,\xi_k\right)\right\|\le\\
&\le\left\|\frac{\partial\Phi\left(x_k+\theta^1u,\xi_k+\theta^2v\right)}{\partial x}\right\|\|u\|+\left\|\frac{\partial\Phi\left(x_k+\theta^1u,\xi_k+\theta^2v\right)}{\partial y}\right\|\|v\|,
\end{aligned}
$$

где θ^1,θ^2 − векторы размерности m и n соответственно, элементы которых лежат между 0 и 1 при любом k. Очевидно, что справедливо следующее включение

$$\left(x_k+\theta^1u,y^0+\xi_k+\theta^2v\right)\in U_k,$$

поэтому, учитывая (3.9), имеем

$$\left\|\Phi\left(x_k+u,\xi_k+v\right)-\Phi\left(x_k,\xi_k\right)\right\|\le\bar{M}\left(\delta_k+\varepsilon_k\right),$$

откуда

$$\left\|\bar{x}-\bar{x}_k\right\|\le\lambda^{l_k}\left[\left(\|A\|+\bar{M}\right)\delta_k+\left(\|B\|+\bar{M}\right)\varepsilon_k\right]<0.5\delta_k.$$

Таким образом, имеем

$$\left\|\bar{x}-x_k\right\|\le\left\|\bar{x}-\bar{x}_k\right\|+\left\|\bar{x}_k-x_k\right\|<\delta_k. \qquad (3.21)$$

Проведем аналогичные оценки для величин $\left|\bar{y}_i-\bar{y}_i^k\right|$, где i = 1,2, … ,n, для этого рассмотрим равенства

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}_1=\bar{y}_1^k+\mu_1^{l_k}\left[C_1u+S_1v+G_1\left(\sigma_k+v_1\right)-G_1\left(\sigma_k\right)\right]+\\
&+\mu_1^{l_k}\left[\Psi_1\left(x_k+u,\xi_2^k+v_2,...,\xi_n^{\,k}+v_n\right)-\Psi_1\left(x_k,\xi_2^k,...,\xi_n^k\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}_i=\bar{y}_i^k+\mu_i^{l_k}\left[C_iu+S_iv+G_i\left(\sigma_k+v_1,\xi_2^k+v_2,...,\xi_i^k+v_i\right)-G_i\left(\sigma_k,\xi_2^k,...,\xi_i^k\right)\right]+\\
&+\mu_i^{l_k}\left[\Psi_i\left(x_k+u,\xi_{i+1}^k+v_{i+1},...,\xi_n^k+v_n\right)-\Psi_i\left(x_k,\xi_{i+1}^k,...,\xi_n^k\right)\right].
\end{aligned}
$$

Применим теорему о среднем значении к разностям

$$G_i\left(\xi_k+v\right)-G_i\left(\xi_k\right),\ \Psi_i\left(x_k+u,\xi_k+v\right)-\Psi_i\left(x_k,\xi_k\right),$$

при достаточно больших номерах k, получим

$$G_i(\xi_k+v)-G_i(\xi_k)=\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(\xi_k+\theta^2 v)v_j\,,$$

$$\Psi_i(x_k+u,\xi_k+v)-\Psi_i(x_k,\xi_k)=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\Psi_i(x_k+\theta^1 u,\xi_k+\theta^2 v)}{\partial x_j}u_j+\sum_{s=i+1}^{n}\frac{\partial\Psi_i(x_k+\theta^1 u,\xi_k+\theta^2 v)}{\partial y_s}v_s\,,$$

откуда, с учетом условий (3.9), (3.15), имеем

$$\left|G_i(\xi_k+v)-G_i(\xi_k)\right|\le\mu^{-\alpha l_k}n\Delta_1^k,$$
$$\left|\Psi_i(x_k+u,\xi_k+v)-\Psi_i(x_k,\xi_k)\right|\le\bar{M}m\delta_k+\bar{M}n\Delta_{i+1}^k.$$

Из последних неравенств, определения вектора $\bar{y}$ и условий (3.19) следует

$$\left|\bar{y}_i-\bar{y}_i^k\right|\le\mu_i^{l_k}\left[\left(\|C\|+\bar{M}m\right)\delta_k+\left(\|S\|+\bar{M}n\right)\Delta_{i+1}^k+\mu^{-\alpha l_k}\Delta_1^k n\right],$$

где $i=1,2,\dots,n$, откуда следует неравенство

$$\left|\bar{y}_i-\bar{y}_i^k\right|<0.5\Delta_i^k.$$

Окончательно,

$$\left|\bar{y}_i-y_i^k\right|\le\left|\bar{y}_i-\bar{y}_i^k\right|+\left|\bar{y}_i^k-y_i^k\right|<\Delta_i^k,\,i=1,2,...,n.$$

Из последних неравенств и неравенств (3.21) следуют включения (3.17).

Лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.1. *Пусть f − диффеоморфизм $(m+n)$-мерного пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат, предположим, что существует нетрансверсальная гомоклиническая к ней точка. Пусть выполнены условия* (3.1)-(3.16), *тогда в любой окрестности гомоклинической точки $(0,y^0)$ содержится счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f, характеристические показатели которых отделены от нуля.*

Доказательство. Для достаточно больших номеров k справедливы включения (3.17), следовательно, в U_k лежит неподвижная точка отображения $f^{l_k}L$. Пусть $r_k = \left(x_k^*, y_k^*\right)$ – такие неподвижные точки, кроме того, пусть

$$\Xi_\text{k} = Df^{l_k}L\begin{pmatrix} x_k^* \\ y_k^* \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$A_k = A + \frac{\partial \Phi\left(x_k^*, y_k^* - y^0\right)}{\partial x},$$
$$B_k = B + \frac{\partial \Phi\left(x_k^*, y_k^* - y^0\right)}{\partial y},$$
$$C_k = C + \frac{\partial \Psi\left(x_k^*, y_k^* - y^0\right)}{\partial x},$$
$$S_k = S + \frac{\partial \Psi\left(x_k^*, y_k^* - y^0\right)}{\partial y},$$
$$G_k = \frac{\partial G\left(y_k^* - y^0\right)}{\partial y}.$$

Ясно, что

$$\Xi_\text{k} = \begin{pmatrix} \Lambda^{l_k} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{M}^{l_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & G_k + S_k \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Пусть $s_{ij}\left(k\right), g_{ij}\left(k\right)$ – элементы матриц S_k, G_k соответственно. Из условий (3.6), (3.8), (3.10), (3.15) имеем

$$\begin{aligned} & s_{ij}\left(k\right) = 0, i \geq j, \\ & g_{ij}\left(k\right) = 0, i < j, \\ & \left|g_{ij}\left(k\right)\right| < \mu^{-\alpha l_k}, i \geq j. \end{aligned} \tag{3.23}$$

При любом фиксированном k рассмотрим характеристическое уравнение матрицы Ξ_k. Пусть $\chi\left(\rho\right)$– характеристический многочлен матрицы, тогда уравнение $\chi\left(\rho\right) = 0$ является характеристическим уравнением матрицы.

Пусть

$$\chi(\rho)=\sum_{j=0}^{n+m}(-1)^{n+m-j}\gamma_j\rho^{n+m-j}, \tag{3.24}$$

где $\gamma_0=1$.

Известно, что коэффициенты характеристического многочлена матрицы (при i = 1, 2, … , n+m) представляют собой сумму всех возможных главных миноров соответствующего порядка. (Главным минором матрицы называется такой минор, у которого номера выбранных строк совпадают с номерами выбранных столбцов, а именно, любому фиксированному набору из i строк матрицы, где $1\le i\le m+n$, соответствует единственный набор столбцов с такими же номерами. На пересечении этих строк и столбцов лежат элементы матрицы, которые представляют собой главный минор матрицы порядка i).

Ясно, что любой главный минор порядка i, как сумма произведений элементов матрицы, имеет в качестве одного слагаемого произведение из i элементов главной диагонали матрицы. Очевидно, что все главные миноры матрицы S равны нулю. В дальнейшем через θ_i обозначается произвольный главный минор матрицы Ξ_k порядка i.

Ясно, что

$$\gamma_i=\sum_{(i)}\theta_i \tag{3.25}$$

где θ_i − главный минор матрицы Ξ_k порядка i. Суммирование в последней сумме ведется по всем возможным наборам из i номеров, выбранным из последовательности 1,2, … , n+m. Ясно, что число слагаемых в этой сумме равно C_{n+m}^{i} (числу сочетаний). Очевидно, что

$$\gamma_1=\mathrm{Tr}\Xi_k=\mathrm{Tr}\left(\Lambda^{l_k}A_k\right)+\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^{l_k}G_k\right),$$
$$\gamma_{n+m}=\det\Xi_k>0.$$

Пусть $i \le n$, выберем i строк матрицы Ξ_k таким образом, чтобы $m+1 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_i \le m+n$, где через t_j обозначены номера выбранных строк. Пусть θ_i − соответствующий главный минор, ясно, что этот минор является главным минором матрицы $\mathrm{M}^{l_k}\left(G_k + S_k\right)$. Очевидно, что указанная матрица имеет вид

$$\mathrm{M}^{l_k}\left(G_k + S_k\right) = \mathrm{M}^{l_k}\begin{pmatrix} g_{11}(k) & s_{12}(k) & s_{13}(k) & . & . & . & s_{1n}(k) \\ g_{21}(k) & g_{22}(k) & s_{23}(k) & . & . & . & s_{2n}(k) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ g_{n-11}(k) & g_{n-12}(k) & g_{n-13}(k) & . & . & . & s_{n-1n}(k) \\ g_{n1}(k) & g_{n2}(k) & g_{n3}(k) & . & . & . & g_{nn}(k) \end{pmatrix},$$

а ее главный минор порядка i записывается как

$$\theta_i = \begin{vmatrix} \mu_{t_1}{}^{l_k} g_{t_1t_1}(k) & \mu_{t_1}{}^{l_k} s_{t_1t_2}(k) & . & . & . & \mu_{t_1}{}^{l_k} s_{t_1t_i}(k) \\ \mu_{t_2}{}^{l_k} g_{t_2t_1}(k) & \mu_{t_2}{}^{l_k} g_{t_2t_2}(k) & . & . & . & \mu_{t_2}{}^{l_k} s_{t_2t_i}(k) \\ . & . & . & . & . & . \\ \mu_{t_i}{}^{l_k} g_{t_it_1}(k) & \mu_{t_i}{}^{l_k} g_{t_it_2}(k) & . & . & . & \mu_{t_i}{}^{l_k} g_{t_it_i}(k) \end{vmatrix}.$$

Известно, что каждое слагаемое определителя имеет в качестве сомножителя ровно один элемент своей последней строки, поэтому, учитывая соотношения (3.22), легко видеть, что минор θ_i можно представить как

$$\theta_i = \left(\mu_{n-i+1} \ldots \mu_n \mu^{-\alpha}\right)^{l_k} R_i(k),$$

где $R_i(k)$ ограничены при любых номерах *k*.

В случае если минор θ_i не является главным минором матрицы $\mathrm{M}^{l_k}\left(G_k + S_k\right)$, т.е. если хотя бы один номер выбранной строки матрицы Ξ_k не превосходит *m*, тогда хотя бы одна из строк минора составлена из элементов строки матрицы $\left(\Lambda^{l_k} A_k, \Lambda^{l_k} B_k\right)$, поэтому такой минор можно записать как

$$\theta_i = \left(\lambda \mu_{n-i+2} \ldots \mu_n\right)^{l_k} H_i(k),$$

где $H_i\left(k\right)$ ограничены при любых *k*.

Окончательно, пусть $i \le n$, тогда соответствующий коэффициент характеристического многочлена $\chi\left(\rho\right)$ представим как

$$\gamma_i = \left(\mu_{n-i+1}...\mu_n\mu^{-\alpha}\right)^{l_k} P_i\left(k\right) + \left(\lambda\mu_{n-i+2}...\mu_n\right)^{l_k} Q_i\left(k\right), \tag{3.26}$$

где $P_i\left(k\right), Q_i\left(k\right)$ ограничены по *k*.

Аналогично, пусть $n < i \le n+m$, тогда, очевидно, что хотя бы одна строка этого минора составлена из элементов строки матрицы $\left(\Lambda^{l_k} A_k; \Lambda^{l_k} B_k\right)$, поэтому, такой минор можно записать как

$$\theta_i = \left(\lambda_{m+n-i+1}...\lambda_m\mu\right)^{l_k} H_i\left(k\right),$$

где $H_i\left(k\right)$ ограничены при любых *k*.

Аналогично, при $n < i \le n+m$, соответствующий коэффициент характеристического многочлена представим как

$$\gamma_i = \left(\lambda_{n+m-i+1}...\lambda_m\mu\right)^{l_k} Q_i\left(k\right), \tag{3.27}$$

где $Q_i\left(k\right)$ ограничены по *k*.

Из свойств характеристического многочлена и условий (3.26), (3.27) имеем

$$\gamma_1 = \left(\mu_n\mu^{-\alpha}\right)^{l_k} P_1\left(k\right) + \lambda^{l_k} Q_1\left(k\right),$$

где $P_1\left(k\right), Q_1\left(k\right)$ ограничены,

$$\gamma_{n+m} = \left(\lambda_1...\lambda_m\mu\right)^{l_k} Q_{n+m}\left(k\right),$$

где

$$\lim_{k\to\infty} Q_{n+m}\left(k\right) = \det DL\left(0\right) > 0.$$

С другой стороны, пусть $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_{n+m}$ − корни характеристического многочлена $\chi(\rho)$, заметим, что среди этих величин могут быть одинаковые и комплексные. Запишем $\chi(\rho)$ как

$$\chi\left(\rho\right) = \left(-1\right)^{n+m} \prod_{i=1}^{n+m} \left(\rho - \rho_i\right) = \sum_{i=0}^{n+m} \left(-1\right)^{n+m-i} \rho^{n+m-i} \sum_{(i)} \rho_{t_1}\rho_{t_2}...\rho_{t_i},$$

откуда

$$\gamma_i = \sum_{(i)} \rho_{t_1} \rho_{t_2} ... \rho_{t_i} , \tag{3.28}$$

суммирование ведется по всем возможным наборам индексов $t_1, t_2, ..., t_i$, выбранным из конечной последовательности индексов $1, 2, \dots , n+m$. Ясно, что число слагаемых в сумме, стоящей в правой части формулы (3.25), равно C^i_{n+m} (числу сочетаний).

Очевидно, что корни $\chi(\rho)$ зависят от k.

Известно, что среди корней могут быть кратные и комплексно сопряженные, таким образом, среди слагаемых суммы (3.28) могут быть комплексные слагаемые с ненулевой мнимой частью, однако, из рассуждений ясно, что коэффициенты $\chi(\rho)$ являются действительными величинами при любых k, поэтому при любом i коэффициенты γ_i являются действительными величинами.

Пусть $w = (n+m)^{-1}$.

Предположим, что

$$1 < \alpha < 1 - \frac{nw \ln(\lambda\mu)}{\ln \mu} , \tag{3.29}$$

где величина α была введена в (3.15).

Покажем, что тогда существует положительная постоянная T, не зависящая от k, такая, что

$$|\rho_i(k)| \le T \mu^{-(\alpha-1)n^{-1}l_k}, i = 1, 2, ..., n+m, \tag{3.30}$$

где $\rho_i(k)$ − корни характеристического многочлена.

Неравенства (3.30) докажем от противного, т.е. предположим, что они не выполняются для бесконечного числа индексов k, точнее, существуют подпоследовательность индексов $k_s \left(\lim\limits_{s\to\infty} k_s = +\infty\right)$ и последовательность номеров $j_s, 1 \le j_s \le n+m$, таких, что

$$\rho_{j_s}(k_s)=\Gamma(k_s)\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}l_{k_s}},$$
$$\lim_{s\to\infty}|\Gamma(k_s)|=+\infty.$$

Для простоты последующих рассуждений, предположим, что $k_s=k,\ j_s=1$ для любого k, тогда получим

$$\rho_1(k)=\Gamma(k)\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}l_k},\quad \lim_{k\to\infty}|\Gamma(k)|=+\infty. \tag{3.31}$$

Покажем, что из равенств (3.31) следует

$$\rho_1\sum_{(i)}\rho_{t_2}\rho_{t_3}...\rho_{t_i}=\Gamma_i(k)\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}il_k},i=2,3,...,n+m,\quad \lim_{k\to\infty}|\Gamma_i(k)|=+\infty, \tag{3.32}$$

где $t_2,t_3,...,t_i$ – произвольный набор индексов, выбранный из конечной последовательности индексов 2, 3, …, n+m, а суммирование ведется по всем возможным указанным наборам, ясно, что число слагаемых в сумме равно C_{n+m-1}^{i-1}.

Докажем равенства (3.32) по индукции. Учитывая предположения (3.31), получим

$$\gamma_1-\rho_1= =\sum_{i=2}^{n+m}\rho_i=\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}l_k}\left[\left(\mu_n\mu^{-\alpha}\mu^{(\alpha-1)n^{-1}}\right)^{l_k}P_1(k)+\left(\lambda\mu^{(\alpha-1)n^{-1}}\right)^{l_k}Q_1(k)-\Gamma(k)\right]. \tag{3.33}$$

Кроме того, из условия (3.29) следует

$$\mu_n\mu^{-\alpha}\mu^{(\alpha-1)n^{-1}}\le\mu^{-(\alpha-1)}\mu^{(\alpha-1)n^{-1}}\le 1,$$
$$\lambda\mu^{(\alpha-1)n^{-1}}<\lambda(\lambda\mu)^{-w}=\lambda^{1-w}\mu^{-w}<1,$$

таким образом, представим

$$\sum_{i=2}^{n+m}\rho_i=\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}l_k}\overline{\Gamma}_1(k),$$

где $\overline{\Gamma}_1(k)$ определяется равенствами (3.33), причем

$$\lim_{k\to\infty}|\overline{\Gamma}_1(k)|=+\infty .$$

В результате

$$\rho_1\sum_{i=2}^{n+m}\rho_i=\Gamma(k)\bar{\Gamma}_1(k)\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}2l_k}.$$

Пусть

$$\Gamma_2(k)=\Gamma(k)\bar{\Gamma}_1(k),$$

ясно, что

$$\lim_{k\to\infty}\left|\Gamma_2(k)\right|=+\infty,$$

из последнего соотношения следует равенство (3.32) при $i = 2$.

База индукции установлена, перейдем к доказательству индукционного перехода. Пусть $i\le n,$ из равенств (3.28) имеем

$$\gamma_i-\rho_1\sum_{(i)}\rho_{t_2}...\rho_{t_i}=\sum_{(i),t_1>1}\rho_{t_1}\rho_{t_2}...\rho_{t_i}, \tag{3.34}$$

в левой части последних равенств суммирование ведется по всем возможным наборам из i-1 индекса, выбранным из конечной последовательности номеров 2, 3, … ,$n+m$, в правой части – по всем возможным наборам из i индексов, выбранным из той же конечной последовательности номеров. Из условий (3.26) имеем

$$\gamma_i-\rho_1\sum_{(i)}\rho_{t_2}...\rho_{t_i}=$$

$$=\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}il_k}\left[\left(\mu_{n-i+1}...\mu_n\mu^{-\alpha}\mu^{(\alpha-1)n^{-1}i}\right)^{l_k}P_i(k)+\left(\lambda\mu_{n-i+2}...\mu_n\mu^{(\alpha-1)n^{-1}i}\right)^{l_k}Q_i(k)-\Gamma_i(k)\right]. \tag{3.35}$$

Кроме того, учитывая (3.29), получим

$$\mu_{n-i+1}...\mu_n\mu^{-\alpha}\mu^{(\alpha-1)n^{-1}i}\le\mu^{-(\alpha-1)}\mu^{(\alpha-1)n^{-1}i}\le1,$$
$$\lambda\mu_{n-i+2}...\mu_n\mu^{(\alpha-1)n^{-1}i}\le\lambda\mu(\lambda\mu)^{-wi}=(\lambda\mu)^{1-wi}<1.$$

В результате имеем

$$\sum_{(i),t_1>1}\rho_{t_1}\rho_{t_2}...\rho_{t_i}=\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}il_k}\bar{\Gamma}_i(k),$$

где $\bar{\Gamma}_i(k)$ определяется равенствами (3.35). Ясно, что

$$\lim_{k\to\infty}\left|\bar{\Gamma}_i(k)\right|=+\infty,$$

пусть

$$\Gamma_{i+1}(k)=\Gamma(k)\bar{\Gamma}_i(k),$$

тогда

$$\rho_1\sum_{(i),t_1>1}\rho_{t_1}\rho_{t_2}...\rho_{t_i}=\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}(i+1)l_k}\Gamma_{i+1}(k),\qquad(3.36)$$

причем

$$\lim_{k\to\infty}\left|\Gamma_{i+1}(k)\right|=+\infty.$$

Таким образом, равенства (3.29) доказаны, для случая $i\le n+1$.

Докажем индукционный переход при $n+1 \le i < n+m$. Из предположения (3.31) имеем

$$\gamma_i-\rho_1\sum_{(i)}\rho_{t_2}...\rho_{t_i}=\sum_{(i),t_1>1}\rho_{t_1}\rho_{t_2}...\rho_{t_i}=$$

$$=\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}il_k}\left[\left(\lambda_{n+m-i+1}...\lambda_m\mu^{1+(\alpha-1)n^{-1}i}\right)^{l_k}Q_i(k)-\Gamma_i(k)\right],$$

из неравенства (3.29) имеем

$$\lambda_{n+m-i+1}...\lambda_m\mu^{1+(\alpha-1)n^{-1}i}\le(\lambda\mu)^{1-wi}\le 1,$$

из равенств (3.35) получим

$$\sum_{(i),t_1>1}\rho_{t_1}\rho_{t_2}...\rho_{t_i}=\mu^{-(\alpha-1)n^{-1}il_k}\bar{\Gamma}_i(k),$$

где $\bar{\Gamma}_i(k)$ определяется последними равенствами, кроме того,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\bar{\Gamma}_i(k)\right|=+\infty.$$

Окончательно, учитывая предположения (3.31), определения (3.35), получим равенства (3.36), которые доказывают индукционный переход и в этом случае.

Пусть $i=m+n$, тогда равенства (3.32) имеют вид

$$\rho_1\rho_2...\rho_{n+m}=\mu^{-(\alpha-1)(nw)^{-1}l_k}\Gamma_{n+m}(k),$$

где

$$\lim_{k\to\infty}\left|\Gamma_{m+n}(k)\right|=+\infty,$$

с другой стороны

$$\rho_1\rho_2...\rho_{m+n} = \left(\lambda_1...\lambda_m\mu\right)^{l_k} Q_{m+n}\left(k\right),$$

следовательно,

$$\Gamma_{m+n}\left(k\right) = \left(\lambda_1...\lambda_m\mu^{1+(\alpha-1)(nw)^{-1}}\right)^{l_k} Q_{m+n}\left(k\right),$$

из неравенства (3.29) имеем

$$\left(\lambda_1...\lambda_m\mu^{1+(\alpha-1)(nw)^{-1}}\right) \le 1,$$

таким образом, получаем, что $\Gamma_{m+n}\left(k\right)$ ограничены по *k*. Следовательно, получено противоречие, которое показывает, что предположения (3.31) не справедливы. Таким образом, доказаны неравенства (3.30).

Известно, что характеристические показатели периодических точек r_k диффеоморфизма f определяются как

$$\begin{gathered} \nu_i\left(k\right) = \left(\tau + l_k\right)^{-1} \ln\left|\rho_i\left(k\right)\right|, \\ i = 1, 2, ..., m+n, \end{gathered} \tag{3.37}$$

где натуральная величина к определена ранее, а $\rho_i\left(k\right)$, $i = 1,2, \dots, n+m,$ − корни характеристического многочлена $\chi(\rho)$. Из условий (3.30) имеем

$$\nu_i\left(k\right) \le \left(\tau + l_k\right)^{-1}\left[\ln T - \alpha n^{-1} l_k \ln\mu\right] \le -\frac{\alpha}{2n}\ln\mu,$$

$$i = 1,2, \dots, m+n,$$

последние неравенства справедливы для всех номеров *k*, начиная с некоторого номера. Теорема, в случае выполнения неравенства (3.29), доказана.

Предположим, что неравенство (3.29) неверно, тогда

$$\alpha \ge 1 - \frac{nw\ln\left(\lambda\mu\right)}{\ln\mu} \tag{3.38}$$

или

$$\mu^{\alpha-1}\left(\lambda\mu\right)^{nw} \ge 1.$$

Покажем, что при выполнении условия (3.38), существует постоянная величина *D*, не зависящая от *k*, такая, что

$$\left|\rho_i\right| \le D\left(\lambda\mu\right)^{wl_k}, \tag{3.39}$$

где $i = 1, \dots, n+m$.

Доказательство условий (3.39) аналогично доказательству условий (3.30), а именно, предположим, что утверждение неверно, тогда существуют подпоследовательность индексов $k_s \left(\lim\limits_{s\to\infty} k_s = +\infty\right)$ и последовательность номеров $j_s, 1 \le j_s \le n+m$, такие, что

$$\rho_{j_s}\left(k_s\right) = \Theta\left(k_s\right)\left(\lambda\mu\right)^{wl_{k_s}},$$
$$\lim_{s\to\infty}\left|\Theta\left(k_s\right)\right| = +\infty.$$

Для простоты последующих рассуждений, предположим, что $s_k = k, j_s = 1$ для любого k, тогда получим

$$\begin{gathered}\rho_1\left(k\right) = \Theta\left(k\right)\left(\lambda\mu\right)^{wl_k}, \\ \lim_{k\to\infty}\left|\Theta\left(k\right)\right| = +\infty.\end{gathered} \tag{3.40}$$

Покажем по индукции, что при выполнении условий (3.40) имеют место следующие соотношения

$$\rho_1 \sum_{(j)} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_j} = \Theta_j\left(k\right)\left(\lambda\mu\right)^{jwl_k}, \tag{3.41}$$

где $\Theta_j\left(k\right)$ таковы, что

$$\lim_{k\to\infty}\left|\Theta_j\left(k\right)\right| = +\infty, \; j = 2, \dots, n+m.$$

Суммирование в (3.41) ведется по всем возможным наборам из j-1 индекса, выбранным из набора (2,3, … , $m+n$) C_{n+m-1}^{j-1} способами, при этом предполагается, что $t_2 < \dots < t_j$.

Установим базу индукции. Аналогично равенствам (3.33) легко получить, учитывая (3.40),

$$\gamma_1 - \rho_1 = \sum_{i=2}^{n+m} \rho_i = \left(\lambda\mu\right)^{wl_k}\left[\left(\mu_n\mu^{-\alpha}\left(\lambda\mu\right)^{-w}\right)^{l_k} P_1\left(k\right) + \left(\lambda\left(\lambda\mu\right)^{-w}\right)^{l_k} Q_1\left(k\right) - \Theta\left(k\right)\right]$$

(3.42)

или

$$\sum_{j=2}^{n+m}\rho_j=(\lambda\mu)^{wl_k}\bar{\Theta}_1(k),$$

где $\bar{\Theta}_1(k)$ определяется из (3.42).

Из неравенств (3.3), (3.38) следует

$$\lambda(\lambda\mu)^{-w}<1,$$
$$\mu^{-(\alpha-1)}(\lambda\mu)^{-w}\le 1,$$
$$\mu_n\mu^{-1}\le 1.$$

Из последних неравенств, следует, что $\bar{\Theta}_1(k)$ представляет собой сумму ограниченной и бесконечно большой величины, поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\left|\bar{\Theta}_1(k)\right|=+\infty.$$

Обозначим через

$$\Theta_2(k)=\Theta(k)\bar{\Theta}_1(k),$$

ясно, что

$$\lim_{k\to\infty}\left|\Theta_2(k)\right|=+\infty,$$

откуда

$$\rho_1\sum_{j=2}^{n+m}\rho_j=\Theta_2(k)(\lambda\mu)^{2wl_k}.$$

База индукции доказана, установим индукционный переход.

Пусть $1\le j\le n$, аналогично условиям (3.35) получим

$$\gamma_j-\rho_1\sum_{(j)}\rho_{t_2}...\rho_{t_j}=$$
$$=(\lambda\mu)^{jwl_k}\left[\left(\mu_{n-j+1}...\mu_n\mu^{-\alpha}(\lambda\mu)^{-jw}\right)^{l_k}P_j(k)+\left(\lambda\mu_{n-j+2}...\mu_n(\lambda\mu)^{-jw}\right)^{l_k}Q_j(k)-\Theta_j(k)\right].$$

Учитывая (3.38), получим

$$\left(\lambda\mu_{n-j+1}...\mu_n\right)(\lambda\mu)^{-jw}\le(\lambda\mu)^{1-jw}<1,$$
$$\left(\mu_{n-j+1}...\mu_n\right)\mu^{-\alpha}(\lambda\mu)^{-jw}\le\mu^{-(\alpha-1)}(\lambda\mu)^{-jw}\le 1.$$

Обозначим через

$$\bar{\Theta}_j(k)=\left(\lambda\mu_{n-j+2}...\mu_n\right)^{l_k}(\lambda\mu)^{-jwl_k}Q_j(k)+\left(\mu_{n-j+1}...\mu_n\right)^{l_k}\mu^{-\alpha l_k}(\lambda\mu)^{-jwl_k}P_j(k)-\Theta_j(k),$$

ясно, что

$$\lim_{k\to\infty}\left|\bar{\Theta}_j\left(k\right)\right| = +\infty,$$

откуда

$$\rho_1\sum_{(j),t_1>1}\rho_{t_1}\dots\rho_{t_j} = \Theta\left(k\right)\bar{\Theta}_j\left(k\right)\left(\lambda\mu\right)^{(j+1)wl_k}.$$

Определим

$$\Theta_{j+1}\left(k\right) = \Theta\left(k\right)\bar{\Theta}_j\left(k\right),$$

в результате, соотношение (3.41) доказано при $1 \le j \le n+1$.

Аналогично доказывается индукционный переход в случае $n < j \le m+n$.

Из условий (3.27) и предположения (3.40) получим

$$\gamma_j - \rho_1\sum_{(j)}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_j} = \sum_{(j),t_1>1}\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_j} =$$
$$= \left(\lambda\mu\right)^{jwl_k}\left[\left(\lambda_{n+m-j+1}\dots\lambda_m\mu\left(\lambda\mu\right)^{-jw}\right)^{l_k}Q_j\left(k\right) - \Theta_j\left(k\right)\right].$$

Из условий (3.38) имеем

$$\lambda_{n+m-j+1}\dots\lambda_m\mu\left(\lambda\mu\right)^{-jw} \le \left(\lambda\mu\right)^{1-iw} \le 1,$$

таким образом, можно определить величины $\bar{\Theta}_j\left(k\right), \Theta_{j+1}\left(k\right)$, которые, в силу предположений, удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{k\to\infty}\left|\bar{\Theta}_j\left(k\right)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\Theta_{j+1}\left(k\right)\right| = +\infty,$$

таким образом, доказан индукционный переход и в этом случае.

Окончательно, при $j = m+n$ имеем

$$\rho_1\rho_2\dots\rho_{n+m} = \Theta_{n+m}\left(k\right)\left(\lambda\mu\right)^{l_k},$$

где

$$\lim_{k\to\infty}\left|\Theta_{n+m}\left(k\right)\right| = +\infty.$$

С другой стороны

$$\rho_1\rho_2\dots\rho_{n+m} = \det\Xi_k = \left(\lambda_1\dots\lambda_m\mu\right)^{l_k}Q_{n+m},$$

где Q_{n+m} является ограниченной по k величиной, таким образом

$$\Theta_{n+m}(k) = (\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1})^{l_k} Q_{n+m},$$

т.е. $\Theta_{n+m}(k)$ также является ограниченной по k величиной. В результате получено противоречие, которое доказывает справедливость неравенства (3.39).

Характеристические показатели периодических точек r_k диффеоморфизма f определяются формулами (3.37). При выполнении условия (3.38), учитывая условие (3.39), получим, что

$$\nu_j \le (l_k + \tau)^{-1} \left[\ln D + l_k w \ln(\lambda\mu) \right] \le 0{,}5 w \ln(\lambda\mu),$$

последние неравенства справедливы при достаточно больших k и j = 1,2, … , $m+n$. Эти неравенства доказывают теорему в случае выполнения условия (3.38).

Теорема 3.1 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации изучается проблема существования бесконечного числа устойчивых периодических решений в окрестности гомоклинического решения периодической системы дифференциальных уравнений.

Рассматривается система

$$\frac{\partial z}{\partial t} = Z\left(t, z\right)$$

с ω-периодической правой частью. Предполагается, что эта система имеет гиперболическое ω-периодическое решение и устойчивое и неустойчивое многообразия этого решения пересекаются нетрансверсально, таким образом, существует нетрансверсальное гомоклиническое решение.

Исследуется проблема существования бесконечного числа устойчивых периодических решений в окрестности гомоклинического решения.

В диссертации получены следующие результаты:

Указан класс двумерных систем, имеющих в окрестности гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических траекторий с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Выделен класс двумерных систем, у которых вектор-функция Z является r раз непрерывно дифференцируемой по z ($1 < r < \infty$), имеющих счетное множество устойчивых периодических траекторий, лежащих в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории, причем характеристические показатели таких периодических решений отделены от нуля.

Показано, что существуют двумерные системы с бесконечно гладкой правой частью, обладающие тем же свойством.

Указаны условия, достаточные для того, чтобы многомерная система имела в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Основные результаты диссертации опубликованы в научных журналах [6, 9, 10, 14-21] и других изданиях [7, 8, 11, 12, 13, 22, 23, 24].

Методы и результаты диссертации могут быть использованы в качественной теории динамических систем и в качественной теории дифференциальных уравнений.

Результаты диссертационной работы могут найти применение в научных исследованиях, проводимых в МГУ им. М.В. Ломоносова, СПбГУ, МИАН им. В.А. Стеклова, ННГУ им. Н.И. Лобачевского и других высших учебных заведениях и научных центрах, также они могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по математическим специальностям.

Перспективами дальнейшего исследования по теме диссертации являются следующие задачи.

1. Изучить вопрос устойчивости многообходных периодических решений, лежащих в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории.

2. Выделить класс систем дифференциальных уравнений, имеющих в окрестности гомоклинического контура бесконечно много устойчивых периодических траекторий.

3. Исследовать окрестность нетрансверсальной гомоклинической траектории многомерной системы дифференциальных уравнений при ином характере касания устойчивого и неустойчивого многообразия.

4. Исследовать проблемы, возникающие при бифуркации нетрансверсальной гомоклинической траектории, при тех условиях, которые были наложены в диссертации на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sh. Newhouse*. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1974. Vol.12. P.9-18.

2. *Sh. Newhouse, J. Palis, F. Takens.* Stable arcs of diffeomorphisms // Bull. of the American Math. Society. 1976.Vol. 82, N 3. P.499-502.

3. *Sh. Newhouse.* On Homoclinic Point // Proc. of the American Math. Society.1976. Vol. 60, N 10. P.221-224.

4. *Биркгоф Г. Д.* Динамические системы. М.: Гостехиздат. 1941. 406 с.

5. *Брур Х.В., Дюмортье Ф., ван Стрин С., Такенс Ф.* Структуры в динамике. Конечномерные детерминированные системы. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.

6. *Васильева Е.В.* О существовании периодических точек в окрестности гомоклинической точки *n*-мерного диффеоморфизма // Дифференц. уравнения.1996. Т.32, № 2. С.147-153.

7. *Васильева Е.В.* Устойчивость траекторий, лежащих в окрестности гомоклинической кривой / Тезисы докладов международной конференции «Четвертые Окуневские чтения», симпозиум «Пуанкаре и проблемы нелинейной механики». СПб. 2004. С.137.

8. *Васильева Е.В.* Устойчивость траекторий в окрестности гомоклинической кривой / Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». М. 2004. С.233.

9. *Васильева Е.В.* К вопросу устойчивости периодических точек, лежащих в окрестности гомоклинической точки // Доклады Академии наук. 2005. Т. 400, № 2. С.151-152.

10. *Васильева Е.В.* Устойчивые периодические точки двумерных диффеоморфизмов класса C^1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.1. 2007. Вып.2. С.20-26.

11. *Васильева Е.В.* Устойчивые периодические точки гладких диффеоморфизмов с гомоклинической точкой / Тезисы докладов международного конгресса «Нелинейный динамический анализ-2007». СПб. 2007. С.363.

12. *Васильева Е.В.* Устойчивые периодические точки N-мерных диффеоморфизмов / Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология». М. 2008. С.110.

13. *Васильева Е.В.* Гладкие диффеоморфизмы с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2010. № 4. С.20-25.

14. *Васильева Е.В.* Гладкие диффеоморфизмы со счетным множеством устойчивых периодических точек // Доклады Академии наук. 2011. Т.439, № 1. С.11-13.

15. *Васильева Е.В.* Многомерные диффеоморфизмы с устойчивыми периодическими точками // Доклады Академии наук. 2011. Т.441, № 3. С.299-301.

16. *Васильева Е.В.* Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.1. 2012. Вып.3. С.3-13.

17. *Васильева Е.В.* Диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками // Дифференц. уравнения. 2012. Т.48, № 3. С.307-315.

18. *Васильева Е.В.* Гладкие диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками, лежащими в окрестности гомоклинической точки // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 10. С.1355-1360.

19. *Васильева Е.В.* Устойчивые периодические точки бесконечно гладких диффеоморфизмов // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 1. С.9-10.

20. *Васильева Е.В.* Гладкие диффеоморфизмы трехмерного пространства с устойчивыми периодическими точками // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.1. 2013. Вып. 4. С. 25-29.

21. *Васильева Е.В*. Устойчивые периодические точки гладких диффеоморфизмов многомерного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С.27-35.

22. *Васильева Е. В.* К вопросу устойчивости периодических точек диффеоморфизмов евклидова пространства в себя // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 846-847.

23. *Васильева Е.В.* Периодические системы дифференциальных уравнений с бесконечным множеством устойчивых периодических решений / Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2014. № 4. 136 с.

24. *Васильева Е.В.* Периодические системы дифференциальных уравнений с бесконечным множеством устойчивых периодических решений. СПб.: Лань. 2014. 130 с.

25. *Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I // Матем. сб. 1972. Т.88, № 4. С.475-492.

26. *Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. II // Матем. сб. 1973. Т.90, № 1. С.139-156.

27. *Гонченко В.С., Шильников Л.П.* О бифуркациях систем с гомоклинической петлей к седлу-фокусу с седловым индексом $\frac{1}{2}$ // Доклады Академии наук. 2007. Т.417, № 6. С.727-731.

28. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // ДАН СССР. 1986. Т.286, № 5. С.1049-1053.

29. *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Доклады Академии наук. 1993. Т.330, № 2. С.144-147.

30. *Гонченко С.В., Шильников Л.П.* Гиперболические свойства четырехмерных симплектических отображений с негрубой гомоклинической траекторией в неподвижной точке типа «седло-фокус» // Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, № 11. С.1464-1474.

31. *Иванов Б.Ф.* К вопросу существования замкнутых траекторий в окрестности гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т.15, № 3. С.548-550.

32. *Иванов Б.Ф.* Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой // Дифференц. уравнения. 1979. Т.15, № 8. С.1409-1419.

33. *Неймарк Ю.И.* О движениях, близких к двояко-асимптотическому движению // ДАН СССР. 1967. Т.172, № 5. С.1021-1024.

34. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир. 1975. 304 с.

35. *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1977. 304 с.

36. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды. Т.1,2. М.: Наука. 1971. 772 с.

37. *Смейл С.* Диффеоморфизмы со многими периодическими точками // Математика. Сб. переводов. 1967. Т.11, № 4. С.88-106.

38. *Стенькин О.В., Шильников Л.П.* Гомоклинический Ω-взрыв и области гиперболичности // Матем. сб. 1998. Т.189, № 4. С.125-144.

39. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1970. 720 с.

40. *Шильников Л П.* Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа // Матем. сб. 1967. Т.74, № 3. С.378-397.