ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Васильевой Екатерины Викторовны
«Периодические системы дифференциальных уравнений
с бесконечным множеством устойчивых периодических решений»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ.

В диссертации рассматривается проблема существования бесконечного числа устойчивых периодических решений в окрестности нетрансверсального гомоклинического решения периодической системы дифференциальных уравнений. Гомоклинические решения начал изучать А. Пуанкаре в начале прошлого века, он установил, что наличие такого решения в системе приводит к очень сложной картине поведения решений в его окрестности. В зависимости от характера пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий в точках гомоклинического решения, такие решения делятся на трансверсальные и нетрансверсальные. Известно, что если устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально, то в окрестности гомоклинического решения существует бесконечно много периодических решений, и все эти решения неустойчивы, однако, в случае нетрансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий в любой окрестности гомоклинического решения может содержаться счетное множество устойчивых периодических решений.

Решаемые проблемы примыкают к исследованиям Нижегородской (Горьковской) школы по качественной теории и теории бифуркаций многомерных динамических систем (Л.П. Шильников и его ученики), а также к исследованиям В.А. Плисса.

Ш.Ньюхаус, Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников, Б.Ф.Иванов и ряд других авторов рассматривали системы дифференциальных уравнений с нетрансверсальными гомоклиническими решениями при специальных условиях, наложенных на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий. Было установлено, что в этом случае в произвольной окрестности гомоклинического решения может существовать бесконечно много устойчивых периодических решений, однако с ростом периодов один из характеристических показателей у таких решений стремится к нулю. Заметим, что вышеупомянутые условия описывают далеко не все возможные случаи касания устойчивого и неустойчивого многообразий периодического решения системы, поэтому, при изменении характера касания этих многообразий появляются новые темы для исследования.

В диссертации рассматривается несколько иной характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, чем в работах вышеперечисленных авторов, показано, что в этом случае произвольная окрестность нетрансверсального гомоклинического решения периодической системы может содержать счетное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями. Известно что, если периодическая система дифференциальных уравнений имеет бесконечное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями, траектории которых располагаются в ограниченной части фазового пространства, то при достаточно малых (в смысле C^1) периодических возмущениях, возмущенная система имеет сколь угодно много устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

В диссертации, также как и в других работах, характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий периодической системы описывается с помощью преобразования Пуанкаре. Известно, что преобразование Пуанкаре периодической системы дифференциальных уравнений является диффеоморфизмом того же класса гладкости, что и правые части системы по зависимой переменной. Все рассуждения диссертации проводятся в ограниченной части пространства R^N, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что все решения периодической системы продолжаемы на период. В таком случае преобразование Пуанкаре есть диффеоморфизм N-мерного пространства в себя. Заметим, что в большинстве работ вышеупомянутых авторов все рассуждения приводились для диффеоморфизмов.

Таким образом, диссертационное исследование представляется вполне актуальным.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

В первой главе диссертации рассматриваются двумерные диффеоморфизмы с неподвижной гиперболической точкой и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой.

В двумерном случае касание определяется свойствами некоторой непрерывно дифференцируемой функции одной переменной g, которая, по сути дела, является частью исходного диффеоморфизма и имеет тот же класс гладкости, что и исходный диффеоморфизм. Эта функция равна нулю вместе со своей производной в точке 0, т. е. характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий аналогичен характеру касания графика функции g и координатной оси в начале координат. В работах Л. П. Шильникова, С. В. Гонченко, О. В. Стенькина и других авторов предполагается, что

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(r-1)}(0) = 0, g^{(r)}(0) \neq 0, r > 1,$$

т.е. функция g должна иметь в нуле по крайней мере две производные, причем, если у g имеются в нуле только две производные, то производная второго порядка должна быть отлична от нуля.

В первой и второй главах диссертации рассматривается несколько иной характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, а именно у указанной функции g все существующие в точке 0 производные должны быть равны нулю. В первой главе диссертации предполагается, что исходный диффеоморфизм является диффеоморфизмом класса C^1. В множестве таких диффеоморфизмов следует отметить те диффеоморфизмы, у которых вышеупомянутая функция g имеет в точке 0 только первую производную, а производная второго порядка в этой точке не существует. Этот случай не рассматривался в работах указанных выше авторов. В первом и втором разделах главы 1 диссертации доказаны теоремы 1.1, 1.2, из которых следует, что при некоторых дополнительных условиях, наложенных на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, диффеоморфизм класса C^1 имеет в любой окрестности гомоклинической точки счетное множество однообходных устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий определяется условиями, которые накладываются на функцию g, однако, из этих условий следует, что функция g может иметь в точке нуль производную только первого порядка. В третьем разделе этой главы указаны способы построения функций (речь, прежде всего, идет о функции g), которые удовлетворяют условиям теорем 1.1, 1.2. Заметим, что в доказательстве теорем 1.1 и 1.2 представлен новый метод исследования окрестности нетрансверсального гомоклинического решения периодической системы, основанный на изучении свойств касания устойчивого и неустойчивого многообразий.

Во второй главе диссертации рассматриваются C^r-гладкие (r>1) диффеоморфизмы плоскости с неподвижной гиперболической точкой и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий аналогичен тому характеру касания этих многообразий, который представлен в главе 1. В случае $r < \infty$ вышеупомянутая функция g может иметь в точке 0 только $r > 1$ равных нулю производных, (это значит, что производная порядка r+1 в этой точке не существует), таким образом, выделяется класс диффеоморфизмов класса C^r, которые имеют в любой окрестности гомоклинической точки счетное множество устойчивых однообходных периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. В первом разделе главы 2 приведен способ построения C^r-гладкой функции g.

Второй раздел главы 2 посвящен C^∞-гладким диффеоморфизмам плоскости с нетрансверсальной гомоклинической точкой, характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий аналогичен тому характеру касания этих многообразий, который представлен в главе 1. Показано, что в этом случае вышеупомянутая функция g должна иметь в точке нуль производные любого порядка и все они должны быть равны нулю. Приведен способ построения бесконечно гладкой функции g. Выделен класс диффеоморфизмов класса C^∞, которые имеют в любой окрестности гомоклинической точки счетное множество устойчивых однообходных периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. Приводится пример показывающий, что выделенный класс не пуст.

В третьей главе диссертации рассматриваются диффеоморфизмы многомерного пространства с нетрансверсальной гомоклинической точкой, характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий аналогичен характеру касания этих многообразий в двумерном случае. Выделен класс диффеоморфизмов, которые имеют в любой окрестности гомоклинической точки счетное множество устойчивых однообходных периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

В заключении диссертации представлены основные результаты работы и даны перспективы дальнейших исследований.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертации получены следующие результаты.

1. Указан класс двумерных систем, имеющих в окрестности гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических траекторий с отделенными от нуля характеристическими показателями.
2. Выделен класс двумерных систем, у которых правая часть является r раз непрерывно дифференцируемой ($1 < r < \infty$) по зависимой переменной, эти системы имеют счетное множество устойчивых периодических траекторий, лежащих в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории, причем характеристические показатели таких периодических решений отделены от нуля.
3. Показано, что существуют двумерные системы с бесконечно гладкой правой частью, обладающие тем же свойством.
4. Указаны условия, достаточные для того, чтобы многомерная система имела в окрестности нетрансверсальной гомоклинической траектории бесконечно много устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

В диссертации впервые в литературе рассматривается случай, когда функция g, которая определяет касание устойчивого и неустойчивого многообразия, имеет в нуле r производных, равных нулю, а производная порядка $r+1$ в нуле не существует. Поскольку задача изучения поведения решений в окрестности такой нетрансверсальной гомоклинической точки является новой, то автор применяет совершенно новые методы исследования. Все результаты диссертации являются новыми, в работе дано их полное математическое обоснование, они опубликованы в журналах из списка ВАК. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание.

ЗАМЕЧАНИЯ

Имеются следующие замечания по тексту диссертации, не снижающие общей положительной характеристики работы и не влияющие на достоверность результатов.

1. В диссертации отсутствуют геометрические иллюстрации, поясняющие ситуацию. Это значительно затрудняет ее чтение.
2. Исследования опираются на глобальное отображение (1.5), получение которого не поясняется.
3. На стр. 76 непонятно, почему все производные функции g обращаются в нуль бесконечное число раз.
4. В многомерном случае при рассмотрении диффеоморфизма естественно рассматривать случаи, когда размерность одного из сепаратрисных многообразий исходной гиперболической точки равна единице.
5. По всему тексту диссертации встречаются опечатки, например, на стр. 22, в формулировке теоремы 3.1 вместо «...*отображения* $f^{j_k}L$» должно быть «...*отображений* $f^{j_k}L$».

ВЫВОДЫ

Диссертация является научно квалификационной работой, в ней содержится положительный ответ на давно стоящий вопрос о возможности существования в произвольной окрестности нетрансверсального гомоклинического решения периодической системы дифференциальных уравнений счетного множества устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями. Основные результаты диссертации являются новыми и актуальными. Они строго доказаны. Тема и содержание диссертации соответствует специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». Доказанные в диссертации утверждения могут быть включены в спецкурсы по дифференциальным уравнениям и найти применение в научно-исследовательской работе по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и при решении задач механики.

Все вышеизложенное позволяет заключить, что диссертационная работа Васильевой Екатерины Викторовны «Периодические системы дифференциальных уравнений с бесконечным множеством устойчивых периодических решений» удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней» (в том числе пункту 9, абзац 1), а ее автор Васильева Екатерина Викторовна заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Морозов Альберт Дмитриевич,
профессор, доктор физико-математических наук, специальность 01.02.01
«Теоретическая механика», профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа

31.05.2016 г.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И, Лобачевского» 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6, ком. 409 Институт информационных технологий, математики и механики. Email: unn@unn.ru, т. 8(831) 462-33-20

Подпись Морозова А.Д.
Заверяю. Ученый секретарь ННГУ
Л.Ю. Черноморская
Тел. 462-30-2