

## ОТЗЫВ

на диссертационную работу  
**ВАСИЛЬЕВОЙ Екатерины Викторовны**  
«ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ  
УСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ»,  
представленную на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук  
по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление»

Диссертационная работа Е.В. Васильевой «Периодические системы дифференциальных уравнений с бесконечным множеством устойчивых периодических решений» выполнена на кафедре дифференциальных уравнений математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Работа посвящена исследованию устойчивых периодических решений периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений или, что то же самое, устойчивых периодических точек многомерных диффеоморфизмов.

В качественной теории дифференциальных уравнений ещё со времен А. Пуанкаре специальное внимание уделялось всестороннему исследованию периодических решений (траекторий) – и в силу их теоретического интереса, и по причине их прикладной значимости. Достаточно сложным и интересным оказалось изучение периодических решений, лежащих в окрестности так называемого нетрансверсального гомоклинического решения периодической системы дифференциальных уравнений, чем у нас занимались в Горьковской школе дифференциальных уравнений и динамических систем академика А.А. Андропова под руководством Л.П. Шильникова. В частности, особое значение имеет подробное описание феномена устойчивости таких периодических решений. Известные до настоящего времени результаты (Л.П. Шильников, Н.К. Гаврилов,

Б.Ф. Иванов, В.А. Плисс, Ш. Ньюхаус и др.) не давали полного описания этого важного феномена.

Автор диссертации поставил своей целью продвинуться в исследовании указанного феномена и найти ответ на нетривиальный вопрос: может ли в окрестности гомоклинического решения периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений существовать бесконечное количество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями? В такой постановке полный ответ на вопрос о числе решений в увязке с их характеристическими показателями до настоящего времени оставался открытым.

Сказанное выше позволяет констатировать, что тема диссертации Е.В. Васильевой является весьма важной в теоретическом плане и вполне актуальной с современной точки зрения. Она полностью соответствует специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертация включает в себя введение, три главы, разбитые на 5 параграфов, заключение и список цитируемой литературы, насчитывающий 40 работ.

Во введении сообщаются некоторые определения, необходимые для точного понимания дальнейшего, формулируется рассматриваемая в диссертации проблема, перечисляются близкие к ней результаты публикаций других авторов, кратко описывается содержание диссертационной работы, включая формулировки основных её результатов.

Общая постановка рассматриваемой задачи такова. Рассматривается задача Коши для гладкой периодической системы дифференциальных уравнений

$$z' = Z(t, z), \quad z \in R^n, \quad Z(t + \omega, z) \equiv Z(t, z), \quad \omega > 0, \quad z(0) = 0,$$

имеющая  $\omega$ -периодическое решение  $z = \varphi(t)$ . Предполагается, что это решение является гиперболическим, причём среди его мультипликаторов по крайней мере один по модулю больше 1 и по крайней мере один по модулю

меньше 1. Далее, предположим, что  $z = \Phi(t, w)$  – нетрансверсальное гомоклиническое к нему решение с начальной точкой  $w$ .

Предметом исследования в диссертации является следующий вопрос: описать классы гладких периодических систем, имеющих в окрестности нетрансверсального гомоклинического решения бесконечно много однообходных устойчивых периодических решений с отделёнными от нуля характеристические показатели. По-видимому, первый шаг в решении этой задачи был сделан В.А. Плиссом; он построил пример двумерной периодической системы, в окрестности гомоклинического контура которой лежит бесконечное число устойчивых периодических решений с отделёнными от нуля характеристическими показателями. Однако проблема описания всего класса обладающих указанным свойством гладких периодических систем, тем более многомерных, оставалась открытой.

Хорошо известно, что исследование указанных проблем для периодических дифференциальных систем тесно связано с исследованием специальных диффеоморфизмов пространства в себя с неподвижной гиперболической точкой при выполнении ряда предположений. Именно, определим диффеоморфизм как отображение Пуанкаре через период:  $f(z^0) = \psi(\omega, z^0)$ , где  $\psi(t, z^0)$  – решение  $\omega$ -периодической системы с условиями Коши  $z(0) = z^0$ . Автор диссертации в силу удобства рассмотрений принимает именно этот путь исследования.

В первой главе диссертации рассматриваются диффеоморфизмы плоскости в себя (аналог двумерных периодических систем) класса гладкости  $C^1$ . Получены условия, при которых диффеоморфизм  $f$  имеет в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки бесконечное множество однообходных устойчивых периодических точек с отделёнными от нуля характеристическими показателями. Хотя результат главы 1 относится к наиболее простой из рассмотренных в диссертации ситуаций, именно эту главу, безусловно, следовало бы считать идейным центром всего проведенного исследования.

Едва ли необходимо воспроизводить здесь точную формулировку доказанного результата, ибо она достаточно громоздка. Но нельзя не подчеркнуть специально, что получение этого результата связано с преодолением автором весьма нетривиальных технических трудностей и проявлением им специфической изобретательности. Новые технические конструкции автора, собственно, и позволившие прийти к итоговому результату, подробно излагаются в параграфе 3 главы 1.

Глава вторая диссертации содержит распространение результатов главы 1 на случай диффеоморфизмов плоскости в себя класса гладкости  $C^r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ . Здесь автор использует тот же аналитический аппарат, что и в главе 1, но в гораздо более сложной ситуации.

Наконец, в третьей главе диссертации осуществлён перенос результатов на многомерный случай. Хотя идейно рассмотрения автора остаются в принципе аналогичными изложенным в главах 1 и 2, технические сложности возрастают весьма существенно. Тот факт, что автору удалось их успешно преодолеть, является главным достоинством диссертации.

В заключении автор еще раз суммирует полученные им результаты и указывает некоторые перспективы дальнейших исследований открытых проблем, примыкающих к теме диссертации.

В целом предпринятое Е.В. Васильевой исследование периодических систем дифференциальных уравнений с бесконечным множеством устойчивых периодических решений представляет значительный серьёзный интерес и является ценным существенным вкладом в дальнейшее развитие качественной теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем. Полученные автором глубокие результаты являются новыми, а развитая автором техника может оказаться полезной в последующих исследованиях.

По рассматриваемой диссертации можно высказать и ряд критических замечаний. Хотя в целом изложение материала в работе достаточно ясное, подробное и грамотное, а оформление работы – весьма аккуратное, в ней

встречаются отдельные недостатки: грамматически неудачные обороты речи, опечатки, несогласованные формулировки, неоптимальные обозначения и др. Но подробно перечислять их едва ли целесообразно. Очень жаль, что автор все результаты формулирует исключительно в терминах диффеоморфизмов и не дает эквивалентных формулировок в терминах систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Весьма полезными для диссертации оказались бы конкретные, если возможно – простые, примеры.

Сделанные замечания, однако, не касаются основного математического содержания диссертации, не умаляют значения выполненной работы в целом и полученных в ней научных результатов.

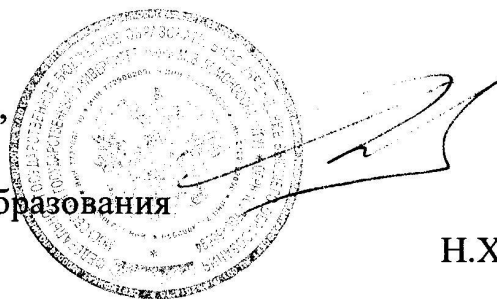
Подводя итог, вполне обоснованно можно констатировать, что рассматриваемая диссертационная работа Е.В. Васильевой представляет собой цельное и оригинальное научное исследование, содержащее полное решение крупной классической научной проблемы качественной теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем. Несомненно, что автор получил фундаментальные результаты, существенно обогащающие теорию. Выполненная работа свидетельствует о высокой математической культуре автора, его умении творчески ориентироваться в сложной аналитической ситуации, изобретательно преодолевать серьёзные трудности и доводить рассуждения до завершённых результатов.

Основные математические результаты диссертации своевременно опубликованы в научной печати, в том числе и в виде монографии, и хорошо известны специалистам. Ознакомление с авторефератом диссертации позволяет подтвердить, что он полностью соответствует диссертации и правильно отражает её содержание. Установленные в диссертации факты являются новыми и достоверными, их обоснование в работе проведено тщательно и исчерпывающе.

Таким образом, рассматриваемая диссертация полностью соответствует всем критериям, установленным в п. 23 «Положения о порядке присуждения учёных степеней».

Настоящая диссертация Е.В. Васильевой является полноценной научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых, в соответствии с п. 9 (абзац 1) «Положения о порядке присуждения учёных степеней», можно квалифицировать как новое научное достижение. Существенность и актуальность результатов диссертации, их несомненная научная ценность и фундаментальный характер дают основание сделать заключение, что рассматриваемая работа полностью удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям по физико-математическим наукам, а её автор Екатерина Викторовна Васильева заслуживает присуждения ей учёной степени доктора физико-математических наук.

Официальный оппонент  
доктор физико-математических наук,  
профессор,  
декан факультета педагогического образования  
МГУ имени М.В. Ломоносова  
телефон: 8 (495) 939-32-81  
119991, Москва, Воробьевы горы, 1  
[fpo.mgu@mail.ru](mailto:fpo.mgu@mail.ru)

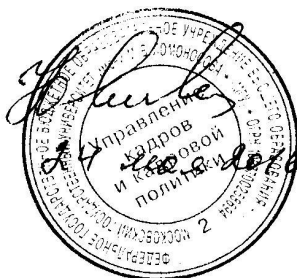


Н.Х. Розов

«24» мая 2016 г.

Подпись д. ф.-м. н., профессора Розова Николая Христовича  
под отзывом официального оппонента ЗАВЕРЯЮ.

Заместитель начальника  
Управления кадров и  
кадровой политики



Ю. И. Яким