ФГБОУ ВПО Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Добрынина Мария Александровна

Некоторые свойства нормальных и полунормальных функторов в категориях $\mathcal{P}$ и Comp

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии механико–математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Комбаров Анатолий Петрович**,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Щепин Евгений Витальевич**,
член-корреспондент РАН, профессор
(ФГБУН «Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН», главный научный
сотрудник отдела геометрии и топологии)

Семёнов Павел Владимирович,
доктор физико–математических наук,
профессор (ФГБО УВПО «Московский
педагогический государственный
университет», ведущий научный сотрудник
центра математического образования)

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Петрозаводский
государственный университет»

Защита диссертации состоится 5 декабря 2014 года в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8^{й} этаж.

Автореферат разослан 5 ноября 2014 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Олегович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение геометрических свойств ковариантных функторов является одним из центральных направлений в современной общей топологии. Исследования в этой области в последние годы проводились многими авторами. К первым результатам в этой области можно отнести теорему 1923 года Важевского[1]-Вьеториса[2] о том, что локальная связность метризуемого континуума эквивалентна локальной связности пространства его непустых замкнутых подмножеств с топологией Вьеториса — пространства $\exp(X)$. Изучению пространства $\exp(X)$ были посвящены многие работы в 30-е - 50-е годы, носившие, однако, фрагментарный характер. В качестве самостоятельного направления эти исследования оформились только после работы Майкла 1951 года[3].

В 1981 году Е.В. Щепин[4], обобщая полученные ранее результаты[5], ввёл понятие нормального функтора, тем самым положив начало новому направлению в общей топологии. Затем В.В.Федорчук[6] ввел класс полунормальных функторов, являющийся обобщением класса нормальных функторов. Полунормальным функтором, в частности, является известный функтор суперрасширения, который не удовлетворяет свойству сохранения прообразов и поэтому не является нормальным функтором. Пространство суперрасширения $\lambda(X)$ всех максимальных сцепленных систем пространства X впервые было рассмотрено Де Гроотом в 1969 году [7]. Исследования, начатые Де Гроотом, были продолжены в работах ван дэ Велла[8], ван Милла[9], М.М.Заричного[10], А.В.Иванова[11] и некоторых других авторов.

Так, например, в 1983 году Ван Милл рассмотрел пространство максимальных k-сцепленных систем компакта X — пространство $\lambda^k(X)$, а также показал, что при $k > 2$ пространство $\lambda^k(X)$ может быть некомпактным.

---

[1] T. Wazewski, Sur un continu singulier. *Fund. Math.*, **4** (1923), 214–245.

[2] L. Vietoris, Kontinua zweiter Ordnung. *Monatsh. Math. und Phys.* , **334** (1923.), 49–62.

[3] E. Michael, Topologies on spaces of subsets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951.), 152–182.

[4] Е. В. Щепин, Функторы и несчетные степени компактов. *Успехи математических наук.*, **36**:3 (1981), 3–62.

[5] Е. В. Щепин, Топология предельных пространств несчетных обратных спектров. *Успехи математических наук.*, **31**:5 (1976), 191–226.

[6] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, Общая топология. Основные конструкции. Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

[7] J. de Groot, Superextensions and supercompactness. *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications.* Berlin: VEB Deutscher Verlag Wiss., (1969), 89–90.

[8] M. van de. Vel, Superextensions and Lefschetz fixed point structures. *Report 51 of the Mathematics Department of the Free University*, Amsterdam, 1976.

[9] Jan van Mill, An almost fixed point theorem for metrizable continua. *Archiv der Mathematik.*, **40** (1983), 159–169.

[10] М. М. Заричный, Монада суперрасширения и ее алгебры. *Укр. мат. журн.*, **39**:3 (1987), 303–309.

[11] А. В. Иванов, О пространстве полных сцепленных систем. *Сибирский математический журнал.*, **6** (1986), 95–110.

Наряду с функтором суперрасширения λ также рассматривают функтор полных сцепленных систем N, обладающий многими замечательными свойствами суперрасширения. А.В. Иванов определил $N^k(X)$ как пространство полных k-сцепленных систем, и доказал, что $\lambda^k(X)$ всюду плотно в $N^k(X)$ для любого компакта X без изолированных точек. Изучению свойств пространства суперрасширения также посвящена статья Е.В. Ваkуловой[12], в которой был приведен пример максимальной сцепленной системы ξ из суперрасширения пространства X с носителем, совпадающим с X.

В 1948 году М. Катетов[13] доказал известную теорему о том, что из наследственной нормальности куба компакта следует его метризуемость, а также сформулировал проблему о метризуемости компакта, квадрат которого наследственно нормален. В 1977 году Никошем[14] в предположении аксиомы Мартина и отрицании континнуум-гипотезы, MA+$\neg$CH, был построен пример неметризуемого компакта с наследственно нормальным квадратом. В 1993 году Грюнхаге[15] в предположении континуум-гипотезы CH построил пример неметризуемого компакта Y, для которого Y^2 наследственно сепарабельно, $Y^2 \backslash \Delta$ совершенно нормально и Y^2 наследственно нормально. Таким образом, Никош и Грюнхаге в некоторых моделях теории множеств дали отрицательный ответ на проблему Катетова. В 2002 году Ларсон и Тодорчевич[16] с помощью форсинга построили модель теории множеств, в которой всякий компакт, квадрат которого наследственно нормален, метризуем, то есть в этой модели теории множеств ответ на проблему Катетова оказался положительным.Тем самым Ларсон и Тодорчевич доказали независимость проблемы Катетова от системы аксиом ZFC.

В 1989 году В.В. Федорчук[17] обобщил теорему Катетова для нормального функтора степени $\geqslant 3$, действующего в категории Comp компактов и их непрерывных отображений. Проблема Катетова также имеет аналог для полунормальных функторов: верно ли, что из наследственной нормальности $\mathcal{F}_k(X)$, где k — второй по величине элемент степенного спектра полунормального функтора $\mathcal{F}$, следует метризуемость X? В связи с этим, в

[12] Е.В. Вакулова , О носителях максимальных сцепленных систем. *Труды петрозаводского университета. Серия "Математика"*., **11** (2004), 3–8.

[13] M. Katětov, Complete normality of Cartesian products. *Fund. Math.*, **35** (1948), 271–274.

[14] P. Nyikos, A compact nonmetrizable space P such that P^2 is completely normal. *Topology Proc.*, **2** (1977), 359–364.

[15] G. Gruenhage, P. Nyikos, Normality in X^2 for compact X. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340**:2 (1993), 563–586.

[16] Larson P., Todorčević S. Katětov's problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (2002), 1783–1791.

[17] В. В. Федорчук, К теореме Катетова о кубе. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ.*, **4** (1989), 93–96.

2008 году А.В. Иванов и Е.В. Кашуба[18] построили пример неметризуемого компакта, обобщающий пример Грюнхаге и удовлетворяющий следующим свойствам:

1) X^n наследственно сепарабельно для любого натурального n;

2) $X^n \setminus \Delta_n$ совершенно нормально для любого натурального n (где Δ_n — обобщенная диагональ X^n, то есть множество точек, у которых хотя бы две координаты совпадают);

3) для любого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности полунормального функтора $\mathcal{F}$ пространство $\mathcal{F}_k(X)$ наследственно нормально, где k — второй по величине элемент степенного спектра функтора $\mathcal{F}$.

Исследованиям проблемы Катетова для полунормальных функторов посвящены и работы А.В. Иванова[19] [20], в которых, в частности, доказано, что для любого полунормального функтора конечной степени $n > 3$ наследственная нормальность $\mathcal{F}(X)$ влечет метризуемость X, а в предположении CH приводится полное описание сохраняющих вес полунормальных функторов, обладающих данным свойством.

По аналогии с теоремой Катетова, в 1971 году Ф. Зенор[21] вывел метризуемость компакта X из наследственной счетной паракомпактности куба пространства X, а в 1976 году Дж. Хабер[22] доказал, что для счетно компактного хаусдорфова пространства X из наследственной нормальности его куба также следует метризуемость пространства X.

В 2000 году Т.Ф. Жураев[23] заменил в теореме Федорчука наследственную нормальность компакта $\mathcal{F}(X)$ на наследственную счётную паракомпактность $\mathcal{F}(X)$.

Теоремы Федорчука и Жураева были также обобщены А.П. Комбаровым. А.П. Комбаров[24] ослабил требование наследственной нормальности пространства $\mathcal{F}(X)$ до требования наследственной $\mathcal{K}$-нормальности пространства $\mathcal{F}(X)\setminus X$. Теорема Комбарова утверждает, что если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени $\geqslant 3$ пространство $\mathcal{F}(X)\setminus X$

[18] А.В. Иванов, Е.В. Кашуба, О наследственной нормальности пространств вида $\mathcal{F}(X)$. *Сибирский математический журнал.*, **49**: 4 (2008), 813–824

[19] А. В. Иванов, Свойство Катетова для полунормальных функторов конечной степени. *Сибирский математический журнал.*, **4** (2010), 778–784.

[20] А. В. Иванов, Теорема катетова о кубе и полунормальные функторы. *Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Серия: Естественные и технические науки.*, **2** (2012), 104–108.

[21] P. Zenor, Countable paracompactness in product spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* , **30** (1971), 199–201.

[22] J Chaber, Conditions which Imply Compactness in Countably Compact Spaces. *Bull. de l'academie polonaise des sciences, Serie des sciences math., astr. et phys.*, **24**:11 (1976), 993–997.

[23] Т. Ф. Жураев, Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов. *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, **4** (2000), 8–11.

[24] А. П. Комбаров, К теореме Катетова—Федорчука о кубе. *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, **5** (2004), 59–61.

наследственно $\mathcal{K}$-нормально, где $\mathcal{K}$ — класс σ-компактных пространств, то X — метризуемый компакт. Различные свойства типа нормальности рассматривались также в некоторых работах А.П. Комбарова [25] [26]

В 1965 году А.В. Архангельский[27] ввел класс пространств, названных им перистыми или p-пространствами. В классе p-пространств сохранялись многие специфические черты локально компактных и метрических пространств. В своей работе А.В. Архангельский доказал, что паракомпактные p-пространства - это в точности совершенные прообразы метрических пространств. Потому вполне естественно изучать геометрические свойства ковариантных функторов в категории паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений, а также попытаться обобщить на данную категорию теорему Федорчука.

Цель работы — изучение некоторых свойств полунормальных функторов в категории Comp компактов и их непрерывных отображений, а также распространение понятия нормального функтора на категорию паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений и изучение геометрических свойств ковариантных функторов в данной категории.

Основные методы исследования. В качестве основных методов исследования используются методы теории обратных спектров, техника исследования полунормальных функторов конечной степени, предложенная Басмановым[28], а также некоторые другие методы общей топологии.

Научная новизна. Все основные результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1. Введены новые методы построения максимальных сцепленных систем с заданными носителями.

2. Построен пример компакта X, показывающий, что при $k = 3$ пространство $\lambda^k(X)$ может не быть нормальным пространством. Данный пример усиливает результат, полученный Ван Миллом в 1983 году.

3. Доказано, что для любого связного сепарабельного компакта X множество максимальных сцепленных систем со связными носителями всюду плотно в суперрасширении $\lambda(X)$.

---

[25] А. П. Комбаров, О нормальных функторах степени $\geqslant 3$. *Матем. заметки.*, **76** (2004), 147–149.

[26] А. П. Комбаров, Свойства типа нормальности и ковариантные функторы. *Фундамент. и прикл. матем.*, **9**:2 (2003), 57–98

[27] А. В. Архангельский, Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства. *Матем. сб.*, **67** (1965), 55–85.

[28] В. Н. Басманов, Ковариантные функторы, ретракты и размерность. *Доклады АН СССР.*, **271**:5 (1983), 1033-1036.

4. Получено обобщение теоремы Катетова о кубе для паракомпактных p-пространств.

5. Решена задача распространения понятия нормального функтора, действующего в категории Comp компактов и их непрерывных отображений, на категорию $\mathcal{P}$ паракомпакных p-пространств и их совершенных отображений.

6. Получено обобщение теоремы Федорчука для нормальных функторов в категории $\mathcal{P}$.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертационная работа имеет теоретический характер и представляет научный интерес для специалистов в области общей топологии.

Апробация результатов. Основные результаты докладывались на кафедральном научно-исследовательском семинаре по общей топологии имени П. С. Александрова под руководством профессоров В.В. Федорчука, Ю.В. Садовничего, С.А. Богатого, Б.А. Пасынкова, В.И. Пономарева, В.В. Филиппова (неоднократно, с 2011 по 2013гг); на международной конференции по топологии и её приложениям (Нафпактос, Греция, с 26 по 30 июня 2010 г.); на международной топологической конференции «Александровские чтения» (Москва, с 21 по 25 мая 2012 г.); на научных конференциях молодых ученых, аспирантов и студентов Петрозаводского государственного университета (неоднократно, с 2009 по 2011гг).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-6].

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, разбитых на 12 параграфов, и списка литературы. Объем диссертации составляет 70 страниц. Список литературы состоит из 41 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Во введении изложена краткая история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач. Сформулированы цель работы и основные результаты.

Первая глава. Первая глава диссертации посвящена изучению некоторых свойств полунормальных функторов в категории Comp компактов и их непрерывных отображений. В этой главе рассматривается функтор суперрасширения, пространства максимальных и полных $k-$сцепленных систем, а также изучаются свойства носителей для этих систем.

Напомним, что для всякой полной, и, следовательно, максимальной, k-сцепленной системы определен непустой носитель по формуле

$$\mathrm{supp}(\xi) = [\cup\{F_\alpha : F_\alpha - \text{минимальный по включению элемент } \xi\}].$$

Как известно, Ван Милл показал, что пространства $\lambda^k(X)$ в общем случае не является компактом. Поскольку всякий компакт, как хорошо известно, является нормальным пространством, в первой главе приводится пример, показывающий, что при $k = 3$ пространство $\lambda^k(X)$ может не быть даже нормальным пространством, а именно справедлива следующая

Теорема 1. *Существует компакт X такой, что пространство $\lambda^3(X)$ не является нормальным.*

Далее в первой главе приводится алгоритм построения максимальной сцепленной системы с заданным носителем, обобщающий пример из работы Е.В. Вакуловой, а именно, доказываются следующие предложения.

Предложение 1. *Если в бесконечном пространстве X найдется открытое сепарабельное подпространство, то существует максимальная сцепленная система ξ такая, что $supp(\xi) = X$.*

Предложение 2. *Пусть X сепарабельно. Тогда для любого кардинала μ существует максимальная сцепленная система ξ, принадлежащая суперрасширению $\lambda(X^\mu)$ степени X^μ, такая что $supp(\xi) = X^\mu$.*

Понятие носителя точки, позволяющее описать структуру пространства, имеет большое значение в исследовании свойств ковариантных функторов.

Напомним, что если $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор, то для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определен *носитель* $\mathrm{supp}(a)$ следующим образом:

$$\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y \subset X : a \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

Как хорошо известно, при помощи носителя можно определить подфунктор континуальной экспоненты $\exp^c$ функтора $\exp$. Естественно возникает вопрос, нельзя ли, используя определение носителя, аналогичным образом задать подфунктор функтора суперрасширения, рассмотрев подпространство $\lambda^c(X)$ пространства $\lambda(X)$, состоящее из максимальных сцепленных систем со связными носителями. В связи с этим для непрерывных отображений максимальных сцепленных систем получен следующий результат.

Предложение 3. *Существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ и максимальная сцепленная система $\xi \in \lambda(X)$ со связным носителем такие, что носитель максимальной сцепленной системы $\eta = \lambda f(\xi)$ несвязен.*

Предложение 3 показывает, что операция λ^c не является ковариантным функтором. Также в этой связи приведен пример пространства X, показывающий, что множество максимальных сцепленных систем со связными носителями может не быть замкнуто в $\lambda(X)$, откуда следует, что $\lambda^c(X)$ не является компактом для данного компакта X.

Теорема 2. *Пусть компакт X является связным и сепарабельным. Тогда множество максимальных сцепленных систем со связными носителями всюду плотно в суперрасширении $\lambda(X)$.*

Теорема 3. *Существует компакт X такой, что множество максимальных сцепленных систем со связными носителями не замкнуто в суперрасширении $\lambda(X)$.*

Упомянутый пример неметризуемого компакта X А.В. Иванова и Е.В. Кашубы, обобщающий пример Грюнхаге, удовлетворял следующему свойству: для любого полунормального функтора $\mathcal{F}$, сохраняющего вес и точки взаимной однозначности, со степенным спектром $sp(\mathcal{F}) = \{1, k, \dots\}$, пространство $\mathcal{F}_k(X)$ наследственно нормально. В частности, отсюда следовало, что наследственно нормальны пространства X^2 и $\lambda_3(X)$. Чтобы получить дальнейшие примеры таких пространств и, по возможности, упростить формулировку самого условия, был поставлени вопрос о связи степенного спектра полунормального функтора со свойством сохранения полунормальным функтором точек взаимной однозначности, а именно: можно ли, зная второй по величине элемент степенного спектра функтора, не требовать проверки условия сохранения точек взаимной однозначности.

Напомним следующее определение степенного спектра, принадлежащее А.В. Иванову[29]. *Степеным спектром* функтора $\mathcal{F}$ называется множество $sp(\mathcal{F}) = \{k : k \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_{kk}(k) \neq \emptyset, \text{где } k \text{ — дискретное пространство}\}$.

В работе получены следующие результаты.

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, сохраняющий точки взаимной однозначности и $sp\mathcal{F} = \{1, k, \dots\}$. Тогда $k \leqslant 3$.*

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор степени $\leqslant 2$. Тогда $\mathcal{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности.*

[29] А. В. Иванов, О степенных спектрах и композициях финитно строго эпиморфных функторовю *Труды петрозаводского университета. Серия "Математика".*, **7** (2000), 15-28.

Заметим, что в случае степенного спектра $\{1, 3\}$ возможно как сохранение, так и не сохранение полунормальным функтором точек взаимной однозначности. Примерами тому являются подфунктор λ_3 функтора λ и функтор А.В. Иванова $\exp^K$ при $K = \{1, 3\}$.

Вторая глава Вторая глава посвящена распространению понятия нормального функтора на категорию $\mathcal{P}$ паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений, а также обобщению теоремы Федорчука в этой категории.

Показывается, что ковариантный функтор $\exp_c$ является примером нормального функтора в категории $\mathcal{P}$. Подпространство $\exp_c(X)$ пространства $\exp(X)$ состоит из всех компактных замкнутых подмножеств пространства X. Открытую базу топологии пространства $\exp_c(X)$ образуют множества вида $O < U_1, ..., U_n >= \{A \in \exp_c(X) : A \subset U_1 \cup ... \cup U_n; A \cap U_i \neq \emptyset$ для $i = 1, ..., n\}$, где U_i — открытые в X множества. Для любого совершенного отображения f паракомпактного p-пространства X в паракомпактное p-пространство Y отображение $\exp_c(f)$ пространства $\exp_c(X)$ в пространство $\exp_c(Y)$ определяется следующим образом: $\exp_c(f)(F) = f(F)$. В работе доказано следующее

Предложение 6. *Операция exp_c является ковариантным функтором из категории $\mathcal{P}$ в категорию $\mathcal{P}$.*

Во второй главе получено следующее усиление теоремы Катетова и утверждения, обобщающие некоторые теоремы В.В. Федорчука. Напомним, что пространство X называется M-пространством[30], если его можно квазисовершенно отобразить на некоторое метрическое пространство Y. Квазисовершенным называется такое замкнутое отображение f пространства X на пространство Y, при котором прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки y пространства Y является счётно-компактным подмножеством пространства X. Как хорошо известно, класс паракомпактных M-пространств совпадает с классом паракомпактных p-пространств.

Предложение 7. *Пусть X — паракомпактное M-пространство, куб которого является наследственно нормальным пространством. Тогда пространство X метризуемо.*

Предложение 8. *Пусть X — паракомпактное p-пространство с единственной неизолированной точкой x_0. Тогда если $\chi(x_0, X) = \omega_0$, то X метризуемое пространство, если же $\chi(x_0, X) \geqslant \omega_1$, то пространство $exp_3 X \setminus X$ не наследственно нормально.*

[30]K. Morita, Products of normal spaces with metric spaces. *Math. Ann.*, **154**:4 (1964), 365–382.

Предложение 9. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $exp_3 X \setminus X$ наследственно нормально. Тогда X метризуемо.*

Понятие нормального функтора в категории Comp компактов и их непрерывных отображений распространяется на категорию $\mathcal{P}$ паракомпакных перистых пространств и их совершенных отображений. Приводится пример функтора, удовлетворяющего всем свойствам нормальности в категории $\mathcal{P}$.

Предложение 10. *Функтор exp_c является нормальным функтором в категории $\mathcal{P}$.*

В работе также изучаются свойства ковариантных функторов в данной категории, аналогичные свойствам функторов в категории Comp. Пусть $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор, тогда для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определен *носитель* $\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y : Y$ замкнуто в $X,\ a \in \mathcal{F}(Y)\}$. Тем самым, также определно многозначное отображение $\mathrm{supp} : \mathcal{F}(X) \to X$, ставящее в соответствие каждой точке пространства $\mathcal{F}(X)$ её носитель — непустое замкнутое подмножество пространства X.

Предложение 11. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор в категории $\mathcal{P}$. Тогда многозначное отображение* $\mathrm{supp} : \mathcal{F}(X) \to X$ *полунепрерывно снизу.*

Предложение 12. *Мономорфный, сохраняющий пересечения функтор, действующий в категории $\mathcal{P}$, сохраняет носители тогда и только тогда, когда он сохраняет прообразы.*

Напомним, что для любого натурального n через $\mathcal{F}_n(X)$ обозначается множество

$$\mathcal{F}_n(X) = \{a \in \mathcal{F}(X) : |supp(a)| \leqslant n\}.$$

Предложение 13. *Если $\mathcal{F}$ — нормальный функтор, действующий в категории $\mathcal{P}$, то подпространство $\mathcal{F}_n(X)$ замкнуто в $\mathcal{F}(X)$ для любого X и любого n.*

Следствие. *Соответствие $X \to \mathcal{F}_n(X)$ однозначно определяет подфунктор $\mathcal{F}_n$ функтора $\mathcal{F}$, действующего в категории $\mathcal{P}$.*

Следующая теорема обобщает теорему В.В.Федорчука:

Теорема 4. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$, действующий в категории $\mathcal{P}$. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)\setminus X$ наследственно нормально, то пространство X метризуемо.*

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Петровичу Комбарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор также выражает глубокую благодарность всем сотрудникам кафедры общей топологии и геометрии за поддержку и внимание.

Публикации автора по теме диссертации:

1. Добрынина М. А. Некоторые свойства полунормальных функторов // Труды петрозаводского университета. Серия "Математика". 2009. Вып. 16. С. 33-47.

2. Добрынина М. А. О максимальных сцепленных системах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2011. — № 2. С. 27-30.

3. Добрынина М. А. К теореме Федорчука о нормальном функторе // Матем. заметки. 2011. Т90. Вып4. С. 630-633.

4. Добрынина М. А. О нормальных функторах в категории паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2012. — № 4. С. 61-63.

5. Dobrynina M. A. On degree spectrums of seminormal functors // 2010 International Conference on Topology and its Applications. Abstracts. Nafpaktos. 2010. P. 83–84

6. Dobrynina M. A. On generalizations of Fedorchuk's Normal Functor Theorem in category $\mathcal{P}$ // 2012 International Topological Conference Alexandroff Readings. Abstracts. Moscow. 2012. P. 19.