ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 515.12

ДОБРЫНИНА Мария Александровна

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ И ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРОВ В КАТЕГОРИЯХ $\mathcal{P}$ и Comp

01.01.04 - геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор А.П.Комбаров

Москва - 2014

Содержание

Введение

Изучение геометрических свойств ковариантных функторов является одним из центральных направлений в современной общей топологии. Исследования в этой области в последние годы проводились многими авторами. К первым исследованиям в этой области можно отнести теорему 1923 года Важевского-Вьеториса [34],[33] о том, что локальная связность метризуемого континуума эквивалентна локальной связности пространства его непустых замкнутых подмножеств с топологией Вьеториса — пространства $\exp(X)$. Изучению пространства $\exp(X)$ были посвящены многие работы в 30-е - 50-е годы, носившие, однако, фрагментарный характер. В качестве самостоятельного направления эти исследования оформились только после работы Майкла 1951 года [29].

В 1981 году Е.В. Щепин [18], обобщая полученные ранее результаты [19], ввёл в общую топологию понятие нормального функтора, тем самым положив начало новому направлению в общей топологии. Затем В.В.Федорчук ввел класс полунормальных функторов, являющийся обобщением класса нормальных функторов. Полунормальным функтором, в частности, является известный функтор суперрасширения, который не удовлетворяет свойству сохранения прообразов и поэтому не является нормальным функтором. Пространство суперрасширения $\lambda(X)$ всех максимальных сцепленных систем пространства X впервые было рассмотрено Де Гроотом в 1969 году [24]. Исследования, начатые Де Гроотом, были продолжены в работах ван дэ Велла [32], ван Милла [25], М.М.Заричного [5], А.В.Иванова [6] и некоторых других топологов.

Так, например, в 1983 году Ван Милл [25] рассмотрел пространство максимальных k-сцепленных систем компакта X — пространство $\lambda^k(X)$, а также показал, что при $k > 2$ пространство $\lambda^k(X)$ может быть некомпактно.

Наряду с функтором суперрасширения λ также рассматривают функтор полных сцепленных систем N, обладающий многими замечательными свойствами суперрасширения. А.В. Иванов в 1986 в работе [6] определил $N^k(X)$ как пространство полных k-сцепленных систем, и в работе [10] доказал, что $\lambda^k(X)$ всюду плотно в $N^k(X)$ для любого компакта X без изолированных точек. Изучению свойств пространства суперрасширения также посвящена статья

Е.В. Вакуловой [3], в которой был приведен пример максимальной сцепленной системы ξ из суперрасширения пространства X с носителем, совпадающим с X в случае, когда X является отрезком $[0,1]$.

В 1948 году М. Катетов [26] доказал известную теорему о том, что из наследственной нормальности куба компакта следует его метризуемость, а также сформулировал проблему о метризуемости компакта, квадрат которого наследственно нормален. В 1977 году Никошем [31] в предположении аксиомы Мартина и отрицании континнуум-гипотезы MA+$\neg$CH был построен пример неметризуемого компакта с наследственно нормальным квадратом. В 1993 году Грюнхаге [23] в предположении континуум-гипотезы CH построил пример неметризуемого компакта Y, для которого Y^2 наследственно сепарабельно, $Y^2 \backslash \Delta$ совершенно нормально и Y^2 наследственно нормально. Таким образом, Никош и Грюнхаге в некоторых моделях теории множеств дали отрицательный ответ на проблему Катетова. В 2002 году Ларсон и Тодорчевич [28] с помощью форсинга построили модель теории множеств, в которой всякий компакт, квадрат которого наследственно нормален, метризуем, то есть в этой модели теории множеств ответ на проблему Катетова положителен.Тем самым Ларсон и Тодорчевич доказали независимость проблемы Катетова от системы аксиом ZFC.

В 1989 году В.В. Федорчук [16] обобщил теорему Катетова для нормального функтора степени $\geqslant 3$, действующего в категории Comp компактов и их непрерывных отображений. Проблема Катетова также имеет аналог для полунормальных функторов: верно ли, что из наследственной нормальности $\mathcal{F}_k(X)$, где k — второй по величине элемент степенного спектра полунормального функтора $\mathcal{F}$, следует метризуемость X? В связи с этим, в 2008 году А.В. Иванов и Е.В. Кашуба [11] построили пример неметризуемого компакта, обобщающий пример Грюнхаге и удовлетворяющий следующим свойствам:

1) X^n наследственно сепарабельно для любого натурального n;

2) $X^n \setminus \Delta_n$ совершенно нормально для любого натурального n (где Δ_n — обобщенная диагональ X^n, то есть множество точек, у которых хотя бы две координаты совпадают);

3) для любого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности полунормального функтора $\mathcal{F}$ пространство $\mathcal{F}_k(X)$ наследственно нормально, где

k — второй по величине элемент степенного спектра функтора $\mathcal{F}$.

Исследованиям проблемы Катетова для полунормальных функторов посвящены и работы А.В. Иванова [8] - [9], в которых, в частности, доказано, что для любого полунормального функтора конечной степени $n > 3$ наследственная нормальность $\mathcal{F}(X)$ влечет метризуемость X, а в предположении CH приводится полное описание сохраняющих вес полунормальных функторов, обладающих данным свойством.

По аналогии с теоремой Катетова, в 1971 году Ф. Зенор [35] вывел метризуемость компакта X из наследственной счетной паракомпактности куба пространства X, а в 1976 году Дж. Хабер [21] доказал, что для счетно компактного хаусдорфова пространства X из наследственной нормальности его куба также следует метризуемость пространства X.

В 2000 году Т.Ф. Жураев в работе [4] заменил в теореме Федорчука наследственную нормальность компакта $\mathcal{F}(X)$ на наследственную счётную паракомпактность $\mathcal{F}(X)$.

Теоремы Федорчука и Жураева были также обобщены А.П. Комбаровым. А.П. Комбаров в работе [12] ослабил требование наследственной нормальности пространства $\mathcal{F}(X)$ до требования наследственной $\mathcal{K}$-нормальности пространства $\mathcal{F}(X)\backslash X$. Теорема Комбарова утверждает, что если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени $\geqslant 3$ пространство $\mathcal{F}(X)\backslash X$ наследственно $\mathcal{K}$-нормально, где $\mathcal{K}$ — класс σ-компактных пространств, то X — метризуемый компакт. Различные свойства типа нормальности рассматривались также в некоторых работах А.П. Комбарова [13]-[15], [27].

В 1965 году А.В. Архангельский [1] ввел класс пространств, названных им перистыми или p-пространствами. В классе p-пространств сохранялись многие специфические черты локально компактных и метрических пространств. В своей работе А.В. Архангельский доказал, что паракомпактные p-пространства - это в точности совершенные прообразы метрических пространств. Потому вполне естественно изучать геометрические свойства ковариантных функторов в категории паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений, а также попытаться обобщить на данную категорию теорему Федорчука [16].

Целью данной работы является изучение некоторых свойств полунормальных функторов в категории Comp компактов и их непрерывных отображений, а также распространение понятия нормального функтора на категорию паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений и изучение геометрических свойств ковариантных функторов в данной категории.

Первая глава диссертации посвящена изучению некоторых свойств полунормальных функторов в категории Comp компактов и их непрерывных отображений. В этой главе рассматривается функтор суперрасширения, пространства максимальных и полных $k-$сцепленных систем, а также изучаются свойства носителей для этих систем.

Напомним, что для всякой полной, и, следовательно, максимальной [10], k-сцепленной системы определен непустой носитель по формуле

$$\mathrm{supp}(\xi) = [\cup\{F_\alpha : F_\alpha - \text{минимальный по включению элемент } \xi\}].$$

Как известно, Ван Милл в работе [25] показал, что пространство $\lambda^k(X)$ в общем случае не является компактом. Поскольку всякий компакт, как хорошо известно, является нормальным пространством, в первой главе приводится пример, показывающий, что при $k = 3$ пространство $\lambda^k(X)$ может не быть даже нормальным пространством, а именно справедлива следующая

Теорема 2. *Существует компакт X такой, что пространство $\lambda^3(X)$ не является нормальным.*

Далее в первой главе приводится алгоритм построения максимальной сцепленной системы с заданным носителем, обобщающий пример Е.В. Вакуловой [3], а именно, доказываются следующие предложения.

Предложение 9. *Если в бесконечном пространстве X найдется открытое сепарабельное подпространство, то существует максимальная сцепленная система ξ такая, что $supp(\xi) = X$.*

Предложение 12. *Пусть X сепарабельно. Тогда для любого кардинала μ существует максимальная сцепленная система ξ, принадлежащая суперрасширению $\lambda(X^\mu)$ степени X^μ, такая что $supp(\xi) = X^\mu$.*

Понятие носителя точки, позволяющее охарактеризовать структуру пространства, имеет большое значение в исследовании свойств ковариантных функторов.

Напомним, что если $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор, то для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определен *носитель* $\mathrm{supp}(a)$ следующим образом:

$$\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y \subset X : a \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

Как хорошо известно, при помощи носителя можно определить подфунктор континуальной экспоненты $\exp^c$ функтора $\exp$ как подпространство пространства $\exp(X)$, состоящее из точек со связными носителями, то есть подпространство связных замкнутых подмножеств пространства X. Естественно возникает вопрос, нельзя ли, используя определение носителя, аналогичным образом задать подфунктор функтора суперрасширения, рассмотрев подпространство $\lambda^c(X)$ пространства $\lambda(X)$, состоящее из максимальных сцепленных систем со связными носителями. В связи с этим в первой главе для непрерывных отображений максимальных сцепленных систем получен следующий результат.

Предложение 13. *Существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ и максимальная сцепленная система $\xi \in \lambda(X)$ со связным носителем такие, что носитель максимальной сцепленной системы $\eta = \lambda f(\xi)$ несвязен.*

Предложение 13 показывает, что операция λ^c не является ковариантным функтором. Также в этой связи приведен пример пространства X, показывающий, что множество максимальных сцепленных систем со связными носителями может не быть замкнуто в $\lambda(X)$, откуда следует, что $\lambda^c(X)$ не компакт для данного компакта X.

Теорема 3. *Пусть компакт X является связным и сепарабельным. Тогда множество максимальных сцепленных систем со связными носителями всюду плотно в суперрасширении $\lambda(X)$.*

Теорема 4. *Существует компакт X такой, что множество максимальных сцепленных систем со связными носителями не замкнуто в суперрасширении $\lambda(X)$.*

Упомянутый пример неметризуемого компакта X А.В. Иванова и Е.В. Кашубы [11], обобщающий пример Грюнхаге, удовлетворял следующему свойству: для любого полунормального функтора $\mathcal{F}$, сохраняющего вес и точки взаимной однозначности, со степенным спектром $sp(\mathcal{F}) = \{1, k, \dots\}$, пространство $\mathcal{F}_k(X)$ наследственно нормально. В частности, отсюда следовало, что наследственно нормальны пространства X^2 и $\lambda_3(X)$. Чтобы получить дальнейшие примеры таких пространств и, по возможности, упростить формулировку самого условия, был поставлени вопрос о связи степенного спектра полунормального функтора со свойством сохранения полунормальным функтором точек взаимной однозначности, а именно: можно ли, зная второй по величине элемент степенного спектра функтора, не требовать проверки условия сохранения точек взаимной однозначности.

Напомним далее следующее определение степенного спектра, принадлежащее А.В. Иванову [7]. *Степеным спектром* функтора $\mathcal{F}$ называется множество $sp(\mathcal{F}) = \{k : k \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_{kk}(k) \neq \varnothing, \text{где } k \text{ — дискретное пространство}\}$.

В первой главе получены следующие результаты.

Предложение 15. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, сохраняющий точки взаимной однозначности и $sp\mathcal{F} = \{1, k, ...\}$. Тогда $k \leqslant 3$.*

Предложение 16. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор степени $\leqslant 2$. Тогда $\mathcal{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности.*

Заметим, что в случае степенного спектра $\{1, 3\}$ возможно как сохранение, так и не сохранение полунормальным функтором точек взаимной однозначности. Примерами тому являются подфунктор λ_3 функтора λ и функтор А.В. Иванова $\exp^K$ при $K = \{1, 3\}$ [11].

Вторая глава посвящена распространению понятия нормального функтора на категорию $\mathcal{P}$ паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений, а также обобщению теоремы Федорчука-Катетова в этой категории.

Показывается, что ковариантный функтор $\exp_c$ является примером нормального функтора в категории $\mathcal{P}$. Подпространство $\exp_c(X)$ пространства $\exp(X)$ состоит из всех компактных замкнутых подмножеств пространства X [17]. Открытую базу топологии пространства $\exp_c(X)$ образуют множества вида $O < U_1, ..., U_n >= \{A \in \exp_c(X) : A \subset U_1 \cup ... \cup U_n; A \cap U_i \neq \varnothing \text{для } \forall i = 1, ..., n\}$, где U_i — открытые в X множества. Для любого совершенного отображения f паракомпактного p-пространства X в паракомпактное

p-пространство Y отображение $\exp_c(f)$ пространства $\exp_c(X)$ в пространство $\exp_c(Y)$ определяется следующим образом: $\exp_c(f)(F) = f(F)$. Во второй главе доказано следующее

Предложение 24. *Операция* $\exp_c$ *является ковариантным функтором из категории* $\mathcal{P}$ *в категорию* $\mathcal{P}$.

Во второй главе получено следующее усиление теоремы Катетова [26] и утверждения, обобщающие некоторые теоремы В.В. Федорчука из статьи [16]. Напомним, что пространство X называется M-пространством [30], если его можно квазисовершенно отобразить на некоторое метрическое пространство Y. Квазисовершенным называется такое замкнутое отображение f пространства X на пространство Y, при котором прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки y пространства Y является счётно-компактным подмножеством пространства X. Как хорошо известно, класс паракомпактных M-пространств совпадает с классом паракомпактных p-пространств.

Предложение 27. *Пусть* X *— паракомпактное* M*-пространство, куб которого является наследственно нормальным пространством. Тогда пространство* X *метризуемо.*

Предложение 30. *Пусть* X *— паракомпактное* p*-пространство с единственной неизолированной точкой* x_0*. Тогда если* $\chi(x_0, X) = \omega_0$*, то* X *метризуемое пространство, если же* $\chi(x_0, X) \geqslant \omega_1$*, то пространство* $exp_3 X \setminus X$ *не наследственно нормально.*

Предложение 31. *Пусть* X *— паракомпактное* p*-пространство,* $exp_3 X \setminus X$ *наследственно нормально. Тогда* X *метризуемо.*

Во второй главе понятие нормального функтора в категории Comp компактов и их непрерывных отображений распространяется на категорию $\mathcal{P}$ паракомпакных перистых пространств и их совершенных отображений. Приводится пример функтора, удовлетворяющего всем свойствам нормальности в категории $\mathcal{P}$.

Предложение 32. *Функтор* exp_c *является нормальным функтором в категории* $\mathcal{P}$.

Во второй главе также изучаются свойства ковариантных функторов в данной категории, аналогичные свойствам функторов в категории Comp. Пусть $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор, тогда для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определен *носитель* $\mathrm{supp}(a)$ следующим образом: $\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y : Y$ замкнуто в $X,\ a \in \mathcal{F}(Y)\}$. Таким образом, также определно многозначное отображение $\mathrm{supp} : \mathcal{F}(X) \to X$, ставящее в соответствие каждой точке пространства $\mathcal{F}(X)$ её носитель — непустое замкнутое подмножество пространства X.

Предложение 33. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор в категории $\mathcal{P}$. Тогда многозначное отображение* $\mathrm{supp} : \mathcal{F}(X) \to X$ *полунепрерывно снизу.*

Предложение 35. *Мономорфный, сохраняющий пересечения функтор, действующий в категории $\mathcal{P}$, сохраняет носители тогда и только тогда, когда он сохраняет прообразы.*

Напомним, что для любого натурального n через $\mathcal{F}_n(X)$ обозначается множество

$$\mathcal{F}_n(X) = \{a \in \mathcal{F}(X) : |supp(a)| \leqslant n\}.$$

Предложение 36. *Если $\mathcal{F}$ — нормальный функтор, действующий в категории $\mathcal{P}$, то подпространство $\mathcal{F}_n(X)$ замкнуто в $\mathcal{F}(X)$ для любого X и любого n.*

Следствие. *Соответствие $X \to \mathcal{F}_n(X)$ однозначно определяет подфунктор $\mathcal{F}_n$ функтора $\mathcal{F}$, действующего в категории $\mathcal{P}$.*

Основным результатом второй главы является следующая теорема 9, обобщающая теорему В.В.Федорчука [16].

Теорема 9. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$ в категории $\mathcal{P}$. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X) \setminus X$ наследственно нормально, то пространство X метризуемо.*

Основные результаты диссертации опубликованы в шести работах автора [36] - [41], докладывались на кафедральном научно-исследовательском семинаре по общей топологии имени П. С. Александрова под руководством профессоров В.В. Федорчука, Ю.В. Садовничего, С.А. Богатого, Б.А. Пасынкова, В.И. Пономарева, В.В. Филиппова (неоднократно, с 2011 по 2013гг); на международной конференции по топологии и её приложениям (Нафпактос, Греция, с 26 по 30 июня 2010 г.); на международной топологической конференции «Александровские чтения» (Москва, с 21 по 25 мая 2012 г.); на научных конференциях молодых ученых, аспирантов и студентов Петрозаводского государственного университета (неоднократно, с 2009 по 2011гг).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Петровичу Комбарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор также выражает глубокую благодарность всем сотрудникам кафедры общей топологии и геометрии за поддержку и внимание.

1 Глава первая. Некоторые свойства полунормальных функторов в категории Comp.

1.1 О функторах экспоненциального типа.

В данной главе мы рассматриваем исключительно компакты, то есть компактные хаусдорфовы пространства. Все отображения предполагаем непрерывными. Замыкание множества F в топологическом пространстве X будем обозначать $[F]_X$, или просто $[F]$, если ясно, о каком пространстве идет речь. Дискретные пространства мощности μ будем обозначать, следуя [20], как $D(\mu)$. В первой главе рассматриваются только ковариантные функторы, действующие в категории $Comp$ компактов и их непрерывных отображений. Напомним необходимые определения.

Говорят, что задан *ковариантный функтор* $\mathcal{F} : Comp \to Comp$, если каждому компакту X поставлен в соответствие некоторый компакт $\mathcal{F}(X)$ и каждому непрерывному отображению $f : X \to Y$ сопоставлено некоторое непрерывное отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ так, что выполнены следующие условия: для любого компакта X и тождественного отображения id_X компакта X отображение $\mathcal{F}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$ является тождественным отображением пространства $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ для любой композиции непрерывных отображений f и g.

Нам понадобятся следующие примеры ковариантных функторов.

Гиперпространство $\exp(X)$ пространства X — это множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства X, снабженное топологией Вьеториса ([17], гл. 4). Открытую базу этой топологии образуют множества вида

$$O < U_1, ..., U_n >= \{A \in \exp(X) : A \subset U_1 \cup ... \cup U_n;$$

$$A \cap U_i \neq \varnothing \text{ для } \forall i = 1, ..., n\},$$

где U_i — открытые в X множества. Если пространство X — компакт, то пространство $\exp(X)$ также является компактом ([17], гл. 4). Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда отображение $\exp(f) : \exp(X) \to \exp(Y)$, определяемое формулой $(\exp(f))(A) = f(A)$, также непрерывно. Операция exp является ковариантным функтором в категории $Comp$ ([17], гл. 7).

Напомним построение функтора континуальной экспоненты.

Через $\exp^c(X)$ будем обозначать, следуя [17], подпространство пространства $\exp(X)$, состоящее из всех подконтинуумов (связных компактов) пространства X. Пространство $\exp^c(X)$, называемое *континуальной экспонентой* пространства X, замкнуто в $\exp(X)$ [17], и, следовательно, является компактом. Если $f : X \to Y$ — отображение, то отображение $\exp^c(f) : \exp^c(X) \to \exp^c(Y)$ определяется по правилу $(\exp^c(f))(A) = f(A)$. Операция $\exp^c$ является ковариантным функтором в категории Comp [17] , и, кроме того, подфунктором функтора экспоненты [17].

Напомним определение подфунктора ковариантного функтора [17]. Пусть $\mathcal{F}_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, $\mathcal{F}_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ — два ковариантных функтора из категории $\mathcal{E} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ в категорию $\mathcal{E}' = (\mathcal{O}', \mathcal{M}')$. Семейство морфизмов

$$\Phi = \{f_X : \mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{F}_2(X), X \in \mathcal{O}\} \subset \mathcal{M}'$$

называется естественным преобразованием функтора $\mathcal{F}_1$ в функтор $\mathcal{F}_2$, если для всякого морфизма $f : X \to Y$ категории $\mathcal{E}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}_1(X) & \xrightarrow{f_X} & \mathcal{F}_2(X) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}_1(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}_2(f)} \\
\mathcal{F}_1(Y) & \xrightarrow{f_Y} & \mathcal{F}_2(Y)
\end{array}$$

Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ — функторы, действующие из категории Comp в себя (в таком случае, следуя [17], будем говорить, что функтор действует в категории Comp). Функтор $\mathcal{F}_1$ называется подфунктором функтора $\mathcal{F}_2$, если существует такое естественное преобразование $\Phi = \{f_X\} : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, что всякое отображение f_X — вложение.

Напомним также построение функтора $\exp_n$. Пространство $\exp_n(X)$ является подпространством экспоненты $\exp(X)$. Точками $\exp_n(X)$ являются не более чем n-точечные подмножества X. Это пространство называется *n-ой гиперсимметрической степенью* пространства X [18]. Гиперсимметрическая степень $\exp_n(X)$ компакта X является компактом [17].

Если $f : X \to Y$ — отображение, то отображение $\exp_n(f) : \exp_n(X) \to \exp_n(Y)$ определяется так же, как и $\exp(f) : (\exp_n(f))(A) = f(A)$. Известно, что $\exp_n$ является ковариантным функтором в категории Comp и, кроме того, подфунктором экспоненты [17].

В дальнейшем нам понадобится пример функтора $\exp^K$, принадлежащий А.В. Иванову [7]. Здесь K — произвольное подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, содержащее единицу.

Приведем определение функтора $\exp^K$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\exp_n X$ рассмотрим разбиение R_n, единственным нетривиальным элементом которого является множество $\exp_{n-1} X$, и фактор пространство $\exp_n X/R_n$ будем обозначать, следуя [7], через $\exp^0_n X$. Заметим, что $\exp^0_1 X = \exp_1 X = X$. Пусть ξ^0_n — точка $\exp^0_n X$, соответствующая множеству $\exp^0_{n-1} X$. Для всякого $\xi \in \exp^0_n X$ определим множество н$(\xi) \subset X$ следующим образом: если $\xi \neq \xi^0_n$, то ξ — n-точечное подмножество X и мы полагаем н$(\xi) = \xi$, если же $\xi = \xi^0_n$, то, по определению, н$(\xi) = X \cup \{X\}$ (Множество н(ξ) состоит из элементов множества X и добавленного элемента X. Формальное включение в множество н(ξ) элемента X необходимо здесь для того, чтобы различать н(ξ^0_n) и н(ξ) в случае, когда $|X| = n$ и $\xi = X$). Рассмотрим произведение

$$Z = \prod_{n\in K} exp^0_n X$$

и выделим в Z подпространство $\exp^K(X)$ следующим образом:

$$\exp^K(X) = \{\{\xi_n : n \in K\} : \text{н}(\xi_k) \subset \text{н}(\xi_n)\text{при } k < n\}.$$

Множество $\exp^K(X)$ замкнуто в Z и, следовательно, является компактом.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Для всякого $n \in K$ рассмотрим отображение $\exp_n f : \exp_n X \to \exp_n Y$. Поскольку $\exp_n f(\exp_{n-1} X)$ лежит в $\exp_{n-1} Y$, отображение $\exp_n f$ естественно порождает непрерывное отображение $\exp^0_n f : \exp^0_n X \to \exp^0_n Y$. При этом $\exp^0_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\exp^0_n X}$ и $\exp^0_n(f \circ g) = \exp^0_n f \circ \exp^0_n g$, то есть $\exp^0_n$ — ковариантный функтор в категории Comp. Очевидно, что $\exp^0_1$ — тождественный функтор.

Пусть $\xi = \{\xi_n : n \in K\}$ — точка из $\exp^K(X)$. Положим $\exp^K(f)(\xi) = \{\exp^0_n f(\xi_n) : n \in K\}$. Легко проверяется, что н$(\exp^0_n f(\xi_k)) \subset$ н$(\exp^0_n f(\xi_n))$

при $k, n \in K,\ k < n$ (см. [7]). Следовательно, $\exp^K(f)(\xi) \in \exp^K(Y)$. Итак, для всякого отображения $f : X \to Y$ определено непрерывное отображение $\exp^K(f) : \exp^K(X) \to \exp^K(Y)$. При этом $\exp^K(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\exp^K X}$ и $\exp^K(f \circ g) = \exp^K f \circ \exp^K g$.

Таким образом, $\exp^K$ — ковариантный функтор в категории Comp.

1.2 Функтор суперрасширения и функтор полных $k-$сцепленных систем.

Исследования, посвященные функтору суперрасширения, берут своё начало в работе Де Гроота [24], где он впервые рассмотрел пространство, состоящее из всех максимальных сцепленных систем данного топологического пространства. Среди последовавших работ были, в частности, работы Ван Милла [25], а также А.В. Иванова [10], рассмотревшего пространство всех максимальных k-сцепленных систем в качестве подпространства пространства всех полных k-сцепленных систем.

В данном параграфе приводятся все необходимые определения, рассматриваются пространств максимальных и полных сцепленных систем, а также свойства носителей для данных систем.

Система замкнутых подмножеств ξ называется *k-сцепленной,* если пересечение любых ее k элементов непусто. При $k = 2$ будем называть систему *сцепленной.* Система ξ называется *полной,* если для любого замкнутого $F \subset X$ условие "любая окрестность F содержит некоторый элемент Φ системы ξ"влечет $F \in \xi$. Пусть ξ — k-сцепленная система,тогда ее пополнение ξ_f определяется следующим образом:

$\xi_f = \xi \cup \{F :$ для любой окрестности OF найдётся множество$\Phi \in \xi : \Phi \subset OF\}$. Известно, что пополнение ξ_f всякой k-сцепленной системы является полной k-сцепленной системой [10].

Максимальной k-сцепленной системой называется k-сцепленная система, которая не содержится ни в какой другой k-сцепленной системе. Нам также понадобится [10] следующее

Предложение 1. *Максимальная k-сцепленная система является полной.*

Суперрасширением X называется пространство $\lambda(X)$ всех максимальных сцепленных систем, снабженное топологией, открытую предбазу которой образуют множества вида

$$O(U) = \{\xi \in \lambda(X) : \text{существует такое } F \in \xi, \text{ что } F \subset U\}$$

где U — открыто в X.

Суперрасширение любого компакта является компактом [17].

Пусть $f : X \to Y$- непрерывное отображение. Тогда для $\xi \in \lambda(X)$ система $\{f(F) : F \in \xi\}$ является максимальной сцепленной системой пространства $f(X)$ и однозначно достраивается до максимальной сцепленной системы пространства Y [17], обозначаемой $\lambda f(\xi)$. Итак, определено отображение $\lambda(f) : \lambda(X) \to \lambda(Y)$, которое является непрерывным. Операция $\lambda(.)$ является ковариантным функтором в категории $Comp$ [17].

Определим пространство $\lambda^k(X)$ в общем случае.

Множество $N^k(X)$ всех полных k-сцепленных систем пространства X наделяется топологией, открытую базу которой образуют множества вида:

$O(U_1, ..., U_n)(V_1, ..., V_m) = \{\xi \in N^k(X) :$ для любого $i = 1, ..., n$ существует такое $F_i \in \xi,$ что $F_i \subset U_i;$ для любого $j = 1, ..., m,$ V_j пересекается со всеми элементами $\xi\}$ где $U_1, ..., U_n; V_1, ..., V_m$ — открытые подмножества X.

Пространство $N^k(X)$ является компактом [10].

Пусть отображение $f : X \to Y$ непрерывно.

Тогда отображение $N^k(f) : N^k(X) \to N^k(Y)$, определяется следующим образом: каждой полной k-сцепленной системе $\xi \in N^k(X)$ ставится в соответствие пополнение сцепленной системы $N_k(f)(\xi) = \{f(F) : F \in \xi\}_f$ [10]. Известно, что $N^k(f) : N^k(X) \to N^k(Y)$ также непрерывно. Операция N^k является ковариантным функтором в категории $Comp$ [10].

Пусть ξ — максимальная k-сцепленная система, $F \in \xi$. Элемент F называется *минимальным по включению элементом* ξ, если из условия $G \in \xi$ и $G \subset F$ следует, что $G = F$.

Для всякой полной k-сцепленной системы определен непустой носитель

$$\mathrm{supp}(\xi) = [\cup\{F_\alpha : F_\alpha \text{ минимальный по включению элемент } \xi\}]$$

Подпространство $N^k(X)$, состоящее из максимальных k-сцепленных систем с конечными носителями, будем обозначать $\lambda^k(X)$.

Заметим, что топология подпространства на $\lambda^k(X)$ совпадает с топологией, открытую предбазу которой образуют множества вида

$$O(U) = \{\xi \in \lambda^k(X) : \text{существует такое } F \in \xi, \text{ что } F \subset U\},$$

где U — открыто в X.

Чтобы доказать это, проверим, что для любой максимальной k-сцепленной системы ξ из $\lambda^k(X)$ и любой ее окрестности $O\xi = O(U_1, ..., U_n)(V_1, ..., V_m)$ найдется окрестность $O'\xi$ вида $O(W_1, ..., W_l)$ такая, что $\xi \in O'\xi \subset O\xi$.

Пусть максимальная k-сцепленная система $\xi \in O(U_1, ..., U_n)(V_1, ..., V_m)$. Тогда для любого V_i найдутся элементы системы ξ — множества $F_1^i, ..., F_{k-1}^i$ такие, что их пересечение лежит в множестве V_i. Тогда для каждого i возьмем такие окрестности $W_1^i, ..., W_{k-1}^i$ множеств $F_1^i, ..., F_{k-1}^i$, что пересечение этих окрестностей также лежит в множестве V_i.

Положим $O'\xi = O(U_1, ..., U_n; W_1^1, ..., W_{k-1}^1, ..., W_1^m, ..., W_{k-1}^m)$. Получим, что $\xi \in O'\xi$ по построению.

Кроме того, $O'\xi \subset O\xi$. Действительно, если $\gamma \in O'\xi$, то для любых i, j найдутся $G_j^i \in \gamma$ такие, что $G_j^i \subset W_j^i$. Значит, для любых V_i и элементов G из γ выполнено $G \cap V_i \neq \varnothing$. В противном случае G не пересекается с множеством $\cap\{W_j^i : j = 1, \ldots, k-1\}$ и, следовательно, G не пересекается с множеством $\cap\{G_j^i : j = 1, \ldots, k-1\}$.

Итак, совокупность всех множеств вида $O(W_1, ..., W_l)$, где $W_1, ..., W_l$ — открытые подмножества X, образует базу топологии подпространства пространства $N^k(X)$ на пространстве $\lambda^k(X)$.

В отличие от случая $k = 2$, при $k > 2$ пространство $\lambda^k(X)$,как правило, не является компактом [25].

Имеет место следующий результат:

Теорема 1. [10] $[\lambda^k(X)] = N^k(X)$ *для любого компакта X без изолированных точек.*

1.3 Нормальные функторы и некоторые свойства носителей.

Определение нормального функтора появилось в начале 80-х годов в работах Е. В. Щепина. В 1981 году Е.В. Щепин [18], обобщая полученные ранее результаты, предложил новый класс функторов, удовлетворяющих определённому набору условий, тем самым ввёл понятие нормального функтора, изучение которого положило начало новому направлению в общей топологии. Естественное ослабление определения нормального функтора привело к появлению понятия полунормального функтора. К этому, ещё более широкому классу функторов, относится, например, функтор суперрасширения.

Для того, чтобы сформулировать упомянутые выше определения, придётся напомнить хорошо известное определение обратного спектра топологических пространств.

Частично упорядоченное множество $(A, \leqslant)$ называется направленным, если для любых элементов $\alpha, \beta \in A$ существует элемент $\gamma \in A$, такой что $\gamma \geqslant \alpha$ и $\gamma \geqslant \beta$.

Пусть X_α, $\alpha \in A$, — семейство топологических пространств, и пусть каждой паре индексов $\alpha, \beta \in A$, связанных неравенством $\alpha \geqslant \beta$, поставлено в соответствии непрерывное отображение $p^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$, причем если $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, то выполняются следующие условия транзитивности: $p^\alpha_\gamma = p^\alpha_\beta \cdot p^\beta_\gamma$ и, если $\alpha = \beta$, то $p^\alpha_\beta = id_{X_\alpha}$. Тогда система пространств и отображений $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in A\}$ называется *обратным спектром* топологических пространств (или просто спектром, поскольку никаких других спектров мы рассматривать не будем). Точка $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$, лежащая в произведении $\Pi_{\alpha\in A} X_\alpha$, называется нитью спектра S, если для любых $\alpha, \beta \in A$, удволетворяющих условию $\alpha \geqslant \beta$, имеет место равенство $x_\beta = p^\beta_\alpha(x_\alpha)$.

Пределом спектра $\lim S$, называется множество всех его нитей с индуцированной из произведения $\Pi_{\alpha\in A} X_\alpha$, тихоновской топологией. Пусть $q_\beta : \Pi_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, $\beta \in A$ — проекция произведения па сомножитель. Отображение $p_\beta = q_\beta|_{\lim S}$ называется предельной проекцией предела спектра S. Очевидно, для любых $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \geqslant \beta$ и для любого $x \in \lim S$ $p^\alpha_\beta p_\alpha(x) = p_\beta(x)$. Известно, что базу тихоновской топологии в $\lim S \subseteq \Pi_{\alpha\in A} X_\alpha$ образуют множества вида $p_\alpha^{-1}(U)$ где $\alpha \in A$ и множества U открыты в X_α [17].

Мы будем рассматривать вполне упорядоченные спектры, то есть такие спектры, множество индексов которых является вполне упорядоченным множестом. Вполне упорядоченные спектры будем обозначать как $S = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \tau\}$, где τ — некоторый ординал.

В дальнейшем нам потребуются следующие предложения, доказательства которых можно найти в [17], гл. 3.

Предложение 2. *Предел обратного спектра из непустых компактов является непустым компактом.*

Предложение 3. *Если множество F замкнуто в пределе спектра $S = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \tau\}$, то $F = \cap\{(p_\alpha^{-1})(p_\alpha(F)) : \alpha < \tau\}$.*

Переходим к определениям нормальных и и полунормальных функторов. Все функторы далее считаются ковариантными.

Функтор $\mathcal{F}$ называется *мономорфным,* если для любого вложения $i : Y \to X$ отображение $\mathcal{F}(i) : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ также является вложением. Для мономорфного функтора $\mathcal{F}$ и замкнутого подмножества $Y \subset X$ пространство $\mathcal{F}(Y)$ естественно отождествляется с подпространством $\mathcal{F}(i)(\mathcal{F}(Y))$ пространства $\mathcal{F}(X)$.

Мономорфный функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет пересечения* , если для любого компакта X и любой системы $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств X имеет место равенство

$$\mathcal{F}(\cap\{Y_\alpha : \alpha \in A\}) = \cap\{\mathcal{F}(Y_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Функтор $\mathcal{F}$ назовём *непрерывным,* если он перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

Более точно это означает следующее. Для любого обратного спектра $S = \{X_a, p_b^a : a, b \in A\}$ и его предела $X = \lim S$ определен обратный спектр $\mathcal{F}(S) = \{\mathcal{F}(X_a), \mathcal{F}(p_b^a) : a, b \in A\}$, его предел $\lim \mathcal{F}(S)$ а также пространство $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(\lim S)$. Пусть $p_a : X \to X_a$ — предельные проекции спектра. Тогда определены отображения $\mathcal{F}(p_a) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_a)$, которые в пределе дают отображение p из $\mathcal{F}(X)$ в $\lim \mathcal{F}(S)$.

Требование непрерывности функтора заключается в том, что пространство $\mathcal{F}(\lim S)$ совпадает с пределом спектра $\lim \mathcal{F}(S)$. Другими словами, функтор $\mathcal{F}$ непрерывен, если отображение p — гомеоморфизм.

Непрерывный мономорфный сохраняющий пересечения функтор называется *полунормальным,* если он сохраняет точку и пустое множество [17].

Функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет прообразы,* если для любого отображения $f : X \to Y$ и любого замкнутого $A \subset Y$

$$(\mathcal{F}(f))^{-1}\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(f^{-1}A).$$

Функтор $\mathcal{F}$ называется *эпиморфным,* если он сохраняет эпиморфизмы.

Функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет вес,* если для любого бесконечного пространства X имеет место равенство $w(X) = w(\mathcal{F}(X))$. Полунормальный эпиморфный функтор $\mathcal{F}$, сохраняющий вес и прообразы, называется *нормальным.*

Функтор $\exp$ является нормальным [17]. Функтор $\exp^c$ удовлетворяет всем условиям нормальности, кроме эпиморфности, а функторы λ и N^k удовлетворяют всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов (см., например, [17] и [10]).

Если $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор, то для любой точки $a \in \mathcal{F}$ определен *носитель* $\mathrm{supp}(a)$ следующим образом:

$$\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y \subset X : a \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

Проверим, что носитель точки не возрастает при отображениях. Более точно это означает, что для любых двух компактов X, Y, непрерывного отображения $f : X \to Y$, полунормального функтора $\mathcal{F}$ и произвольной точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$, для точки $\eta = \mathcal{F}(f)(\xi)$ выполнено условие $\mathrm{supp}(\eta) \subset f(\mathrm{supp}(\xi))$.

Проверим это. Пусть носитель точки $\mathrm{supp}(\xi) = A$, тогда,так как $\mathcal{F}$ сохраняет пересечения, $\xi \in \mathcal{F}(A)$. Далее, $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(X)$ и отображения $\mathcal{F}(f)$ и $\mathcal{F}(f|_A)$ совпадают на $\mathcal{F}(A)$, в частности, $\mathcal{F}(f|_A)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \eta$. Так как отображение $\mathcal{F}(f|_A)$ действует из $\mathcal{F}(A)$ в $\mathcal{F}(f(A))$, получим, что $\eta \in \mathcal{F}(f(A))$,что и означает, что $\mathrm{supp}(\eta) \subset f(A)$.

Напомним, что для всякой полной k-сцепленной системы (и, как следствие, для всякой максимальной k-сцепленной системы) определен непустой носитель по формуле

$$\mathrm{supp}(\xi) = [\cup\{F_\alpha : F_\alpha \text{— минимальный по включению элемент} \xi\}]$$

Доказательство того, что оба данных определения носителя $\mathrm{supp}(\eta)$ для максимальных сцепленных совпадают, можно найти в [3]. Более того, справедливо следующее

Предложение 4. *Для произвольной полной k-сцепленной системы ξ справедливо равенство $supp(\xi) = \cap\{Y \subset X : \xi \in \mathcal{F}(Y)\} = [\cup\{F_\alpha : F_\alpha$ — минимальный по включению элемент $\xi\}]$*

Доказательство. Условие $\xi \in N^k(A)$ можно заменить на следующее: для любого $\Phi \in \xi$ пересечение $\Phi \cap A$ также принадлежит ξ. Проверим, что если F — минимальный по включению элемент системы ξ, то для всех A таких, что $\xi \in N^K(A)$, выполнено $F \subset A$. Так как $F \cap A \in \xi$ и F — минимальный по включению, получим, что $F \cap A = F$ и $F \subset A$. То есть $[\cup\{F_\alpha : F_\alpha$ — минимальный по включению элемент$\xi\}]$ лежит в $\cap\{A \subset X : a \in N^k(A)\}$.

С другой стороны, для любого $\Phi \in \xi$ верно, что $\Phi \cap [\cup F_\alpha] \in \xi$, так как Φ содержит в себе некоторый минимальный по включению элемент системы ξ. То есть $\xi \in N^k([\cup F_\alpha])$. Значит, $[\cup F_\alpha]$ содержит в себе $\cap\{A \subset X : a \in N^k(A)$. Итак, данные определения носителей совпадают. Предложение 4 доказано. $\square$

Для любого натурального n через $\mathcal{F}_n(X)$ обозначается множество

$$\mathcal{F}_n(X) = \{a \in \mathcal{F}(X) : |supp(a)| \leqslant n\}.$$

Если $\mathcal{F}$ — мономорфный сохраняющий пересечения функтор, то подпространство $\mathcal{F}_n(X)$ замкнуто в $\mathcal{F}(X)$. Более того, соответствие $X \to \mathcal{F}_n(X)$ однозначно определяет подфунктор $\mathcal{F}_n$ функтора $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, то для любого натурального n функтор $\mathcal{F}_n$ также является полунормальным. При этом можно считать, что $X = \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}_n(X)$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathcal{F}_{nn}(X) = \mathcal{F}_n(X) \backslash \mathcal{F}_{n-1}(X)$. При этом считаем, что $\mathcal{F}_0(X) = \varnothing$. Следующее определение степенного спектра принадлежит А. В. Иванову [7].

Степеным спектром функтора $\mathcal{F}$ называется следующее множество

$$sp(\mathcal{F}) = \{k : k \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_{kk}(k) \neq \varnothing.\},$$

где k рассматривается как дискретное пространство.

Степенной спектр любого полунормального функтора содержит 1 [7]. Степенной спектр нормального функтора либо равен $\mathbb{N}$, либо совпадает с начальным отрезком натурального ряда, степенной спектр функтора λ равен $\mathbb{N} \setminus \{2\}$, степенной спектр функтора N^k совпадает с $\mathbb{N}$ при любом k [7]. Нам также понадобится [7] следующее

Предложение 5. *Степенной спектр функтора exp^K равен K.*

Будем говорить, что степень функтора $deg\mathcal{F} \leqslant n$, если для любого X и любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ верно $|\operatorname{supp}(a)| \leqslant n$. Будем говорить, что $deg\mathcal{F} = n$, если $deg\mathcal{F} \leqslant n$, но неверно, что $deg\mathcal{F} \leqslant n-1$,.

Будем говорить, что полунормальный функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет точки взаимной однозначности,* если для любого отображения $f : X \to Y$ и любой точки $y \in Y$ такой, что $|f^{-1}(y)| = 1$, отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ также взаимнооднозначно в точке $y \in Y \subset \mathcal{F}(Y) : |(\mathcal{F}(f))^{-1}(y)| = 1$.

Имеют место следующие предложения [11]:

Предложение 6. *Если полунормальный функтор сохраняет прообразы, то он сохраняет точки взаимной однозначности.*

Предложение 7. *Суперрасширение λ сохраняет точки взаимной однозначности.*

Предложение 8. *Функтор exp^K не сохраняет точки взаимной однозначности при $K = \{1, 3\}$.*

1.4 Пространство максимальных 3-сцепленных систем

В 1983 г. Ван Милл показал, что при $k > 2$ пространство $\lambda^k(X)$, как правило, не компактно. В связи с этим возникает вопрос о других свойствах пространства $\lambda^k(X)$, в частности, о нормальности. В данном параграфе привоодится пример компакта такого, что при $k = 3$ пространство максимальных k-сцепленных систем данного компакта не нормально. Что является усилением результата Ван Милла при $k = 3$, поскольку, как хорошо известно, всякий компакт является нормальным пространством.

Теорема 2. *Существует компакт X такой, что пространство $\lambda^3(X)$ не является нормальным.*

Доказательство. Положим $X = A(\omega_0) \times A(\omega_1)$, где $A(\omega_0), A(\omega_1)$ — Александровские (одноточечные) компактификации [20] дискретных пространств $D(\omega_0)$ и $D(\omega_1)$ соответственно; $\{x_0\}$, $\{y_0\}$ — одноточечные наросты соответствующих компактификаций. Пусть $B = \{x_0\} \times (A(\omega_1) \setminus \{y_0\})$, $C = (A(\omega_0) \setminus \{x_0\}) \times \{y_0\}$, $z_0 = (x_0, y_0)$.

Построим непересекающиеся замкнутые в $\lambda^3(X)$ множества H_1 и H_2 следующим образом.

Возьмем последовательность точек $x_n \in A(\omega_0) \setminus \{x_0\}$, $x_n = n$, тогда $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Возьмём две различные точки $z_1^0, z_2^0 \in X \setminus (B \cup C \cup \{z_0\})$. Положим $z_n = (x_n, y_0)$, $z_{n+1} = (x_{n+1}, y_0)$. Пусть $F_n^1 = \{z_1^0, z_2^0, z_n\}$, $F_n^2 = \{z_1^0, z_2^0, z_{n+1}\}$, $F_n^3 = \{z_1^0, z_n, z_{n+1}\}$, $F_n^4 = \{z_2^0, z_n, z_{n+1}\}$.

Система $\xi_n^0 = \{F_n^i\}_{i=1}^4$ является 3-сцепленной. Значит, она может быть достроена до некоторой максимальной 3-сцепленной системы ξ_n.

Построим полную 3-сцепленную систему ξ следующим образом. Возьмем систему η, состоящую из множеств $\Phi_1 = \{z_0, z_1^0\}$ и $\Phi_2 = \{z_0, z_2^0\}$. В качестве ξ возьмем пополнение системы η.

Проверим, что $\xi_n \to \xi$ в $N^3(X)$ при $n \to \infty$. Пусть $O(U_1, ..., U_m)(V_1, ..., V_k)$ — произвольная окрестность ξ. Тогда $z_0 \in \cap_{i=1}^m U_i$. Значит, существует n^0 такое, что для $n \geqslant n^0$ имеем $z_n, z_{n+1} \in \cap_{i=1}^m U_i$. Кроме того, в каждое множество U_i попадет как минимум одна из точек z_1^0, z_2^0. Значит, как минимум одно из множеств F_n^3 или F_n^4 лежит в U_i при $n \geqslant n^0$. Из того, что для любого j и любого элемента $F \in \xi$ выполняется $V_j \cap F \neq \varnothing$, следует, что либо $z_1^0, z_2^0 \in V_j$, либо $z_0 \in V_j$. В первом случае получим, что $V_j \cap F_n^i \neq \varnothing$ для любых n, i. Для остальных V_j положим их пересечение равным V. Так как $z_0 \in V$, существует n^1, такое что для $n \geqslant n^1$ имеем $z_n, z_{n+1} \in V$. Тогда $V \cap F_n^i \neq \varnothing$ для $n \geqslant n^1$. Взяв $n^2 = max\{n^0, n^1\}$, получим, что $\xi_n \in O(U_1, ..., U_m)(V_1, ..., V_k)$ при $n \geqslant n^2$.

В качестве множества H_1 рассмотрим последовательность максимальных 3-сцепленных систем $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Выше доказано, что H_1 является замкнутым подмножеством пространства $\lambda^3(X)$.

Построим множество H_2 следующим образом. Для произвольных $y_a, y_b \in A(\omega_1) \setminus \{y_0\}$, $y_a \neq y_b$, положим $z'_a = (x_0, y_a)$, $z'_b = (x_0, y_b)$. Пусть $G_{ab}^1 = \{z_1^0, z_2^0, z'_a\}$, $G_{ab}^2 = \{z_1^0, z_2^0, z'_b\}$, $G_{ab}^3 = \{z_1^0, z'_a, z'_b\}$, $G_{ab}^4 = \{z_2^0, z'_a, z'_b\}$. Система $\eta_{ab}^0 = \cup\{G_{ab}^i\}_{i=1}^4$ является 3-сцепленной. Значит, она может быть достроена до некоторой максимальной 3-сцепленной системы η_{ab}. Отметим, что носитель любой системы $\mathrm{supp}(\eta_{ab}^0)$ состоит из четырёх точек z_1^0, z_2^0, z'_a, z'_b. Положим $H_2 = \cup_{z'_a, z'_b \in B}\{\eta_{ab}\}$.

Проверим, что множество H_2 замкнуто в пространстве $\lambda^3(X)$.

Для начала заметим, что подпространство всех максимальных 3-сцепленных систем с носителем, состоящим не более чем из четырёх точек, замкнуто в пространстве $\lambda^3(X)$. Это следует, например, из соответствующего свойства функтора N^k, так как пространство $N_n^k(X) = \{\xi \in N^k(X) : deg(\xi) \leqslant n\}$ замкнуто в пространстве $N^k(X)$ для любого натурального n.

Далее, макисмальные 3-сцепленные системы с одноточечными носителями, очевидно, не попадают в замыкание множества H_2. Для любой такой системы всегда можно выбрать в качестве множества U достаточно малую окрестность носителя, не содержащую одновременно точки z_1^0, z_2^0, и тогда окрестность системы $O(U)$ не будет пересекаться с множеством H_2. Заметим, что максимальная 3-сцепленная система с носителем, состоящим из двух или из трёх точек, не существует. Действительно, любую 3-сцепленную систему с носителем, состоящим из двух или трёх точек, можно дополнить до максимальной 3-сцепленной системы с носителем, состоящим из одной точки, подмножествами носителя. Это свойство аналогично соответствующему свойству максимальных сцепленных систем: не существует максимальной сцепленной системы с носителем, состоящим из двух точек [16].

В случае, если носитель 3-сцепленной системы состоит из двух или трёх точек систему, очевидно, можно дополнить до максимальной. В таком случае носитель полученной максимальной сцепленной системы будет состоять из одной из этих точек. Таким образом, в замыкание множества H_2 попадут только максимальные 3-сцепленные системы с носителем, состоящим ровно из четырёх точек.

Из построения систем η_{ab} следует, что если носитель максимальной 3-сцепленной системы ξ содержит хоть одну точку z_0, отличную от z_1^0, z_2^0 и не лежащую в B, то можно выбрать окрестность $O(U)$ системы ξ так, что $O(U) \cap H_2 = \varnothing$. Для этого достаточно, например, взять в качестве U окрестность множества $F \in \xi$, где $z_0 \in F$, не пересекающую множество B и не содержащее одновременно обе точки z_1^0, z_2^0.

В случае, если три и более точек носителя максимальной 3-сцепленной системы ξ лежат в множестве B, в качестве U возьмём любую их окрестность, не содержащую точек z_1^0, z_2^0. Тогда получим, что $\xi \in O(U)$ и, в то же время, $O(U) \cap H_2 = \varnothing$.

Все остальные максимальные 3-сцепленные системы уже вошли в множество H_2. Тем самым доказано, что H_2 является замкнутым.

Докажем, что $H_1 \cap H_2 = \varnothing$. Пусть $\xi_n \in H_1$. Рассмотрим ее окрестность $O(U)(X)$ где $U = \{z_1^0\} \cup (\{x_n, x_{n+1}\} \times (A(\omega_1) \setminus \{z_2^0\}))$. Тогда для любых a, b получим, что $G_{ab}^4 \cap U = \varnothing$, и, значит, η_{ab} не лежит в $O(U)(X)$. То есть $O(U)(X) \cap H_2 = \varnothing$.

Покажем, что для множеств H_1 и H_2 в $\lambda^3(X)$ не существует непересекающихся окрестностей.

Пусть O^1 и O^2 — произвольные окрестности множеств H_1 и H_2 соответственно. Без ограничения общности можно считать, что

$$O^1 = \bigcup_{\xi_n \in H_1} O\xi_n; \; O^2 \supset \bigcup_{\eta_{ab} \in H_2} O\eta_{ab}$$

где $O\xi_n = O(U_1^n, ..., U_m^n)$, $O\eta_{ab} = (W_1^{ab}, ..., W_k^{ab})$ — базисные окрестности систем ξ_n и η_{ab} соответственно в $\lambda^3(X)$.

Заметим, что из построения систем ξ_n следует, что для любой окрестности $O\xi_n$ и для любого фиксированного i выполнено $U_i^n \supset \{x_l\} \times (A(\omega_1) \setminus K_n)$, где

$l = n$ или $l = n + 1$, K_n — некоторое конечное подмножество $A(\omega_1) \setminus \{y_0\}$. Также хотя бы одна из точек z_1^0, z_2^0 попадает в U_i^n для каждого i.

Аналогично, из построения систем η_{ab} следует, что для любой окрестности $O\eta_{ab}$ и для любого фиксированного j выполнено $W_j^{ab} \supset \{y_c\} \times (A(\omega_0) \setminus K_c)$, где $c = a$ или $c = b$, K_c — некоторое конечное подмножество $A(\omega_0) \setminus \{x_0\}$. Также хотя бы одна из точек z_1^0, z_2^0 попадает в W_j^{ab} для каждого j.

Далее, для любой $\xi_n \in H_1$ положим $Oz_n = \cap\{U_i^n : z_n \in U_i^n\}$; $Oz_{n+1} = \cap\{U_i^n : z_{n+1} \in U_i^n\}$, где U_i^n — из определения $O\xi_n$.

Аналогично, для любой $\eta_{ab} \in H_2$ положим $Oz'_a = \cap\{W_j^{ab} : z'_a \in W_j^{ab}\}$; $Oz'_b = \cap\{W_j^{ab} : z'_b \in W_j^{ab}$, где $W_j^{ab}\}$ — из определения $O\eta_{ab}$.

Из свойств пространства X и сделанных выше замечаний следует, что существуют такие точки $z'_a, z'_b \in B$ и такие номера n^a, n^b, что для всех $n \geqslant max\{n^a, n^b\}$ верно: $Oz'_a \cap Oz_n \neq \varnothing$, $Oz'_a \cap Oz_{n+1} \neq \varnothing$, $Oz'_b \cap Oz_n \neq \varnothing$, $Oz'_b \cap Oz_{n+1} \neq \varnothing$.

В таком случае, для данных a, b, n, $O\eta_{ab} \cap O\xi_n \neq \varnothing$. Докажем это.

В начале проверим, что для любых i, j, h следующие пересечения непусты: $U_i^n \cap U_j^n \cap W_h^{ab} \neq \varnothing$; $U_i^n \cap W_j^{ab} \cap W_h^{ab} \neq \varnothing$.

Рассмотрим первое пересечение. Возможны два случая. Если $U_i^n \cap U_j^n = \{z_1^0, z_2^0\}$, то как минимум одна из точек z_1^0, z_2^0 попадает в W_h^{ab}, значит $U_i^n \cap U_j^n \cap W_h^{ab} \neq \varnothing$. В другом случае $z_l \in U_i^n \cap U_j^n$, где $l = n$ или $l = n+1$, $z'_c \in W_h^{ab}$, где $c = a$ или $c = b$. При этом $U_i^n \cap U_j^n \supset Oz_l$, $W^{ab} \supset Oz'_c$. Тогда так как $Oz'_c \cap Oz_l \neq \varnothing$, получим, что $U_i^n \cap U_j^n \cap W_h^{ab} \neq \varnothing$.

Проведём проверку для второго пересечения. В том случае, если $W_j^{ab} \cap W_h^{ab} = \{z_1^0, z_2^0\}$, как минимум одна из точек z_1^0, z_2^0 попадёт в U_i^n и, таким образом, пересечение $U_i^n \cap W_j^{ab} \cap W_h^{ab}$ будет непусто. В противоположном случае $z'_c \in W_j^{ab} \cap W_h^{ab}$, где $c = a$ или $c = b$, в то время как $z_l \in U_i^n$, где $l = n$ или $l = n+1$. Значит, $Oz'_c \subset W_j^{ab} \cap W_h^{ab}$, $Oz_l \subset U_i^n$. В силу того, что $Oz'_c \cap Oz_l \neq \varnothing$, получим, что $U_i^n \cap W_j^{ab} \cap W_h^{ab} \neq \varnothing$.

Итак, можно рассмотреть открытое в пространстве $\lambda^3(X)$ множество $O\xi_n \cap O\eta_{ab} = O(U_1^n, ..., U_m^n, W_1^{ab}, ..., W_k^{ab})$. Проверим, что оно непусто. Для удобства переименуем множества $U_1^n, ..., U_m^n$ в $U_1, ..., U_m$; $W_1, ..., W_k$ в $U_{m+1}, ..., U_{m+k}$. Для любых наборов индексов i, j, h возьмем по точке $x_{i,j,h}$ в каждом пересечении $U_i \cap U_j \cap U_h$ (точки могут совпадать для разных пересечений) и положим $\Psi_l = \{x_{i,j,h} : x_{i,j,h} \in U_l\}$. Система, состоящая из множеств Ψ_l, очевидно, является 3-сцепленной и лежит в $O(U_1, ..., U_{m+k}.)$ Достроим ее до максимальной в пределах множества $\cup\{\Psi_l : l = 1, ..., m+k\}$ (подмножествами данного множества), а затем возьмем ее пополнение ζ. Мы получим максимальную 3-сцепленную систему ζ с конечным носителем, лежащую в $O(U_1, ..., U_{m+k}) = O\xi_n \cap O\eta_{ab} \subset O^1 \cap O^2$.

Итак, в пространстве $\lambda^3(X)$ нашлись такие замкнутые непересекающиеся множества H_1 и H_2, что пересечение любых их окрестностей непусто. Значит, $\lambda^3(X)$ не нормально. Теорема 2 доказана. $\square$

1.5 О носителях максимальных сцепленных систем

Носитель supp максимальной сцепленной системы — ключевая ее характеристика, позволяющая существенно упростить работу с точками пространства суперрасширения. Так, например, бывает полезно знать, существует ли максимальная сцепленная система с заданным носителем. В данном параграфе доказывается утверждение о существовании такой максимальной сцепленной системы для всех сепарабельных пространств. Это утверждение далее обобщается на некоторые другие пространства. Приводятся примеры построения максимальных сцепленных систем с заданным носителем.

В данном параграфе предполагаем $|X| \neq 2$, так как для пространства, состоящем из двух точек, невозможно построить максимальную сцепленную систему с носителем, совпадающим с этим пространством.

Лемма 1. *Для любого сепарабельного пространства X существует максимальная сцепленная система ξ такая, что $supp(\xi) = X$.*

Доказательство. Если пространство X бесконечно, и A — счетное всюду плотное подмножество X, то пронумеруем точки множества A в некоторой последовательности: $r_0, r_1, r_2, ...$

Сформируем множества F_n следующим образом:

$$F_1 = \{r_0, r_1\}$$

$$F_2 = \{r_0, r_2\}$$

$$F_3 = \{r_1, r_2, r_3\}$$

$$F_4 = \{r_0, r_3, r_4\}$$

$$...$$

$$F_{2k} = \{r_0, r_3, r_5, r_7, ..., r_{2k-1}, r_{2k}\}$$

$$F_{2k+1} = \{r_1, r_2, r_4, r_6, ..., r_{2k}, r_{2k+1}\}$$

$$...$$

Как видно из построения, множества F_n образуют сцепленную систему. Эта сцепленная система может быть дополнена до некоторой максимальной сцепленной системы ξ.

Для начала проверим, что элементы F_n являются минимальными по включению. Предположим противное. Пусть найдется такое множество $G_n = F_n \setminus \{r_i\}$, что $G_n \in \xi$. Тогда в случае, если $i = 0$ или $i = 1$, множество G_n не пресекается с F_1, в случае, если $i = n$, множество G_n не пересекается с F_{n+1}, а во всех остальных случаях $i = 2, \ldots, n-1$ пересечение G_n и F_i также пусто. Таким образом, G_n не принадлежит системе ξ, то есть все элементы F_n являются минимальными по включению. Объединение элементов F_n содержит в себе множество A, всюду плотное в X. Значит, носитель системы $\mathrm{supp}(\xi)$ совпадает с пространством X.

В случае, если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $n > 2$, возьмём первые $n-1$ множеств $F_1 = \{r_0, r_1\},\ F_2 = \{r_0, r_2\},\ F_3 = \{r_1, r_2, r_3\}, \ldots$. Достроив данную сцепленную систему до максимальной произвольным образом, получим максимальную сцепленную систему с носителем, состоящим из объединения множеств $F_1, \ldots, F_{n-1}$, в которое попадут все точки пространства X.

Для одноточечных пространств утверждение леммы очевидно.

Лемма 1 доказана. $\square$

Предложение 9. *Если в бесконечном пространстве X найдется открытое сепарабельное подпространство, то существует максимальная сцепленная система ξ такая, что $supp(\xi) = X$.*

Доказательство. Пусть A открытое сепарабельное подпространство X, H — счетное всюду плотное в A подмножество. Точки множества H можно пронумеровать в некоторой последовательности: $r_0, r_1, r_2, ...$ Далее, сформируем множества F_n следующим образом: $F_1 = \{r_0, r_1\}$, $F_2 = \{r_0, r_2\}$, $F_3 = \{r_1, r_2, r_3\}$, $F_4 = \{r_0, r_3, r_4\}$, ... $F_{2k} = \{r_0, r_3, r_5, r_7, ..., r_{2k-1}, r_{2k}\}$, $F_{2k+1} = \{r_1, r_2, r_4, r_6, ..., r_{2k}, r_{2k+1}\}, ...$

Пусть $B = X \setminus A$. В случае, если B конечно, пространство X само является сепарабельным, и утверждение предложения следует непосредственно из леммы 1. Потому далее полагаем, что B бесконечно.

В качестве η возьмем систему, состоящую из множеств $F_n \cup \{x\}$, где $x \in B$, и множества B. Система η является сцепленной по построению. Эта сцепленная система может быть дополнена до некоторой максимальной сцепленной системы ξ.

Проверим, что множества $F_n \cup \{x\}$ — минимальные по включению элементы системы ξ. Предположим, что это не так. Пусть существует $\Phi \in \xi$ такой, что $\Phi \subsetneq F_n \cup \{x\}$ для некоторых $n,\ x$. Пусть $y \in (F_n \cup \{x\}) \setminus \Phi$.

Если $y = x,\ x \in B$, то $\Phi \cap B = \varnothing$.

Если $y \neq x$, то $y = r_i$. Тогда $(F_n \setminus r_i) \cap F_k = \varnothing$ для некоторого F_k. Значит, $\Phi \cap (F_k \cup \{z\}) = \varnothing$ для всех $z \neq x,\ z \in B$.

Итак, множества $F_n \cup \{x\}$ являются минимальными по включению элементами системы ξ, а их объединение всюду плотно в X.

Значит,

$$\operatorname{supp}(\xi) \supseteq [\bigcup_{n=1,2,\ldots} (F_n \cup \{x\})] = X$$

.

Предложение 9 доказано. □

Предложение 10. *Для любой максимальной сцепленной системы ξ, любого минимального по включению элемента $F \in \xi$ и любой точки $x \in F$ существует элемент $G \in \xi$ такой, что $F \cap G = \{x\}$.*

Доказательство. Предположим, что для точки x из множества F не существует элемента G из системы ξ такого, что $F \cap G = \{x\}$. Тогда очевидно, что множество $F_1 = F \setminus \{x\}$ также является элементом ξ и F — не минимальный по включению элемент. Значит, найдётся как минимум один элемент G, такой что $x \in F \cap G$. Далее предположим, что все такие элементы системы пересекаются с F более чем по одной точке x. Но в таком случае множество $F_1 = F \setminus \{x\}$ также пересекается со всеми элементами системы ξ, а значит F опять не является минимальным по включени элементом системы ξ. Итак, мы получили, что найдётся как минимум один элемент $G \in \xi$, пересекающий множество F ровно по точке x. Предложение 10 доказано. □

Предложение 11. *Пусть $\pi : X \times Y \to X$ проекция, пространство Y сепарабельно, и существует максимальная сцепленная система ξ_X с носителем $supp(\xi_X) = X$. Тогда существует максимальная сцепленная система ξ из $\lambda(X \times Y)$ такая, что $supp(\xi) = X \times Y$ и $\lambda(\pi)(\xi) = \xi_X$.*

Доказательство. Так как пространство Y сепарабельно, то по лемме1 существует максимальная сцепленная система ξ_Y такая, что $\mathrm{supp}(\xi_Y) = Y$. Построим систему η следующим образом:

$$\eta = \{F \times G : \ F \in \xi_X, \ G \in \xi_Y\}.$$

Сцепленность системы η следует из сцепленности систем ξ_X и ξ_Y. Действительно, для любых двух элементов $F_i \times G_j$ и $F_k \times G_m$ системы η верно, что пересечения множеств $F_i \cap F_k \subset X$ и $G_j \cap G_m \subset Y$ непусты. Откуда следует, что пересечение $F_i \times G_j \cap F_k \times G_m \subset X \times Y$ также непусто и система сцеплена.

Дополним систему η до некоторой максимальной сцепленной системы ξ произвольным образом. Проверим, что элементы вида $F_i \times G_j$ являются минимальными по включению системы ξ, если $F_i, \ G_j$ — минимальные по включению элементы систем ξ_X и ξ_Y соответственно. Предположим, что это не так. Пусть найдется $\Phi \in \xi$ такой, что $\Phi \subsetneq F_i \times G_j$. Пусть $z \in (F_i \times G_j) \setminus \Phi$. Тогда $z = (x, y), \ x \in F_i, \ y \in G_j$. Так как $F_i, \ G_j$ — минимальные по включению, найдутся такие элементы F_k и G_n систем ξ_X и ξ_Y соответственно, что $F_k \cap F_i = \{x\}; \ G_n \cap G_j = \{y\}$. Тогда $(F_k \times G_n) \cap (F_i \times G_j) = z$. Значит, $(F_k \times G_n) \cap \Phi = \varnothing$, в то время как $(F_k \times G_n) \in \xi$.

Получаем, что $\mathrm{supp}(\xi) \supset [\bigcup\{F_i \times G_j : F_i, G_j$ — минимальные по включению элементы систем ξ_X и $\xi_Y\}]$. Значит, $\mathrm{supp}(\xi) = X$. Из построения системы ξ следует, что $\lambda(\pi)(\xi) = \xi_X$. Предложение 11 доказано. □

Предложение 12. *Пусть X сепарабельно. Тогда для любого кардинала μ существует максимальная сцепленная система ξ, принадлежащая суперрасширению $\lambda(X^\mu)$ степени X^μ, такая что $supp(\xi) = X^\mu$.*

Доказательство. Пространство X^μ разлагается в обратный спектр произведений пространств $S = \{X^\alpha, p^\alpha_\gamma : \alpha, \gamma < \mu\}$, где $X^\alpha = \prod_{\gamma<\alpha} X_\gamma$ ($X_\gamma = X$ для любого $\gamma < \alpha\}$), а $p^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ — естественная проекция произведения на подпроизведение.

Далее, согласно Лемме 1, для $X^1 = X$ существует максимальная сцепленная система ξ такая, что $\mathrm{supp}(\xi) = X^1$. Положим $\xi_1 = \xi$.

Для $X^2 = X \times X$ согласно Предложению 2 существует максимальная сцепленная система (обозначим ее ξ_2) такая, что $\mathrm{supp}(\xi_2) = X^2,\ \lambda p_1^2(\xi_2) = \xi_1$.

Предположим, что для всех γ меньших фиксированного $\beta < \mu$ уже построены максимальные сцепленные системы ξ_γ такие, что $\mathrm{supp}(\xi_\gamma) = X^\gamma$ и для $\delta < \gamma$ $\lambda p_\delta^\gamma(\xi_\gamma) = \xi_\delta$.

Возможны два случая:

1.$\beta = \gamma + 1$ для некоторого $\gamma < \mu$. Тогда из того, что X — сепарабельно и существует такая максимальная сцепленная система ξ_γ, что $\mathrm{supp}(\xi_\gamma) = X^\gamma$, согласно Предложению 2 следует, что существует максимальная сцепленная система ξ_β, что $\mathrm{supp}(\xi_\beta) = X^\beta$ и $\lambda p_\gamma^\beta(\xi_\beta) = \xi_\gamma$. Тогда для всех $\alpha < \beta$ выполнено $\lambda p_\alpha^\beta(\xi_\beta) = \lambda p_\alpha^\gamma \circ \lambda p_\gamma^\beta(\xi_\beta) = \xi_\alpha$.

2. β — предельное. Тогда $X^\beta = \lim S_\beta$ где $S_\beta = \{X^\alpha, p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \beta\}$.Так как функтор суперрасширения непрерывен, пространство $\lambda(X^\beta)$ совпадает с пределом спектра $S_\lambda = \{\lambda(X^\alpha), \lambda p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \beta\}$

Ясно, что $\xi_\beta = \{\xi_\alpha : \alpha < \beta\}$- нить спектра S_λ по построению. Следовательно, $\xi_\beta \in \lambda(X^\beta)$. Докажем, что $\mathrm{supp}(\xi_\beta) = X^\beta$.

Напомним, что носитель точки не возрастает при отображениях. То есть, $p_\alpha^\beta(\mathrm{supp}\xi_\beta) \supset \mathrm{supp}(\lambda(f)(\xi_\beta))$, и, так как $\lambda(f)(\xi_\beta) = \xi_\alpha$, то $p_\alpha^\beta(\mathrm{supp}\xi_\beta) = X_\alpha$ для любого $\alpha < \beta$. Так как носитель — замкнутое подмножество предела обратного спектра, справедлива формула:

$$\mathrm{supp}\xi_\beta = \bigcap \{(p_\alpha^\beta)^{-1}(p_\alpha^\beta(\mathrm{supp}\xi_\beta)) :\ \alpha < \beta\}.$$

Значит, $\mathrm{supp}(\xi_\beta) = X_\beta$.

Таким образом, для всех α меньших μ существуют максимальные сцепленные системы ξ_α такие, что $\mathrm{supp}(\xi_\alpha) = X^\alpha$ и для $\beta < \alpha$ $\lambda p_\beta^\alpha(\xi_\alpha) = \xi_\beta$.

Рассмотрим обратный спектр $S_\lambda = \{\lambda(X^\alpha), \lambda p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \mu\}$. Его предел $\lim S$ совпадает с пространством $\lambda(X^\mu)$. В качестве ξ возьмем $\xi = \{\xi_\alpha : \alpha < \mu\}$ — нить спектра S_λ. Тогда $\xi \in \lambda(X^\mu)$. Аналогично предыдущему получим, что $\mathrm{supp}(\xi) = \lim S = X^\mu$.

Предложение 12 доказано.

$\square$

1.6 О максимальных сцепленных системах со связными носителями

Классическими примерами ковариантных функторов являются функтор exp и его подфунктор $\exp^c$. Пространство $\exp(X)$ состоит из замкнутых подмножеств пространства X, а его подпространство $\exp^c(X)$ - из связных замкнутых подмножеств X, то есть из точек $\exp(X)$ со связными носителями. Вполне естественно возникает вопрос, нельзя ли, используя определение носителя, аналогичным образом задать подфунктор функтора суперрасширения, рассмотрев подпространство $\lambda^c(X)$ пространства $\lambda(X)$, состоящее из максимальных сцепленных систем со связными носителями.

В данном разделе приведен пример компакта X, показывающий, что множество максимальных сцепленных систем со связными носителями может не быть замкнуто в $\lambda(X)$, откуда следует, что $\lambda^c(X)$ не попадает в категорию компактов для данного компакта X. Также получен более общий результат для всех связных сепарабельных пространств и рассмотрен вопрос о сохранении связности носителей систем при отображениях максимальных сцепленных систем.

Предложение 13. *Существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ и максимальная сцепленная система $\xi \in \lambda(X)$ со связным носителем такие, что носитель максимальной сцепленной системы $\eta = \lambda f(\xi)$ несвязен.*

Доказательство. Рассмотрим в качестве Y отрезок $[0,1]$, в качестве X — произведение отрезков $[0,1] \times [0,1]$, и пусть $f : X \to Y$ — проекция на сомножитель. Возьмём точки r_0, r_1, r_2, r_3 следующим образом: $r_0 = \{0,0\},\ r_1 = \{\frac{1}{2}, 0\},\ r_2 = \{1,0\},\ r_3 = \{1,1\}$.

Проведем построение максимальной сцепленной системы ξ. Занумеруем точки некоторого счетного всюду плотного подмножества пространства $X \setminus \{r_0, ..., r_3\}$ в некоторой последовательности, начиная с r_4: $r_4,\ r_5,\ r_6, ...$ Сформируем множества F_n следующим образом: $F_1 = \{r_0, r_1\},\ F_2 = \{r_0, r_2\},\ F_3 = \{r_1, r_2, r_3\},\ F_4 = \{r_0, r_3, r_4\}$ ... $F_{2k} = \{r_0, r_3, r_5, r_7, ..., r_{2k-1}, r_{2k}\},\ F_{2k-1} = \{r_1, r_2, r_4, r_6, ..., r_{2k}, r_{2k+1}\}$ ...

Положим $\xi^0 = \{F_i\}_{i=1}^{\infty}$. Система ξ^0 может быть достроена до некоторой максимальной сцепленной системы ξ.

Легко проверить, что множества F_n являются минимальными по включению элементами системы ξ. Следовательно, $\mathrm{supp}(\xi) = X$.

Пусть $\eta = \lambda f(\xi)$, $f(F_i) = \Phi_i$. Тогда из построения F_n и выбора точек r_i следует, что для любого элемента $\Phi \in \eta$, Φ содержит либо Φ_1, либо Φ_2, либо Φ_3. Тогда

$$\mathrm{supp}(\eta) = [\bigcup_{i=1,2,3} \Phi_i] = \{f(r_0), f(r_1), f(r_2)\}$$

— несвязное подмножество пространства Y.

Предложение 13 доказано.

$\square$

Теорема 3. *Пусть компакт X является связным и сепарабельным. Тогда множество максимальных сцепленных систем со связными носителями всюду плотно в суперрасширении $\lambda(X)$.*

Доказательство. Пусть $O(U_1, ..., U_n)$ — произвольное базисное открытое в $\lambda(X)$ множество. Докажем, что существует максимальная сцепленная система с конечным носителем ξ, лежащая в $O(U_1, ..., U_n)$.

Без ограничения общности можно считать, что $n \geqslant 3$ и что пересечение $\cap\{U_i : i = 1, \ldots, n\} = \varnothing$. Иначе возьмем $x \in \cap\{U_i : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда максимальная сцепленная система со связным носителем $\xi_x = \{F : x \in F,\ F$ замкнуто в $X\}$ лежит в $O(U_1, ..., U_n)$.

Так как пространство X связно, то это пространство не имеет изолированных точек, и в каждом пересечении $U_i \cap U_j$ при $i \neq j$ можно выбрать по точке x_j^i так, чтобы все они были различны. Объединение всех выбранных точек, лежащих в U_i, обозначим за Φ_i. Тогда система $\xi_0 = \{\Phi_i : i = 1, ..., n\}$, очевидно, сцеплена. Дополним ее до максимальной в пределах множества $\cup_{i=1}^{n} \Phi_i$ (то есть подмножествами этого множества) и возьмем ее пополнение ξ. Мы получим максимальную сцепленную систему с конечным носителем, лежащую в $O(U_1, ..., U_n)$.

Так как система ξ — максимальная, в ней найдутся такие минимальные по включению элементы (обозначим их за F_1 и F_2) и точка $y_0 \in F_1$, что

$F_1 \cap F_2 = \{y_0\}$. Остальные минимальные по включению элементы системы ξ обозначим как $F_i, i \geqslant 3$.

Далее,рассмотрим некоторое счетное всюду плотное в X множество Q, не пересекающее $\mathrm{supp}(\xi)$.

Точку y_1 возьмем следующим образом: $y_1 \in \cap\{U_i : y_0 \in U_i\} \cap Q$. Занумеруем оставшиеся точки Q в некоторой последовательности, начиная с y_2: $y_2, y_3, y_4, \ \dots$

Построим следующие множества:

$G_0^0 = F_1$, $G_1^0 = F_2 \cup \{y_1\}$, $G_2^0 = (F_1 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_1, y_2\}$, $G_3^0 = F_2 \cup \{y_2, y_3\}$, $G_4^0 = (F_1 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_1, y_3, y_4\}$, ... , $G_{2k}^0 = (F_1 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_1, y_3, y_5, ..., y_{2k-1}, y_{2k}\}$, $G_{2k+1}^0 = F_2 \cup \{y_2, y_4, y_6, ..., y_{2k}, y_{2k+1}\}$

Для всех F_i, таких, что $F_i \cap F_1 = \{y_0\}$ положим $G_i = F_i \cup \{y_1\}$. Для остальных F_i положим $G_i = F_i$. Заметим, что в этих обозначениях $G_1 = F_1 = G_0^0$, $G_2 = F_2 \cup \{y_1\} = G_1^0$. Рассмотрим систему η_0, состоящую из множеств G_i и G_j^0. Система η_0 будет сцепленной по построению. Она может быть дополнена до некоторой максимальной сцепленной системы η.

Проверим, что все точки множества Q попадут в объединение минимальных по включению элементов максимальной сцепленной системы η. Пусть это не так. Предположим, найдется элемент $H \in \eta$ такой, что $H \subset G_i^0$ и $y_j \in G_i^0 \setminus H$ при $j \geqslant 1$. При $j = i$ положим $k = j + 1$, при $j < i$ положим $k = j$. Из построения множеств G_i^0 будет следовать, что $G_k^0 \cap G_i^0 = \{y_j\}$.Значит, $H \cap G_k^0 = \varnothing$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathrm{supp}(\eta) \supseteq [Q] = X$.

Проверим, что $\eta \in O(U_1, ..., U_n)$. Так как $\xi \in O(U_1, ..., U_n)$, для любого $i = 1, ..., n$ найдутся $F_j \in \xi$, такие, что $F_j \subset U_i$. Если $G_j = F_j$, то $G_j \subset U_i$. Если же $G_j = F_j \cup \{y_1\}$, то $y_0 \in F_j \subset U_i$. Напомним, что точка y_1 лежит в тех же множествах U_i, что и y_0. Тогда $y_1 \in U_i$, и $G_j \subset U_i$.

Итак, для произвольного базисного открытого в пространстве $\lambda(X)$ множества $O(U_1, ..., U_n)$ нашлась максимальная сцепленная система η со связным носителем, лежащая в множестве $O(U_1, ..., U_n)$.

Теорема 3 доказана.

$\square$

В частности, если положить X равным отрезку $[0, 1]$ с интервальной топологией, может быть получен следующий результат:

Теорема 4. *Существует компакт X такой, что множество максимальных сцепленных систем со связными носителями не замкнуто в суперрасширении $\lambda(X)$.*

Тем самым доказано, что операция λ^c не является ковариантным функтором. Кроме того, для несвязных компактов имеет место следующий результат:

Предложение 14. *Пусть X несвязно. Тогда множество максимальных сцепленных систем со связными носителями не является всюду плотным в $\lambda(X)$.*

Доказательство. Пусть X представимо в виде объединения $X = A \cup B$, где $A \cap B = \varnothing$, A, B — открыто-замкнутые подмножества X. Возьмем точки $x_1 \in A$, $x_2, x_3 \in B$ и такие их окрестности Ox_i, чтобы $Ox_1 \subset A$, $Ox_2 \subset B$, $Ox_3 \subset B$, $Ox_2 \cap Ox_3 = \varnothing$. Положим $U_1 = Ox_1 \cup Ox_2$, $U_2 = Ox_2 \cup Ox_3$, $U_3 = Ox_1 \cup Ox_3$. Рассмотрим систему ξ_0, состоящую из множеств $F_1 = \{x_1, x_2\}$, $F_2 = \{x_2, x_3\}$, $F_3 = \{x_1, x_3\}$ и достроим ее до максимальной сцепленной системы ξ. Ясно, что $\xi \in O(U_1, U_2, U_3)$, а значит $O(U_1, U_2, U_3) \neq \varnothing$.

Пусть $\gamma \in O(U_1, U_2, U_3)$ — максимальная сцепленная система. Тогда найдутся минимальные по включению элементы $\Phi_i \in \gamma$ такие, что $\Phi_i \subset U_i$. Так как $U_1 \cap U_3 \subset A, U_2 \subset B$, то $\Phi_1 \cap \Phi_3 \subset A, \Phi_2 \subset B$. Значит, $\mathrm{supp}(\gamma) \cap A \neq \varnothing$, $\mathrm{supp}(\gamma) \cap B \neq \varnothing$. Значит, для любой максимальной сцепленной системы $\gamma \in O(U_1, U_2, U_3)$ ее носитель несвязен.

Предложение 14 доказано.

$\square$

1.7 О степенных спектрах полунормальных функторов

Идея рассмотрения степенного спектра ковариантного функтора в категории $Comp$ принадлежит А.В. Иванову, который впервые использовал его при работе с финитно строго эпиморфными функторами [7]. В дальнейшем данная характеристика функтора успешно применялась в работах, посвященных нормальным и полунормальным функторам, в частности, в задачах, посвященных обобщению теоремы Федорчука о нормальном функторе. Так, например, в 2008 году А.В. Иванов и Е.В. Кашуба [11] построили пример неметризуемого компакта, обобщающий известный пример Грюнхаге [23], и, в частности, удовлетворяющего следующему интересному свойству: для любого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности полунормального функтора $\mathcal{F}$ со степенным спектром $sp\mathcal{F} = \{1, k, ...\}$ пространство $\mathcal{F}_k(X)$ наследственно нормально.

В связи с полученным примером, в данном параграфе изучается вопрос о связи степенного спектра функтора и свойства сохранения точек взаимной однозначности.

Предложение 15. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, сохраняющий точки взаимной однозначности и $sp\mathcal{F} = \{1, k, ...\}$. Тогда $k \leqslant 3$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $k \geqslant 4$. Рассмотрим дискретное пространство X, состоящее из k точек. X представимо в виде $X = A \cup B$, где $A \cap B = \varnothing,\ |A| \geqslant 2,\ |B| \geqslant 2$. Пусть $a \in A,\ b \in B$. Рассмотрим отображение $f_1 : X \to A \cup \{b\}$ такое, что $f_1(A) = A,\ f_1(B) = b$ и отображение $f_2 : X \to B \cup \{a\}$ такое, что $f_2(B) = B,\ f_2(A) = a$.

Далее, пусть $Y = \{a, b\}$ и отображение $g_1 : A \cup \{b\} \to Y$ действует по правилу $g_1(A) = a,\ g_1(b) = b$, а отображение $g_2 : B \cup \{a\} \to Y$ действует по правилу $g_2(B) = b,\ g_2(a) = a$. Таким образом, $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

Пусть точка $\xi \in \mathcal{F}(X)$ такова, что $\mathrm{supp}(\xi) = X$. Тогда для $\eta_1 = \mathcal{F}(f_1)(\xi)$ $|\mathrm{supp}(\eta_1)| = 1$, так как $|A| < k$. При этом $\mathrm{supp}(\eta_1) = \{b\}$, иначе $\mathcal{F}$ не сохраняет точки взаимной однозначности.

Действительно, пусть $\mathrm{supp}(\eta_1) = \{z\} \neq \{b\}$, тогда $|f_1^{-1}(z)| = 1$. Так как существует $\gamma \in \mathcal{F}(X)$ такая, что $\mathrm{supp}(\gamma) = f^{-1}(z)$, получим, что $\mathcal{F}(f_1)(\gamma) =$

$\eta_1 = \mathcal{F}(f_1)(\xi)$. То есть прообраз точки $z = \eta_1$ при отображении $\mathcal{F}(f_1)$ состоит более, чем из одной точки.

Положим $\mathcal{F}(g_1)(\eta_1) = \delta_1$, тогда $\mathrm{supp}(\delta_1) = b$, так как $g_1(b) = b$.

С другой стороны, для $\eta_2 = \mathcal{F}(f_2)(\xi)$ выполнено $\mathrm{supp}(\eta_2) = \{a\}$, аналогично предыдущему случаю. Пусть $\mathcal{F}(g_2)(\eta_2) = \delta_2$, тогда $\mathrm{supp}(\delta_2) = \{a\}$.

Получим, что $\delta_1 \neq \delta_2$ и, следовательно, $\mathcal{F}(g_1) \circ \mathcal{F}(f_1) \neq \mathcal{F}(g_2) \circ \mathcal{F}(f_2)$. В то время как $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ — противоречие. Предложение 15 доказано. □

Предложение 16. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор степени $\leqslant 2$. Тогда $\mathcal{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ и $y \in Y$ произвольная точка, такая, что $|f^{-1}(y)| = 1$. Проверим, что отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ также взаимнооднозначно в точке $y \in Y \subset \mathcal{F}(Y)$. Допустим, существует точка $\xi \in \mathcal{F}(X)$ такая, что $\mathcal{F}(f)(\xi) = y$ и $\mathrm{supp}(\xi) = \{z_1, z_2\}$. Ясно, что $z_i = x$ для некоторого i. Очевидно, что $f(z_1) = f(z_2) = f(x) = y$. Значит, $z_1 = z_2 = x$ и точка $\xi \in \mathcal{F}(X)$ совпадает с точкой $x \in \mathcal{F}(X)$. То есть $|(\mathcal{F}(f))^{-1}(y)| = 1$. Полунормальный функтор степени 1 является тождественным, так как, по определению степени функтора, для любого компакта X пространство $\mathcal{F}(X)$ совпадает с пространством $\mathcal{F}_1(X) = X$. Значит, он автоматически сохраняет точки взаимной однозначности. Предложение 16 доказано. □

В случае степенного спектра $\{1, 3\}$ возможно как сохранение полунормальным функтором точек взаимной однозначности, так и не сохранение.

Так, например, степенной спектр подфунктора λ_3 функтора λ равен $\{1, 3\}$. Кроме того, функтор λ_3 сохраняет точки взаимной однозначности. С другой стороны, положим $K = \{1, 3\}$ в определении функтора $\exp^K$. Согласно предложению 8, функтор $\exp^K$ не сохраняет точки взаимной однозначности, в то время как, согласно предложению 5, степенной спектр $sp(\exp^K) = \{1, 3\}$.

2 Глава вторая. Нормальные функторы в категории $\mathcal{P}$.

2.1 Функтор $\exp_c$ в категории паракомпактных p-пространств

В данной главе мы будем рассматривать паракомпактные перистые пространства (паракомпактные p-пространства). Напомним, что идея рассмотрения паракомпактных p-пространств принадлежит А.В. Архангельскому [1]. В своей работе А.В. Архангельский определил новый важный класс пространств, более узкий, чем класс регулярных пространств, но, в то же время, содержащий все метрические и все локально компактные пространства. Напомним также, что топологическое пространство называется паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Покрытие пространства X называется локально конечным, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность, пересекающая лишь конечное число элементов покрытия.

В качестве основной характеристики паракомпактных p-пространств будем пользоваться следующей теоремой 5. принадлежащей А.В.Архангельскому.

Теорема 5. [1] *Для того, чтобы топологическое пространство можно было совершенно отобразить на метрическое пространство, необходимо и достаточно, чтобы оно было паракомпактным p-пространством.*

Напомним, что совершенным называется замкнутое непрерывное отображение, при котором прообразы всех точек компактны. Нам также понадобится следующий факт [20]:

Предложение 17. *Совершенный прообраз компакта является компактом.*

Предложение 18. *Семейство всех паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений является категорией.*

Доказательство. Действительно, для любых двух совершенных отображений f и g таких, что область определения g совпадает с областью значений f определена их композиция $h = g \circ f$, которая также является совершенной [20]. Далее, для любого паракомпактного p-пространства X определено единственное совершенное отображение $id_X : X \to X$, такое, что $id_Y \circ f = f = f \circ id_X$

для любого совершенного отображения $f : X \to Y$. Кроме того, для любой тройки совершенных отображений верно: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Предложение 18 доказано. $\square$

В дальнейшем будем называть эту категорию категорией $\mathcal{P}$.

Гиперпространство пространства X, то есть пространство $\exp(X)$, а также экспоненциальное отображение $\exp(f)$, уже были определены и рассмотрены в Главе 1 для компактных пространств и их непрерывных отображений. В данной главе нам понадобится определение пространства компактных подмножеств произвольного хаусдорфового пространства и некоторые его свойства.

Обозначим $\exp_c(X)$ множество всех компактных замкнутых подмножеств пространства X [17]. Рассмотрим его в качестве подпространства пространства $\exp(X)$. Напомним, что открытую базу топологии пространства $\exp(X)$ образуют множества вида

$$O < U_1, ..., U_n >= \{A \in \exp(X) : A \subset U_1 \cup ... \cup U_n; A \cap U_i \neq \varnothing \text{для } \forall i = 1, ..., n\},$$

где U_i — открытые в X множества. При рассмотрении пространства $\exp_c(X)$ будем далее использовать обозначение $O(U_1, ..., U_n)$ для множеств, являющихся пересечениями открытых множеств $O < U_1, ..., U_n >$ пространства $\exp(X)$ с подпространством $\exp_c(X)$.

Далее рассмотрим подпространство пространства $\exp_c(X)$, состоящее из всех конечных $k-$точечных подмножеств. Следуя [17], обозначим $\exp_k$X множество всех непустых подмножеств пространства X мощности, не превосходящей конечного числа k.

В дальнейшем нам понадобится тот факт, что пространство $\exp_k$X замкнуто в пространстве $\exp_c(X)$ и при $k = 1$ совпадает с самим пространством X [17].

Пусть f — совершенное отображение паракомпактного p-пространства X в паракомпактное p-пространство Y. Тогда определим следующим образом отображение $\exp_c(f)$ пространства $\exp_c(X)$ в пространство $\exp_c Y$: положим $(\exp_c(f))(F) = f(F)$.

Предложение 19. *Пусть f — совершенное отображение паракомпактного р-пространства X на паракомпактное р-пространство Y. Тогда отображение* $\exp_c(f) : exp_c(X) \to exp_c(Y)$ *является эпиморфизмом.*

Доказательство. Следует из того, что для любого компактного подмножества $F \subset Y$ его совершенный прообраз $f^{-1}(F)$ также компактен. Предложение 19 доказано. □

Предложение 20. *Пусть f — непрерывное отображение паракомпактного р-пространства X в паракомпактное р-пространство Y. Тогда отображение* $\exp_c(f)$ *пространства* $\exp_c(X)$ *в пространство* $\exp_c(Y)$ *также непрерывно.*

Доказательство. Для доказательства непрерывности отображения $\exp_c(f)$ достаточно проверить равенство

$$(\exp_c(f))^{-1}(O(U_1, ..., U_n)) = O(f^{-1}(U_1), ..., f^{-1}(U_n))$$

Действительно,

$$(\exp_c(f))^{-1}(O(U_1, ..., U_n)) = \{F \in \exp_c X : f(F) \in O(U_1, ..., U_n)\} =$$

$$= \{F \in \exp_c X : f(F) \subset \cup_{i=1}^n U_i,\ f(F) \cap U_i \neq \varnothing \text{ для всех } i = 1, ..., n\}$$

Что, в свою очередь, совпадает с

$$\{F \in \exp_c X : F \subset f^{-1}(\cup_{i=1}^n U_i),\ F \cap f^{-1}(U_i) \neq \varnothing \text{ для всех } i = 1, ..., n\}.$$

Согласно определению базисных множеств пространства $\exp_c(X)$, это и есть множество $O(f^{-1}(U_1), ..., f^{-1}(U_n))$. Предложение 20 доказано. □

В дальнейшем нам понадобится определение k-пространства, а также некоторые свойства k-пространств [20]. Топологическое пространство X называется k-пространством, если в нём замкнуто любое множество, пересечение которого с любым компактом замкнуто.

Теорема 6. [20] *Непрерывное отображение $f : X \to Y$ хаусдорфова пространства X в k-пространство Y совершенно в том и только том случае, если прообраз $f^{-1}(Z)$ каждого компактного множества $Z \subset Y$ компактен.*

Лемма 2. *Пусть f — совершенное отображение паракомпактного p-пространства X в паракомпактное p-пространство Y. Тогда из того, что пространство $\exp_c(Y)$ является k-пространством следует, что отображение $\exp_c(f)$ пространства $\exp_c(X)$ в пространство $\exp_c(Y)$ совершенно.*

Доказательство. Согласно теореме 6 достаточно доказать, что для любого компактного подмножества Z, лежащего в пространстве $\exp_c(Y)$, его прообраз $(\exp_c f)^{-1}(Z)$ также компактен.

Для начала проверим, что для данного множества Z множество $Z^0 = \cup Z$ является компактным подмножеством Y.

Пусть $\{U_a : a \in A\}$ — произвольное открытое покрытие множества Z^0. Тогда для каждого элемента $F^b \in Z$ и каждого множества U_a такого, что $U_a \cap F^b \neq \varnothing$, рассмотрим множества $W_a^b = U_a \cap F^b$. Ясно, что $\{W_a^b : a \in A\}$ — открытое покрытие F^b. Так как все множества F^b компактны, из покрытия $\{W_a^b : a \in A\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{W_{a_i}^b : i = 1, \ldots, n\}$. Зафиксируем покрытие из n открытых множеств $U_{a_1}^b, \ldots, U_{a_n}^b$ таких, что $U_{a_i}^b \cap F^b = W_{a_i}^b$. Мы получим, что F^b также покрывается множествами $U_{a_1}^b, \ldots, U_{a_n}^b$ и пересекается с каждым из них. То есть $F^b \in O(U_{a_1}^b, \ldots, U_{a_n}^b)$ в пространстве $\exp_c(Y)$.

Таким образом, мы получим открытое покрытие для Z: для любой точки F^b пространства Z найдётся соответствующее ей открытое множество $O^b = O(U_{a_1}^b, \ldots, U_{a_n}^b)$, такое, что $F^b \in O^b$. Так как Z — компактно, выделим из этого покрытия конечное подпокрытие $\{O^{b_j} : j = 1, \ldots, k\}$, где $O^{b_j} = O(U_{a_1}^{b_j}, \ldots, U_{a_n}^{b_j})$. Зафиксировав соответствующие $U_{a_i}^{b_j}$ из определения множеств O^{b_j}, мы получим искомое конечное подпокрытие для Z^0.

Действительно, для любой точки $x \in Z^0$ найдётся такой элемент $F^b \in Z$, что $x \in F^b$, а значит и открытое множество $O(U_{a_1}^b, \ldots, U_{a_n}^b)$ такое, что $x \in F^b \subset \cup_{i=1}^n U_{a_i}^b$.

Итак, Z^0 компактно. Тогда, так как отображение f совершенно, компактно множество $f^{-1}(Z^0)$. Следовательно, $\exp_c(f^{-1}(Z^0))$ также является компактом.

Заметим, что имеет место включение $(\exp_c(f))^{-1}(Z) \subset \exp_c(f^{-1}(Z^0))$. Действительно, пусть K — произвольная точка множества $(\exp_c(f))^{-1}(Z)$. Тогда K — компактное подмножество X и $f(K)$ лежит в Z, а значит $f(K)$ является подмножеством Z^0 и $K \subset f^{-1}(Z^0)$. То есть $K \in \exp_c(f^{-1}(Z^0))$.

Так как $\exp_c(f)$ непрерывно по предложению 20, то $(\exp_c(f))^{-1}(Z)$ — замкнутое подмножество компактного пространства $\exp_c(f^{-1}(Z^0))$, а значит и само является компактным.

Таким образом, из теоремы 6 следует, что отображение $\exp_c(f)$ пространства $\exp_c(X)$ в пространство $\exp_c(Y)$ совершенно.

Лемма 2 доказана. □

Предложение 21. *Пусть f — совершенное отображение паракомпактного p-пространства X в метрическое пространство Y. Тогда отображение $\exp_c(f)$ пространства $\exp_c(X)$ в пространство $\exp_c(Y)$ также совершенно.*

Доказательство. Так как пространство Y метризуемо, пространство $\exp_c(Y)$ также метризуемо [17] и, следовательно, удовлетворяет первой аксиоме счётности. Напомним, что каждое пространство с первой аксиомой счётности, согласно [20], является k-пространством. Лемма 2 завершает доказательство предложения 21. □

Предложение 22. *Пусть X — паракомпактное p-пространство. Тогда $\exp_c(X)$ — также паракомпактное p-пространство.*

Доказательство. Пусть X — паракомпактное p-пространство. По теореме 5 существует совершенное отображение f из X на некоторое метрическое пространство Y. Тогда пространство $\exp_c(Y)$ также является метрическим (и, следовательно, паракомпактным p-пространством согласно [1]), а отображение $\exp_c f$ согласно предложениям 21 и 19 является совершенным отображением $\exp_c(X)$ на $\exp_c(Y)$, следовательно пространство $\exp_c(X)$ является паракомпактным p-пространством.

Предложение 22 доказано.

□

Хаусдорфово пространство X называется пространством точечно-счётного типа [1], если для каждой точки $x \in X$ найдётся компактное множество $F(x)$, лежащее в X такое, что $x \in F(x)$ и характер множества $F(x)$ в пространстве X счетен.

Предложение 23. *Пусть f — совершенное отображение паракомпактного p-пространства X в паракомпактное p-пространство Y. Тогда отображение $\exp_c(f)$ пространства $\exp_c(X)$ в пространство $\exp_c(Y)$ также совершенно.*

Доказательство. Так как X и Y — паракомпактные p-пространства, то, по предложению 22, $\exp_c(X)$ и $\exp_c(Y)$ — также паракомпактные p-пространства. Известно [1], что каждое вполне регулярное перистое пространство является пространством точечно-счётного типа, а значит, любое паракомпактное p-пространство является k-пространством [20]. Далее, из того, что пространство $\exp_c(Y)$ является k-пространством, согласно предложению 2 следует, что отображение $\exp_c(f)$ совершенно.

Предложение 23 доказано.

□

Следствие 1. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, A — замкнутое подмножество X. Тогда пространство $\exp_c(A)$ является замкнутым подпространством пространства $\exp_c(X)$.*

Доказательство. Напомним ещё раз, что ([20], гл. 5) каждое замкнутое подпространство паракомпакта является паракомпактом. С другой стороны, замкнутое подпространство произвольного перистого пространства также является перистым [1]. Откуда следует, что замкнутое подмножество паракомпактного p-пространства также является паракомпактным p-пространством.

Далее, определено вложение $i : A \to X$, которое, очевидно, является совершенным. Значит, определено отображение $\exp_c(f)$ паракомпактного p-пространства $\exp_c$A в паракомпактное p-пространство $\exp_c(X)$, которое, согласно предложению 23 также является совершенным, потому пространство $\exp_c(A)$ является замкнутым подпространством пространства $\exp_c(X)$.

Следствие 1 доказано.

□

Предложение 24. *Операция exp_c является ковариантным функтором из категории $\mathcal{P}$ в категорию $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Пусть X, Y — паракомпактные p-пространства, f — совершенное отображение X в Y. Тогда пространства $\exp_c(X)$, $\exp_c(Y)$ также являются паракомпактными p-пространствами, а отображение $\exp_c(f)$ пространства $\exp_c(X)$ в пространство $\exp_c(Y)$ также совершенно. Кроме того, непосредственно из определения функтора $\exp_c$ следует выполнение условий $\exp_c(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\exp_c X}$ и $\exp_c(g \circ f) = (\exp_c g) \circ (\exp_c f)$.

Предложение 24 доказано.

$\square$

2.2 Замечания о метризуемости паракомпактных p-пространств.

В данном параграфе рассматриваются различные условия метризуемости паракомпактных p-пространств, в частности, обобщается известная теорема Катетова [26] на случай паракомпактных M-пространств [30]. Заметим, что класс паракомпактных M-пространств в точности совпадает с классом паракомпактных p-пространств. В параграфе также приводятся обобщения некоторых результатов В.В. Федорчука [16].

Предложение 25. *В любом недискретном пространстве точечно-счётного типа найдётся счётное незамкнутое подмножество.*

Доказательство. Пусть X — недискретное пространство точечно-счётного типа и точка $x \in X$ не является изолированной.

Если в точке x выполнена первая аксиома счётности, то в качестве счётного незамкнутого подмножества возьмём последовательность точек $\{x_i : i = 1, 2, \dots\}$, сходящуюся к x.

Если в точке x не выполнена первая аксиома счётности, то, так как X — пространство точечно-счётного типа, найдётся компакт K такой, что $x \in K \subset X$ и $\chi(K, X) \leqslant \omega_0$. Известно, что для любых двух компактных подмножеств F_1 и F_2 хаусдорфова пространства X, таких, что $F_1 \subset F_2$, имеет место неравенство $\chi(F_1, X) \leqslant \chi(F_1, F_2)\chi(F_2, X)$ [20]. Тогда для $x \in K \subset X$ имеет место формула $\chi(x, X) \leqslant \chi(x, K) \times \chi(K, X)$. Так как характер $\chi(x, X)$ несчётен, характер $\chi(x, K)$ также несчётен. Значит, компакт K бесконечен и потому содержит счётное незамкнутое множество, также незамкнутое в X. В самом деле, возьмём произвольное счётное (бесконечное) подмножество $G \subset K$. В случае, если G замкнуто, оно являтся компактом, и, следовательно, не дискретно. То есть, G содержит как минимум одну неизолированную точку, выкинув которую мы и получим искомое счётное незамкнутое подмножество.

Предложение 25 доказано. □

В дальнейшем нам понадобится классическая теорема Катетова:

Теорема 7. [26] *Пусть $X \times Y$ наследственно нормально. Тогда либо все счётные подмножества X замкнуты, либо Y совершенно нормально.*

Напомним, что совершенно нормальным называется нормальное пространство, все замкнутые подмножества которого являются G_δ множествами [20].

Предложение 26. *Пусть X — не дискретное паракомпактное p-пространство, X^3 наследственно нормально. Тогда пространство X^2 совершенно нормально.*

Доказательство. Пусть X — не дискретное паракомпактное p-пространство. Тогда, согласно предложению 25, в X найдётся счётное незамкнутое подмножество. Далее, так как X^3 наследственно нормально, из теоремы 7 следует, что пространство X^2 совершенно нормально.

Предложение 26 доказано.

□

Теорема 8. [20] *Паракомпакт X с диагональю типа G_δ метризуем в том и только том случае, если X допускает совершенное отображение на метризуемое пространство.*

Напомним, что пространство X называется M-пространством [30], если его можно квазисовершенно отобразить на некоторое метрическое пространство Y. Квазисовершенным называется такое замкнутое отображение f пространства X на пространство Y, при котором прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки y пространства Y является счётно-компактным подмножеством пространства X. В классе паракомпактных пространств M-пространства совпадают с перистыми пространствами в смысле А.В.Архангельского.

Далее, из теоремы 5 , теоремы 8 и предложения 26 непосредственно следует обобщение теоремы Катетова для паракомпактных M-пространств:

Предложение 27. *Пусть X — паракомпактное M-пространство, куб которого является наследственно нормальным пространством. Тогда X — метризуемое пространство.*

Рассмотрим "забывающее порядок"отображение $\pi: \ X^2 \to \mathrm{exp}_2\mathrm{X}$, переводящее точку $x \in X^2$ с координатами x_1, x_2 в двухточечное (или одноточечное, при $x_1 = x_2$) множество $\{x_1, x_2\}$ — элемент пространства $\mathrm{exp}_2\mathrm{X}$.

Предложение 28. *Отображение $\pi: \ X^2 \to exp_2X$ непрерывно.*

Доказательство. Достаточно показать, что множества вида $\pi^{-1}(O(U_1, U_2))$ а также $\pi^{-1}(O(U))$, где $O(U_1, U_2), O(U)$ — базисные открытые в $\exp_2$X множества, открыты в X^2.

Имеет место равенство $\pi^{-1}(O(U_1, U_2)) = \{(x_1, x_2) : x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 \in U_2, x_2 \in U_1\}$. Таким образом, $\pi^{-1}(O(U_1, U_2)) = (U_1 \times U_2) \cup (U_2 \times U_1)$— открытое подмножество в X^2. Аналогично, $\pi^{-1}(O(U)) = U \times U$ — также открыто в X^2.

Предложение 28 доказано.

□

Предложение 29. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, exp_2X совершенно нормально. Тогда пространство X метризуемо.*

Доказательство. Множество $\exp_1$X замкнуто в $\exp_2$X и, следовательно, имеет тип G_δ. Отобразим пространство X^2 в пространство $\exp_2$X отображением π и воспользуемся тем, что оно непрерывно. Тогда пробраз $\pi^{-1}(\exp_1\text{X})) = \{(x, x) : x \in X\} = \triangle$ также является множеством типа G_δ (см. [20]).

Тогда пространство X — паракомпакт с диагональю типа G_δ, допускающий совершенное отображение на метризуемое пространство, а значит, согласно теореме 8, пространство X метризуемо.

Предложение 29 доказано.

□

Семейство множеств называется σ-дискретным, если оно может быть представлено как счётное объединение дискретных семейств. Нам также понадобится метризационная теорема Бинга [20]: топологическое пространство метризуемо в том и только том случае, когда оно регулярно и имеет σ-дискретную базу.

Предложение 30. *Пусть X — паракомпактное p-пространство с единственной неизолированной точкой x_0. Тогда если $\chi(x_0, X) = \omega_0$, то X метризуемое пространство, если же $\chi(x_0, X) \geqslant \omega_1$, то пространство $exp_3X \setminus X$ не наследственно нормально.*

Доказательство. Пусть $\chi(x_0, X) = \omega_0$, $\sigma_{x_0} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счётная база в точке x_0. Тогда семейство $\gamma = \{U_i : i = 1, 2, \dots\} \cup \{\{x\} : x \neq x_0\}$ является σ-

дискретной базой в X. Значит, согласно метризационной теореме Бинга [20], пространство X метризуемо.

Далее предположим, что $\chi(x_0, X) \geqslant \omega_1$. Напомним, что паракомпактное p-пространство X является пространством точечно-счётного типа [1]. То есть существует компакт $K \subset X$ такой, что $x_0 \in K$, $\chi(K, X) \leqslant \omega_0$. Известно, что [20] для любых двух компактных подмножеств F_1 и F_2 хаусдорфова пространства X, таких, что $F_1 \subset F_2$, имеет место неравенство $\chi(F_1, X) \leqslant \chi(F_1, F_2)\chi(F_2, X)$.

Значит, имеет место формула $\chi(x_0, X) \leqslant \chi(x_0, K) \times \chi(K, X)$. Откуда следует, что $\chi(x_0, K) \geqslant \omega_1$ и, следовательно, компакт K не метризуем. Кроме того, известно [4], что если для компакта K пространство $\exp_3 K \setminus K$ наследственно нормально, то компакт K метризуем. Значит, пространство $\exp_3 K \setminus K$ не может быть наследственно нормальным. Далее, так как $\exp_3 K \setminus K \subset \exp_3 X \setminus X$, пространство $\exp_3 X \setminus X$ также не является наследственно нормальным пространством. Предложение 30 доказано. □

Предложение 31. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $exp_3 X \setminus X$ наследственно нормально. Тогда X метризуемо.*

Доказательство. В случае, если пространство X дискретно, утверждение предложения, очевидно, выполнено. Предположим, что пространство X не дискретно. Известно, что локально метризуемый паракомпакт метризуем [20], потому нам достаточно доказать локальную метризуемость X.

Поскольку пространство X не дискретно, в X найдется неизолированная точка x_0, и пусть $x \in X \setminus \{x_0\}$. Пусть Ox и Ox_0 — окрестности точек x и x_0 с непересекающимися замыканиями. Положим $A = [Ox]$, $B = [Ox_0]$. Рассмотрим произведение $(\exp_2 A) \times B$ и построим его вложение $\varphi : (\exp_2 A) \times B \to \exp_3 X$ следующим образом. Для точек $\{x, y\} \in \exp_2 A$, $\{z\} \in B$, положим $\varphi(\{x, y\}, z) = \{x, y, z\} \in \exp_3 X$. Очевидно, что φ инъективно, и поэтому мы отождествляем множество $(\exp_2 A) \times B$ с подпространством $\exp_3 X$.

Проверим, что φ — вложение. Для этого покажем, что произвольное множество U открыто в $(\exp_2 A) \times B$ тогда и только тогда, когда представимо в виде $U = V \cap ((\exp_2 A) \times B)$, где V открыто в $\exp_3 X$. Пусть U — открытое в $(\exp_2 A) \times B$ множество, $U = O(U_1, U_2) \times U_3$, где U_1, U_2 — открытые подмножества A, U_3 — открытое подмножество B. Тогда возьмём открытые в X

множества W_1, W_2, W_3 такие, что $W_1 \cap (A \cup B) = U_1$, $W_2 \cap (A \cup B) = U_2$, $W_3 \cap (A \cup B) = U_3$. Тогда множество $V = O(W_1, W_2, W_3)$ открыто в $\exp_3 X$. Кроме того, в пересечении V с $\exp_2 A \times B$ получим в точности множество $U = O(U_1, U_2) \times U_3$. Поэтому можно считать, что $(\exp_2 A) \times B \subset \exp_3 X$.

Далее, $\varphi((\exp_2 A) \times B) \subset \exp_3 X \setminus X$, так как $|\varphi(z)| \geqslant 2$ для всех $z \in (\exp_2 A) \times B$. Поэтому $(\exp_2 A) \times B$ является подмножеством $\exp_3 X \setminus X$ и, следовательно, $(\exp_2 A) \times B$ наследственно нормально.

Согласно теореме 7, либо все счётные подмножества B замкнуты, либо пространство $\exp_2 A$ совершенно нормально. Но B — замкнутое подмножество паракомпактного p-пространства, значит, само является паракомпактным p-пространством. Так как x_0 — неизолированная точка, то B — бесконечно и, согласно предложению 25, содержит счётное незамкнутое подмножество.

Значит, $\exp_2 A$ совершенно нормально и, согласно предложению 29, A метризуемо. Получаем, что X локально метризуемо кроме, может быть, точки x_0. Если X найдётся ещё одна неизолированная точка, то, подставив её вместо x_0 получим, что X локально метризуемо, и, тем самым, предложение доказано. Предположим, что X — пространство с единственной неизолированной точкой. В таком случае утверждение предложения непосредственно следует из предложения 30. Действительно, если $\chi(x_0, X) = \omega_0$, то X метризуемое пространство. Если же $\chi(x_0, X) \geqslant \omega_1$, то пространство $\exp_3 X \setminus X$, согласно предложению 30, не является наследственно нормальным, что противоречит формулировке предложения. Предложение 31 доказано. $\square$

2.3 Определение нормального функтора в категории $\mathcal{P}$.

Напомним, что принадлежащее Е. В. Щепину [18] определение нормального функтора в категории Comp приведено в разделе 1.3. Предлагается расширение определения Е.В.Щепина для ковариантных функторов в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений.

Будем говорить, что функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет точку и пустое множество*, если $\mathcal{F}$ переводит одноточечные множества в одноточечные, а пустые множества — в пустые.

Далее, функтор $\mathcal{F}$ назовём *мономорфным*, если для любого замкнутого вложения $i : Y \to X$ отображение $\mathcal{F}(i) : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ также является вложением. Для мономорфного функтора $\mathcal{F}$ и замкнутого подмножества $Y \subset X$ пространство $\mathcal{F}(Y)$ естественно отождествляется с подпространством $\mathcal{F}(i)\,(\mathcal{F}(Y))$ пространства $\mathcal{F}(X)$. Определение корректно для категории $\mathcal{P}$, так как замкнутое подмножество паракомпактного p-пространства также является паракомпактным p-пространством.

Будем говорить, что функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет пересечения*, если для любого паракомпактного p-пространства X и любой системы $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств X имеет место равенство

$$\mathcal{F}\left(\cap\{Y_\alpha : \alpha \in A\}\right) = \cap\{\mathcal{F}(Y_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Функтор $\mathcal{F}$ назовём *непрерывным,* если он перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

Более точно это означает следующее. Для любого обратного спектра из паракомпактных p-пространств с совершенными отображениями $S = \{X_a, p_b^a : a, b \in A\}$ определен обратный спектр, также состоящий из паракомпактных p-пространств с совершенными отображениями $\mathcal{F}(S) = \{\mathcal{F}(X_a), \mathcal{F}(p_b^a) : a, b \in A\}$. Пусть $X = \lim S$, $p_a : X \to X_a$ — предельные проекции спектра. Напомним, что предел обратного спектра из паракомпактных p-пространств с совершенными связующими отображениями также является паракомпактным p-пространством, и его проекции также совершенны [20].

Отображения $\mathcal{F}(p_a) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_a)$ в пределе дают отображение p из $\mathcal{F}(X)$ в $\lim \mathcal{F}(S)$, которое также будет являться совершенным [20].

Требование непрерывности функтора заключается в том, что пространство $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(\lim S)$ совпадает с пределом спектра $\lim \mathcal{F}(S)$. Другими словами, функтор $\mathcal{F}$ непрерывен, если отображение p — гомеоморфизм.

Функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет прообразы*, если для любого совершенного отображения $f : X \to Y$ и любого замкнутого $A \subset Y$

$$(\mathcal{F}(f))^{-1}\, \mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(f^{-1}A).$$

Данное определение также корректно для категории $\mathcal{P}$, так как совершенный прообраз паракомпактного p-пространства также является паракомпактным p-пространством.

Функтор $\mathcal{F}$ называется *эпиморфным*, если он сохраняет эпиморфизмы.

Функтор $\mathcal{F}$ сохраняет вес, если для любого бесконечного паракомпактного p-пространства X верно $w(X) = w(\mathcal{F}\ (X))$.

Если $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор, то для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определен *носитель* $\mathrm{supp}(a)$ следующим образом:

$$\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y : Y \text{ замкнуто в } X,\ a \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

Ясно, что для функторов, сохраняющих пересечения, верно $a \in \mathcal{F}(\mathrm{supp}(a))$.

Таким образом, определено многозначное отображение $\mathrm{supp} : \mathcal{F}(X) \to X$, ставящее в соответствие каждой точке пространства $\mathcal{F}(X)$ её носитель — непустое замкнутое подмножество пространства X.

Для любого натурального n через $\mathcal{F}_n(X)$ обозначается множество

$$\mathcal{F}_n(X) = \{a \in \mathcal{F}(X) : |\mathrm{supp}(a)| \leqslant n\}.$$

Будем говорить, что степень функтора $deg\mathcal{F} \leqslant n$, если для любого X и любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ верно $|\mathrm{supp} a| \leqslant n$. Будем говорить, что $deg\mathcal{F} = n$, если $deg\mathcal{F} \leqslant n$, но неверно, что $deg\mathcal{F} \leqslant n - 1$.

В последующих формулах через n обозначается не только натуральное число, но и дискретное пространство, состоящее из n точек: $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Для функторов, действующих в категории $\mathcal{P}$ определим аналог отображения Басманова [2]. Заметим, что идея самой конструкции отображения π_n принадлежит ещё Е. В. Щепину [18].

Отображение

$$\pi_n : X^n \times \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}(X)$$

определяется равенством $\pi_n(\xi, a) = \mathcal{F}(\xi)(a)$, в котором каждая точка $\xi \in X^n$ отождествляется с отображением $\xi : n \to X$.

Ковариантный функтор $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ в категории $\mathcal{P}$ будем называть нормальным, если функтор $\mathcal{F}$ непрерывен, мономорфен и эпиморфен, сохраняет пересечения, вес, прообразы, точку и пустое множество, а также удовлетворяет условию: для любого паракомпактного p-пространства X и любого натурального n отображение $\pi_n : X^n \times \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}(X)$ непрерывно.

Очевидно, что ограничение нормального функтора на категорию *Comp* является нормальным функтором в категории *Comp* в смысле определения Е.В.Щепина [17]. Докажем, что функтор $\exp_c$ является нормальным в смысле только что данного определения:

Предложение 32. *Функтор* $\exp_c$ *является нормальным в категории* $\mathscr{P}$.

Доказательство. Ясно, что функтор $\exp_c$ сохраняет точку и пустое множество. Для любого одноточечного пространства X пространство $\exp_c(X)$ также состоит из одной точки — единственного компактного несобственного подмножества X, а для пустого пространства X пространство $\exp_c(X)$ также пусто. Мономорфность функтора $\exp_c$ непосредственно следует из определения отображения $\exp_c(f)$. Очевидно, что для любого взаимнооднозначного отображения $f : X \to Y$ отображение $\exp_c(f) : \exp_c(X) \to \exp_c(Y)$ также взаимнооднозначно.

Проверим эпиморфность функтора $\exp_c$. Пусть $f : X \to Y$ — эпиморфизм. Докажем, что $\exp_c(f) : \exp_c(X) \to \exp_c(Y)$ также является эпиморфизмом. Пусть F — произвольная точка пространства $\exp_c Y$. Тогда множество $f^{-1}(F)$ непусто в силу эпиморфности и компактно в силу совершенности отображения f. То есть $f^{-1}(F)$ принадлежит прообразу F при отображении $\exp_c(f)$.

Функтор $\exp_c$ сохраняет пересечения замкнутых подмножеств. В силу его непрерывности, это условие достаточно проверить для пересечения двух замкнутых подмножеств. Пусть A_1, A_2 — замкнутые подмножества X. Напомним, что пространства $\exp_c A_1$ и $\exp_c A_2$ в таком случае являются замкнутыми подпространствами пространства $\exp_c(X)$. Далее, по определению пространства $\exp_c(X)$, имеем

$\exp_c(A_1 \cap A_2) = \{F \in \exp_c X : F \subset A_1, F \subset A_2\} = \exp_c A_1 \cap \exp_c A_2$. Следовательно, условие выполнено.

Проверим, что функтор $\exp_c$ сохраняет вес бесконечных компактов. Пусть вес пространства X равен λ и σ — база мощности λ в X. Рассмотрим семейство γ мощности λ всех множеств вида $O(U_1, \ldots, U_n)$, где U_i принадлежат семейству σ, и проверим, что γ является базой в пространстве $\exp_c X$. Пусть F — произвольная точка пространства $\exp_c X$. Тогда любая её окрестность имеет вид $OF = O(V_1, \ldots, V_m)$, где V_j — открытые подмножества пространства X. Найдём такой набор множеств $U_1, \ldots, U_n$, из базы σ, что множество $O(U_1, \ldots, U_n)$ содержит F и само лежит в OF.

Из того, что точка F принадлежит окрестности OF следует выполнение условий: F лежит в объединении множеств V_i и пересекается с каждым из них. Для каждого множества V_i возьмём по точке x_i из пересечения $F \cap V_i$ и зафиксируем множество U_i из базы σ так, чтобы U_i содержало x_i и лежало в соответствующем V_i. Кроме того, для каждой точки x из F возьмём содержащее её множество U_x из базы σ, лежащее в объединении множеств V_i. Далее, воспользовавшись компактностью F, возьмём конечный набор множеств $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$, содержащий множество F.

Рассмотрим множество $O' = O(U_1, \ldots, U_n, U_{x_1}, \ldots, U_{x_k})$ и докажем, что оно является искомой окрестностью множества F. Ясно, что точка F принадлежит O', так как множество F лежит в объединении всех множеств U_α и пересекается с каждым из них. С другой стороны, $O \subset O(V_1, \ldots, V_m)$. Действительно, возьмём произвольную точку Φ из O'. Тогда, очевидно, Φ лежит в объединении множеств U_α, а, значит, и в объединении множеств V_i. Кроме того, условие $\Phi \cap V_i \neq \varnothing$ выполнено для каждого V_i, так как Φ пересекается с каждым U_i — подмножеством соответствующего V_i. Значит, Φ также принадлежит множеству $O(V_1, \ldots, V_m)$. Следовательно, условие $F \in O' \subset O(V_1, \ldots, V_m)$ выполнено.

Итак, семейство γ является базой мощности λ в пространстве $\exp_c(X)$ и, значит, вес пространства $\exp_c(X)$ не превосходит веса пространства X. С другой стороны, так как X является подпространством $\exp_c(X)$, верно и обратное неравенство: $\mathrm{w}(X) \leqslant \mathrm{w}(\exp_c X)$. Значит, вес пространства $\exp_c(X)$ равен весу пространства X и функтор $\exp_c$ сохраняет вес бесконечных компактов.

Проверим, что функтор $\exp_c$ сохраняет прообразы. Пусть A — замкнутое подмножество Y. Докажем, что $\exp_c(f^{-1}(A)) = (\exp_c f)^{-1}(\exp_c A)$. Пространство $\exp_c A$ является замкнутым подпространством $\exp_c Y$. Тогда имеет место равенство $\exp_c(f^{-1}(A)) = \{F \in \exp_c X : F \subseteq f^{-1}(A)\}$, что, в свою очередь, совпадает с $\{F \in \exp_c X : f(F) \subseteq (A)\} = \{F \in \exp_c X : \exp_c f(F) \in \exp_c A\}$. А это и есть множество $(\exp_c f)^{-1}(\exp_c A)$.

Проверим непрерывность функтора $\exp_c$. Пусть $S = \{X_a, p_b^a : a, b \in A\}$ — обратный спектр из паракомпактных p-пространств с совершенными проекциями. Тогда определён обратный спектр, также состоящий из паракомпактных p-пространств и их совершенных проекций $\exp_c(S) = \{\exp_c X_a,\ \exp_c p_b^a : a, b \in A\}$. Пусть $X = \lim S$, $p_a : X \to X_a$ — предельные проекции спектра, и $p : \exp_c(\lim S) \to \lim \exp_c(S)$ предел отображений $\exp_c p_a : \exp_c X \to \exp_c X_a$. Напомним, что отображение p совершенно. Проверим, что p — гомеоморфизм.

Проверим, что p взаимнооднозначно. Возьмём две различные точки F_1, F_2 пространства $\exp_c(X)$. Так как F_1, F_2 — различные компакты в пространстве X, найдётся точка $y_0 \in X$, принадлежащая только одному из этих множеств. Пусть $y_0 \in F_1 \setminus F_2$. Рассмотрим множества $\{y_0\}$ и F_2. Они замкнуты и не пересекаются, значит, найдётся индекс a такой, что не пересекаются их соответствующие проекции: $p_a(\{y_0\}) \cap p_a(F_2) = \varnothing$. Отсюда следует, что соответствующие проекции множеств F_1 и F_2 различны: $p_a(F_1) \neq p_a(F_2)$. Значит, различны и соответствующие множества $p(F_1)$ и $p(F_2)$ в пространстве $\lim \exp_c(S)$.

Так как p взаимнооднозначно и совершенно, и, следовательно, замкнуто, отображение, обратное к нему, является непрерывным. Проверим, что p является эпиморфизмом, откуда будет следовать, что p — гомеоморфизм.

Для произвольной точки $F \in \lim \exp_c(S)$ рассмотрим точки $p_a(F) = F_a$, $a \in A$ пространств $\exp_c(X_a)$, то есть компактные подмножества соответствующих пространств X_a. Они образуют обратный спектр из компактов $S_F = \{F_a, p_b^a : a, b \in A\}$, предел которого, согласно [20], является компактом, лежащим в пространстве X. Таким образом, для любой точки $F \in \lim \exp_c(S)$ существует её пробраз, лежащий в пространстве $\exp_c(X) = \exp_c(\lim S)$.

Итак, отображение $p : \exp_c(\lim S) \to \lim \exp_c(S)$ является гомеоморфизмом, то есть, в соответствии с определением, функтор $\exp_c$ перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

Проверим, что функтор $\exp_c$ удовлетворяет условию: для любого паракомпактного p-пространства X и любого натурального n отображение $\pi_n : X^n \times \exp_c n \to \exp_c X$ непрерывно, что и завершает доказательство нормальности функтора $\exp_c$. Пусть (ξ, a) — произвольная точка пространства $X^n \times \exp_c(n)$, пусть η — её образ при отображении π_n, $O\eta$ — окрестность точки η в пространстве $\exp_c X$. Построим окрестность O' точки (ξ, a) такую, что её образ при отображении π_n лежит в $O\eta$.

Окрестность $O\eta$ имеет вид $O(U_1, ..., U_n)$. Для каждого множества U_i зафиксируем множество точек $\eta_1, ..., \eta_k$, лежащих в данном U_i и положим $O^i\xi = \{\zeta \in X^n : \zeta(1), ..., \zeta(k) \in U_i\}$ — множество функций $\zeta : n \to X$, переводящих точки $\{1, ..., k\}$ пространства $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ в некоторые точки, лежащие в множестве $U_i \subset X$. С одной стороны, $\xi \in O^i\xi$, так как $\pi_n(\xi, a) = \exp_c(\xi)(a) = \eta$, то есть ξ переводит точки $\{1, ..., k\}$ в точки $\eta_1, ..., \eta_k$, лежащие в данном U_i. С другой стороны, множество $O^i\xi$ открыто в пространстве X^n.

Положим $O\xi = \cap_{i=1}^n O^i\xi$. Множество $O\xi$ — окрестность точки ξ в пространстве X^n, $\{a\}$ — окрестность точки a в дискретном пространстве $\exp_c(n)$. Проверим включение: $\pi_n(O\xi \times \{a\}) \subset O(U_1, ..., U_n)$. Пусть точка (ζ, a) принадлежит $O\xi \times \{a\}$. Тогда, в силу выбора $O\xi$, верно, что $\pi_n(\zeta, a) = \exp_c(\zeta)(a) \in O(U_1, ..., U_n) = O\eta$. Значит, $O\xi \times \{a\}$ и будет искомой окрестностью точки (ξ, a). Тем самым доказано, что отображение $\pi_n : X^n \times \exp_c n \to \exp_c X$ непрерывно.

Предложение 32 доказано.

$\square$

2.4 Некоторые свойства нормальных функторов в категории $\mathcal{P}$.

Данный параграф посвящен изучению таких ключевых свойств нормальных функторов, как полунепрерывность снизу многозначного отображения $\mathrm{supp} : \mathcal{F}(X) \to X$, существование подфунктора $\mathcal{F}_n$ функтора $\mathcal{F}$ и связь свойства сохранения носителей и свойства сохранения прообразов. Эти свойства выполняются в категории $Comp$ и используются при работе с нормальными функторами в категории $Comp$. В данном параграфе мы рассматриваем их для функторов, действующих в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений.

Предложение 33. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор в категории $\mathcal{P}$. Тогда многозначное отображение* $\mathrm{supp} :$ $\mathcal{F}(X) \to X$ *полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Напомним, что многозначное отображение $\mathrm{supp} : \mathcal{F}(X) \to X$ ставит в соответствие каждой точке ξ пространства $\mathcal{F}(X)$ её носитель $\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y : Y \text{ замкнуто в } X,\ a \in \mathcal{F}(Y)\}$. — непустое замкнутое подмножество пространства X.

Для начала докажем, что для любого замкнутого подмножества A пространства X верно, что множество $\mathcal{F}(A)$ замкнуто в пространстве $\mathcal{F}(X)$. Так как A лежит в X, существует вложение $i : A \to X$, которое, очевидно, является совершенным отображением. A — замкнутое подмножество паракомпактного p-пространства, значит, само является паракомпактным p-пространством. Тогда определено пространство $\mathcal{F}(A)$ и отображение $\mathcal{F}(i) :$ $\mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(X)$, которое будет являться совершенным вложением паракомпактного p-пространства $\mathcal{F}(A)$ в паракомпактное p-пространство $\mathcal{F}(X)$. В силу совершенности отображения $\mathcal{F}(i)$ получим, что множество $\mathcal{F}(A)$ замкнуто в пространстве $\mathcal{F}(X)$.

Далее проверим, что отображение $\mathrm{supp} : \mathcal{F}(X) \to X$ полунепрерывно снизу, то есть для любого открытого подмножества U пространства X множество $O(U) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : \mathrm{supp}\xi \cap U \neq \varnothing\}$ открыто в пространстве $\mathcal{F}(X)$. Имеет место равенство $O(U) = \mathcal{F}(X) \setminus \{\xi \in \mathcal{F}(X) : \mathrm{supp}\xi \subset X \setminus U\} = \mathcal{F}(X) \setminus \mathcal{F}(X \setminus U)$. А значит, множество $O(U)$ открыто в $\mathcal{F}(X)$.

Предложение 33 доказано.

□

Предложение 34. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор в категории $\mathcal{P}$. Тогда отображение* $\mathrm{supp}|_{\mathcal{F}_1(X)} : \mathcal{F}_1(X) \to X$ *является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Для удобства обозначим через $s : \mathcal{F}_1(X) \to X$ ограничение многозначного отображения $\mathrm{supp} : \mathcal{F}(X) \to X$, ставящее в соответствие каждой точке ξ пространства $\mathcal{F}(X)$ её носитель $\mathrm{supp}(\xi)$, на $\mathcal{F}_1(X)$. Ясно, что s взаимнооднозначно и эпиморфно, так как сопоставляет одноточечные множества и их носители.

Докажем, что отображение s непрерывно. Для любого открытого подмножества $U \subset X$, его прообраз $s^{-1}(U)$ состоит из точек $\xi \in \mathcal{F}_1(X)$ таких, что $\mathrm{supp}(\xi) \subset U$. Так как носители точек $\xi \in \mathcal{F}_1(X)$ в данном случае одноточечны, условие $\mathrm{supp}(\xi) \subset U$ эквивалентно условию $\mathrm{supp}(\xi) \cap U \neq \varnothing$. Таким образом, множество $s^{-1}(U) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : \mathrm{supp}(\xi) \cap U \neq \varnothing\} \cap \mathcal{F}_1(X)$ открыто в пространстве $\mathcal{F}_1(X)$, так как отображение supp полунепрерывно снизу.

Докажем, что обратное отображение s^{-1} также непрерывно. Отображение s^{-1} совпадает с отображением $\pi_1 : X \times \mathcal{F}(1) \to \mathcal{F}_1(X)$. Это следует из того, что для $\xi = \pi_1(x, a)$ верно $\mathrm{supp}(\xi) = x$. Так как мы рассматриваем только нормальные функторы в категории $\mathcal{P}$, отображение $\pi_n : X^n \times \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}_n(X)$ непрерывно для любого натурального n. Значит, отображение s^{-1} также непрерывно.

Предложение 34 доказано.

□

Будем говорить, что функтор $\mathcal{F}$ сохраняет носители, если для любого отображения $f : X \to Y$ и всякого $a \in \mathcal{F}(X)$ верно $f(\mathrm{supp}(a)) = \mathrm{supp}(\mathcal{F}(f)(a))$.

Аналогично случаю функторов, действующих в категории Comp [22], имеет место:

Предложение 35. *Мономорфный, сохраняющий пересечения функтор, действующий в категории $\mathcal{P}$, сохраняет носители тогда и только тогда, когда он сохраняет прообразы.*

Доказательство. Достаточность. Пусть функтор $\mathcal{F}$ сохраняет прообразы, a принадлежит пространству $\mathcal{F}(X)$, $A = \mathrm{supp}(a)$ — носитель точки a. Проверим, что выполнено условие сохранения носителей, а именно $f(\mathrm{supp}(a)) = \mathrm{supp}(\mathcal{F}(f)(a))$.

Для удобства обозначим $B = f(A)$, $b = \mathcal{F}(f)(a)$. Напомним, что для всякого замкнутого множества A, лежащего в пространстве X, пространство $\mathcal{F}(A)$ естественно отождествляется с подпространством $\mathcal{F}(X)$. Так как для сохраняющих пересечения функторов верно, что $a \in \mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\mathrm{supp}(a))$, то мы получим, что $\mathcal{F}(f)(a) \in \mathcal{F}(f)(\mathcal{F}(A)) \subset \mathcal{F}(f(A))$, то есть $b \in \mathcal{F}(B)$. Тогда и носитель точки b лежит во множестве B, то есть выполнено включение $\mathrm{supp}(\mathcal{F}(f)(a)) \subseteq f(\mathrm{supp}(a))$.

Проверим включение в обратную сторону. Поскольку $b \in \mathcal{F}(\mathrm{supp}(b))$, также верно, что $\mathcal{F}(f)^{-1}(b) \subset \mathcal{F}(f)^{-1}\mathcal{F}(\mathrm{supp}(b)) = \mathcal{F}(f^{-1}(\mathrm{supp}(b)))$, поскольку $\mathcal{F}$ сохраняет прообразы. Значит, $a \in \mathcal{F}(f)^{-1}(b)$ также лежит в $\mathcal{F}(f^{-1}(\mathrm{supp}(b)))$. Значит, $\mathrm{supp}(a) \subset f^{-1}(\mathrm{supp}(b))$. Откуда следует, что $f(\mathrm{supp}(a)) \subset \mathrm{supp}(b) = \mathrm{supp}(\mathcal{F}(f)(a))$. Итак, имеет место равенство $f(\mathrm{supp}(a)) = \mathrm{supp}(\mathcal{F}(f)(a))$, что означает, что функтор $\mathcal{F}$ сохраняет носители.

Необходимость. Пусть функтор $\mathcal{F}$ сохраняет носители. Проверим, что он сохраняет прообразы, то есть для любого замкнутого подмножества B пространства Y верно, что $\mathcal{F}(f^{-1}(B)) = \mathcal{F}(f)^{-1}\mathcal{F}(B)$.

Из включения $\mathcal{F}(f)(\mathcal{F}(f^{-1}(B))) \subseteq \mathcal{F}(B)$ непосредственно следует, что $\mathcal{F}(f^{-1}(B)) \subset \mathcal{F}(f)^{-1}\mathcal{F}(B)$. Проверим обратное включение. Пусть a — произвольная точка пространства $\mathcal{F}(f)^{-1}(\mathcal{F}(B))$, тогда её образ $\mathcal{F}(f)(a)$ лежит в $\mathcal{F}(B)$. Значит, носитель $\mathrm{supp}\mathcal{F}(f)(a)$ лежит в B. Так как функтор $\mathcal{F}$ сохраняет носители, $f(\mathrm{supp}(a)) = \mathrm{supp}(\mathcal{F}(f)(a))$ также лежит в B. Тогда $\mathrm{supp}(a) \subset f^{-1}(B)$, $\mathcal{F}(\mathrm{supp}(a)) \subset \mathcal{F}(f^{-1}(B))$ и, следовательно, точка a лежит в пространстве $\mathcal{F}(f^{-1}(B))$. То есть $\mathcal{F}(f)^{-1}\mathcal{F}(B) \subset \mathcal{F}(f^{-1}(B))$. Значит, выполнено равенство $\mathcal{F}(f^{-1}(B)) = \mathcal{F}(f)^{-1}\mathcal{F}(B)$, что и означает, что функтор $\mathcal{F}$ сохраняет прообразы.

Предложение 35 доказано.

□

Предложение 36. *Если $\mathcal{F}$ — нормальный функтор, действующий в категории $\mathcal{P}$, то подпространство $\mathcal{F}_n(X)$ замкнуто в $\mathcal{F}(X)$ для любого X и любого*

n.

Доказательство. Проверим, что подпространство $\mathcal{F}(X) \setminus \mathcal{F}_n(X)$ открыто в пространстве $\mathcal{F}(X)$. Пусть точка ξ лежит в $\mathcal{F}(X) \setminus \mathcal{F}_n(X)$. построим её окрестность, также лежащую в $\mathcal{F}(X) \setminus \mathcal{F}_n(X)$. Возьмём $n+1$ точку из носителя ξ с попарно непересекающимися окрестностями $U_1, ..., U_{n+1}$.

Так как отображение supp для нормального функтора $\mathcal{F}$ полунепрерывно снизу согласно предложению 33, множества вида $O_U = \{\eta \in \mathcal{F}(X) : \mathrm{supp}(\eta) \cap U \neq \varnothing\}$ открыты в пространстве $\mathcal{F}(X)$. Тогда, в качестве окрестности точки ξ положим $O_\xi = O_{U_1} \cap O_{U_2} \cap ... \cap O_{U_{n+1}} = \{\eta \in \mathcal{F}(X) : \mathrm{supp}(\eta) \cap U_i \neq \varnothing \text{для всех } i = 1, ..., n+1\}$. Для любой точки η из множества O_ξ верно, что её носитель состоит не менее, чем из $n+1$ точки, так как пересекается с $n+1$ дизъюнктным множеством. Таким образом, открытое множество O_ξ целиком лежит в $\mathcal{F}(X) \setminus \mathcal{F}_n(X)$.

Предложение 36 доказано. □

Напомним, что функтор $\mathcal{F}_1$ называется подфунктором функтора $\mathcal{F}_2$, если существует такое естественное преобразование $\Phi = \{f_X\} : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, что всякое отображение f_X — вложение.

Следствие. *Соответствие $X \to \mathcal{F}_n(X)$ однозначно определяет подфунктор $\mathcal{F}_n$ функтора $\mathcal{F}$, действующего в категории $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Действительно, замкнутое подпространство $\mathcal{F}_n(X)$ паракомпактного $p-$пространства $\mathcal{F}(X)$ также является паракомпактным $p-$пространством. Кроме того, образ пространства $\mathcal{F}_n(X)$ при отображении $\mathcal{F}(f)$ лежит в $\mathcal{F}_n(Y)$, так как носитель не возрастает при отображениях: для $\xi \in \mathcal{F}_n(X)$, $\eta = \mathcal{F}(f)(\xi)$ верно, что $\mathrm{supp}(\eta) \subset f(\mathrm{supp}(\xi))$, то есть $\eta \in \mathcal{F}_n(Y)$. Тогда отображение $\mathcal{F}_n(f)$ можно определить как ограничение отображения $\mathcal{F}(f)$ на замкнутое подпространство $\mathcal{F}_n(X)$ пространства $\mathcal{F}_n(X)$. Значит, отображение $\mathcal{F}_n(f)$ также является совершенным отображением [20]. Таким образом, $\mathcal{F}_n$ также является функтором, действующим в категории $\mathcal{P}$.

С другой стороны, тождественное вложение $\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{F}(X)$ является естественным преобразованием, переводящим функтор $\mathcal{F}_n$ в подфунктор функтора $\mathcal{F}$. □

Следствие. *Для нормального функтора $\mathcal{F}$ верно, что $\mathcal{F}_1(X) = X$. Таким образом, можно считать X подпространством пространства $\mathcal{F}(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $i : X \to \mathcal{F}(X)$, сопоставляющее точке $x \in X$ одноточечное множество $i(x) = \xi \in \mathcal{F}_1(X)$, такое, что его носитель $\mathrm{supp}(\xi) = x$. Так как отображение $\mathrm{supp}|_{\mathcal{F}_1(X)} : \mathcal{F}_1(X) \to X$ — гомеоморфизм, то отображение i является вложением.

□

2.5 О теореме Федорчука в категории $\mathcal{P}$.

Известная теорема М. Катетова [26] гласит, что из наследственной нормальности куба компакта следует его метризуемость. В 1989 году В.В. Федорчук [16] обобщил теорему Катетова для нормального функтора степени $\geqslant 3$, действующего в категории Comp компактов и их непрерывных отображений. Вопросам обобщения теоремы и проблемы Катетова посвящены многие публикации в области общей топологии. Так, например,вполне естественно также попытаться ослабить свойство компактности в теоремах Катетова и Федорчука.

В 1976 году Дж. Хабер [21] ослабил свойство компактности в теореме Катетова до свойства счётной компактности хаусдорфова пространства X. В 2000 году Т.Ф. Жураев в работе [4] заменил в теореме Федорчука наследственную нормальность компакта $\mathcal{F}(X)$ на наследственную счётную паракомпактность $\mathcal{F}(X)$.

А. П. Комбаров [12] в 2004 году доказал следующую теорему: если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени $\geqslant 3$ пространство $\mathcal{F}(X)\backslash X$ наследственно $\mathcal{K}$-нормально, где $\mathcal{K}$ — класс σ-компактных пространств, то X — метризуемый компакт. Из теоремы Комбарова следуют одновременно и теорема Федорчука, и теорема Жураева.

В данном параграфе теорема Федорчука обощается на категорию $\mathcal{P}$ паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений.

Пусть $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени $deg\mathcal{F} \geqslant n$. Тогда, так как $\mathcal{F}$ сохраняет носители, в пространстве $\mathcal{F}(n)$ найдётся элемент $a \in \mathcal{F}(n)$ степени n, то есть такой, что $|\mathrm{supp}(a)| = n$.

Проверим это. Из того, что $deg\mathcal{F} \geqslant n$, согласно определению степени функтора следует, что найдётся пространство X и точка $a \in \mathcal{F}(X)$ такие, что $|\mathrm{supp}(a)| = m \geqslant n$. Так как функтор $\mathcal{F}$ сохраняет пересечения, то $a \in \mathcal{F}(\mathrm{supp}(a)) = \mathcal{F}(m)$. Отобразим дискретное пространство m на дискретное пространство n. Тогда, так как функтор $\mathcal{F}$, согласно предложению 35, сохраняет носители, для $b = \mathcal{F}(f)(a)$ верно, что $\mathrm{supp}(b) = f(\mathrm{supp}(a)) = n$.

Положим $\mathcal{F}_a(X) = \pi_n(X^n \times \{a\}) \subset \mathcal{F}(X)$. Определим отображение p_n :

$X^n \times \{a\} \to \mathrm{exp}_n(X)$ следующим образом: $p_n(\xi, a) = \xi(n)$.

Предложение 37. *Пусть X — паракомпактное p-пространство. Тогда отображение $p_n : X^n \times \{a\} \to exp_n(X)$ эпиморфно и совершенно.*

Доказательство. Эпиморфность отображения p_n очевидна: для любой точки F пространства $\mathrm{exp}_n(X)$, такой, что $F = \{y_1, ...y_n\}$, где $k \leqslant n$, в качестве точки ξ пространства X^n достаточно взять $\xi = \{x_1, ..., x_n\}$, положив $x_i = y_i$ при $i = 1, ..., k$ и $x_i = y_k$ при $i = k+1, ..., n$. Тогда $p_n(\xi, a) = \xi(n) = F$. Докажем, что отображение p_n непрерывно. Для этого покажем, что прообраз открытого в $\mathrm{exp}_n(X)$ множества $O(U_1, \ldots, U_n)$ при отображении p_n будет открыт в $X^n \times \{a\}$. Заметим, что в пространстве $\mathrm{exp}_n(X)$ в качестве базы достаточно рассматривать множества вида $O(U_1, \ldots, U_m)$ при m не превосходящем n. Из определения отображения p_n следует, что для любого множества W, являющегося произведением взятых в произвольном порядке m множеств $U_1, \ldots U_m$ и $n - m$ множеств $V_1 \ldots V_{n-m}$, где V_j равны некоторым U_i, то есть для множества $W = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m \times V_1 \times \cdots \times V_{n-m}$, образ множества $W \times \{a\}$ при отображении p_n лежит в $O(U_1, \ldots, U_m)$. Более того, прообраз множества $O(U_1, \ldots, U_m)$ состоит в точности из всевозможных объединений открытых множеств такого вида. Таким образом, множество $p_n^{-1}(O(U_1, \ldots, U_m))$ само является открытым.

Проверим замкнутость отображения p_n. Предположим противное. Пусть существует замкнутое подмножество $M \subset X^n$ такое, что его образ $\Phi = p_n(M)$ не замкнут в $\mathrm{exp}_n(X)$. То есть, найдётся точка $F \in \mathrm{exp}_n(X)$ такая, что $F \in [\Phi] \setminus \Phi$. Рассмотрим её прообраз $p_n^{-1}(F) \subset X^n \times \{a\}$, состоящий из m точек $g_1, ..., g_m$, где $m \leqslant n!$. Для каждого g_i зафиксируем базисную окрестность O_i, не пересекающую множество M, следующего вида: $O_i = U_1 \times ... \times U_n$. Для каждой окрестности O_i, при помощи соответствующих ей множеств $U_1, ..., U_n$, определим множество $O_iF = O(U_1, ..., U_n) \subset \mathrm{exp}_n(X)$ и возьмём их пересечение $OF = \cap_{i=1}^m O_iF$. Для окрестности OF множества F верно, что $OF \cap \Phi \neq \varnothing$, то есть существует $F^0 \in \Phi$, такой что $F^0 \in OF$. Заметим, что прообраз $p_n^{-1}(F^0)$ состоит из $m \leqslant n!$ точек. Возьмём произвольную точку g_i^0 из $p_n^{-1}(F^0)$. Она попадает в окрестность O_k вида $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ некоторой точки g_k из множества $p_n^{-1}(F)$. Действительно, $p_n(g_i^0) = F^0$ лежит в пересечении окрестностей O_iF, где $O_iF = O(U_1, ..., U_n)$ для некоторого набора $U_1, ..., U_n$, который, в свою очередь, образует окрестность $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ для некоторой точки g_k. Таким образом, любая точка g_0 из множества $p_n^{-1}(F^0)$ попадёт в некоторое множество O_i, то есть имеет место включение $p_n^{-1}(F^0) \subset \cup_{i=1}^m O_i$. Так как $F^0 \in \Phi = p_n(M)$ то $p_n^{-1}(F^0) \cap M \neq \varnothing$, а значит и $\cup_{i=1}^m O_i \cap M \neq \varnothing$. Мы получили противоречие с тем, что $M \cap O_i = \varnothing$ для каждого $i = 1, ..., m$. Значит, отображение p_n является замкнутым. Кроме того, для любой точки F пространства $\exp_n(X)$ её пробраз при отображении p_n — конечное подмножество X^n, и, следовательно, компактное. Таким образом, отображение p_n является совершенным. Предложение 37 доказано. □

Далее рассматриваем отображение supp как однозначное, действующее из $\mathcal{F}_a(X)$ в $\exp_n(X)$. Напомним, что $\mathcal{F}_a(X) = \pi_n(X^n \times \{a\}) \subset \mathcal{F}(X)$.

Предложение 38. *Отображение supp* : $\mathcal{F}_a(X) \to exp_n(X)$ *— совершенно и является эпиморфизмом.*

Доказательство. Имеет место равенство $p_n = \mathrm{supp} \circ \pi_n|_{X^n \times \{a\}}$.

Действительно,носитель supp точки a — это n-точечное дискретное пространство $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Кроме того, по определению отображения Басманова, $\mathrm{supp}(\pi_n(\xi, a)) = \mathrm{supp}\mathcal{F}(\xi)(a)$. Далее, так как нормальный функтор сохраняет носители, имеет место равенство $\mathrm{supp}\mathcal{F}(\xi)(a) = \xi(\mathrm{supp}a) = \xi(n)$ и, по определению отображения p_n, получим, что $\xi(n) = p_n(\xi, a)$. То есть, $\mathrm{supp}(\pi_n(\xi, a)) = p_n(\xi, a)$.

Эпиморфность отображения supp будет далее следовать непосредственно из эпиморфности отображения p_n и только что доказанного равенства.

Проверим замкнутость отображения supp. Пусть A — замкнутое подмножество пространства $\mathcal{F}_a(X)$. Тогда $\pi_n^{-1}(A)$ — замкнутое подмножество $X^n \times \{a\}$, так как π_n — отображение на всё $\mathcal{F}_a(X)$, а его образ $p_n(\pi_n^{-1}(A)) = \mathrm{supp}A$ замкнут в силу совершенности отображения p_n.

Далее, прообраз любой точки η пространства $\exp_n(X)$ при отображении supp будет компактен в силу совершенности p_n и непрерывности π_n. Из чего следует, что отображение supp совершенно.

Предложение 38 доказано.

□

Теорема 9. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$ в категории $\mathcal{P}$. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X) \setminus X$ наследственно нормально, то пространство X метризуемо.*

Доказательство. Так как $\mathscr{F}$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$, найдется элемент $a \in \mathscr{F}(3)$ степени 3. Рассмотрим отображение $\mathrm{supp}^* : \mathscr{F}_a(X) \setminus X \to \exp_3(X) \setminus X$, являющееся ограничением отображения $\mathrm{supp} : \mathcal{F}_a(X) \to \exp_3(X)$ на подпространство $\mathscr{F}_a(X) \setminus X$. Согласно предложению 38, отображение supp является совершенным. Так как $\mathrm{supp}^{-1}(\exp_3(X) \setminus X) = \mathscr{F}_a(X) \setminus X$, то отображение supp^* также совершенно [20]. Таким образом, пространство $\exp_3(X) \setminus X$ — совершенный образ наследственно нормального пространства $\mathscr{F}_a(X) \setminus X \subset \mathscr{F}(X) \setminus X$. Следовательно, $\exp_3(X) \setminus X$ также наследственно нормально [20]. Тогда, согласно предложению 31, X – метризуемое пространство.

Теорема 9 доказана.

$\square$

Заметим, что из теоремы 9 непосредственно следует теорема, также являющаяся обобщением теоремы Федорчука о нормальном функторе.

Теорема 10. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$ в категории $\mathcal{P}$. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормально, то пространство X метризуемо.*

Список литературы

[1] Архангельский А. В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства // Матем. сб. — 1965. — Т. 67. — С. 55–85.

[2] Басманов В. Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность. // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271. № 5. С. 1033-1036.

[3] Вакулова Е.В. О носителях максимальных сцепленных систем // Труды петрозаводского университета. Сер. "Математика". 2004. Вып.11. С. 3-8.

[4] Жураев Т. Ф. Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.— 2000. № 4.— С. 8–11.

[5] Заричный М. М. Монада суперрасширения и ее алгебры // Укр. мат. журн. —- 1987. – 39, № 3. — С. 303–309.

[6] Иванов А.В. О пространстве полных сцепленных систем // Сибирский математический журнал. 1986. №6 — С. 95-110.

[7] Иванов А.В. О степенных спектрах и композициях финитно строго эпиморфных функторов // Труды петрозаводского университета. Серия "Математика". 2000. Вып.7. С. 15-28.

[8] Иванов А.В. Свойство Катетова для полунормальных функторов конечной степени // Сибирский математический журнал. 2010. №4 С. 778-784.

[9] Иванов А.В. Теорема катетова о кубе и полунормальные функторы // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Серия: Естественные и технические науки. 2012. №2 С. 104–108.

[10] Иванов А.В. Теорема о почти неподвижной точке для отображений пространства максимальных k-сцепленных систем // Вопросы геометрии и топологии. 1986. С. 31-40.

[11] Иванов А.В., Кашуба Е.В. О наследственной нормальности пространств вида $\mathcal{F}(X)$. // Сибирский математический журнал. 2008. №4. С. 813-824.

[12] Комбаров А. П. К теореме Катетова—Федорчука о кубе // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 2004. №5. С. 59-61.

[13] Комбаров А. П. О D-нормальности $X^2 \setminus \Delta$ // УМН. Т.59, Вып.3. 2004. С. 173-174.

[14] Комбаров А. П. О нормальных функторах степени $\geqslant 3$ // Матем. заметки. 2004. №76. С. 147-149.

[15] Комбаров А. П. Свойства типа нормальности и ковариантные функторы // Фундамент. и прикл. матем., 2003, Т.9, Вып.2, С. 57–98

[16] Федорчук В. В. К теореме Катетова о кубе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 1989. №4. С. 93-96.

[17] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции: Учеб. пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 336 с.

[18] Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. №3. С. 3-62.

[19] Щепин Е. В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // Успехи математических наук. 1976. Т. 31. №5. С. 191-226.

[20] Энгелькинг Р. Общая топология: Пер. с англ. — М.: "Мир". 1986. — 752 с.

[21] Chaber J. Conditions which Imply Compactness in Countably Compact Spaces // Bull. de l'academie polonaise des sciences, Serie des sciences math., astr. et phys. 1976. V. 24, №11. P. 993-997.

[22] Fedorchuk V., Todorčević S. Cellularity of covariant functors. // Topology and its Applications. 1997. V. 76. P. 125-150.

[23] G. Gruenhage, P. Nyikos. Normality in X^2 for compact X // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 340. №2. P. 563-586.

[24] J. de Groot. Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. — Berlin: VEB Deutscher Verlag Wiss., 1969. — P. 89-90.

[25] J. van Mill. An almost fixed point theorem for metrizable continua // Archiv der Mathematik. 1983. V. 40, P. 159-169.

[26] Katětov M. Complete normality of Cartesian products // Fund. Math. — 1948. — V. 35. — P.271–274.

[27] Kombarov A. P. On Lindelof-normal spaces // Topology and its Applications. 2000. V. 107. P. 117-122.

[28] Larson P., Todorčević S. Katětov's problem // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. V. 354. P. 1783-1791.

[29] Michael E. Topologies on spaces of subsets// Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — V. 71 — P. 152–182.

[30] Morita K. Products of normal spaces with metric spaces // Math. Ann.—1964.— Vol. 154, no. 4.—P. 365—382.

[31] Nyikos P. A compact nonmetrizable space P such that P^2 is completely normal // Topology Proc. 1977. V. 2. P. 359-364.

[32] Vel, M. van de. , Superextensions and Lefschetz fixed point structures.// Report 51 of the Mathematics Department of the Free University, Amsterdam — 1976.

[33] Vietoris L. , Kontinua zweiter Ordnung// Monatsh. Math. und Phys. — 1923. — V.33. — P. 49–62.

[34] Wazewski T. , Sur un continu singulier// Fund. Math. — 1923. — V.4. — P. 214–245.

[35] Zenor P. , Countable paracompactness in product spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1971. V.30, N 1.— P. 199–201.

Публикации автора по теме диссертации:

[36] Добрынина М. А. Некоторые свойства полунормальных функторов // Труды петрозаводского университета. Серия "Математика". 2009. Вып. 16. С. 33-47.

[37] Добрынина М. А. О максимальных сцепленных системах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2011. — № 2. С. 27-30.

[38] Добрынина М. А. К теореме Федорчука о нормальном функторе // Матем. заметки. 2011. Т90. Вып4. С. 630-633.

[39] Добрынина М. А. О нормальных функторах в категории паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2012. — № 4. С. 61-63.

[40] Dobrynina M. A. On degree spectrums of seminormal functors // 2010 International Conference on Topology and its Applications. Abstracts. Nafpaktos. 2010. P. 83–84

[41] Dobrynina M. A. On generalizations of Fedorchuk's Normal Functor Theorem in category $\mathcal{P}$ // 2012 International Topological Conference Alexandroff Readings. Abstracts. Moscow. 2012. P. 19.