

## ОТЗЫВ

официального оппонента по диссертации Добрыниной Марины Александровны "Некоторые свойства нормальных и полунормальных функторов в категориях  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Comp}$ " на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология.

1. Диссертация М.А.Добрыниной посвящена исследованию геометрических свойств полунормальных и нормальных функторов, действующих соответственно в категории  $\mathcal{Comp}$  компактов и их непрерывных отображений и в категории  $\mathcal{P}$  паракомпактных  $p$ -пространств и их совершенных отображений.

Типичные функторы, естественно возникающие в общей топологии, связаны с переходом, при котором те или иные подмножества пространства интерпретируются, как элементы нового (гипер)пространства. Первые результаты такого типа относятся к концу первой трети 20 века и связаны с теоремами Т. Важевского, Л. Виеториса, М. Войдыславского о локальной связности и, более того, абсолютной ретрактности, пространства  $\text{сх} X$  непустых замкнутых подмножеств локально связного метрического континуума  $X$ . В работах К. Борсука, К. Куратовского, Э. Майкла середины 20 века было начато активное изучение различных топологий в гиперпространствах. В последней трети 20 века был сделан переход от изучения разнообразных конкретных функторов топологических пространств к построению общей теории функторов с выделением их важных абстрактных свойств: непрерывность, сохранение пересечений, прообразов, веса, мономорфность, эпиморфность, нормальность и т.п. Существенный вклад в реализацию такого перехода принадлежит отечественной топологической школе и связан с результатами Е. В. Щепина, В. В. Федорчука, А.В. Иванова, а также их коллег и учеников Л. Б. Шапиро, В. Н. Басманова, А. Г. Савченко, М. М. Заричного, Г.Н. Радула, Е. В. Моисеева и др. Активно развивалась эта тематика и в работах Я. ван де Гроота, М. ван де Велла, Я. ван Милла, С. Надлера, Дж. Кислинга, Ч. Харатоника, М. Марьяновича. При этом, как правило, любое содержательное продвижение за рамки категории (метрических) компактов рассматривалось в качестве существенного шага в общей теории функторов.

Резюмируя, можно утверждать, что в рассматриваемой диссертации исследуются актуальные вопросы современной топологии и решаются интересные и важные конкретные задачи.

2. Структура диссертации традиционна и естественна: введение, две главы состоящих из семи и пяти параграфов, соответственно. В первой главе работа происходит в рамках категории  $\mathcal{Comp}$  компактных хаусдорфовых пространств. Центральный объект исследования - полунормальные функторы, задаваемые выделением набора условий из определения нормальных функторов. Во второй главе ситуация в некоторой степени симметрична: категория  $\mathcal{Comp}$  расширяется до категории  $\mathcal{P}$ , состоящей из прообразов метрических пространств при совершенных отображениях, но рассматриваются уже в основном только нормальные функторы. Точнее, адекватное распространение понятия нормального функтора на категорию  $\mathcal{P}$  и есть одна из основных задач, решаемых во второй главе диссертации.



3. К числу основных результатов первой главы, полученных диссертантом, на мой взгляд, следует отнести следующие. Во-первых, это Теорема 2, в которой построен пример компакта, для которого пространство максимальных 3-сцепленных систем не является нормальным, а не только не компактным, как в результате Я. ван Милла 1983 г. Во-вторых, конструкция алгоритма построения максимальной  $k$ -сцепленной системы с заданным носителем, Предложение 9. Посредством этого алгоритма получен следующий новый и важный для приложений результат, Предложение 12: если бесконечное пространство  $X$  сепарабельно, то для любого кардинала  $\mu$  существует максимальная сцепленная система, принадлежащая суперрасширению степени  $X^\mu$ , с носителем, совпадающим со степенью  $X^\mu$ . В-третьих, как хорошо известно, при помощи понятия носителя можно определить подфунктор континуальной экспоненты  $\text{exp}^c(\cdot)$  функтора  $\text{exp}(\cdot)$ . Естественно возникнет вопрос, нельзя ли аналогичным образом задать подфунктор функтора суперрасширения, рассматривая максимальные сцепленные системы со связными носителями? Отрицательный ответ на этот вопрос также получен в первой главе. А именно, в Предложении 13 доказано, что возможно непрерывное отображение компактов, которое переводит максимальную сцепленную систему со связным носителем в максимальную сцепленную систему, носитель которой несвязен. Важными (и новыми) являются также результаты первой главы, посвященные сохранению точек взаимной однозначности полунормальными функторами и связь этого свойства со свойствами спектра полунормального функтора.

Вторая глава посвящена распространению понятия нормального функтора на категорию  $P$  паракомпактных  $p$ -пространств и их совершенных отображений. Понятие нормального функтора, действующего в категории  $\text{Comp}$  всех компактов и их непрерывных отображений, введено Е.В.Цепиным в 1980 г. и к настоящему моменту хорошо изучено. В диссертации впервые предпринята успешная попытка рассмотреть нормальные функторы в более обширной категории  $P$ . Паракомпактные  $p$ -пространства были определены А.В.Архангельским еще в 1965 году и под несколько другим названием паракомпактных  $M$ -пространств японским топологом Моритой в 1964 году. Автору пришлось проявить изобретательность в формулировке (см. параграф 2.3 работы) условий, определяющих нормальные функторы в категории  $P$  с тем, чтобы новое понятие действительно было продолжением предыдущего, т.е. чтобы ограничение вновь введенного понятия на категорию  $\text{Comp}$  совпало бы с первоначальным определением. В качестве конкретного примера, в Предложениях 27 и 32 последовательно доказано, что  $\text{exp}_c(\cdot)$  действительно является (ковариантным) нормальным функтором в категории  $P$ . Следует отметить также доказанное автором Предложение 33 о том, что если  $F$  – нормальный функтор в категории  $P$ , то многозначное отображение  $\text{supp}$  из  $F(X)$  в паракомпактное  $p$ -пространство  $X$  является полунепрерывным снизу. Все же, главным результатом второй главы и, пожалуй, всей диссертации следует считать теорему 10, в которой метризуемость паракомпактного  $p$ -пространства  $X$  выведена из наследственной нормальности пространства  $F(X)$  для произвольного нормального функтора степени  $\geq 3$ , действующего в категории  $P$ . Эта теорема является обобщением исторически достаточно протяженной серии теорем М. Катетова, Дж. Хабера, В. В. Федорчука, Т. Ф. Жураева, А. П. Комбарова. В частности, если  $X$  –

паракомпактное  $p$ -пространство, куб которого является наследственно нормальным пространством, то пространство  $X$  метризуемо.

4. Работа хорошо и естественно структурирована, в целом изложена ясным языком, доказательства полны и достаточны для их понимания. По тексту имеются некоторые замечания, не отражающиеся на общей положительной оценке работы: Например,

а) нумерация Предложений 1-38, не ассоциированная с нумерацией глав и параграфов, не всегда способствует ориентации в тексте работы;

б) следствия на с. 61-62 вообще не пронумерованы;

в) на с. 25-26 аргумент «если носитель 3-сцепленной системы состоит из двух или трёх точек, то систему можно дополнить до максимальной 3-сцепленной...» вполне можно было бы не приводить дважды;

г) на с. 33 вместо двукратной ссылки на Предложение 2, следовало бы ссылаться на Предложение 11;

д) теоремы и предложения в автореферате имеют номера независимые от текста диссертации; если уж и придерживаться такого формата изложения в автореферате, то, на мой взгляд, в скобках следовало бы указывать точную ссылку на утверждение из текста диссертации.

5. Основное содержание диссертации опубликовано в открытой печати. Три работы автора по теме диссертации вышли в журналах, включенных в список ВАК. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

6. Результаты диссертации могут найти применение в различных разделах общей теории топологических пространств. Они могут быть интересны математикам, работающим в МИРАН, МГУ им. М.В.Ломоносова, МПГУ, УрО РАН, Петрозаводском госуниверситете и других научных и учебных заведениях.

7. Диссертационная работа Добрыниной Марии Александровны «Некоторые свойства нормальных и полунормальных функторов в категориях  $P$  и  $Comp$ », представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология, соответствует требованиям ВАК (п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного Постановлением правительства РФ от 24.09.2013 № 842), предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук.

07.11.2014 г.

Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Центра математического образования ФГБОУ «Московский педагогический государственный университет»

П.В.Семенов

Контактная информация.

107140.Москва, ул. Гаврикова, д. 7/9

Центр математического образования ФГБОУ ВПО

«Московский педагогический государственный университет»

Тел. +7 925 611 34 63, e-mail: mmpgu@yandex



Получено П.В. Семеновым  
10.11.2014 г. от  
Семенова П.В. Семенов