

Отзыв научного руководителя
на диссертационную работу Будревича М.В.
"О конвертации перманента и определителя",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — Математическая логика,
алгебра и теория чисел.

Будревич Михаил Вячеславович поступил в очную аспирантуру, окончив механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова. Перед диссертантом был поставлен ряд открытых проблем о связи между определителем и перманентом 0-1 матриц и матриц над конечными полями. Поставленные задачи касались возможности преобразования матриц, при которых перманент исходной матрицы равняется определителю преобразованной.

Различные вопросы, связанные с перманентом исследуются математиками начиная с работ Коши и Бине. Установлено, что вычисление перманента является значительно более сложной задачей, чем вычисление определителя. Это обусловлено тем, что перманент не сохраняется стандартными элементарными преобразованиями, позволяющими привести матрицу к треугольной форме, а только умножениями на перестановочные матрицы и на диагональные матрицы, произведение всех диагональных элементов которых равняется единице. В общем случае, вычисление перманента (0,1)-матрицы принадлежит классу #P-полных задач. Описанные сложности побудили Поля еще в 1913 г. задать вопрос о существовании такого линейного отображения T , действующего на матрицах, что $\text{per}(A) = \det(T(A))$ для всех A . Вопрос Поля открыл столетие интенсивных и интересных исследований, связанных как с различными типами отображений, так и с преобразованиями отдельных матриц и семейств матриц специального вида. В этом направлении трудились такие классики науки, как Маркус, Минк, Брюалди и др.

Целями диссертационной работы Будревича М.В. являлись исследование свойств конвертируемости неотрицательных матриц относительно различных матричных операций, доказательство невозможности биективной конвертации перманента в определитель для матриц порядка $n > 2$ над произвольным конечным полем характеристики отличной от 2, исследование свойств знаковой конвертируемости, в частности, определение границ Гибсона для вполне неразложимых матриц.

Рассматриваемый диссертантом класс задач необычайно широк. Следует заметить, что, несмотря на кажущуюся простоту постановки вопроса, для решения зачастую приходится привлекать глубокие методы линейной алгебры, комбинаторики и теории полей. Михаил Вячеславович качественно и всесторонне исследовал поставленные перед ним проблемы. Ему удалось не только успешно решить все поставленные задачи, но также и разработать два новых общих метода работы с конвертацией перманента в определитель. В работе показано, что предложенные методы действительно обладают широким спектром применения. С их помощью Будревичем М.В. получен целый ряд новых интересных результатов.

Основными результатами диссертационной работы являются полное и детальное исследование всех поставленных вопросов, а также разработка тензорного подхода к перманенту и метода сверток и расширений матриц, позволяющего проводить индукционные переходы при решении задач знаковой конвертации. Каждый из предложенных методов уже успешно себя зарекомендовал и планируется, что разработанные методы позволят получить ряд других важных результатов в теории определителя и перманента.

Представленная диссертация содержит интересные важные результаты, позволяющие ответить на вопрос Поля для матриц над конечным полем, а также ряд результатов о так называемой знаковой конвертации перманента в определитель, рассматривавшийся тоже начиная с Поля (изучаются семейства матриц, для которых перманент может быть обращен в определитель посредством приписывания знаков «минус» перед некоторыми элементами), и исследование условий, при которых различные операции на матрицах: сложение, умножение, адямарово и кронекерово произведения, сохраняют свойство конвертируемости перманента.

Диссертация состоит из введения и трех глав. Введение содержит все необходимые для дальнейшего изложения сведения, описание истории вопроса и мотивировку изучения конвертации перманента в определитель.

Первая глава посвящена изучению вопроса сохранения свойства знаковой конвертируемости матрицы относительно различных матричных операций, в том числе, суммы, произведения, адямарова и кронекерова произведения. В частности, получена полная характеристика пар матриц с конвертируемой суммой и конвертируемым кронекеровым произведением. Получены достаточные условия, при которых произведение конвертируемо.

В главе два автор изучает вопросы существования конвертируемых и неконвертируемых $(0,1)$ -матриц (над полем нулевой характеристики) при определенных ограничениях на структуру матриц и число единиц в матрицах. В частности, доказано, что при всех n , для любого числа единиц в промежутке между нижней и верхней границами Гибсона существуют симметрические матрицы с этим числом единиц, являющиеся слабо симметрично неконвертируемыми, что решает проблему, сформулированную в журнале «Математические заметки» в 2012г. Отдельно исследован случай неразложимых матриц. Показано, что для неразложимых матриц граница Гибсона совпадает с общим случаем: $n+6$, но для вполне неразложимых матриц она значительно выше: $2n+3$. Получена полная характеристика неконвертируемых матриц с числом единиц на границе Гибсона. Соответствующая проблема была поставлена Брюалди в 2008г. и с тех пор рассматривалась многими математиками. Полученные результаты основаны на введенном автором методе сверток и расширений.

В главе три диссертант рассматривает различные варианты проблемы Поля над конечными полями. Получено доказательство отсутствия биективных конвертеров перманента в детерминант в случае любого поля характеристики, отличной от 2, что полностью решает проблему Поля для матриц над произвольным конечным полем. Результат основан на введенном Будревичем М.В. тензорном методе и значительно перекрывает все результаты, полученные в этом направлении ранее, как по сути: предыдущие результаты были основаны на асимптотических оценках, поэтому проходили только для полей, порядок которых существенно возрастал с ростом n , так и по краткости и красоте изложения. Также получены интересные аналоги теорем о знаковой конвертации из предыдущего раздела для матриц над конечными полями. В частности, доказано, что любая матрица над полем из трех элементов знаково конвертируема, однако для любого другого конечного поля, характеристики отличной от 2, для любого $n > 2$ существует неконвертируемая $n \times n$ -матрица. Показано, что аналог

верхней границы Гибсона в этом контексте отсутствует. Получен ряд достаточных условий знаковой конвертируемости матриц.

Считаю, что Будревичем М.В. проделана большая, очень важная и актуальная работа. Полученные результаты хорошо оформлены, изложение сопровождается большим числом примеров, иллюстрирующих доказываемые свойства. Диссертация демонстрирует высокий уровень научных способностей и огромные творческие возможности диссертанта.

Будревич М.В. провел полное и всеобъемлющее исследование поставленной задачи возможности конвертации перманента в определитель. В целом, работа Будревича М.В. имеет большое значение, как теоретическое, так и практическое, является серьезным вкладом в современную абстрактную и линейную алгебру. Считаю, что рассматриваемая диссертация представляет собой законченное научное исследование. Ее результаты получены лично автором и прошли всестороннюю квалифицированную апробацию, опубликованы в ведущих научных журналах.

Сказанное выше позволяет заключить, что данная диссертационная работа целиком и полностью удовлетворяет требованиям ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01-01-06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор — Будревич Михаил Вячеславович — заслуживает присуждения ему искомой ученой степени.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор

А. Э. Гутерман