

## ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

Будревича Михаила Вячеславовича

### О КОНВЕРТАЦИИ ПЕРМАНЕНТА И ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ,

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертации изучается связи между понятиями определителя (детерминанта) и перманента квадратной матрицы. Детерминант является одной из основных линейно-алгебраических характеристик матрицы. Перманент более связан с многочисленными комбинаторными приложениями; в первую очередь он возникает в вопросах перечислительной комбинаторики.

Известно, что с вычислительной точки зрения перманент устроен более сложно, нежели детерминант. В связи с этим представляют интерес методы, позволяющие для некоторых классов матриц свести вычисление первого к вычислению второго. Один из подходов к этому вопросу, предложенный Г. Полиа, связан с понятием знаковой конвертации матрицы — т. е. домножением некоторых её элементов на  $-1$  таким образом, что определитель полученной матрицы равен перманенту исходной; таким образом, вычисление перманента знаково конвертируемой матрицы можно произвести существенно быстрее, чем в общем случае. Изучению понятия знаковой конвертируемости матрицы и посвящена данная работа.

Отметим, что это понятие имеет глубокие связи с различными областями алгебры и комбинаторики. К примеру, проверка знаковой конвертируемости эквивалентна поиску простого цикла чётной длины в ориентированном графе, а также проверке существования пфаффиановой ориентации двудольного графа. Также знаковая конвертируемость тесно связана с понятием знаковой невырожденности матрицы, используемым в математической статистике.

Таким образом, актуальность изучаемых автором задач и темы диссертации не вызывает сомнения.

**Общая характеристика работы.** Диссертация состоит из введения, трёх основных глав и списка литературы. Объем основного текста диссертации составляет 112 страниц, список литературы включает 51 наименование.

Во вводной главе автор описывает круг исследуемых проблем, даёт обзор результатов, связанных с тематикой работы, и вводит основные определения — такие, как определения перманента и (знаковой) конвертируемости матрицы. Также приведён обзор результатов автора.

В первой главе автор приводит базовые результаты, связанные со знаковой невырожденностью и знаковой конвертируемостью матриц. Эти результаты, в частности, позволяют свести изучение конвертируемости произвольных вещественных матриц к изучению того же свойства для матриц с элементами, равными 0 и  $\pm 1$ .

Далее в этой главе исследована связь понятия конвертации с арифметическими операциями на множестве неотрицательных матриц. Приведён критерий конвертируемости суммы двух неотрицательных конвертируемых матриц. Затем показано, что произведение конвертируемых неотрицательных матриц часто неконвертируемо; в частности, это всегда так, если один из сомножителей — максимальная конвертируемая матрица, а другой содержит достаточно много единиц. Наконец, показано, что кронекерово произведение двух неотрицательных матриц с ненулевыми перманентами может быть конвертируемым лишь в исключительных случаях; все эти случаи явно перечислены.

Во второй главе продолжено исследование знаковой конвертируемости  $(0, 1)$ -матриц (и, как следствие, неотрицательных матриц). Эта глава связана с количественными оценками; приведены точные границы для количества единиц, которое могут иметь конвертируемые и неконвертируемые  $(0, 1)$ -матрицы данного порядка, а также аналогичные оценки для симметричных матриц. При этом в экстремальных примерах матрицы оказываются перестановочно разложимыми.

Таким образом, встаёт вопрос об аналогичной оценке для перестановочно неразложимых матриц. Этот вопрос также решён в данной главе; при этом нижняя оценка на количество единиц неконвертируемой матрицы оказывается существенно большей. Кроме того, в работе явным образом описан класс всех матриц, на которых достигается упомянутая оценка. Для получения этих результатов автором разработана специальная техника, связанная с введёнными им понятиями свёртки и расширения неотрицательной матрицы.

В третьей главе автор исследует вопросы конвертируемости для матриц над конечными полями. В этой ситуации результаты, связанные со знаковой невырожденностью, неприменимы, так что требуются иные методы. Подтверждением существенности этой разницы служит первый результат этой главы, показывающий, что любая матрица над трёхэлементным полем конвертируема. Наоборот, для любого конечного поля из большего количества элементов с характеристикой, отличной от 2, не все матрицы над этим полем конвертируемы; однако, в отличие от ситуации в предыдущей главе, не существует препятствий для конвертируемости, связанных с числом ненулевых элементов. Наоборот: автор показывает, что для достаточно больших размеров поля и матрицы, большое количество ненулевых элементов в неразложимой матрице гарантирует конвертируемость.

Наконец, в этой же главе автор рассматривает вопрос биективной (не обязательно знаковой) конвертации, доказывая, что таковой не существует над любым конечным полем характеристики, большей 2. Этот результат опирается на лемму, интересную и в других контекстах: над конечным полем характеристики, отличной от 2, есть больше нулей детерминанта, нежели перманента.

Материал диссертации представляет большой интерес для специалистов в области теории матриц, линейной алгебры, перечислительной комбинаторики, вычислительной математики.

Результаты диссертации М. В. Будревича имеют значительную научную ценность. Работа может быть востребована во многих отечественных и зарубежных математических центрах, где ведутся исследования, связанные с теорией матриц, перечислительной комбинаторикой, вычислительной математикой, математической статистикой. Полученные в работе результаты могут быть использованы в следующих организациях: МГУ им. М.В.Ломоносова, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Санкт-Петербургском государственном университете.

В работе использованы методы теории матриц, линейной и тензорной алгебры, теории графов.

**По диссертации имеются следующие замечания:**

1. Некоторые понятия определяются в меньшей общности, нежели необходимо для дальнейшего изложения. Так, понятие знаковой невырожденности вводится для матриц, состоящих из 0 и  $\pm 1$ . Однако в дальнейшем тексте обсуждается знаковая невырожденность произвольных вещественных матриц. Далее, после определения понятие свёртки матрицы  $\mathfrak{S}(A)$  по первой строке, в которой два первых элемента ненулевые, далее обозначение  $\mathfrak{S}(A)$  используется для произвольных свёрток матриц.

2. В доказательстве леммы 2.4.11 используется лемма 2.4.9. Однако в формулировке первой в каждом столбце матрицы не менее двух ненулевых элементов, а в формулировке второй — не более двух. Возможность использования леммы 2.4.9 никак не прокомментирована.

3. Работа содержит ряд опечаток и других неточностей. Так, в проблеме 3.1.2 в конце формулировки стоило бы поставить вопросительный знак. На стр. 97 вместо нулевой подматрицы речь идёт о ненулевой подматрице. Нумерация теорем во введении устроена другим образом, нежели во всей остальной работе; после этого ссылки типа «Теорема 2» воспринимаются плохо.

Приведенные замечания не ставят под сомнение основные результаты и значимость работы. Главные положения, выдвинутые диссертантом, являются новыми научными результатами. Они опубликованы в 7 печатных работах, 4 из которых в изданиях, рекомендованных ВАК, неоднократно представлялись на различных семинарах и конференциях. Работа соответствует всем

требованиям, установленных «Положением о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к кандидатским диссертациям. Автореферат хорошо отражает содержание диссертации.

Считаю, что М. В. Будревич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент, доцент кафедры  
высшей математики, МФТИ  
кандидат физ.-мат. наук  
3 ноября 2014



Богданов И. И.

**Контактная информация:**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Адрес: 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д.9.

Телефон: (495)–576–51–55.