ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе
Будревича Михаила Вячеславовича
"О конвертации перманента и определителя",
представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Диссертация посвящена условиям конвертируемости и свойствам конвертируемых и неконвертируемых матриц над полями. Квадратная матрица над полем называется конвертируемой, если вычисление её перманента сводится к вычислению определителя матрицы, полученной из исходной изменением знака некоторых элементов. Очевидно, любая матрица размера 2×2 конвертируема, но для матриц $n\times n$ при $n\geq 3$ выяснение, конвертируема матрица или нет, часто представляет собой трудную задачу. К тому же, в то время, как вычисление определителя может быть осуществлено за полиномиальное время, задача вычисления перманента принадлежит классу $\#P$. В связи с этими обстоятельствами тема диссертации представляется актуальной.

Автором получена серия результатов о конвертируемости и неконвертируемости матриц разных классов: действительны, неотрицательных действительных, матриц из 0 и 1, матриц над конечным полем, связи конвертируемости с размерами матрицы, свойствами её элементов, операциями над матрицами. Все результаты являются новыми, некоторые из них дают ответы на вопросы, поднятые специалистами этой теории. Результаты диссертации вносят существенный вклад в развитие данной теории.

Диссертация содержит введение, в котором приводится исторический работ по теории конвертации, основные постановки задач, а также обзор результатов диссертации.

Первая глава посвящена в основном конвертации действительных неотрицательных матриц. Автором получены необходимые и достаточные условия конвертируемости суммы двух неотрицательных матриц (теорема 1.3.13), кронекеровского произведения (теорема 1.4.17 и следствие 1.4.18). Найдено достаточное условие неконвертируемости произведений AB и BA, где A – максимальная (относительно множества ненулевых элементов) конвертируемая матрица (теорема 1.3.20). Доказано, что если A, B – неотрицательные матрицы, причём A неконвертируема и $\operatorname{per} B > 0$, то матрицы AB и BA неконвертируемы (теорема 1.3.23).

Во второй главе исследуются связи конвертируемости действительной матрицы A с количеством её ненулевых элементов $\nu(A)$, а также конвертируемость в специальном смысле симметрических матриц (симметрическая и слабо симметрическая конвертируемость). Гибсоном в 1976 г. была найдена верхняя граница конвертируемости $\Omega_n = \dfrac{n^2+3n-2}{2}$, а Гутерманом, Долинаром и Кузьмой в 2010 г. – нижняя граница конвертируемости $\omega_n = n+6$, то есть $\omega_n \leq \nu(A) \leq \Omega_n$ для любой конвертируемой неотрицательной матрицы A с положительным перманентом. Автором доказано, что при $n\geq 3$ для любого $r\in[\omega_n, \Omega_n]$ существует неконвертируемая $(0,1)$-матрица A и симметрическая слабо симметрически неконвертируемая матрица B такие, что $\nu(A)=\nu(B)=r$ (теоремы 2.2.3, 2.2.4). Ранее это было известно для матриц с $n\geq 26$. Далее, установлено, что для вполне неразложимых неотрицательных матриц нижняя граница конвертируемости другая, а именно, любая вполне неразложимая неотрицательная матрица A с $\nu(A) < 2n+3$ конвертируема (теорема 2.3.26). Если же требование вполне неразложимости заменить более слабым – неразложимости, то нижняя граница конвертирования останется равной $n+6$, а именно, автором приведены примеры неразложимых неконвертируемых $(0,1)$-матриц A с $\nu(A)=n+6$ (пример 2.3.28). Полностью описаны вполне неразложимые неконвертируемые $(0,1)$-матрицы A, у которых количество ненулевых элементов минимально, т.е. $\nu(A)=2n+3$ (теорема 2.4.13).

Третья глава посвящена конвертируемости матриц над конечными полями. Поле из q элементов будем обозначать $\mathbb{F}_q$, здесь $q=p^k$ и $\operatorname{char}\mathbb{F}_q=p$. Доказано, что любая квадратная матрица над полем $\mathbb{F}_3$ конвертируема (теорема 3.2.11), но над любым полем характеристики 3, отличным от $\mathbb{F}_3$, существует неконвертируемая 3×3-матрица (пример 3.2.12), а значит, есть неконвертируемые матрицы любых порядков $n\geq3$. Далее, для всякого поля $\mathbb{F}_q$ при $p\geq3$, $q\geq5$ существует неконвертируемая матрица любого порядка $n\geq3$ (теорема 3.2.14), а при $n\geq p-1$ существует конвертируемая матрица с ненулевым перманентом, не содержащая нулевых элементов (теорема 3.2.24). Это показывает, что в отличие от неотрицательных матриц для матриц над полями ненулевой характеристики верхней границы конвертирования нет. Для вполне неразложимых матриц над полем $\mathbb{F}_p$ при $p>2$ и $n\geq2p-6$ доказано, что достаточным условием конвертируемости является наличие столбца из ненулевых элементов и строки с не менее, чем $(p-3)\log_2((n-1)(p-1))+2$ ненулевыми элементами (теорема 3.2.29). Это позволяет строить много примеров конвертируемых матриц. Наконец, автор доказывает отсутствие биективного отображения множества $n\times n$-матриц над $\mathbb{F}_q$ в себя, переводящего определитель в перманент (теорема 3.4.12), предварительно доказав, что количество матриц с нулевым определителем превышает количество матриц с нулевым перманентом (теорема 3.4.10).

Результаты диссертации получены автором самостоятельно и представляют большой научный интерес. Утверждения снабжены убедительными доказательствами, зачастую достаточно тонкими и использующими широкий спектр методов комбинаторики и линейной алгебры. Многие из утверждений носят завершённый характер и дают исчерпывающие ответы на ряд вопросов теории конвертации.

Автореферат диссертации полно и правильно отражает её содержание.

Отмечу некоторые недостатки работы. Формула на с. 23 неверна. Правильная формула выглядит так: $\operatorname{per}\left(\sum_{i\neq j}E_{ij}\right)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{r!}$. Впрочем, далее эта формула в диссертации не используется. Знаковая невырожденность определена лишь для матриц из 0 и ±1 (определение 1.3.3), а далее используется для любых действительных матриц. Следствие 1.3.14 на самом деле следствием из теоремы 1.3.13 не является, так как в теореме предполагается, что $\operatorname{per}B>0$, а в следствии не предполагается. Ориентацию графа лучше называть пфаффовой, а не пфаффиановой, ведь мы же не говорим "лапласианов", "лагранжианов". В примере 2.2.5 (с. 54, 5-я строка сверху) написано "любых единиц", на самом деле единицы выбираются не произвольно. В теореме 2.3.26 A – любая матрица, а не только из 0 и 1. В лемме 3.2.17 элемент δ_1 определён неправильно; на самом деле определять его не нужно, а достаточно писать вместо него 0. В ряде мест перепутаны слова "нулевой" и "ненулевой" "конвертируемый" и "неконвертируемый", "строки" и "столбцы" (с. 50, 1-2-я снизу, с. 83, 7-я сверху, с. 91, 5-я снизу, с. 94, 2-я снизу). Замечание 3.2.25 лучше назвать гипотезой. На с. 30 в 6-й снизу строке пропущено слово "конвертируемых", а на с. 116 (3-я снизу) пропущено слово "результат". Имеется ошибка в определении элементов y_{ij} (с. 58), ошибки в формулах на с. 28 (3-я снизу), с. 45 (9-я снизу), с. 67 (7-я снизу), с. 85 (1-я снизу), с. 100 (4-я снизу), с. 101 (формула 3.11), с. 102 (8-я сверху), орфографические ошибки: с. 28 (9-я снизу), с. 92 (1-я сверху), с. 100 (8-я снизу). В названиях статей на немецком языке ([18], [19], [25]) существительные должны быть написаны с заглавной буквы.

Указанные недостатки не изменяют общего положительного впечатления о работе. Автор хорошо владеет различными методами алгебры и комбинаторике, а в теории матриц может считаться одним из ведущих специалистов. Результаты диссертации могут быть использованы в спецкурсах по общей алгебре, читаемых в МГУ, МПГУ, Новосибирском, Саратовском и других университетах. Они могут быть полезны специалистам научно-исследовательских математических институтов и несомненно будут являться основой для дальнейших исследований в теории матриц.

Считаю, что диссертационная работа "О конвертации перманента и определителя" удовлетворяет всем требованиям "Положения о порядке присуждения учёных степеней" ВАК, а её автор Будревич М.В. заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Автор отзыва Кожухов Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, профессор.

Место работы, должность: Национальный исследовательский университет "МИЭТ", профессор кафедры Высшая математика – 1

Домашний адрес и телефон: 124460, Москва, корпус 1209, кв. 51, 916-715-55-02.

Электронная почта: kozhuhov_i_b@mail.ru

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры ВМ-1 НИУ МИЭТ И.Б.Кожухов

Подпись Кожухова И.Б. удостоверяю
Секретарь Учёного Совета НИУ МИЭТ, к.т.н. Н.М.Ларионов