ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова”

На правах рукописи

АЛИМОВ Алексей Ростиславович

Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва
2014

Работа выполнена в ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", лаборатория вычислительных методов механико-математического факультета

Научный консультант:	ЦАРЬКОВ Игорь Германович доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	ЩЕПИН Евгений Витальевич член-корреспондент РАН (ФГБУН "Математический институт им. В. А. Стеклова РАН", отдел геометрии и топологии, главный научный сотрудник)
	ИВАНОВ Григорий Евгеньевич доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ "Московский физико-технический институт (государственный университет)", профессор кафедры высшей математики)
	ЛИВШИЦ Евгений Давидович доктор физико-математических наук ("ООО Эвенроут", руководитель исследовательской группы)
Ведущая организация:	ФГБУН "Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН"

Защита диссертации состоится 17 апреля 2015 г. в 16:45 на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО "МГУ им. М. В. Ломоносова" по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета `http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi`

Автореферат разослан 10 марта 2015 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе
ФГБОУ ВО "МГУ им. М. В. Ломоносова",
доктор физико-математических наук,
профессор — Сорокин В. Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Геометрическая теория приближений во многом берет начало от исследований П. Л. Чебышева, который ввел в науку понятие наилучшего равномерного приближения и систематически применял его в приложениях, Г. Минковского, который впервые исследовал нормы, отличные от евклидовой, и А. Хаара, который изучал чебышёвские подпространства (системы Чебышева) в пространстве непрерывных функций. Позднее их идеи были перенесены на случай приближения в абстрактных пространствах. Таким образом возникли понятия чебышёвского множества и солнца. Сами термины "чебышёвское множество" и "солнце" были введены Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в 1950-х годах[1].

Величиной наилучшего приближения, или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$, называется величина

$$\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Понятия и свойства, определяемые в терминах наилучшего приближения, в частности, свойства существования, единственности, устойчивости элементов наилучшего приближения, называются *аппроксимативными*. Таким является прежде всего понятие элемента наилучшего приближения, или ближайшей точки. Это есть (для заданного $x \in X$) такая точка $y \in M$, для которой $\|x-y\| = \rho(x, M)$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения, или, кратко, наилучших приближений) в M для заданного x обозначается $P_M x$. Иными словами,

$$P_M x := \bigl\{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\bigr\}.$$

Напомним, что подмножество M линейного нормированного (или несимметрично нормированного) пространства X называется *чебышёвским*, если для каждого $x \in X$ элемент наилучшего приближения из M существует и единственен (т.е. $\operatorname{card} P_M x = 1$ для любого $x \in X$). К примеру, множества $\mathcal{R}_{m,n}$ дробно-рациональных функций и $\mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше n являются чебышёвскими множествами в пространстве $C[a, b]$.

Для подмножества $M \neq \varnothing$ линейного нормированного пространства X точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x$ такая, что

$$y \in P_M\bigl((1-\lambda)y + \lambda x\bigr) \quad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0. \tag{1}$$

[1] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, Некоторые свойства чебышёвских множеств, *Докл. АН СССР* **118** (1) (1958), 17–19.

Геометрически условие (1) означает, что из точки y исходит "солнечный" луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M.

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Если же для $x \in X \setminus M$ условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$, то точка x называется *точкой строгой протосолнечности* (при этом, в отличие от точки строгой солнечности, существование ближайшей точки y к x не предполагается).

Замкнутое непустое множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно, *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно, строгой солнечности) для M. Множество $\varnothing \neq M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой строгой протосолнечности.

Понятие солнца (строгого (прото)солнца) тесно связано с понятием множества Колмогорова – такие множества удовлетворяют известному критерию Колмогорова ближайшего элемента, хорошо известному для выпуклых множеств и, в частности, для подпространств. Иными словами, точка, не принадлежащая солнцу, строго отделяется от него посредством выпуклого открытого опорного конуса.

В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными и геометрическими свойствами множеств в абстрактных и конкретных пространствах. Наряду с чебышёвскими множествами активно изучаются и "солнечные" свойства подмножеств линейных нормированных пространств, представляющие собой аппроксимативно-геометрическую характеристику

"Солнца" обладают важными характеристическими признаками. Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса. Эти свойства стоят в одном ряду с известными свойствами отделимости выпуклых множеств посредством полупространств (гиперплоскостей).

В работе изучаются структурные, геометрически-топологические характеристики солнц и чебышёвских множеств (в частности, связность и выпуклость). Получены как прямые теоремы геометрической теории приближений, в которых из структурных характеристик множеств выводят их аппроксимативные свойства, так и обратные теоремы, в которых из аппроксимативных свойств выводятся структурные характеристики. В качестве аппроксимативных характеристик множеств рассматриваются свойства единственности, существования наилучшего приближения, чебышёвости, аппроксимативной компактности и солнечности. К структурным характеристикам множеств обычно относят свойства линейности, конечномерности, компактности, выпуклости, различной связности и гладкости этих множеств.

Обратные теоремы по отношению к приложениям выступают в следующей роли. Выяснив, что исследуемый объект не обладает “хорошими” структурными характеристиками, из этих теорем выводится, что он не обладает и “хорошими” аппроксимативными свойствами. Обычно, таким путем удается установить, что данный объект не является множеством существования или единственности.

Область применения геометрической теории приближений на сегодняшний день лежит в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами (А. В. Фурсиков[2], М. В. Яшина), теории некорректных задач (В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана[3], Ф. Фарачи, А. Ианидзотто, Л. Зайичек), теории неоднозначной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений (И. Г. Царьков[4], Б. Ричери, Ф. Фарачи, А. Ианидзотто и др.), теории приближения функций (С. В. Конягин, А. Л. Гаркави, С. Я. Хавинсон, И. Г. Царьков, П. А. Бородин, К. С. Рютин и др.), топологических минимаксных теоремах (Х. Кёниг, Б. Ричери), теории критических точек в негладком случае (Д. Браесс, Б. Ричери и др.), теории обучения при построении оптимального оценщика (Ю. В. Малыхин), при исследовании устойчивости по различным параметрам решений общих экстремальных задач и многозначных отображений (В. И. Бердышев[5], А. В. Маринов[6], Ф. Дойч, Дж. М. Ламберт, П. Шварцман, М. В. Балашов и Д. Реповш, М. В. Балашов и М. О. Голубев, К. В. Чеснокова и др.), а также в выпуклом анализе – к примеру, при исследовании функции Моро и связанного с ней свойства проксрегулярности множеств и функций, которое является локальным вариантом свойства проксимальной гладкости и играет важную роль (как в теоретическом, так и в вычислительном аспектах) в оптимизации, вариационном анализе, нелинейном анализе и задачах восстановлении сигналов (Р. А. Поликвин и Р. Т. Рокафелар, Ф. Бернард и Л. Тибо, Б. Ричери, Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, Г. Е. Иванов[7], А. Журани, Л. Тибо, Д. Загродны, В. Н. Соловьев и др.)

---

[2] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Новосибирск, Научная книга, 1999.

[3] В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана, *Теория линйеных некорректных задач и ее приложения*, Наука, Москва, 1988.

[4] И. Г. Царьков, Аппроксимативная компактность и неединственность в вариационных задачах и их приложения к дифференциальным уравнениям, *Матем. сб.* **202**:6, 133–158 (2011).

[5] В. И. Бердышев, Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:3 483–509 (1980).

[6] А. В. Маринов, Константы Липшица оператора метрического ε-проектирования в пространствах с заданными модулями выпуклости и гладкости, *Изв. РАН. Сер. матем.* **62**:2, 103–130 (1998).

[7] М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.* **73**:3, 23–66 (2009).

Цели и задачи исследования.

Основной целью работы является решение ряда открытых давно стоящих задач геометрической теории приближений и геометрии линейных нормированных и несимметрично нормированных пространств.

В диссертации исследуются следующие задачи:

- дать описание в геометрических терминах чебышёвских множеств в пространстве $\ell^\infty(n)$;
- установить солнечность монотонно связных чебышёвских множеств в произвольных линейно нормированных пространствах;
- изучить аппроксимативно-геометрические свойства монотонно линейно связных множеств и множеств, связных по Менгеру;
- установить свойство универсальности пространства непрерывных функций для линейных несимметрично нормированных пространств и пространств с несимметричной метрикой;
- охарактеризовать пространства конечной размерности, симметрично или несимметрично нормированные, в которых всякое чебышёвское множество выпукло;
- показать, что в пространстве c_0 всякое солнце связно (и, более того, монотонно линейно связно);
- доказать, что в сепарабельном банаховом пространстве компактное связное по Менгеру множеству экстремально клеточноподобно (и, в частности, ограниченно ациклично);
- установить наличие непрерывной ε-выборки для любого $\varepsilon > 0$ (из оператора почти наилучшего приближения) при приближении солнцами в широком классе конечномерных банаховых пространств.

Методика исследования

Методика диссертации включает использование многочисленных результатов из вещественного и выпуклого анализа, геометрии банаховых пространств, теории выпуклых многогранников, теории неподвижных точек, теории приближений и геометрической топологии. Введенное автором [1] новое понятие "монотонная линейная связность" оказалось естественным и значимым в ряде классических задач геометрической теории приближения.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- Впервые предъявляется пример негладкого классического бесконечномерного банахова пространства, не являющегося неквадратным, в котором всякое солнце связно (и, более того, монотонно линейно связно).

- Показано, что в произвольном линейном нормированном пространстве монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем.

- Установлено свойство универсальности пространства непрерывных функций для линейных несимметрично нормированных пространств и пространств с несимметричной метрикой.

- Получена геометрическая характеризация чебышёвских множеств в пространстве $\ell^\infty(n)$ (задача В. М. Тихомирова–Х. Беренса).

- Установлена экстремальная клеточноподобность (в конечномерном случае – экстремальная стягиваемость) и монотонная линейная связность ограниченно компактных m-связных (по Менгеру) множеств в сепарабельных банаховых пространствах.

- В широком классе конечномерных банаховых пространств показано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε-выборка (из оператора почти наилучшего приближения) при приближении солнцами.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Развитые в ней методы могут применяться в задачах теории приближений, выпуклом анализе, уравнениях в частных производных, а также при исследовании вопроса единственности решений задач оптимального управления системами, которые описываются с помощью нелинейных краевых задач.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация результатов диссертации

Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на следующих семинарах:

МГУ, механико-математический факультет:

- семинар по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН проф. П. Л. Ульянова (2005 г.);

- семинар по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН проф. Б. С. Кашина, д.ф.-м.н. проф. Б. И. Голубова, д.ф.-м.н. проф. М. И. Дьяченко и чл.-корр. РАН проф. С. В. Конягина (неоднократно, 2012–2014 гг.);
- семинар "Теория приближений" под руководством д.ф.-м.н. проф. И. Г. Царькова (неоднократно, 1995–2014 гг.);
- семинар "Теория приближений и теория экстремальных задач" под руководством д.ф.-м.н. проф. В. М. Тихомирова и д.ф.-м.н. проф. Г. Г. Магарил-Ильяева (неоднократно, 1999–2014 гг.);
- семинар "Тригонометрические и ортогональные ряды" под руководством д.ф.-м.н. проф. Т. П. Лукашенко, д.ф.-м.н. проф. М. И. Дьяченко, д.ф.-м.н. проф. В. А. Скворцова и д.ф.-м.н. проф. М. К. Потапова (2014 г.);
- научно-исследовательский семинар по алгебре под руководством д.ф.-м.н. проф. А. В. Михалева, д.ф.-м.н. проф. В. Н. Латышева, д.ф.-м.н. проф. В. А. Артамонова, д.ф.-м.н. проф. В. К. Захарова, д.ф.-м.н. проф. Е. С. Голода (2014 г.);
- семинар "Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения" под руководством д.ф.-м.н. проф. А. В. Фурсикова, д.ф.-м.н. проф. В. М. Тихомирова, член-корр. РАН проф. М. И. Зеликина и д.ф.-м.н. проф. В. Ю. Протасова (2012–2014 гг);
- семинар "Геометрическая теория приближений" под руководством д.ф.-м.н. доц. П. А. Бородина (неоднократно, 2011–2014 гг).

Московский физико-технический институт (государственный университет):

- семинар "Многозначный анализ" под руководством д.ф.-м.н. проф. М. В. Балашова, д.ф.-м.н. проф. Г. Е. Иванова и д.ф.-м.н. проф. Е. С. Половинкина (2013, 2014 гг.).

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН:

- семинар "Теория приближений" под руководством д.ф.-м.н. проф. С. А. Теляковского (неоднократно, 1995–2014 гг.).

Российский университет дружбы народов:

- семинар "Экстремальные задачи и нелинейный анализ" под руководством д.ф.-м.н. проф. А. В. Арутюнова (2014 г.).

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук:

- семинар отдела теории приближений (2000, 2014 гг.).

За рубежом: на семинаре "Lehrstuhl Mathematik IV" под руководством проф. Г. Нюрнбергера (университет Маннгейм, Германия, 2002 г.), на семинаре "Konvexe Analysis" под руководством проф. П. Грубера (Technische Universität Wien, Австрия, 1999 г.), а также на семинаре "Approximationstheorie" под руководством проф. Х. Беренса и проф. Х.-И. Шмидта (математический институт, университет Эрланген–Нюрнберг, Германия, 1999, 2001, 2007 гг.).

Результаты диссертации также докладывались на всероссийских и международных научных конференциях:

7-я, 11-я и 17-я международные Саратовские зимние школы "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 28 января–7 февраля 1996 г., 28 января–4 февраля 2002 г., 27 января–03 февраля 2014 г.) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференций;

Воронежские зимние математические школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 27 января–02 февраля 2005 г., 27 января–2 февраля 2009 г.) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференций;

международная конференция "Теория приближений", посвященная 90-летию со дня рождения Сергея Борисовича Стечкина (Москва, 23–26 августа 2010 г.) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференции;

международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященная столетию С. М. Никольского (Москва, 23–29 мая 2005 г.), а также на ряде Школ Стечкина по теории функций, теории аппроксимаций и приложениям (1998, 2002, 2010, 2014 гг.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 21 работе автора, входящих в список изданий, рекомендуемых ВАК. [1–21].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех глав и списка цитируемой литературы, насчитывающего 268 наименований. Полный объем диссертации составляет 212 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во ***введении*** подробно описываются задачи исследования с историей соответствующей тематики, описываются методика и теоретическая значимость, а также формулируются основные результаты.

В ***первой главе*** в § 1.1 рассматривается классическая задача о характеризации банаховых пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло. Классическая теорема В. И. Бердышева–А. Брондстеда–А. Л. Брауна, характеризующая пространства размерности 3 и 4, в которых всякое чебышёвское множество выпукло, обобщается на случай несимметрично нормированных пространств.

Точка s, лежащая на границе единичного шара B линейного нормированного пространства X называется точкой *гладкости* шара B, или единичной сферы S ($s \in \operatorname{sm} B$), если опорная гиперплоскость к шару B в точке s единственна. Точка s называется *достижимой* точкой шара B ($s \in \exp B$), если найдется опорная гиперплоскость H к шару B в точке s такая, что $H \cap B = \{s\}$.

Для двумерных пространств вопрос о выпуклости чебышёвских множеств был решен в 1930-х гг. в работах Л. Н. Бунта и Т. Моцкина: в пространстве X, $\dim X = 2$, всякое чебышёвское множество выпукло если и только если пространство гладко, т.е. все точки единичной сферы являются точками гладкости.

В трехмерном случае ответ на вопрос о выпуклости чебышёвских множеств (теорема 1.A) получен независимо В. И. Бердышевым[8] и А. Брондстедом[9].

Теорема 1.A. *Пусть X – линейное нормированное пространство, $\dim X = 3$. Тогда каждое чебышёвское множество в X выпукло если и только если каждая достижимая точка шара B является точкой гладкости.*

Продолжая изучение вопроса о том, в каких пространствах любое чебышёвское множество выпукло, А. Л. Браун[10] ввел важное понятие *граневой системы выпуклых множеств*. Напомним, что *грань* выпуклого множества K – это непустое выпуклое экстремальное подмножество $F \subset K$ (т.е. если $\lambda a + \mu b \in F$, где $\lambda, \mu > 0$ и $\lambda + \mu = 1$, то $a, b \in F$), *достижимая грань* множества K – непустое пересечение K с опорной гиперплоскостью к K.

Семейство $\mathcal{F}$ непустых замкнутых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ называется *граневой системой выпуклых множеств*, если оно обладает следующими свойствами:

(F1) если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ и $\cap\mathcal{G} \neq \varnothing$, то $\cap\mathcal{G} \in \mathcal{F}$;

(F2) если $F, G \in \mathcal{F}$ и $F \subset G$, то F – грань множества G;

---

[8] В. И. Бердышев, К вопросу о чебышёвских множествах, *Докл. АзССР* **22** (9), (1966), 3–5.

[9] A. Brøndsted, Convex sets and Chebyshev sets II, *Math. Scand.* **18** (1), (1965), 5–15.

[10] A. L. Brown, Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **41** (1980), 297–339.

(F3) для каждого натурального k множество $\cup\{F^k \mid F \in \mathcal{F}\}$ замкнуто в произведении $(\mathbb{R}^n)^k$.

Если K – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, то семейство его собственных граней является граневой системой выпуклых множеств, равно как и семейство его достижимых граней.

Теорема 1.B (Браун)**.** *Пусть $\mathcal{F}$ – граневая система выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что x_0 – экстремальная точка некоторого элемента $F \in \mathcal{F}$, N – окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $N \subset (\cup_{F\in\mathcal{F}} F)$. Если $n = 1, 2$ или 3, то $\{y\} \in \mathcal{F}$ для некоторого $y \in N$.*

Пусть $[\![\mathrm{F}_n]\!]$ – утверждение теоремы 1.B, в котором фраза "если $n = 1, 2$ или 3" опущена из третьего предложения. Таким образом, теорема 1.B утверждает $[\![\mathrm{F}_1]\!]$, $[\![\mathrm{F}_2]\!]$ и $[\![\mathrm{F}_3]\!]$. Верно ли утверждение $[\![\mathrm{F}_n]\!]$ при $n \geqslant 4$ не известно.

Применяя свой результат $[\![\mathrm{F}_3]\!]$ к некоторой граневой системе выпуклых множеств в $\mathbb{R}^4$, построенной по чебышёвскому множеству, и используя тонкие методы геометрической топологии, А. Л. Браун установил следующий результат.

Теорема 1.C. *Пусть X – линейное нормированное пространство, $\dim X = n < \infty$. Предположим, что выполнено условие $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ или $n \leqslant 4$. Тогда каждое чебышёвское множество в X выпукло если и только если каждая достижимая точка шара B является точкой гладкости.*

В теореме 1.1 мы обобщаем классический критерий выпуклости чебышёвских множеств (теоремы 1.A, 1.C) на случай несимметрично нормированных пространств и усиливаем его на случай M-действующих точек относительно рассматриваемого множества M.

Несимметричной нормой на X называется неотрицательный сублинейный функционал $\|\cdot\|$ такой, что для всех $x, y \in X$

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ для всех $\alpha \geqslant 0$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

В общем случае, $\|x\| \neq \|-x\|$.

Для данного непустого множества $M \subset X$ точка $s \in S$ называется *M-действующей* (здесь буква "M" означает рассматриваемое множество M), если

$$s \in (P_M x - x)/\rho \ \text{ для некоторого } \ x \notin M, \quad \text{где } \ \rho = \rho(x, P_M x).$$

Иными словами, для данной M-действующей точки ее "аналогом" (при растяжении и сдвиге единичного шара) можно коснуться множества M.

В следующей теореме дается наилучший на настоящий момент ответ в классической задаче о характеризации пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло.

Теорема 1.1. *Пусть X – линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство,* $\dim X = n < \infty$. *Предположим, что выполнено условие Брауна* $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ *или* $n \leqslant 4$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) *каждое чебышёвское множество M в X выпукло*;
b) *каждая достижимая точка шара B является точкой гладкости*;
c) *каждая достижимая M-действующая точка шара B является точкой гладкости.*

В § 1.2 рассматривается задача о структуре дополнения к чебышёвским множествам, солнцам и строгим солнцам и раскрывается ее связь с классической задачей о характеризации пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло. При рассмотрении такого класса задач естественно возникают несимметричные нормы. В § 1.3 рассматривается классическая задача о выпуклости чебышёвского множества M в линейном нормированном или несимметрично нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ при дополнительном условии $M \subset H$, где H – подпространство в X.

Пусть B – единичный шар в X. Устанавливается, что если $M \subset H$ – чебышёвское множество в X, а $|\cdot|_{H,\theta}$ – несимметричная норма на H, определяемая функционалом Минковского множества $(B-\theta)\cap H$ относительно 0, где $\|\theta\| < 1$ – произвольно, то M – чебышёвское множество в $(H, |\cdot|_{H,\theta})$ при любом выборе θ. Исходя из этого утверждения даются достаточные признаки и необходимые признаки выпуклости чебышёвских множеств M и ограниченных чебышёвских множеств M в X при условии $M \subset H$.

Во ***второй главе*** рассматривается классический вопрос об универсальности пространства непрерывных функций для пространств с несимметричной нормой и несимметричной метрикой. Классический результат, восходящий к Банаху и Мазуру, утверждает изометрическую универсальность пространства $C[0,1]$ для всех сепарабельных линейных нормированных пространств. Другой не менее известный результат, также именуемый теоремой Банаха–Мазура, утверждает, что всякое сепарабельное метрическое пространство изометрично некоторому подмножеству пространства $C[0,1]$. Для несепарабельного случая аналоги этих утверждений получены Кляйбером и Первиным[11]. Мы распространяем эти результаты на линейные пространства с несимметричной нормой и пространства с несимметричной метрикой.

[11] M. Kleiber, W. J. Pervin, A generalized Banach–Mazur theorem, *Bull. Austral. Math. Soc.* **1** (1969), 169–173.

Несимметричные нормы возникли по-видимому впервые у Г. Минковского (“функционал Минковского”), в бесконечномерный анализ они были привнесены М. Г. Крейном[12] – он ввел термин “*несимметричная норма*” и отмечает, что несимметричные нормы возникают при исследовании экстремальных вопросов, связанных с проблемой моментов Маркова. Важность несимметричных норм в ряде задач выпуклого анализа и математического анализа отмечается, к примеру, Х. Кёнигом, а также Г. Е. Ивановым и М. С. Лопушански[13].

Ряд задач наилучшего приближения в несимметричной норме рассматривался Р. Даффиным и Л. Карловицем, в том числе приближения в пространствах непрерывных и интегрируемых функций. Ч. Данхем исследовал вопрос наилучшего несимметричного приближения элементами конечномерных подпространств, установив ряд результатов о существовании и единственности наилучшего приближения. М. Пфаннкюхе-Винклер изучал условия, гарантирующие непрерывность метрической проекции в несимметрично нормированных пространствах Орлича. Общие теоремы существования наилучшего несимметричного приближения в банаховых пространствах были получены Ф. С. ДеБлази и Й. Мийак.

Естественно возникают несимметричные расстояния и в теории приближений функций. В этой связи отметим работы Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова, В. Ф. Бабенко, Б. В. Симонова, А. И. Козко, А. В. Покровского, А. А. Чумака, А.-Р. К. Рамазанова, Е. Х. Садековой, а также монографии Л. Коллатца, В. Краббса[14] и С. Кобзаша[15]. В частности, В. Ф. Бабенко[16] отметил, что приближения в пространствах с несимметричными нормами оказываются “мостиком” между наилучшими приближениями и наилучшими односторонними приближениями.

С точки зрения приложений представляется интересным исследование аппарата несимметричных норм в связи с задачами теоретической информатики при анализе сложности программ (Л. М. Гарсиа–Раффи, С. Ромагуера, Э. А. Санчес–Перез, О. Валеро, Г. Майор и др.).

В геометрической теории приближений и выпуклом анализе несиммет-

---

[12] М. Г. Крейн, L-проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве, в кн. Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов*, ГОНТИ, Харьков (1938), 171–199.

[13] Г. Е. Иванов, М. С. Лопушански, О корректности задач аппроксимации и оптимизации для слабо выпуклых множеств и функций, *Фунд. прикл. матем.* **18** (5), (2013).

[14] Л. Коллатц, В. Крабс, *Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения*, Наука, Москва, 1978.

[15] S. Cobzaş, *Functional analysis in asymmetric normed spaces*, Birkhäuser, Basel, 2012.

[16] В. Ф. Бабенко, Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций, *Укр. матем. журн.* **34** (4), (1982), 409–419.

ричные расстояния рассматривались в работах А. Брондстеда[17], Е. Асплунда[18], П. А. Бородина[19], [20], Г. Е. Иванова[21], Г. Е. Иванова и М. С. Лопушански, а также в работах автора[22], [23], [6], [11].

Новое направление теория универсальных пространств получила в работе П. А. Бородина[19] – им найдено пространство, универсальное для метризуемых сепарабельных линейных пространств с несимметричной нормой.

Бородин установил, что если $(X, \|\cdot\|)$ – линейное пространство с несимметричной нормой, сепарабельное относительно нормы

$$\|x\|_{\mathrm{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\},$$

то оно изометрично изоморфно линейному многообразию преднормированного пространства $C([0,1],1,0)$, где последнее есть линейное пространство непрерывных функций $f \in C[0,1]$, снабженное *пред*нормой

$$p(f) = \|f_+\|_{C[0,1]}, \quad f_+(t) = \max\{f(t), 0\}, \quad t \in [0,1].$$

В теореме 2.1 устанавливается еще одно свойство универсальности единичного шара пространства $C[0,1]$ и показывается, что *метризуемые* сепарабельные несимметрично нормированные пространства X можно изометрически изоморфно вложить в классическое $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие; иными словами, единичный шар пространства X можно представить, с точностью до изометрического изоморфизма, как пересечение единичного шара пространства $C[0,1]$ с некоторым линейным многообразием, пересекающим его по внутренности. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что *неметризуемое* несимметрично нормированное пространство X не вкладывается в $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ как аффинное линейное многообразие ни при каком $\mathfrak{a}$.

Теорема 2.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное пространство с несимметричной нормой. Пространство $(X, \|\cdot\|)$ можно изометрически изоморфно вложить в $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие L в том и только в том случае, если X метризуемо и сепарабельно.*

---

[17] A. Brøndsted, Convex sets and Chebyshev sets II, *Math. Scand.* **18** (1), (1965), 5–15.

[18] E. Asplund, Sets with unique farthest points, *Isr. Math. J.* **5** (1967), 201–209.

[19] П. А. Бородин, Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения в выпуклом анализе, *Матем. заметки* **69** (3), (2001), 329–337.

[20] П. А. Бородин, О выпуклости n-чебышевских множеств, *Изв. РАН. Сер. матем.* **75** (5), (2011), 19–46.

[21] G. E. Ivanov, On well posed best approximation problems for a nonsymmetric seminorm, *J. Conv. Anal.* **20** (2), (2013), 501–529.

[22] A. R. Alimov, A number of connected components of sun's complement, *East J. Approx.* **1** (4), 1995, 419–429.

[23] A. R. Alimov, Chebyshev set's complement, *East J. Approx.* **2** (2), 1996, 215–232.

Обобщением классических теорем Банаха–Мазура для метрических пространств на случай пространств с несимметричной метрикой являются следующие утверждения. Сформулируем отдельно сепарабельный и несепарабельный случаи.

Теорема 2.2. *Пространство X с несимметричной метрикой ϱ изометрично вкладывается в несимметрично преднормированное пространство $C([0,1],1,0)$ в том и только в том случае, когда X сепарабельно относительно метрики $d(x,y)=\max\{\varrho(x,y),\varrho(y,x)\}$.*

Теорема 2.3. *Пусть $\mathfrak{a}$ – бесконечное кардинальное число. Пространство X с несимметричной метрикой ϱ можно изометрично вложить в несимметрично преднормированное пространство $C([0,1]^{\mathfrak{a}},1,0)$ в том и только в том случае, когда X имеет плотность $\leqslant \mathfrak{a}$ относительно метрики $d(x,y)=\max\{\varrho(x,y),\varrho(y,x)\}$.*

Здесь, как обычно, *плотность* пространства X – это наименьшее кардинальное число $d(X)$ вида $|A|$, где A – всюду плотное подмножество пространства X. Если $d(X)\leqslant\aleph_0$, то говорят, что пространство сепарабельно.

В ***третьей главе*** рассматриваются вопросы связности и солнечности чебышёвских множеств и солнц. Напомним, что известно о связности таких множеств в общих линейных нормированных пространствах.

Хорошо известно, что в гладких пространствах (и только в них) всякое солнце выпукло. Поэтому вопрос о связности солнц является содержательным только в негладких пространствах.

В конечномерном случае первый нетривиальный результат о связности солнц в был получен В. А. Кощеевым[24]: *в конечномерном линейном нормированном пространстве всякое солнце связно.* Наилучший общий результат о связности солнц в произвольном конечномерном пространстве принадлежит А. Л. Брауну[25]. Именно, *если M – солнце в конечномерном линейном нормированном пространстве X, то оно линейно связно и локально линейно связно. Более того, существуют положительные константы L и α, зависящие только от X такие, что для любых различных точек $x,y\in M$ найдется путь $s:[0,1]\to M$, соединяющий x и y, такой, что $\|s(\xi)-s(\eta)\|\leqslant L\|x-y\|\cdot|\xi-\eta|^{\alpha}$ для всех $\xi,\eta\in[0,1]$.*

В бесконечномерном случае оказалось, что проблема связности чебышёвских множеств отлична от проблемы связности солнц. В известных примерах несвязных чебышёвских множеств (Ч. Данхем, В. Кли) построенные множества не являются солнцами. Единственный пример несвязно-

[24] В. А. Кощеев, Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах, *Матем. заметки* **17** (2), (1975), 193–204.

[25] A. L. Brown, On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces, *Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ.* **20** (1988), 1–15.

го солнца (в бесконечномерном пространстве) построен Кощеевым[26]. Отметим, что построенное Кощеевым несвязное солнце не является чебышёвским множеством. Кощеев также установил, что компактное солнце в линейном нормированном пространстве связно, ограниченно компактное строгое солнце в произвольном линейном нормированном пространстве B-связно (т.е. его пересечение с любым замкнутым шаром связно) и что произвольное солнце в равномерно неквадратном банаховом пространстве связно. Структура солнц и чебышёвских множеств в пространствах с равномерной нормой также изучалась Х. Беренсом и Л. Хетцельтом, Д. Браессом, Ч. Данхемом и другими.

В конкретных пространствах важное продвижение в вопросе о структуре солнц и, в частности, в задаче об их связности, было получено Беренсом и Хетцельтом[27] в конечномерном пространстве $\ell^\infty(n)$.

Теорема 3.A (Беренс, Хетцельт)**.** *Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ если и только если оно замкнуто и ℓ^1-выпукло.*

Напомним, что подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется ℓ^1-*выпуклым* (метрически выпуклым относительно ℓ^1-нормы), если для всех $x, y \in M$, $x \neq y$, найдется точка $z \in M$, $z \neq x, y$, такая, что

$$\|x - y\|_1 = \|x - z\|_1 + \|z - y\|_1;$$

здесь $\|\cdot\|$ – обычная ℓ^1-норма на $\mathbb{R}^n$.

Теорему 3.A можно усилить следующим естественным образом: множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ если и только если оно замкнуто и является *монотонно линейно связным*, что приводит к важному понятию монотонно линейно связного множества, введенному автором в [1]. Именно, пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, – непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Кривая $k(\cdot)$ называется *монотонной*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$ (здесь и далее $\operatorname{ext} S^*$ – множество экстремальных точек сопряженной сферы S^*). Мы называем замкнутое подмножество $M \subset X$ *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$.

Оказывается, что понятие монотонно линейно связного множества является вполне естественным при исследовании аппроксимативно-геометрических свойств множеств в банаховых пространствах. К примеру, давно известно (Вулберт, 1967), что множество $\mathcal{R}_{n,m}$ дробно-рациональных

---

[26] В. А. Кощеев, Пример несвязного солнца в банаховом пространстве, *Матем. заметки* **26** (1) (1979), 89–92.

[27] H. Berens, L. Hetzelt, Die metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$, *Aequat. Math.* **27** (1984), 274–287.

функций в $C[0,1]$ является $\mathring{B}$-связным (т.е. пересечение $\mathcal{R}_{n,m}$ с произвольным открытым шаром связно). С.В. Конягин[28] показал, что в $C[0,1]$ для любого $\varepsilon > 0$ на множество $\mathcal{R}_{V,W}$ классических дробно-рациональных функций или обобщенных дробно-рациональных функций $\mathcal{R}_{V,W}$ (V, W – подпространства) существует непрерывная ε-выборка, т.е. однозначная непрерывная выборка из отображения

$$x \mapsto P_M^\varepsilon x := \{y \in M \mid \|x - y\| \leqslant \operatorname{dist}(x, M) + \varepsilon\}.$$

Мы показываем, что пересечение множества $\mathcal{R}_{V,W}$ обобщенных дробно-рациональных функций (V, W – произвольные выпуклые подмножества пространства $C(Q)$) с замкнутым шаром монотонно линейно связно и стягиваемо, что с учетом одного результата И. Г. Царькова[29] дает, что для любого $\varepsilon > 0$ на множество $\mathcal{R}_{V,W}$ обобщенных дробно-рациональных функций в $C[0,1]$ существует непрерывная ε-выборка.

Далее, нам потребуется следующее определение. Следуя А. Л. Брауну для ограниченного множества $\varnothing \neq M \subset X$ определим *оболочку Банаха–Мазура* $\mathrm{m}(M)$ множества M, т. е. пересечение всех замкнутых шаров, содержащих M.

Подмножество $M \subset X$ называется m-*связным* (*связным по Менгеру*), если

$$\mathrm{m}(\{x, y\}) \cap M \neq \{x, y\}$$

для любых различных точек $x, y \in M$. Для краткости далее обозначаем $\mathrm{m}(\{x, y\}) = \mathrm{m}(x, y)$.

Важным свойством оболочки Банаха–Мазура $\mathrm{m}(\cdot, \cdot)$ (по крайней мере, в сепарабельных пространствах X) является то, что $z \in \mathrm{m}(x, y)$ если и только если z лежит метрически между x и y относительно так называемой ассоциированной (по Брауну) нормы $|\cdot|$ (т.е. $|x - y| = |x - z| + |z - y|$). Для пространства $\ell^\infty(n)$ ассоциированной нормой является стандартная ℓ^1-норма, при этом для замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$ ℓ^1-выпуклость по Менгеру равносильна монотонной линейной связности.

Следуя Л. П. Власову, если Q обозначает некоторое свойство (например, “связность”), мы будем говорить, что множество M обладает свойством

P-Q, если при всех $x \in X$ множество $P_M(x)$ непусто и обладает свойством Q;

[28] С. В. Конягин, О непрерывности оператора обобщенного рационального приближения, *Матем. заметки* **44** (3), (1988), 404.

[29] И. Г. Царьков, Множества, обладающие непрерывной выборкой из оператора почти наилучшего приближения, в кн. *Современные проблемы математики и механики. К* 80-*летию механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.* Изд-во МГУ, 2014, стр. 54–58.

B-Q, если $M \cap B(x,r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;

$\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x,r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$.

экстремально Q, если $M \cap \Pi$ обладает свойством Q для любого бруса Π в X (по определению, брусы суть пересечения экстремальных гиперполос вида $\{x \in X \mid a \leqslant f(x) \leqslant b\}$, $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, $f \in \operatorname{ext} S^*$, порождаемых в исходном пространстве экстремальными функционалами из S^*).

К примеру, замкнутое подмножество конечномерного пространства P-непусто, или является множеством существования. Также отметим, что *монотонно линейно связное множество необходимо экстремально монотонно линейно связно.*

Отметим, что в банаховом пространстве каждое замкнутое $\mathring{B}$-связное множество линейно связно[30]. Для незамкнутых множеств это неверно даже в $X = \mathbb{R}^2$ (соответствующий пример построен Е. В. Щепиным).

В дальнейшем идеи и результаты Х. Беренса и Л. Хетцельта получили развитие в работах А. Л. Брауна в конечномерном случае, а также в работах К. Франкетти, С. Роверси и автора в пространствах произвольной размерности. Следующие результаты (теоремы 3.2 и 3.3) являются ключевыми в задаче о соотношении между классами m-связных и монотонно линейно связных множеств.

Теорема 3.2. *Пусть X – сепарабельное банахово пространство и пусть множество $M \subset X$ ограниченно компактно и* m*-связно.*

Тогда M монотонно линейно связно, экстремально клеточноподобно и, в частности, B-клеточноподобно, B-ациклично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) и является солнцем.

Если $\dim X < \infty$, то, вдобавок, M экстремально стягиваемо (в частности, P- и B-стягиваемо) и на множество M существует непрерывная ε-выборка для всех $\varepsilon > 0$.

Здесь напомним, что компакт Y называется *клеточноподобным*, если существует ANR (абсолютный окрестностный ретракт) Z и вложение $i : Y \to Z$ такое, что образ $i(Y)$ стягиваем в любой своей окрестности $U \subset Z$; это эквивалентно тому, что Y гомеоморфен пересечению счетной убывающей последовательности абсолютных ретрактов (или стягиваемых компактов). Пространство (метризуемое) называется *ацикличным*, если его группа чеховских *ко*гомологий с коэффициентами из A (A – произвольная нетривиальная абелева группа) тривиальна (не имеет циклов, за исключением границы). В случае, если гомология (когомология) имеет компактный носитель и коэффициенты группы гомологий (когомологий)

[30] И. Г. Царьков, О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах, *Матем. заметки*, **40** (2), (1986), 174–196.

лежат в поле, то понятия гомологической и когомологической ацикличности совпадают.

Теорема 3.2 усиливает следующий результат Брауна (1987 г.): *в конечномерном линейном нормированном пространстве замкнутое* m*-связное множество является солнцем.* Для пространств с линейной вкладываемостью шаров [16] (и в частности, для в пространств $\ell^1(n)$, $C(Q)$, $C_0(Q)$, Q – метрический компакт) теорема 3.2 частично усиливает результаты М. В. Балашова и Г. Е. Иванова[31] о линейной связности R-слабо выпуклых (по Виалю) множеств: в пространствах с линейной вкладываемостью шаров оказывается, что пересечение R-слабо выпуклого множества с замкнутым или открытым шаром m-связно и соответственно, в случае ограниченной компактности, монотонно линейно связно.

Для слабо компактных множеств имеет место следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть X – сепарабельное банахово пространство и пусть $\varnothing \neq M \subset X$ ограниченно слабо компактно. Предположим, что M* m*-связно. Тогда M монотонно линейно связно.*

В следующей теореме впервые найдено бесконечномерное пространство, не являющееся неквадратным, в котором ***всякое*** солнце связно (и даже, более того, монотонно линейно связно). Отметим, что до этого связность солнц в конкретных и абстрактных пространствах удавалось доказать в случае компактности солнц или требования неквадратности пространства.

Теорема 3.4. 1) *Произвольное солнце в пространстве c_0 монотонно линейно связно.*

2) m*-связное* (*и, тем более, монотонно линейно связное*) *аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства c_0 является солнцем.*

3) *Пространство c_0 содержит замкнутое монотонно связное множество, не являющееся δ-солнцем.*

Для случая $X = C(Q)$, Q – метризуемый компакт, классический результат Кощеева о B-связности ограниченно компактных строгих солнц в банаховых пространствах можно усилить следующим образом.

Теорема 3.5. *Ограниченно компактное строгое солнце в пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связно и экстремально клеточноподобно.*

Как следствие, ограниченно компактное чебышёвское множество в $C(Q)$ монотонно линейно связно.

[31] М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.* **73** (3), (2009), 23–66.

Второе утверждение в теореме 3.5 частично обращает хорошо известную теорему Власова, согласно которой ограниченно компактное P-ацикличное подмножество банахова пространства является солнцем.

Солнечность чебышёвских множеств. Вопрос о солнечности чебышёвских множеств изучался Н. В. Ефимовым, С. Б. Стечкиным, В. Кли, Л. П. Власовым, И. Г. Царьковым, С. В. Конягиным, В. С. Балаганским, А. Л. Брауном, Б. Брозовским, Ф. Дойчем, Д. Амиром, Дж. М. Ламбертом, П. Д. Моррисом, П. А. Бородиным, и др. В конечномерном пространстве чебышёвское множество является солнцем. Ч. Данхем построил пример локально компактного чебышёвского множества в $C[0,1]$, не являющегося солнцем. В общем случае для доказательства солнечности множества на него накладываются, как правило, ограничения типа компактности или непрерывности метрической проекции P_M. Классическим является результат Л. П. Власова, который утверждает, что ограниченно компактное P-ацикличное множество (в частности, чебышёвское множество) в банаховом пространстве является солнцем. Власов также показал, что в банаховом пространстве локально компактное чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией P_M является солнцем. Отметим также, что в $C(Q)$ или $C_0(Q)$ чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является солнцем.

Имеет место следующий новый результат: солнечность произвольного чебышёвского множества в линейном нормированном пространстве устанавливается при наложении структурных ограничений типа связности. Данный результат можно рассматривать как первый результат, в котором солнечность чебышёвского множества устанавливается при наложении на него структурных ограничений типа связности.

Теорема 3.6. *Пусть M – монотонно линейно связное подмножество линейного нормированного пространства. Предположим, что $P_M x = \{y\}$ для некоторого $x \notin M$. Тогда x – точка солнечности для M (т.е. выполнено* (1)*).*

Как следствие, монотонно линейно связное чебышёвское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем.

Стоит отметить, что даже в конечномерном случае чебышёвское множество в общем случае не обязано быть монотонно линейно связным – автором построены соответствующие примеры в любой размерности $\geqslant 3$. В негладком случае монотонную линейную связность чебышёвских множеств можно гарантировать в пространстве $\ell^\infty(n)$ и, более общо, в так называемых (BM)-пространствах, включающих в себя, в частности, полиэдральные пространства вида $X = X_1 \oplus_\infty \ldots \oplus_\infty X_k$, $\dim X_i \leqslant 2$.

Четвертая глава посвящена изучению локальных аппроксимативно-геометрических свойств солнц и чебышёвских множеств в банаховых пространствах. Особое внимание уделяется вопросу сохранения солнечности, связности и других аппроксимативных свойств при пересечении таких множеств с подмножествами пространства (в частности, с шарами, брусами и экстремальными гиперплоскостями).

Получена геометрическая характеризация строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$, дополняющая характеризацию Беренса и Хетцельта для солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$ (теорема 3.A). Далее, решена классическая задача о характеризации в геометрических терминах чебышёвских множеств в пространствах типа $C(Q)$. Для пространства $\ell^\infty(n)$ такая задача была поставлена в 1980-х годах независимо В. М. Тихомировым и Х. Беренсом. Соответствующая характеризация чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$ дается в теореме 4.2. На плоскости исчерпывающий ответ в данной задаче был дан П. Грубером[32] для произвольной нормы.

Нам потребуются несколько определений.

Пусть $X = \ell^\infty(n)$ или c_0. Пусть также $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant \dim X$.

Через $\mathrm{cAff}_k(X)$ обозначим класс всех аффинных координатных (экстремальных) подпространств из X размерности k. Далее, пусть $M \subset X$, $2 \leqslant k \leqslant n$, $P \in \mathrm{cAff}_k(X)$, $Q \in \mathrm{cAff}_{k-1}(P)$. Мы будем говорить, что Q – *локально опорная гиперплоскость* к множеству M в подпространстве P ($Q \in \mathrm{locTan}_P(M)$), если найдутся точка $x \in P \cap M$ и ее окрестность $\mathcal{O}(x)$ в P такие, что Q является опорной гиперплоскостью к $M \cap \mathcal{O}(x)$ в P. Утверждение, что Q – *опорная гиперплоскость* к множеству $M \cap P$ в подпространстве P будет пониматься обычным образом и записывается в виде $Q \in \mathrm{Tan}_P(M)$.

Теорема 4.2 (характеризация чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$)**.** *Множество $M \neq \varnothing$ является чебышёвским в $\ell^\infty(n)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия*:

a) *множество M замкнуто;*

b) *множество $M \cap P$ связно для любых $k = 1, \dots, n$ и $P \in \mathrm{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$;*

c) *для любых $k = 2, \dots, n$, $P \in \mathrm{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \mathrm{cAff}_{k-1}(P)$ из условия $Q \in \mathrm{locTan}_P(M)$ вытекает, что $Q \in \mathrm{Tan}_P(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.*

Отметим следующее следствие из теоремы 4.2. (Напомним, что брусы суть пересечения экстремальных гиперполос вида $\{x \in X \mid a \leqslant f(x) \leqslant b\}$, $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, $f \in \operatorname{ext} S^*$. В частности, замкнутый шар является брусом.)

В следующей теореме $\operatorname{ri} \Pi$ означает относительную внутренность выпуклого множества Π.

[32] P. M. Gruber, Planar Chebyshev sets, in *Mathem. Structure–Computational Math.–Math. Modelling, Vol.* 2, Sofia, Bulgar. Acad. Sci. (1984), 184–191.

Теорема 4.4. *Чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$ является экстремально чебышёвским. Иными словами, если Π – брус в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \operatorname{ri}\Pi = \varnothing$, то пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно.*

В теореме 4.10 показывается, что солнца в конечномерных (BM)-пространствах (в частности, в конечномерных полиэдральных пространствах вида $X = X_1 \oplus_\infty \ldots \oplus_\infty X_k$, $\dim X_i \leqslant 2$) удовлетворяют очень сильным условиям связности, являясь монотонно линейными множествами. Как следствие, с учетом теоремы 3.2 мы получаем, что солнца в таких пространствах B-стягиваемы, являются B-ретрактами, B-солнечны (последнее означает, что пересечение M с любым замкнутым шаром является солнцем) и обладают свойством существования непрерывной мультипликативной (аддитивной) ε-выборки при любом $\varepsilon > 0$.

Теорема 4.10. *Пусть $X \in (BM)$, $\dim X < \infty$, и пусть $M \subset X$ – солнце. Тогда:*

а) *M – (экстремально) монотонно линейно связно;*
б) *M – экстремально стягиваемо (в частности M – B-стягиваемо);*
в) *M – экстремальный ретракт (в частности M – $\mathring{P}^\delta$-ретракт);*
г) *M – экстремально солнечно (последнее означает, что пересечение M с любым брусом и, в частности, с замкнутым шаром является солнцем);*
д) *на M существует непрерывная мультипликативная (аддитивная) ε-выборка при любом $\varepsilon > 0$.*
е) *для любого бруса $\Pi \subset X$ на множество $M \cap \Pi$ существует непрерывная мультипликативная (аддитивная) ε-выборка при любом $\varepsilon > 0$.*

В связи с утверждением д) теоремы 4.10 отметим, что на солнце M (и даже строгое солнце) непрерывной выборки из метрической проекции P_M может не существовать даже в трехмерном случае.

Вопрос об аппроксимативных и геометрических свойствах пересечений солнц и строгих солнц с брусами в пространстве $C(Q)$ рассматривается в теоремах 4.11–4.12. Естественность бруса в данной задаче показана в теореме 4.14.

Теорема 4.11. *Пусть $\varnothing \neq M \subset X_n$ – замкнутое m-связное множество (в частности, M – солнце в произвольном двумерном X_2 или в $X_n \in (BM)$) и пусть Π – брус в X_n, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \Pi$ – монотонно линейно связное экстремально клеточноподобное солнце в X_n.*

Теорема 4.12. *Пусть X – сепарабельное банахово пространство, $M \neq \varnothing$ – ограниченно компактное m-связное множество (в частности, M – ограниченно компактное солнце в $X \in (BM)$) и пусть Π – брус в X, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \Pi$ – монотонно линейно связное экстремально клеточноподобное солнце в X.*

Теорема 4.14. *Пусть* $\Pi \neq \varnothing$ *– замкнутое множество в конечномерном линейном нормированном пространстве* X_n. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) Π *– брус;*

б) $\Pi \cap M$ *является монотонно линейно связным солнцем для любого монотонно линейно связного солнца* M, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;

в) $\Pi \cap M$ *является солнцем для любого монотонно линейно связного солнца* M, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;

г) $\Pi \cap \gamma$ *является монотонно линейно связным солнцем для любой монотонной дуги* γ, $\gamma \cap \Pi \neq \varnothing$.

В теореме 4.15 установлено, что пересечение произвольного строгого протосолнца M в $C(Q)$ (Q – метрический компакт) с замкнутым брусом $\Pi \subset C(Q)$ является строгим протосолнцем при естественном предположении, что $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. При этом, если строгое солнце $M \subset C(Q)$ ограниченно компактно, а Π – произвольный брус в $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, то $M \cap \Pi$ – солнце (не обязательно являющееся строгим солнцем).

Теорема 4.16 утверждает, что телесные брусы Π в $C(Q)$ характеризуются свойством, что пересечение Π с произвольным строгим протосолнцем M в $C(Q)$, $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$, является строгим протосолнцем.

Напомним, что в $C(Q)$ брусы суть замкнутые промежутки, т.е. множества вида $\{f \in C(Q) \mid f(t) \in [f_1(t), f_2(t)],\ t \in Q\}$, где $f_1, f_2 : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_1 \leqslant f_2$, f_1 – полунепрерывна сверху на Q, а f_2 – снизу.

Теорема 4.15. *Имеют место следующие утверждения:*

а) *Пусть* M *– строгое протосолнце в* $C(Q)$, Π *– телесный брус в* $C(Q)$, *причем* $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. *Тогда* $M \cap \Pi$ *– строгое протосолнце в* $C(Q)$.

б) *Пусть* M *– строгое протосолнце в* $C(Q)$, Π *– телесный брус в* $C(Q)$, *причем* $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$ *и* $M \cap \Pi$ *является множеством существования. Тогда* $M \cap \Pi$ *– строгое солнце в* $C(Q)$.

в) *Пусть* M *– ограниченно компактное строгое солнце в* $C(Q)$, Π *– замкнутый брус в* $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. *Тогда* $M \cap \Pi$ *– солнце в* $C(Q)$.

В частности, пересечение строго солнца M в $C(Q)$ с произвольным замкнутым шаром $B(x,r)$ является строгим протосолнцем в $C(Q)$ при условии, что $M \cap \mathring{B}(x,r) \neq \varnothing$ (при этом $M \cap B(x,r)$ – строгое солнце, если $M \cap B(x,r)$ – множество существования). Отметим, что условие $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$ в теореме 4.15 нельзя заменить на условие $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Автор [12] построил пример строгого солнца M в $\ell^\infty(3)$, такого, что $M \cap B(x,r) \neq \varnothing$ для некоторого шара $B(x,r)$, однако $M \cap B(x,r)$ не является строгим солнцем в $\ell^\infty(3)$ (будучи, конечно, солнцем).

В теореме 4.16 дается характеризация брусов (замкнутых промежутков) в $C(Q)$ в терминах солнечности их пересечений со строгими солнцами в $C(Q)$. Более полный ответ получен в пространстве $\ell^\infty(n)$ (теорема 4.19).

Теорема 4.16. *Для тела $\Pi \subset C(Q)$ следующие условия эквиваленты:*

а) $\Pi \subset C(Q)$ *является брусом*;

б) $\Pi \cap M$ *является строгим протосолнцем в* $C(Q)$ *для всякого строгого солнца* M *(строгого протосолнца* M*) в* $C(Q)$*, такого, что* $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$;

в) $\Pi \cap M$ *является строгим солнцем в* $C(Q)$ *для всякого компактного строгого солнца* M *в* $C(Q)$*, такого, что* $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$.

В следующей теореме [15] дается характеризация строгих солнц в $C(Q)$ в терминах солнечности их пересечений с телесными брусами (замкнутыми промежутками).

Теорема 4.17. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) M – *строгое протосолнце в* $C(Q)$;

б) $M \cap \Pi$ – *строгое протосолнце в* $C(Q)$ *для любого телесного бруса* Π *(телесного бруса) в* $C(Q)$*, такого, что* $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$;

в) $M \cap \mathrm{m}(x,y)$ – *строгое протосолнце в* $C(Q)$ *для любых* $x, y \in C(Q)$*, таких, что* $M \cap \operatorname{int} \mathrm{m}(x,y) \neq \varnothing$.

В теореме 4.19 дается характеризация замкнутых множеств $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышёвского множества (солнца, строгого солнца) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства множества M. Оказывается, что такие множества Π в точности являются брусами (замкнутыми промежутками) в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.19. *Пусть* $\varnothing \neq \Pi \subset \mathbb{R}^n$*. Имеют место следующие утверждения*:

а) Π *является брусом в* $\ell^\infty(n)$ *если и только если* $\Pi \cap M$ *является солнцем в* $\ell^\infty(n)$ *для всякого солнца* M *в* $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;

б) Π *является брусом в* $\ell^\infty(n)$ *и* $\operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$ *если и только если* $\Pi \cap M$ *является строгим солнцем в* $\ell^\infty(n)$ *для любого строгого солнца* M *в* $\ell^\infty(n)$ *такого, что* $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$;

в$_1$) *Пусть* Π – *брус в* $\ell^\infty(n)$*. Тогда любая точка из* Π *имеет единственную ближайшую в* $M \cap \Pi$ *для любого чебышёвского множества* M *в* $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$*;*

в$_2$) *Пусть множество* $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ *связно, замкнуто и пусть любая точка из* Π *имеет единственную ближайшую в* $M \cap \Pi$ *для любого чебышёвского множества* M *в* $\ell^\infty(n)$ *такого, что* $M \cap \Pi \neq \varnothing$*. Тогда* Π – *брус.*

Автор благодарен научному консультанту доктору физико-математических наук профессору Игорю Германовичу Ц а р ь к о в у за полезные обсуждения и постоянную поддержку.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

[1] А. Р. Алимов, Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$, *Математический сборник* **197**:9 (2006), 3–18.

[2] А. Р. Алимов, Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах *Известия Российской академии наук. Серия математическая* **78**:4 (2014), 3–19.

[3] А. Р. Алимов, Связность солнц в пространстве c_0, *Известия Российской академии наук. Серия математическая* **69**:4 (2005), 3–18.

[4] A. R. Alimov, Characterisations of Chebyshev sets in c_0, *Journal of Approximation Theory* **129** (2004), 217–229.

[5] А. Р. Алимов, Сохранение аппроксимативных свойств подмножеств чебышевских множеств и солнц в $\ell^\infty(n)$, *Известия Российской академии наук. Серия математическая* **70**:5 (2006), 3–12.

[6] А. Р. Алимов, О структуре дополнения к чебышёвским множествам, *Функциональный анализ и его приложения* **35**:3 (2001), 19–27.

[7] А. Р. Алимов, Геометрическое строение чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$, *Функциональный анализ и его приложения* **39**:1 (2005), 1–10.

[8] А. Р. Алимов, Геометрическое строение чебышёвских множеств в пространствах $\ell^\infty(n)$, c_0 и c, *Успехи математических наук* **60**:3 (2005), 169–171.

[9] А. Р. Алимов, Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричным расстоянием, *Успехи математических наук* **58**:2 (2003), 159–160.

[10] А Р. Алимов, Монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем, *Математические заметки* **91**:2 (2012), 305–307.

[11] А. Р. Алимов, Выпуклость чебышёвских множеств, содержащихся в подпространстве, *Математические заметки* **78**:1 (2005), 3–15.

[12] А. Р. Алимов, Геометрическая характеризация строгих солнц в $\ell^\infty(n)$, *Математические заметки* **70**:1 (2001), 3–11.

[13] А. Р. Алимов, Выпуклость ограниченных чебышёвских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика* **14**:4, 489–497 (2014).

[14] А. Р. Алимов, Сохранение аппроксимативных свойств чебышёвских множеств и солнц на плоскости, *Вестник Московского университета, сер. Математика. Механика*, № 4 (2008), 46–49.

[15] А Р. Алимов, Ограниченная строгая солнечность строгих солнц в пространстве $C(Q)$, *Вестник Московского университета, сер. Математика. Механика*, № 6 (2012), 16–19.

[16] A. R. Alimov, Monotone path-connectedness of R-weakly convex sets in spaces with linear ball embedding, *Eurasian Mathematical Journal*, no. 3–2 (2012), 21–39.

[17] A. R. Alimov, The Rainwater–Simons weak convergence theorem for the Brown associated norm, *Eurasian Mathematical Journal*, no. 5 (2) (2014), 126–131.

[18] A. R. Alimov, Local solarity of suns in normed linear spaces, *Journal of Mathematical Sciences* **197**:4 (2014), 447–454.

[19] A. R. Alimov, Monotone path-connectedness of R-weakly convex sets in the space $C(Q)$, *Journal of Mathematical Sciences* **185**:3 (2012), 360–366

[20] A. R. Alimov, Solstice property for a system of 2-spaces, *East Journal on Approximations* **4**:1 (1998), 25–34.

[21] A. R. Alimov, The number of connected components of Chebyshev sets and suns complement, *Proceedengs of A.Razmadze Mathematical Institute* **117** (1998), 135–139.