УТВЕРЖДАЮ
Директор ФГБУН Институт математики и механики
им. Н.Н.Красовского Уральского отделения
Российской академии наук
академик РАН
_______ Бердышев В.И.
26 марта 2015 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертационной работе Алимова Алексея Ростиславовича "Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах" представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Становление геометрической теории приближений, одними из основателей которой были С. Б. Стечкин, Н В. Ефимов и В. Кли, происходило в конце сороковых – начале пятидесятых годов XX века. В эти и последующие годы был отмечен бурный рост интереса к задачам единственности, существования и устойчивости наилучшего приближения, являющимся центральными в этой теории. Этот период характерен возникновением ряда принципиальных задач, решение которых и определило лицо геометрической теории приближений. В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными и геометрическими свойствами множеств в различных пространствах. Сама теория приближений во многом берет начало от исследований П. Л. Чебышева, который ввел и применял в приложениях понятие наилучшего равномерного приближения, в частности, при исследовании приближений непрерывных функций посредством алгебраических многочленов данной степени и рациональных дробей с фиксированными степенями числителя и знаменателя, а также от работ Г. Минковского, который впервые исследовал неевклидовы нормы, и А. Хаара, который изучал чебышевские подпространства в пространствах непрерывных функций. Позднее их идеи были перенесены на случай приближения в абстрактных пространствах. Таким образом возникли понятия чебышевского множества и солнца, которые являются ключевыми в диссертационной работе. Сами термины "чебышевское множество" и "солнце" были введены Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в 1950-х годах.

Величиной наилучшего приближения, или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$, называется величина $\rho(x, M) := \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$.

Понятия и свойства, определяемые в терминах наилучшего приближения и, в частности, свойства существования, единственности, устойчивости элементов наилучшего приближения, называются *аппроксимативными*.

В диссертационной работе рассматриваются классические вопросы геометрической теории приближений о соотношении между структурными и аппроксимативными свойствами множеств линейных нормированных и несимметрично нормированных пространств.

Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех глав и списка цитируемой литературы, насчитывающего 268 наименований. Полный объем диссертации составляет 212 страниц.

Во **введении** формулируются цели и задачи диссертации, обосновывается их актуальность, описывается содержание работы, дается краткий библиографический обзор и формулируются основные результаты.

В **первой главе** в § 1.1 рассматривается классическая задача о характеризации линейных нормированных пространств, в которых всякое чебышевское множество выпукло. Классический результат В. И. Бердышева–А. Брондстеда–А. Л. Брауна, характеризующий банаховы пространства размерности 3 и 4, в которых всякое чебышевское множество выпукло, обобщается на случай несимметрично нормированных пространств. Следует особо отметить, что переход к изучению аппроксимативных свойств в несимметричных пространствах связан не только с большим количеством конкретных прикладных задач в пространствах с несимметричной нормой, но и с задачами, в которых приближаемое множество содержится в некотором подпространстве банахова пространства.

Для двумерных пространств вопрос о выпуклости чебышевских множеств решен в 30-е годы XX в. в работах Л. Н. Бунта, Т. Моцкина и Г. Манна: в линейном нормированном пространстве X, $\dim X = 2$, всякое чебышевское множество выпукло если и только если пространство гладко, т.е. все точки единичной сферы являются точками гладкости.

В трехмерном банаховом случае ответ на вопрос о выпуклости чебышевских множеств получен независимо В. И. Бердышевым и А. Брондстедом в 1966 г., а в четырехмерном – А. Л. Брауном в 1980 г.

Диссертант обобщает классический критерий (Бердышева–Брондстеда–Брауна) выпуклости чебышевских множеств на случай несимметрично нормированных пространств и усиливает его на случай M-действующих точек относительно рассматриваемого множества M.

В § 1.2 рассматривается вопрос о структурных свойствах дополнения к чебышевским множествам, солнцам и строгим солнцам в нормированных и несимметрично нормированных пространствах, раскрывается связь этого вопроса с задачей о выпуклости чебышевских множеств. В § 1.3 рассматривается классическая задача о выпуклости чебышевских множеств при дополнительном условии, что рассматриваемое множество лежит в подпространстве.

Во **второй главе** рассматривается классический вопрос об универсальности пространства $C[0,1]$ непрерывных функций с равномерной нормой для пространств с несимметричной нормой и несимметричной метрикой. Согласно классическому результату С. Банаха и С. Мазура пространство $C[0,1]$ является универсальным для всех сепарабельных линейных нормированных пространств. Другой не менее известный результат, который также называется теоремой Банаха–Мазура, утверждает, что всякое сепарабельное метрическое пространство изометрично некоторому подмножеству пространства $C[0,1]$. Для несепарабельного случая аналоги этих утверждений получены М. Кляйбером и У. Дж. Первиным в 1969 г.

Несимметричные нормы возникли по-видимому впервые у Г. Минковского, сам термин "*несимметричная норма*" впервые введен М. Г. Крейном в 1938 г. при исследовании экстремальных вопросов, связанных с проблемой моментов Маркова. Несимметричные расстояния естественно возникают в задачах теории приближений функций, выпуклом анализе, задачах теоретической информатики при анализе сложности программ и в других теоретических и практических задачах.

Диссертантом устанавливается принципиально новое свойство универсальности единичного шара пространства $C[0,1]$ для несимметрично нормированных пространств – именно, показывается, что *метризуемые* сепарабельные несимметрично нормированные пространства X можно изометрически изоморфно вложить в классическое $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие; иными словами, единичный шар пространства X можно представить, с точностью до изометрического изоморфизма, как пересечение единичного шара пространства $C[0,1]$ с некоторым линейным многообразием, пересекающим его по внутренности. Как следствие, диссертант отмечает, что *неметризуемое* несимметрично нормированное пространство X не вкладывается как аффинное линейное многообразие в $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ ни при каком $\mathfrak{a}$. Также в гл. II получено обобщение теоремы Банаха–Мазура для линейных метрических пространств на случай пространств с несимметричной метрикой.

В **третьей главе** рассматриваются вопросы связности и солнечности чебышевских множеств и солнц в линейных нормированных пространствах. Хорошо известно, что в гладких пространствах (и только в них) всякое солнце выпукло. Соответственно, вопрос о связности солнц содержателен только в пространствах с негладкой нормой. Для солнц в конечномерных банаховых пространствах первый нетривиальный результат об их связности был получен В. А. Кощеевым. В бесконечномерном случае проблема связности чебышевских множеств отлична от проблемы связности солнц. В конкретных пространствах существенный прогресс в вопросе о структуре солнц и, в частности, в задаче об их связности, был получен X. Беренсом и Л. Хетцельтом, которые показали, что подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ если и только если оно замкнуто и ℓ^1-выпукло (т.е. метрически выпукло относительно ℓ^1-нормы).

В диссертации классическая теорема Беренса–Хетцельта усиливается следующим образом: подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ если и только если оно замкнуто и монотонно линейно связно. Последнее привело автора к важному понятию монотонно линейно связного множества, которое он ввел в 2006 г. Именно, замкнутое подмножество $M \subset X$ называется монотонно линейно связным, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной дугой $k(\cdot) \subset M$. Соответственно, непрерывная кривая $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, в линейном нормированном пространстве X называется монотонной, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого крайнего элемента f сопряженной сферы S^*.

Это новое понятие позволило диссертанту найти новые плодотворные подходы к изучению ряда классических объектов теории приближения и установить для них новые (абсолютно естественные) аппроксимативные свойства. Это демонстрируется в главе 3 диссертации. К примеру, давно известно (Вулберт, 1967 г.), что множество $\mathcal{R}_{n,m}$ дробно-рациональных функций в $C[0,1]$ является $\mathring{B}$-связным (т.е. пересечение $\mathcal{R}_{n,m}$ с произвольным открытым шаром $\mathring{B}(x,r)$ связно, $x \in C[0,1]$, $r > 0$). С. В. Конягин в 1988 г. показал, что в $C[0,1]$ для любого $\varepsilon > 0$ на множество $\mathcal{R}_{n,m}$ классических дробно-рациональных функций или обобщенных дробно-рациональных функций $\mathcal{R}_{V,W}$ (V, W – подпространства в $C(Q)$) существует непрерывная ε-выборка, т.е. однозначная непрерывная выборка из отображения

$$x \mapsto P_M^\varepsilon x := \{y \in M \mid \|x-y\| \leqslant \operatorname{dist}(x, M) + \varepsilon\}.$$

Автор показывает, что пересечение множества $\mathcal{R}_{V,W}$ обобщенных дробно-рациональных функций (V, W – произвольные выпуклые подмножества пространства $C(Q)$) с произвольным замкнутым шаром и, более общо, с так называемом промежутком (т.е. множеством вида $\{f \in C(Q) \mid f(t) \in [f_1(t), f_2(t)]$ для любого $t \in Q$, где f_1 – полунепрерывна сверху, а f_2 – снизу) монотонно линейно связно и, в частности, стягиваемо или пусто. Это позволяет из общих результатов о непрерывных ε-выборках вывести их существование для всех $\varepsilon > 0$ на множества $\mathcal{R}_{n,m}$, $\mathcal{R}_{V,W}$ дробно-рациональных функций и на их различные обобщения.

Далее, диссертант впервые предъявил пример негладкого бесконечномерного пространства, не являющееся неквадратным, в котором *всякое* солнце связно (и даже, более того, монотонно линейно связно). Отметим, что до этого связность солнц в конкретных и абстрактных линейных нормированных пространствах удавалось доказать в случае компактности солнц или требования неквадратности пространства. В частности, диссертантом установлено, что 1) всякое солнце в пространстве c_0 монотонно линейно связно; 2) связное по Менгеру (и, тем более, монотонно линейно связное) аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства c_0 является солнцем; 3) пространство c_0 содержит замкнутое монотонно связное множество, не являющееся δ-солнцем (и, значит, не являющееся солнцем).

Далее, диссертант показал, что ограниченно компактное строгое солнце в пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связно и B-клеточноподобно (т.е. пересечение такого множества с замкнутым шаром $B(x,r)$ клеточноподобно и, в частности, ациклично относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий). Как следствие, им показано, что ограниченно компактное чебышевское множество в $C(Q)$ монотонно линейно связно. Это частично обращает классический результат Л. П. Власова (1967 г.), согласно которому ограниченно компактное P-ацикличное подмножество банахова пространства является солнцем.

В вопросе о солнечности чебышевских множеств установлен следующий принципиально новый результат, в котором солнечность произвольного чебышевского множества в произвольном линейном нормированном пространстве устанавливается при наложении него ограничений типа связности (до этого результаты о солнечности чебышевских множеств устанавливались только при наложении ограничений типа компактности или непрерывности метрической проекции). Именно, диссертантом показано, что монотонно линейно связное чебышевское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем. Данный результат является первым, в котором солнечность чебышевского множества устанавливается при наложении на него геометрических ограничений типа связности.

Четвертая глава работы посвящена изучению локальных аппроксимативно-геометрических свойств солнц и чебышевских множеств в линейных нормированных пространствах. Особое внимание уделяется вопросам сохранения солнечности, связности и иных аппроксимативных свойств множеств при их пересечении с брусами – подмножествами пространства, имеющими экстремальную структуру (т.е. являющимися пересечениями гиперполос, порожденных экстремальными функционалами из сопряженной сферы). В частности, замкнутый шар является таким множеством. Указанные множества являются естественными в задаче о сохранении аппроксимативных свойств множеств при их пересечении с подмножествами пространства. Сама задача и определение таких множеств принадлежат А. Р. Алимову. В главе 4 устанавливается геометрическая характеризация строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$, дополняющая хорошо известную характеризацию Х. Беренса и Л. Хетцельта для солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$. Далее, диссертант решает классическую задачу о характеризации в геометрических терминах чебышевских множеств в пространствах типа $C(Q)$. Для пространства $\ell^\infty(n)$ такая задача была поставлена в 1980-х годах независимо В. М. Тихомировым и Х. Беренсом. Устанавливается, что пересечение произвольного строгого протосолнца M в $C(Q)$ с телесным брусом (телесным промежутком) $\Pi \subset C(Q)$ является строгим протосолнцем. Получен ряд аналогичных утверждений для других пространств, найдена характеризация замкнутых множеств $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышевского множества (солнца, строгого солнца) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства исходного множества M, что показывает естественность брусов (замкнутых промежутков) в данной задаче. Установлены принципиально новые локальные характеризации чебышевских множеств, солнц и строгих солнц в банаховых пространствах в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с брусами.

В целом изложение полученных результатов в диссертационной работе проведено ясно и последовательно. Имеются следующие замечания.

На стр. 16 опечатка при определении грани F выпуклого множества K: вместо $[a,b] \subset K$ следует писать $[a,b] \subset F$.

На стр. 74, 13 стр. св. содержится опечатка $V \subset \mathrm{conv}(w, b(0,1))$. Здесь $b(0,1)$ является элементом подмножеством X, а не $X \times R$, поэтому надо писать $V \subset \mathrm{conv}(w, b(0,1 \times \{0\}))$.

В гл. 2 в историческом обзоре истории изучения несимметрично нормированных пространств желательно указать монографию E. M. Zaustinsky, Spaces with non-symmetric distance, Memoirs of the American Mathematical Society, 34 (1959).

В теореме 3.2 рассматриваются сепарабельные банаховы пространства. Хотелось бы иметь пояснение о том, можно ли снять требование сепарабельности пространства. Аналогичное замечание относится к следствию 3.4

и лемме 3.3. В теореме 3.3, однако, сепарабельность по существу с технической точки зрения (слабо компактное подмножество сепарабельного банахова пространства метризуемо). Интересно, возможно ли и в этом результате снять требование сепарабельности?

Стр. 111 во фразе "Поскольку y – солнечная точка для..." следует заменить слово "солнечная" на "точка светимости", как, к примеру, сделано несколькими абзацами ранее. Аналогичное исправление следует сделать на стр. 157 (2-й абзац).

На стр. 122 опечатка: вместо "леммы 1.А" следует писать "теорема 1.А".

На стр.174 слово "сильно" в определении "сильно d-выпуклого множества по Болтянскому" следует дать курсивом.

На стр. 203 следует указать год выпуска монографии [144].

Отмеченные выше неточности имеют, по существу, редакционный характер, не влияют на достоверность результатов и не снижают общей высокой оценки работы.

Основные результаты диссертации являются новыми, они полностью отражены в публикациях автора, опубликованы в 21 научных статьях из перечня ВАК РФ, доложены на 12 российских и международных конференциях. Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены автором лично, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены как в теории приближений и её смежных областях, так и в их многочисленных приложениях. Кроме того, полученные в диссертации результаты могут быть использованы в учебном процессе в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Тематика и содержание диссертации А. Р. Алимова отвечает паспорту специальности "01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Диссертационная работа "Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах" Алимова Алексея Ростиславовича является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных ее автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области теории приближений функций. В диссертации решены научные проблемы: получена характеризация чебышевских множеств в пространстве $\ell^\infty(n)$ и установлена их экстремальная чебышевость; показано, что произвольное солнце в пространстве c_0 монотонное линейно связно; установлено, что монотонно линейно связное чебышевское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем; показана экстремальная клеточноподобность ограниченно компактных связных по Менгеру (и, в частности, монотонных линейно связных) подмножеств сепарабельных банаховых пространств.

Диссертация удовлетворяет пп. 9 и 10 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", утвержденному Постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Алимов Алексей Ростиславович, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и одобрен на совместном заседании отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений ИММ УрО РАН (протокол № 102 от 26.03.2015 г.).

Директор ФГБУН "Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН".
(620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург,
ул. Софьи Ковалевской, д. 16; тел. +7 (343) 374-83-32,
web-сайт http://www.imm.uran.ru)
академик РАН, профессор, доктор физико-математических наук
(e-mail: bvi@imm.uran.ru)

Бердышев Виталий Иванович

Заведующий отделом аппроксимации и приложений
ФГБУН "Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН".
(e-mail: babenko@imm.uran.ru, тел. +7 (343) 375-34-36)
доктор физико-математических наук

Бабенко Александр Григорьевич

26.03.2015 г.