ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА
о диссертации Алимова Алексея Ростиславовича
"Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах"
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех глав и списка цитируемой литературы, насчитывающего 268 наименований. Полный объем диссертации составляет 212 страниц.

Геометрическая теория приближений во многом берет начало от исследований П. Л. Чебышева, который ввел в науку понятие наилучшего равномерного приближения и систематически применял его в приложениях, Г. Минковского, который впервые исследовал нормы, отличные от евклидовой, и А. Хаара, который изучал чебышёвские подпространства (системы Чебышева) в пространстве непрерывных функций. Позднее их идеи были перенесены на случай приближения в абстрактных пространствах. Таким образом возникли понятия чебышёвского множества и солнца. Сами термины "чебышёвское множество" и "солнце" были введены Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в 1950-х годах.

Во введении подробно описываются задачи исследования с историей соответствующей тематики, описываются методика и теоретическая значимость, а также формулируются основные результаты.

В первой главе в § 1.1 рассматривается классическая задача о характеризации банаховых пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло. Классическая теорема В. И. Бердышева–А. Брондстеда–А. Л. Брауна, характеризующая пространства размерности 3 и 4, в которых всякое чебышёвское множество выпукло, обобщается на случай несимметрично нормированных пространств. Надо сказать, что переход к изучению аппроксимативных свойств в несимметричных пространствах связан не только с большим количеством конкретных задач теории приближения в пространствах с несимметричной нормой, но и с задачами, в которых приближаемое множество содержится в некотором подпространстве.

Для двумерных пространств вопрос о выпуклости чебышёвских множеств решен в 1930-х гг. в работах Л. Н. Бунта и Т. Моцкина: в пространстве X, $\dim X = 2$, всякое чебышёвское множество выпукло если и только если пространство гладко, т.е. все точки единичной сферы являются точками гладкости.

В трехмерном случае ответ на вопрос о выпуклости чебышёвских множеств получен независимо В. И. Бердышевым и А. Брондстедом в 1966 г., а в четырехмерном – Брауном в 1980 г.

Автор обобщает классический критерий выпуклости чебышёвских множеств на случай несимметрично нормированных пространств и усиливает его на случай M-действующих точек относительно рассматриваемого множества M.

В § 1.2 рассматривается задача о структуре дополнения к чебышёвским множествам, солнцам и строгим солнцам и раскрывается ее связь с классической задачей о характеризации пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло. В § 1.3 рассматривается классическая задача о выпуклости чебышёвского множества M в линейном нормированном или несимметрично нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ при дополнительном условии $M \subset H$, где H – подпространство в X.

Во второй главе рассматривается классический вопрос об универсальности пространства непрерывных функций для пространств с несимметричной нормой и несимметричной метрикой. Классический результат, восходящий к Банаху и Мазуру, утверждает изометрическую универсальность пространства $C[0,1]$ для всех сепарабельных линейных нормированных пространств. Другой не менее известный результат, также именуемый теоремой Банаха–Мазура, утверждает, что всякое сепарабельное метрическое пространство изометрично некоторому подмножеству пространства $C[0,1]$. Для несепарабельного случая аналоги этих утверждений получены Кляйбером и Первиным в 1969 г. Автор распространяет эти результаты на линейные пространства с несимметричной нормой и пространства с несимметричной метрикой.

Несимметричные нормы возникли по-видимому впервые у Г. Минковского ("функционал Минковского"), в бесконечномерный анализ они были привнесены М. Г. Крейном в 1938 г. – он ввел термин "*несимметричная норма*" и отметил, что несимметричные нормы можно рассмотреть при исследовании экстремальных вопросов, связанных с проблемой моментов Маркова.

Ряд задач наилучшего приближения в несимметричной норме рассматривался Р. Даффиным и Л. Карловицем, в том числе приближения в пространствах непрерывных и интегрируемых функций. Ч. Данхем (Ch. Dunham) исследовал вопрос наилучшего несимметричного приближения элементами конечномерных подпространств, установив ряд результатов о существовании и единственности наилучшего приближения. М. Пфаннкюхе-Винклер (M. Pfannkuche-Winkler) изучал условия, гарантирующие непрерывность метрической проекции в несимметрично нормированных пространствах Орлича. Общие теоремы существования наилучшего несимметричного приближения в банаховых пространствах были получены Ф. С. ДеБлази (F. S. De Blasi) и Й. Мийак (J. Myjak).

Естественно возникают несимметричные расстояния и в теории приближений функций. В этой связи отметим работы Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова, В. Ф. Бабенко, Б. В. Симонова, А. И. Козко, А. В. Покровского, А. А. Чумака, А.-Р. К. Рамазанова, Е. Х. Садековой, а также монографиях Л. Коллатца и В. Краббса и С. Кобзаша (2013 г.). В частности, В. Ф. Бабенко отмечает, что приближения в пространствах с несимметричными нормами оказываются "мостиком" между наилучшими приближениями и наилучшими односторонними приближениями.

В геометрической теории приближений и выпуклом анализе несимметричные расстояния рассматривались в работах А. Брондстеда (A. Brøndsted), Е. Асплунда (E. Asplund), П. А. Бородина, Г. Е. Иванова, Г. Е. Иванова и М. С. Лопушански, а также в работах А. Р. Алимова.

Алимовым устанавливается принципиально новое свойство универсальности единичного шара пространства $C[0,1]$ для несимметрично нормированных пространств, показывая, что *метризуемые* сепарабельные несимметрично нормированные пространства X можно изометрически изоморфно вложить в классическое $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие; иными словами, единичный шар пространства X можно представить как пересечение единичного шара пространства $C[0,1]$ с некоторым линейным многообразием, пересекающий его по внутренности. Как следствие, им отмечается, что *неметризуемое* несимметрично нормированное пространство X

не вкладывается как аффинное линейное многообразие в $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ ни при каком $\mathfrak{a}$. Также автором получено обобщение теоремы Банаха–Мазура для линейных метрических пространств на случай пространств с несимметричной метрикой.

В третьей главе рассматриваются вопросы связности и солнечности чебышёвских множеств и солнц. Напомним, что известно о связности таких множеств в общих линейных нормированных пространствах. Хорошо известно, что в гладких пространствах (и только в них) всякое солнце выпукло. Поэтому вопрос о связности солнц является содержательным только в негладких пространствах. В конечномерном случае первый нетривиальный результат о связности солнц в был получен В. А. Кощеевым в 1975 г.: *в конечномерном линейном нормированном пространстве всякое солнце связно.* В бесконечномерном случае оказалось, что проблема связности чебышёвских множеств отлична от проблемы связности солнц. В известных примерах несвязных чебышёвских множеств (Данхем, Кли) построенные множества не являются солнцами. Единственный пример несвязного солнца (в бесконечномерном пространстве) построен Кощеевым в 1979 г. В конкретных пространствах важное продвижение в вопросе о структуре солнц и, в частности, в задаче об их связности, было получено Беренсом и Хетцельтом в 1984 г.: множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ если и только если оно замкнуто и ℓ^1-выпукло.

Теорему Беренса–Хетцельта можно усилить следующим образом: множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ если и только если оно замкнуто и является *монотонно линейно связным*, что приводит к важному понятию монотонно линейно связного множества, введенному Алимовым А.Р. в 2006 г. Именно, пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, – непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Кривая $k(\cdot)$ называется *монотонной*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$ (здесь и далее $\operatorname{ext} S^*$ – множество экстремальных точек сопряженной сферы S^*). Мы называем замкнутое подмножество $M \subset X$ *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$. Уверен, что это новое понятие позволит найти новые подходы к изучению многочисленных классических объектов теории приближения и установить ряд новых аппрокимативных свойств для них.

Оказывается, что понятие монотонно линейно связного множества является вполне естественным при исследовании аппроксимативно-геометрических свойств множеств в банаховых пространствах. К примеру, давно известно (Вулберт, 1967 г.), что множество $\mathcal{R}_{n,m}$ дробно-рациональных функций в $C[0,1]$ является $\mathring{B}$-связным (т.е. пересечение $\mathcal{R}_{n,m}$ с произвольным открытым шаром связно). СВ. Конягин в 1988 г. показал, что в $C[0,1]$ для любого $\varepsilon > 0$ на множество $\mathcal{R}_{n,m}$ классических дробно-рациональных функций или обобщенных дробно-рациональных функций (случай $\mathcal{R}_{V,W}$, V, W – подпространства) существует непрерывная ε-выборка, т.е. однозначная непрерывная выборка из отображения

$$x \mapsto P_M^\varepsilon x := \{y \in M \mid \|x - y\| \leqslant \operatorname{dist}(x, M) + \varepsilon\}.$$

Автор показывает, что пересечение множества $\mathcal{R}_{V,W}$ обобщенных дробно-рациональных функций (V, W – произвольные выпуклые подмножества пространства $C(Q)$) с замкнутым шаром и так называемом промежутком монотонно линейно связно и стягиваемо или пусто. Это позволяет из более общих результатов о непрерывных ε-выборках вывести их существование для всех $\varepsilon > 0$ и на множества $\mathcal{R}_{n,m}$ дробно-рациональных функций в $C[0,1]$, и на их различные обобщения.

Далее, А. Р. Алимовым впервые приведено негладкое бесконечномерное пространство, не являющееся неквадратным и в котором *всякое* солнце связно (и даже, более того, монотонно линейно связно). Отметим, что до этого связность солнц в конкретных и абстрактных пространствах удавалось доказать в случае компактности солнц или требования неквадратности пространства. В частности, Алимовым А.Р установлено, что 1) всякое солнце в пространстве c_0 монотонно линейно связно; 2) m-связное (и, тем более, монотонно линейно связное) аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства c_0 является солнцем. 3) Пространство c_0 содержит замкнутое монотонно связное множество, не являющееся δ-солнцем.

Далее, А. Р. Алимов показал, что ограниченно компактное строгое солнце в пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связно и B-клеточноподобно. Как следствие, им показано, что ограниченно компактное чебышёвское множество в $C(Q)$ монотонно линейно связно. Это частично обращает хорошо известную теорему Власова, согласно которой ограниченно компактное P-ацикличное подмножество банахова пространства является солнцем.

В вопросе о солнечности чебышёвских множеств установлен следующий принципиально новый результат, в котором солнечность произвольного чебышёвского множества в линейном нормированном пространстве устанавливается при наложении структурных ограничений типа связности. Именно: монотонно линейно связное чебышёвское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем. Данный результат можно рассматривать как первый результат, в котором солнечность чебышёвского множества устанавливается при наложении на него структурных ограничений типа связности.

Четвертая глава работы посвящена изучению локальных аппроксимативно-геометрических свойств солнц и чебышёвских множеств в банаховых пространствах. При этом особое внимание уделяется вопросам сохранения солнечности, связности и других аппроксимативных свойств при пересечении таких множеств с подмножествами пространства (в частности, с шарами, брусами и экстремальными гиперплоскостями). Автор получает геометрическую характеризацию строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$, дополняя характеризацию Беренса и Хетцельта для солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$. Далее, А. Р. Алимов решает классическую задачу о характеризации в геометрических терминах чебышёвских множеств в пространствах типа $C(Q)$. Для пространства $\ell^\infty(n)$ такая задача была поставлена в 1980-х годах независимо В. М. Тихомировым и Х. Беренсом. Устанавливается, что пересечение произвольного строгого протосолнца M в $C(Q)$ с телесным брусом $\Pi \subset C(Q)$ является строгим протосолнцем при естественном предположении, что $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. При этом, если строгое солнце $M \subset C(Q)$ ограниченно компактно, а Π – произвольный брус в $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, то $M \cap \Pi$ – солнце (не обязательно являющееся строгим солнцем). Дается характеризация замкнутых множеств $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышёвского множества (солнца, строгого солнца) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства исходного множества M. Оказывается, что такие множества Π в точности являются брусами. Получены новые локальные характеризации чебышёвских множеств, солнц и строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с брусами в $\mathbb{R}^n$.

А.Р. Алимов является известным специалистом по геометрической теории приближений и пользуется большим авторитетом среди специалистов этого направления. Результаты и идеи, полученные Алимовым А.Р. несомненно найдут применение как в теории приближения и её смежных областях, так и в их многочисленных приложениях. Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, 21 статей входят в перечень ВАК.

Диссертация является научно-квалификационной работой и удовлетворяет п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней". В диссертации решены научные проблемы: получена характеризация чебышёвских множеств в пространстве $\ell^\infty(n)$ и установлена их экстремальная чебышёвость; показано, что произвольное солнце в пространстве c_0 монотонное линейно связно; установлено, что монотонно линейно связное чебышёвское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем; показана экстремальная клеточноподобность ограниченно компактных связных по Менгеру (и, в частности, монотонных линейно связных) подмножеств сепарабельных банаховых пространств. Полученные диссертантом результаты можно квалифицировать, как крупные научные достижения в области теории приближений.

Оценивая диссертацию в целом я считаю, что в ней разработано новое крупное научное направление, а созданные при этом методы позволили решить ряд сложных актуальных задач. Представленная диссертация является самостоятельно выполненной работой. Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены автором лично, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Работ, написанных в соавторстве, нет. Диссертация удовлетворяет требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям и, несомненно, заслуживает присуждение ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный консультант
профессор
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.01)

Царьков
Игорь Германович

Место работы: ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", механико-математический факультет, кафедра математического анализа.
Тел: +7 (495) 939-18-01
e-mail: igtsarkov@yandex.ru

26.09.2014 г.

Подпись И. Г. Царькова удостоверяю
и.о. декана механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова, профессор

Чубариков
Владимир Николаевич