Отзыв официального оппонента о диссертационной работе Алексея Ростиславовича Алимова “Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах” представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – “вещественный, комплексный и функциональный анализ”

Начала теории приближения функций действительного переменного заложены П. Л. Чебышевым в 1853 г. в работе “Теория механизмов, известных под названием параллелограммов” в связи с прикладной задачей из теории механизмов. Со времен Чебышева проблематика этой теории имеет тесные связи с задачами из различных областей науки и техники.

В работе исследуются аппроксимативно-геометрические свойства множеств в линейных нормированных и несимметрично нормированных пространствах, а также вопросы геометрии банаховых и несимметрично нормированных пространств.

Перейдем к содержанию диссертации. В первой главе рассматривается известная проблема выпуклости чебышевских множеств, а именно задача описания конечномерных банаховых пространств, в которых всякое чебышевское множество выпукло. Классические результаты в этой области получены В.И. Бердышевым, А. Брондстедом (для размерности 3) и А. Л. Брауном (для размерности 4) более 30 лет назад. В единообразной форме их результаты могут быть сформулированы следующим образом: *для того, чтобы любое чебышевское множество в линейном нормированном пространстве размерности* 3 *или* 4 *было выпукло необходимо и достаточно, чтобы каждая достижимая точка единичной сферы была точкой гладкости.* Следует отметить, что Браун при получении указанной характеризации в четырехмерном случае существенно использует в высшей степени нетривиальный аппарат геометрической топологии. Автор обобщает конструкцию Брауна и получает аналогичную характеризацию в несимметричном нормированном случае. При анализе классической задачи о выпуклости чебышевских множеств автор изучает аппроксимативно-геометрические свойства множеств, лежащих в подпространстве. Автором показано, что если $M \subset H$ – соответственно, чебышевское множество, солнце или строгое солнце, лежащее в линейном подпространстве H линейном нормированном пространстве X, то оно обладает аналогичным свойством в несимметрично нормированном пространстве $(H, |\cdot|_\theta)$, где несимметричная норма $|\cdot|_\theta$ определяется сечением симметричного единичного шара $B \subset X$ аффинным подпространством $H+\theta$, проходящим через произвольную точку $\theta \in \operatorname{int} B$. Поскольку такое аффинное сечение не обязано быть симметричным, то это естественно приводит автора к рассмотрению геометрии несимметрично нормированных пространств. Помимо этого в первой главе получены нетривиальные условия на конечномерное пространство X и его подпространство H, достаточные для того, чтобы всякое множество $M \subset H$, чебышевское в X, было выпуклым. Интересно отметить, что задача об аппроксимативных свойствах множеств, лежащих в подпространстве естественно приводит к задаче приближения относительно несимметричных норм, что, в частности, мотивирует их рассмотрение во второй главе. Действительно, сечение (симметричного) шара банахова пространства совершенно не обязано быть симметричным. Стоит также отметить, что сами постановки таких задач (об оценке числа компонент связности дополнения к чебышёвскому множеству и о приближениями агрегатами, лежащими в подпространстве) принадлежат автору. Вторая задача естественно перекликается с общей задачей о приближении множествами относительно семейства норм (задача одновременного приближения). Также в первой главе рассматривается вопрос о структурных свойствах дополнения к чебышевским множествам, солнцам и строгим солнцам в нормированных и несимметрично нормированных пространствах, получаются законченные характеризационные теоремы, и раскрывается связь этого вопроса с задачей о выпуклости чебышевских множеств.

Во второй главе рассматривается классический вопрос об универсальности пространства $C[0,1]$ непрерывных функций с равномерной нормой для пространств с несимметричной нормой и несимметричной метрикой. Устанавливается принципиально новое свойство универсальности единичного шара пространства $C[0,1]$ для несимметрично нормированных пространств. Автор показывает, что метризуемые сепарабельные несимметрично нормированные пространства X можно изометрически изоморфно вложить в классическое пространство $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие; иными словами, единичный шар пространства X можно представить, с точностью до изометрического изоморфизма, как пересечение единичного шара пространства $C[0,1]$ с некоторым линейным многообразием, пересекающим его по внутренней точке.

В третьей главе рассматриваются задачи о связности и солнечности чебышевских множеств и солнц в линейных нормированных пространствах. Получены следующие результаты. Впервые предъявляется пример негладкого классического бесконечномерного банахова пространства, не являющегося неквадратным, в котором всякое солнце связно (и, более того, монотонно линейно связно). Отметим, что требование отсутствия неквадратности здесь существенно: В.А. Кощеевым установлено, в частности, что в равномерно неквадратном пространстве всякое солнце связно. Получен частично обратный результат: аппроксимативно компактное монотонно линейно связное подмножество пространства c_0 является солнцем; построен подпирающий этот результат пример. В данной главе автор вводит важное понятие монотонно линейно связного множества, которое оказывается вполне естественным при приближении в пространствах с чебышёвской нормой и в ряде других пространств. Использование понятия монотонной линейной связности позволило автору придать законченную форму для ряда известных в теории приближения утверждений. К примеру, известный результат Беренса и Хетцельта утверждает, что замкнутое подмножество пространства ℓ^∞_n является солнцем если и только если оно ℓ^1-выпукло (метрически выпукло в смысле Менгера относительно ℓ^1-нормы). Обобщение этого результата получено Брауном: он ввел класс (BM) конечномерных банаховых пространств и показал, что в таких пространствах замкнутое множество является солнцем если и только если оно m-связно (связно по Менгеру). Автор обобщает эти результаты, показывая, что в (BM)-пространствах замкнутое множество является солнцем если и только если оно монотонно линейно связно. Отсюда автор получает важное следствие, что на солнца в таких пространствах для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε-выборка. С использованием аппарата монотонной линейной связности автору удается обобщить классический результат Конягина о существовании аддитивных непрерывных ε-выборок для множества дробно-рациональных функций очень общего вида. Неожиданным и красивым является результат, что в произвольном линейном нормированном пространстве монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем.

Изучая свойства m-связных (по Менгеру) множеств автор показывает, что если X – сепарабельное банахово пространство и множество $M \subset X$ ограниченно компактно и m-связно, то M монотонно линейно связно, экстремально ограниченно клеточноподобно и, в частности, B-клеточноподобно, B-ациклично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) и является солнцем. Данный результат является трудным и для его доказательству автору приходится обобщать известную теорему Рейнуотера–Симонсона о слабой сходимости на случай сходимости по так называемой ассоциированной по Брауну норме.

Диссертант рассмотрел вопросы связности по Менгеру и монотонной линейной связности R-слабо выпуклых множеств в пространстве непрерывных функций $C(Q)$ на метрическом компакте Q. Класс R-слабо выпуклых множеств интенсивно изучался начиная с 80-х годов 20-го века в работах Ж.-Ф. Виаля, Ф. Кларка, Л. Тибо и ряда других авторов в связи с их приложениями в теории экстремальных задач, в задачах оптимального управления и теории многозначных отображений. Класс R-слабо выпуклых множеств достаточно широк, поскольку он охватывает все выпуклые множества и множества с C^1-гладкой границей. Вместе с тем, к этому классу применимы (после надлежащей модификации) многие методы выпуклого анализа, что позволяет разрабатывать и исследовать конструктивные алгоритмы решения многих важных задач для множеств из этого класса. Свойства R-слабо выпуклых множеств достаточно полно изучены в гильбертовом пространстве. В последние годы эти свойства интенсивно изучались в равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах. В работах А.Р. Алимова впервые свойства таких множеств изучались в пространстве $C(Q)$, которое не является ни равномерно выпуклым, ни равномерно гладким, а также в более общих пространствах – пространствах с линейной вкладываемостью шаров. Получено в некотором смысле окончательное решение данного вопроса: дана характеризация R-слабо выпуклых множеств в конечномерных пространствах с линейной вкладываемостью шаров в терминах солнечности множеств. Отметим в качестве пожелания для дальнейшей работы диссертанта, что было бы весьма интересно получить подобную характеризацию для бесконечномерных пространств такого типа, например, пространства $C(Q)$.

В четвертой главе рассматриваются локальные свойства солнц и чебышевских множеств в банаховых пространствах, исследуется вопрос сохранения солнечности, связности и других аппроксимативных свойств при пересечении таких множеств с подмножествами пространства. Особенно интересной в этой связи является геометрическая характеризация чебышевских множеств в пространстве ℓ_n^∞. Этот вопрос был открыт с 1980-х гг.

В целом диссертация А.Р. Алимова является полным и систематическим исследованием в теории приближений. Все результаты диссертации являются новыми, строго доказаны и своевременно опубликованы надлежащим образом. Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и заключений, полученных в диссертации, подтверждается корректным использованием методов функционального анализа, выпуклого анализа, математического анализа, топологии и комбинаторнй геометрии выпуклых множеств. Достоверность научных результатов диссертации также подтверждается их публикацией в ведущих российских и международных математических журналах и их апробацией на российских и международных математических конференциях, семинарах ведущих математических центров. Автореферат полон и правильно отражает содержание диссертации Все выносимые на защиту научные результаты диссертационной работы получены автором лично, являются новыми и обоснованы в виде четких математических доказательств. Работ, написанных в соавторстве, не имеется.

Замечания.

1) Стр. 14. В формулировке теоремы 1.1 следует указать, что эквивалентность пунктов a) и c) этой теоремы нужно понимать для одного и того же чебышевского множества M. Важно отметить, что в гл. 1 автор доказывает правильный результат.

2) Стр. 16. В определении грани вместо $[a, b] \subset K$ должно быть $[a, b] \subset F$.

3) На стр. 20 и далее под гиперплоскостью понимается аффинное подпространство произвольной коразмерности, а обычно гиперплоскостью называют аффинное подпространство коразмерности 1.

4) Стр. 74. Вместо (2.1) следует сослаться на формулу (2.3).

5) Стр. 74, строка 13 сверху. Неравенство содержит опечатку. Следует писать $b(0, 1 \times \{0\})$ вместо $b(0, 1)$.

6) Стр. 96. при определении множества Мазура один раз вместо M используется буква K.

7) В тексте диссертации обнаружены и другие мелкие опечатки, которые указаны автору.

Отмеченные выше замечания носят скорее редакционный характер и не оказывают влияния на общую положительную оценку работы.

Оценивая диссертационную работу в целом, можно констатировать ее актуальность и научную новизну и квалифицировать ее как крупное научное достижение в теории приближений.

Всё сказанное выше позволяет заключить, что представленная диссертационная работа А. Р. Алимова “Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах” удовлетворяет всем требованиям пп. 9,10 “Положения о порядке предоставления ученых степеней” (утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 г., № 842), предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор заслуживает присуждение ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Заместитель заведующего кафедрой высшей математики
Московского физико-технического института
(государственного университета),
доктор физико-математических наук, профессор Иванов Г.Е. Иванов
26.03.2015

Почтовый адрес места работы: Россия, 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., 9. Телефон: +7 (495) 408 57 00 Факс: +7 (495) 408 68 69

Подпись Г. Е. Иванова заверяю
Ученый секретарь
Московского физико-технического института Скалько Ю.И. Скалько

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»