Отзыв официального оппонента
на диссертацию Алимова Алексея Ростиславовича
“Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах”
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – “вещественный, комплексный и функциональный анализ”

Задача наилучшего приближения функции, как известно, состоит в отыскании такой функции (элемента) из некоторого фиксированного семейства, расстояние от которой до данной функции было бы наименьшим. Эта задача впервые была поставлена в середине XIX в. П. Л. Чебышевым, изучавшим приближение в равномерной метрике непрерывных функций посредством алгебраических многочленов данной степени и рациональных дробей с фиксированными степенями числителя и знаменателя. Побудительной причиной для исследования Чебышевым задач наилучшего приближения стала изучаемая им теория механизмов, и конкретно, вопрос нахождения элементов параллелограммов, удовлетворяющих условиям, при которых точность хода этих механизмов (параллелограммов Уатта) наибольшая. Впоследствии в работах ряда математиков были изучены другие постановки задачи о наилучшем приближении с различным теоретико-функциональным содержанием, определявшимся тем или иным выбором меры расстояния до множества и аппроксимирующего агрегата. К числу первопроходцев в этой области следует, в первую очередь, А. А. Маркова, Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, Ш.-Ж. де ла Валле Пуссена, А. Хаара, А. Н. Колмогорова. По мере развития теории линейных нормированных пространств стало ясно, что широкий круг задач наилучшего приближения допускает общую постановку в терминах приближения в линейных нормированных пространствах, если в качестве меры уклонения рассматривать норму пространства. Такая постановка дала возможность привлечь к решению экстремальных задач теории приближения методы и идеи функционального анализа и геометрии. Новые методы оказались особенно плодотворными при переходе от конечномерных аппроксимирующих агрегатов к бесконечномерным, при исследовании которых классические алгебраические методы в значительной мере теряют свою силу.

Рассматривая диссертация восходит к указанному кругу задач и посвящена избранным вопросам теории приближений в нормированных пространствах (геометрической теории приближений) и сопутствующим вопросам геометрии банаховых и несимметрично нормированных пространств.

В геометрической теории имеется большое число давно стоящих открытых проблем. Наиболее острой из них признается проблема выпуклости чебышевских множеств в бесконечномерном гильбертовом пространстве (проблема Ефимова–Стечкина–Кли). Другая известная проблема теории приближений – *описать конечномерные банаховы пространства, в которых всякое чебышевское множество выпукло.* К настоящему времени такая характеризация получена для банаховых пространств размерности не более четырех В.И. Бердышев, А. Брондстед, А. Л. Браун). В I главе диссертации этот результат обобщается на несимметрично нормированные пространства размерности не более 4. Кроме того, в главе I получены нетривиальные условия на конечномерное пространство X и его подпространство H, достаточные для того, чтобы всякое множество $M \subset H$, чебышевское в X, было выпуклым. Интересно отметить, что задача об аппроксимативных свойствах множеств, лежащих в подпространстве естественно приводит к задаче приближения относительно несимметричных норм, что, в частности, обосновывает их рассмотрение во второй главе. Действительно, сечение (симметричного) шара банахова пространства совершенно не обязано быть симметричным. Стоит также отметить, что сами постановки таких задач (об оценке числа компонент связности дополнения к чебышевскому множеству и о приближениями агрегатами, лежащими в подпространстве) принадлежат автору. При этом вторая задача естественно перекликается с общей задачей о приближении множествами относительно семейства норм (задача одновременного приближения).

Во второй главе показывается универсальность пространства $C[0, 1]$ в классах несимметрично нормированных пространств (результаты типа теоремы Банаха–Мазура). Основной результат этой главы таков: единичный шар всякого метризуемого сепарабельного несимметрично нормированного пространства изометрично изоморфен сечению единичного шара пространства $C[0, 1]$ некоторой аффинной плоскостью. Аналогичные теоремы получены также для несепарабельных пространств любого веса. Данный законченный результат, несомненно, будет считаться классическим – к примеру, он вошел в недавно вышедшую монографию С. Кобзаша по функциональному анализу в несимметрично нормированных пространствах.

В третьей главе автор рассматривает задачи о связности и солнечности чебышевских множеств и солнц в линейных нормированных пространствах. Известно, что всякое солнце (строгое солнце) выпукло если и только если пространство является гладким. В конечномерных пространствах X_n первый нетривиальный результат о связности солнц был получен В. А. Кощеевым в 1975 г., который показал, что солнце в X_n связно (и даже линейно связно и локально линейно связно – А. Л. Браун). В конкретных пространствах важное продвижение в вопросе о структуре солнц было получен Х. Беренсом и Л. Хетцельтом, которые показали, что подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в ℓ^∞_n если и только если оно замкнуто и ℓ^1-выпукло (метрически выпукло относительно стандартной ℓ^1-нормы). В диссертации этот результат усиливается следующим образом: подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в ℓ^∞_n если и только если оно замкнуто и монотонно линейно связно. Данное наблюдение позволило автору ввести важное понятие монотонно линейно связного множества, которое оказывается вполне естественным в рассматриваемом круге задач (замкнутое подмножество M линейного нормированного пространства X называется монотонно линейно связным, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной дугой $k(\cdot) \subset M$; соответственно, непрерывная кривая $k(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, в линейном нормированном пространстве X называется монотонной, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого крайнего элемента f сопряженной сферы S^*). С использованием этого новое понятия диссертанту удалось для ряда классических объектов найти новые методы изучения их аппроксимативно-геометрических свойств. К примеру, важное продвижение удалось получить в следующей классической задаче. Давно известно, что пересечение множества $\mathcal{R}_{n,m}$ дробно-рациональных функций в $C[0,1]$ с произвольным открытым шаром $\mathring{B}(x,r)$ связно, $x \in C[0,1]$, $r > 0$. Автор усиливает этот результат, показывая, что такое пересечение монотонно линейно связно, что позволяет ему, исходя из общих результатов о непрерывных ε-выборках, установить существование непрерывных ε-выборок для всех $\epsilon > 0$ на множество $\mathcal{R}_{n,m}$, его обобщение $\mathcal{R}_{V,W}$ (V, W – произвольные выпуклые подмножества пространства $C(Q)$) и в других случаях. Это обобщает некоторые результаты С. В. Конягина и К. С. Рютина.

Для широкого класса конечномерных банаховых пространств устанавливается монотонная линейная связность произвольных солнц и, как следствие, их B-клеточноподобность и, значит, B-ацикличность (в конечномерном случае – B-стягиваемость), что частично замыкает классическую теорему Л. П. Власова, которая утверждает, что в банаховом пространстве ограниченно компактное P-ацикличное множество является солнцем. Следующий результат следует выделить особо: в произвольном линейном нормированной пространстве монотонно линейно связное чебышевское множество является солнцем. В этом утверждении солнечность чебышевского множества впервые устанавливается при ограничениях типа связности.

В главе IV рассматриваются локальные свойства солнц и чебышевских множеств в банаховых пространствах. Автор исследует вопрос сохранения солнечности, связности и других аппроксимативных свойств при пересечении таких множеств с подмножествами пространства. Стоит отметить геометрическую характеризацию строгих солнц в пространстве ℓ_n^∞, дополняющую классическую характеризацию Беренса–Хетцельта для солнц. Далее, решается классическая задача о характеризации в геометрических терминах чебышевских множеств в пространствах типа $C(Q)$ (задача поставлена в 1980-х годах В. М. Тихомировым и Х. Беренсом). Дается характеризация чебышевских множеств в пространстве ℓ_n^∞. Аналогичная теорема получена для аппроксимативно компактных солнц в пространстве c_0. Исследуется задача о сохранении аппроксимативных свойств солнц, строгих солнц и чебышевских множеств при их пересечении с брусами в ℓ_n^∞ (по определению брус – это пересечение набора гиперполос, порожденных экстремальными функционалами). В частности, единичный шар это брус. Показано, что в широком классе пространств солнечность влечет локальную солнечность в при пересечении с множествами с брусами. Даются условия, обеспечивающие солнечность пересечений солнц с брусами. Показывается, что солнца в конечномерных пространствах вида $X = X_1 \oplus_\infty \ldots \oplus_\infty X_k$, $\dim X_i \leq 2$ являются монотонно линейными множествами и, как следствие, солнца M в таких пространствах B-стягиваемы, являются B-ретрактами, B-солнечны (т.е. пересечение M с любым замкнутым шаром является солнцем), и обладают свойством существования непрерывной мультипликативной (аддитивной) ε-выборки (непрерывной выборки из оператора почти наилучшего ε-приближения).

Замечаний по стилю и оформлению нет. В целом изложение полученных результатов в диссертационной работе проведено ясно и последовательно. Тем не менее, в работе встречаются незначительные опечатки. Например:

- стр. 14. Вместо теоремы 1.A следует писать 1.C (как в гл. I).
- стр. 52, 3 стр. сн. Буква z-явно перегружена, надо использовать другое обозначение.
- стр. 56, 12 стр. сн. В этом параграфе вообще нет предложения 1.3, но есть лемма 1.3.
- стр. 74. В двух местах вместо (2.1) надо ссылаться на формулу (2.3).
- стр. 71, 11 стр. сн. В определении $\rho(f)$ берется максимум из нуля и неотрицательного числа.
- стр. 74, 13 стр. св. Вместо $b(0, 1)$ сдедует писать $b(0, 1) \times \{0\}$.

Отмеченные выше неточности не влияют на достоверность результатов и не снижают общей высокой оценки работы.

Оценивая диссертационную работу в целом, можно констатировать ее актуальность и научную новизну и квалифицировать ее как крупное научное достижение в теории приближений.

Содержание диссертации полностью и адекватно отражено в автореферате. Основные результаты опубликованы в 21 научных статьях, все из перечня Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации. Полученные результаты были доложены на ряде российских и международных конференций в России и за рубежом. Все выносимые на защиту научные результаты диссертационной работы получены автором лично, являются новыми и обоснованы в виде четких математических доказательств. Работ, написанных в соавторстве, не имеется.

Диссертация является научно-квалификационной работой и удовлетворяет п. 9 “Положения о порядке присуждения ученых степеней”. В диссертации, в частности, решены научные проблемы: найдена характеризация чебышевских подмножеств пространства ℓ^∞_n, установлена их экстремальная чебышевость; установлена монотонная линейная связность произвольное солнца в пространстве c_0; показано, что монотонно линейно связное чебышевское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем; показана экстремальная клеточноподобность ограниченно компактных связных по Менгеру (и, в частности, монотонных линейно связных) множеств. Полученные диссертантом результаты можно квалифицировать, как крупные научные достижения в области теории приближений.

Подытоживая и оценивая диссертацию в целом я считаю, что в автором разработано крупное новое научное направление, а созданные при этом методы позволили решить ряд сложных актуальных и давно стоящих задач. Представленная диссертация выполнена самостоятельно. Все научные результаты получены автором лично, являются новыми и обоснованы в виде четких математических доказательств. Работ, написанных в соавторстве, не имеется. Автор диссертации, Алимов А.Р., заслуживает присуждение ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

19.03.2015

Руководитель исследовательской группы отдела новых технологий ООО "Эверноут"
доктор физико-математических наук /Е.Д. Лившиц/

Подпись Е.Д.Лившица заверяю
Генеральный директор ООО "Эверноут" /И.В. Сошинская/

Общество с ограниченной ответственностью "Эверноут" Evernote LLC ОГРН 1127746... Москва

Лившиц Евгений Давидович
доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01
E-mail: evgliv at gmail.com, тел.: (499)951-30-20