ФГБОУ ВПО Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Герасимова Ольга Вячеславовна

Дифференциально-алгебраические и геометрические основы центральной динамики на кривых второго порядка

01.01.06 –математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители: **Михалёв Александр Васильевич**,
доктор физико-математических наук, профессор
Размыслов Юрий Питиримович
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник

Официальные оппоненты: **Голубева Валентина Алексеевна**,
доктор физико-математических наук, профессор
(ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
профессор факультета прикладной математики и физики)
Голубков Артём Юрьевич ,
кандидат физико-математических наук,
доцент факультета прикладной математики и информатики
(ФГБОУ ВПО Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана)

Ведущая организация: **ФГБОУ ВПО "Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого"**

Защита диссертации состоится 26 декабря 2014 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова" по адресу: Российская Федерация, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.
С текстом диссертации можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А), http://mech.math.msu.su/ snark/index.cgi.
Автореферат разослан 22 октября 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.84,
на базе ФГБОУ ВПО МГУ имени М.В. Ломоносова
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Диссертация относится к алгебраическим аспектам теоретической физики.

В ней рассмотрены следующие вопросы: дезарговость проективной плоскости, необходимые условия коммутативности координатного тела, получение первых интегралов движения по кривым второго порядка, формулировка в терминах дифференциальных алгебр условий центральности и квадратичности динамики.

Несколько подробнее:

Наблюдение первое. Для того, чтобы абстрактная проективная плоскость была дезарговой и ее координатное тело было коммутативным необходимо и достаточно, чтобы в хотя бы одной аффинной карте этой плоскости выполнялась следующая

Теорема[1,2]**.** *Пусть точки* Q_1, Q_2, Q_3, S *таковы, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем* l_1, l_2, l_3 *прямые, проходящие через точку* S *и параллельные прямым* Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_1Q_3*, соотвественно. Возьмем произвольную прямую параллельную* SQ_2*, но с ней не совпадающую, пусть она пересекает прямые* l_1, l_2 *в точках* P_1 *и* P_2*. Тогда точка пересечения прямых, проходящих через точки* P_1 *и* P_2 *и параллельных* SQ_1 *и* SQ_3*, соответственно, лежит на прямой* l_3*.*

Этот доказанный мной результат позволяет не только ввести геометрически наглядно привычное со времен Декарта понятие числа, доказав одновременно существование и коммутативность гомотетий с общим центром, но и указать естественный способ сравнения "ориентированных площадей "треугольников"" и строить теорию меры (в случае, когда координатное тело это поле действительных чисел) напрямую, не используя никакой евклидовой метрики.

Наблюдение второе.

Лемма о директрисе и фокусе[3, 4]**.** *Для любых действительных* α, β, δ,

[1] О.В.Герасимова, *Rolling simplexes and their commensurability. I (аксиома и критерий несжимаемости и лемма о моменте)*, Фунд. и прикл. математика, **17:2** (2012), 87–95.

[2] О.В.Герасимова, Ю.П.Размыслов, *Rolling simplexes and their commensurability (законы механики как проблема выбора между метрикой и мерой)*, Фунд. и прикл. математика, **16:3** (2010), 123–126.

[3] Ю.П.Размыслов, *Разъяснение к "Rolling simplexes and their commensurability" (уравнения поля по Тихо Браге)* , Фунд. и прикл. математика, **17:4** (2012), 193–215.

[4] О.В.Герасимова, *Rolling simplexes and their commensurability. II (лемма о директрисе и фокусе)* , Фунд.

k бесконечно дифференцируемые решения $x(t)$, $y(t)$ $(x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)\neq 0)$ уравнения

$$(x'',y'')=-\frac{4\pi^2 k}{(\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta)^3}\cdot(x,y)$$

лежат на кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке $(0,0)$, а директриса определяется уравнением $\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta=0$.

Теорема. *Для любых действительных $\alpha,\beta,\gamma,\delta,k,a,b,c$ бесконечно дифференцируемые решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (не лежащие на прямой) уравнения*

$$(x'',y'',z'')=-\frac{4\pi^2 k}{(\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma z+\delta)^3}\cdot(x-a,y-b,z-c)\quad(a,b,c\in\mathbf{R})$$

лежат на плоских кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке (a,b,c), а директриса является пересечением плоскости движения (содержащей (a,b,c)) и плоскости $\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+\delta=0$.

Эти два утверждения соединили известные и на первый взгляд разнородные модели движения объектов по кривым второго порядка (в частности по прямым) при которых ускорение во все время движения направлено в одну и ту же точку (аффинного) пространства, включив в повестку дня вопрос о существовании универсальной модели центрально-квадратичной динамики.

Наблюдение третье.

Теорема 1[5]**.** *Пусть $|G|$ — порядок конечной группы G и*

$$H_{[G,G]}\overset{def}{=}\frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}[g,h]\quad([g,h]\overset{def}{=}g^{-1}h^{-1}gh)\qquad -$$

элемент групповой алгебры $K[G]$, где $K=C$ — поле комплексных чисел. Тогда для любого представления $\rho:G\to End_K V$ в произвольном пространстве V линейное преобразование $\rho(H_{[G,G]})$ диагонализируемо и его спектр имеет вид $\frac{1}{n^2}$, где n пробегает $dim_K V_i$, где V_i —неприводимые компоненты в пространстве V относительно действия группы G.

Найденное мной доказательство этого несложного факта позволило мне перенести его на произвольные компактные группы.

Теорема 2[6]**.** *Пусть мера Хаара μ на компактной группе G такова, что $\mu(G)=1$, а $\rho:G\to End_K V$ — непрерывное представление G в банаховом*

и прикл. математика, **19:1** (2014), 13–19.

[5]О.В.Герасимова, *Спектр коммутаторного гамильтониана водородоподобен* , Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. **6** (2008), 71–74.

[6]О.В.Герасимова, *Спектр коммутаторного гамильтониана сродни энергетическим уровням атома водорода* , УМН, **64:4(388)** (2009), 177–178.

пространстве V над полем комплексных чисел K и линейный оператор $H^{\rho}_{[G,G]}$ определяется формулой

$$H^{\rho}_{[G,G]} \overset{def}{=} \iint\limits_{G} [\rho(g), \rho(h)] d\mu_g d\mu_h.$$

Тогда для любого n–мерного подпространства W, на котором $\rho(G)$ действует неприводимо,

$$H^{\rho}_{[G,G]}(w) = (\int\limits_{G} \rho(g^{-1})(\int\limits_{G} \rho(h^{-1})\rho(g)\rho(h)d\mu_h)d\mu_g) \cdot w =$$

$$= (\int\limits_{G}(\int\limits_{G} \rho(g^{-1})\rho(h^{-1})\rho(g)d\mu_g)\rho(h)d\mu_h) \cdot w = \frac{1}{n^2} \cdot w \quad (w \text{ пробегает } W).$$

На мой взгляд, наиболее фундаментальным здесь является случай регулярного представления компактной группы $G = SU(2, \mathbb{C})$.

Важный пример. Пусть $SU(2, K)$ — группа унитарных 2×2 матриц над комплексным полем K с детерминантом, равным единице, V — линейное пространство всех функций $f : G \to K$, для которых $||f||^2 \overset{def}{=} \int\limits_{G} |f(g)|^2 d\mu_g < \infty$, и представление $\rho : G \to End_K V$ группы G реализуется правыми сдвигами $\rho(h) \times f(g) \overset{def}{=} f(hg)$. Хорошо известно[7], что

(a) в V с точностью до эквивалентности функций реализуется гильбертово пространство относительно полуторалинейной формы

$(f(g), h(g)) \overset{def}{=} \int\limits_{G} f(g)\overline{h(g)} d\mu_g$,

(b) для любого натурального n единственное с точностью до изоморфизма n–мерное представление группы G реализуется в V и имеет в V кратность, равную n,

(c) сумма всех конечномерных неприводимых подпространств из V плотна в V.

Из теоремы 2 заключаем, что в гильбертовом пространстве V имеется полный ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $H^{\rho}_{[G,G]}$. В частности, для любого натурального n кратность собственного значения $\frac{1}{n^2}$ равна n^2. (См. для сравнения в книге Германа Вейля[8] спектр оператора Шредингера для атома водорода.)

---

[7] Л.С.Понтрягин, *Непрерывные группы*, М.: Изд-во Наука, 1984.

[8] Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика.* , М.: Изд-во Наука, 1974.

Вот, вкратце, мои основные результаты вокруг, которых были проведены исследования в данной диссертации: “Дифференциально-алгебраические и геометрические основы (начала) центральной динамики на квадратичных кривых”.

Актуальность темы

Исследование движения по кривым второго порядка восходят работам Евклида, Р. Декарта, Ньютона. В то же время ряд современных вопросов не был рассмотрен должным образом, так, например, дифференциальные алгебры квадратичной и центрально-квадратичной динамики, как и само понятие центрально-квадратичной динамики, возникли в работах Ю.П. Размыслова[9, 10, 11] (2010-2013гг). Отправной точкой для этих исследований явилась наша совместная с Ю.П. Размысловым работа об аксиоматизации декартовой проективной плоскости и доказанная мной лемма о директрисе и фокусе. В диссертации эти исследования доводятся до логического конца, указанием регулярного способа построения “полной” системы констант в этих алгебрах. Причем, эти методы не ограничиваются случаем квадратичных кривых и могут быть использованы для дальнейшего развития теории на случай центральной динамики на плоских аффинных алгебраических кривых степени $N > 2$.

Цель работы

Получить наглядное описание декартовой проективной плоскости, то есть дезарговой плоскости, координатное тело которой коммутативно. Ввести координатизацию аффинной карты такой плоскости над коммутативным телом (полем) не прибегая к использованию понятий, аналогичных метрике. Описать в наибольшей общности (в терминах дифференциальных алгебр) движение по кривой второго порядка, квадратичную динамику. Предоставить

[9] Ю.П.Размыслов, *Роллинг и соизмеримость симплексов (аксиома и критерий несжимаемости, лемма о моменте)* , Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика., **5** (2011).

[10] О. В. Герасимова, Ю. П. Размыслов, *Rolling simplexes and their commensurability (законы механики как проблема выбора между метрикой и мерой)*, Фундамент. и прикл. матем., **16:3** (2010) 123–126.

[11] Ю. П. Размыслов, *Разъяснение к “Rolling simplexes and their commensurability” (уравнения поля по Тихо Браге)*, Фундамент. и прикл. матем., **17:4** (2012) 193–215.

описание центральности движения, использующее понятия дифференциальной алгебры, как основной метод описания физических законов движения. Указать единый способ построения полной системы констант в алгебре центральной динамики. Исследовать спектр интегрального оператора – коммутаторного гамильтониана компактной группы.

Методы исследования

В работе использован аксиоматический метод для построения декартовой (папповой) проективной плоскости; элементарные методы теории дифференциальных уравнений для явного отыскания полной системы первых интегралов; метод соотношений Капелли и теорема о ранге Капелли Ю.П. Размыслова; техника гомоморфизмов Тейлора и аналитический спектр; дифференциально-комбинаторный метод исследования свойств определителя Вронского, выражающего свойство квадратичной динамики; явное построение полной системы констант в дифференциальной алгебре центрально-квадратичной динамики.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. Перечислим основные:

1. Получена аксиоматика дезарговой проективной плоскости, координатное тело которой коммутативно, в терминах роллинга.

2. Доказана теорема о касательном расслоении к кривой второго порядка, а так же указан способ построения касательного расслоения с помощью угольника и линейки.

3. Доказана лемма о директрисе и фокусе, а так же приведено объяснение как центрально-квадратичная динамика может быть сведена к ней при помощи кубичного расширения. Приведены примеры применения данной леммы к классическим задачам: о гармоническом осцилляторе, полях Кулонова типа.

4. С помощью полученного комбинаторного результата доказывается теорема о проинтегралах дифференциальной алгебры центрально-квадратичной динамики.

5. Исследован вопрос о спектре коммутаторного гамильтониана. Получены следующие результаты:

   описан спектр для случая конечной группы;

   получено обобщение оператора на случай компактной группы и приведен его спектр;

   приведен пример, при котором полученный оператор является интегральным аналогом оператора Шредингера для атома водорода.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Научно-исследовательском семинаре по алгебре, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством

   профессора В.Н.Латышева, профессора А.В.Михалева, неоднократно, 2010–2014 гг.

2. Научно-исследовательском семинаре Дополнительные главы алгебры под руководством В.И.Артамонова, 2010.

3. Международный алгебраический симпозиум , посвященный 80-летию кафедры и 70-летию профессора А. В. Михалева., Москва, 15–18 ноября 2010.

4. Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша, Москва, 28 мая – 3 июня 2008.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы [1]-[10], 3 из которых — в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории дифференциальных алгебр, теоретической физике и квантовой теории. Ввиду их простоты и наглядности методы этой работы можно использовать в работе со студентами и даже школьниками для знакомства их с некоторыми базовыми математическими понятиями, составляющими основу математической интуиции. Это понятия поля, меры, декартовой плоскости и введенное нами с Ю.П. Размысловым понятие роллинга.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 31 наименования. Общий объем диссертации составляет 85 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении затронута актуальность темы диссертации, ее структура, перечислены результаты автора.

В главе 1 вводится понятие роллинга, то есть "передвижения" любой точки из тройки параллельно прямой, проходящей через две оставшиеся, причем порядок точек в тройке сохраняется, то есть тройка (A, B, C) может перейти в тройки (A', B, C), (A, B', C) либо (A, B, C'), где точки A', B', C' лежат на прямых, параллельных прямым BC, AC, AB и проходящих через точки A, B, C, соотвественно.

Вводится аксиоматика теории поля, основанная на понятии роллинга, и выясняется, что доказывается аксиома является достаточной и необходимой для построения теории.

(**RO**) (**Аксиома несжимаемости**). Если точки A, B, C аффинной плоскости M_l не лежат на одной прямой и точка D находится на одной прямой с B и C, но не совпадает с C, то тройку (A, B, D) нельзя перекатить в тройку (A, B, C).

Теорема 2. *Пусть точки Q_1, Q_2, Q_3, S таковы, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем l_1, l_2, l_3 прямые, проходящие через точку S и параллельные прямым Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_1Q_3, соотвественно. Возьмем* *произвольную прямую параллельную SQ_2, но с ней не совпадающую, пусть она пересекает прямые l_1, l_2 в точках P_1 и P_2. Тогда точка пересечения прямых, проходящих через точки P_1 и P_2 и параллельных SQ_1 и SQ_3, соответственно, лежит на прямой l_3.*

Основным результатом первой главы является

Критерий несжимаемости. Для того, чтобы проективная плоскость была декартовой, то есть дезарговой, у которой координатное тело коммутативно, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одно аффинной карте M_l выполнялось любое из следующих условий

(**a**) в M_l справедливо (**RO**);

(**b**) в M_l справедлива **теорема 2**.

Глава 2 посвящена формулировке и доказательству основного результата работы, который составляет основу центрально-квадратичной динамики.

Лемма о директрисе и фокусе. *Для любых действительных α, β, δ, k бесконечно дифференцируемые решения $x(t)$, $y(t)$ $(x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t) \neq 0)$ уравнения*

$$(x'', y'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^3} \cdot (x, y)$$

лежат на кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке $(0, 0)$, а директриса определяется уравнением $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta = 0$.

Эта лемма допускает следующее обобщение.

Теорема. *Для любых действительных $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k, a, b, c$ бесконечно дифференцируемые решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (не лежащие на прямой) уравнения*

$$(x'', y'', z'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma z + \delta)^3} \cdot (x - a, y - b, z - c) \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$

лежат на плоских кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке (a, b, c), а директриса является пересечением плоскости движения (содержащей (a, b, c)) и плоскости $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta = 0$.

Далее рассматриваются примеры центральных полей динамика, которых квадратична, дается подробное описание движения и его первых интегралов.

Глава 3 является концептуальной. Развитые в ней алгебраические методы используются для обоснования основных результатов главы четыре и включают технику гомоморфизмов Тейлора и соотношений Капелли. Особо здесь следует отметить следующие понятия и результаты.

Аналитический спектр. Для любого $M \in \mathrm{Spec}_K A$ обозначим ψ_M K-гомоморфизм K-алгебры A на фактор-алгебру A/M, которая изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. Тогда с точностью до автоморфизма комплексного сопряжения можно считать, что ψ_M - это K-гомоморфизмом K-алгебры A в поле $\mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{\mathrm{Spec}}_K A$ такое подмножество в $\mathrm{Spec}_K A$, составленное из тех K-простых идеалов M K-алгебры, для которых при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M : A \to \mathbb{C}[[t]]$ образ $\tilde{\psi}_M(A)$ состоит из рядов, сходящихся в некоторой окрестности нуля поля $\mathbb{C}$. Оказывается, что K-гомоморфизмов $\psi_M : A \to \mathbb{C}$ ($M \in \overline{\mathrm{Spec}}_K A$) достаточно много.

Теорема. *Пусть дифференциальная K-алгебра A имеет конечное число дифференциальных образующих относительно K-дифференцирования $D : A \to A$. Тогда для любого ненильпотентного элемента a K-алгебры A существует $M \in \overline{\mathrm{Spec}}_K A$ такой, что $\psi_M(a) \neq 0$ в поле $\mathbb{C}$.*

Лемма о нильпотентном элементе. Обозначим $W(a_1, \dots, a_n)$ матрицу, у которой в i-ой строке j-го столбца $(i = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n)$ стоит элемент $D^i \times a_j$.

Лемма. *Если самый верхний минор $|a_1, \dots, a_n|$ n-го порядка матрицы $W(a_1, \dots, a_n)$ является нильпотентным элементом в K-алгебре A, то все остальные миноры n-го порядка матрицы $W(a_1, \dots, a_n)$ нильпотентные элементы K-алгебры A.*

Лемма о проинтегралах. *Рассмотрим дифференциальную K-алгебру F_n, заданную дифференциальными образующими $x_1, \cdots, x_n$ и одним определяющим дифференциальным соотношением $|x_1, \cdots, x_n| = 0$. Обозначим m_j^i алгебраическое дополнение для элемента $x_i^{(j)}$ в квадратной матрице*

$$\begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Положим $r_i(x_1, \cdots, x_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} m_{n-1}^i (i = 1, \cdots, n)$. Тогда в алгебре F_n имеют место следующие равенства

(a) $r_1(x_1, \cdots, x_n) \cdot x_1 + r_2(x_1, \cdots, x_n) \cdot x_2 + \cdots + r_n(x_1, \cdots, x_n) \cdot x_n = 0,$

(b) $r_i \cdot r_j' - r_i' \cdot r_j = 0.$

Элементы $r_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, r_n(x_1, \cdots, x_n)$ дифференциальной K-алгебры F_n мы называем **проинтегралами**, имея в виду, что в локализации $F_n[r_j^{-1}]$ элементы r_i/r_j являются константами. Действительно, из свойства (b) следствия вытекает, что $(r_i/r_j)' = 0$ в F_n.

Глава 4 начинается доказательством следующего комбинаторного результата.

Теорема 1. Пусть $K[x^{(i)}, y^{(i)}]$ свободная дифференциальная алгебра относительно сигнатурного дифференцирования $'$ с дифференциальными образующими x, y. Пусть $H \stackrel{\text{def}}{=} |x^2, xy, y^2, x, y, 1|$ определитель Вронского для функций $x^2, xy, y^2, x, y, 1$. Обозначим через m_i - минор матрицы H, получающийся вычеркиванием последней строки и i-го столбца.

Положим $g_{11} \stackrel{\text{def}}{=} m_1, g_{12} = g_{21} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}m_2, g_{22} \stackrel{\text{def}}{=} m_3, g_{1,3} = g_{3,1} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}m_4,$
$g_{33} = -m_6, g_{3,2} = g_{2,3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}m_5.$

Тогда

(a) $g_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot g_{12} \cdot x \cdot y + g_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot g_{13} \cdot x + 2 \cdot g_{32} \cdot y + g_{33} = 0;$

(b) $\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = -8 \cdot 729 \cdot \sigma_{12}^{10} = -8 \cdot 729(x' \cdot y'' - x'' \cdot y')^{10};$

(c) $f \cdot g' - f' \cdot g$ делится на $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$;

(d) $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = -(\sigma_{12})^2 b_2(x, y) = (x' \cdot y'' - x'' \cdot y') \cdot (-9 \cdot \sigma'''_{1,2} \cdot \sigma^2_{1,2} - 27 \cdot \sigma'_{2,3} \cdot \sigma^2_{1,2} + 45 \cdot \sigma''_{1,2} \cdot \sigma'_{1,2} \cdot \sigma_{1,2} + 45 \cdot \sigma_{2,3} \cdot \sigma'_{1,2} \cdot \sigma_{1,2} - 40 \cdot (\sigma'_{1,2})^3).$

С помощью этой комбинаторной теоремы доказывается основной результат о редуцированной алгебре квадратичной динамики G_2, которая задается двумя образующими x, y и дифференциальным соотношением $b_2(x, y) = 0$.

Теорема 2. *Рассмотрим в дифференциальной алгебре G_2 следующую симметрическую матрицу*

$H_{G_2} = \begin{pmatrix} \mathrm{g}_{11} & \mathrm{g}_{12} & \mathrm{g}_{13} \\ \mathrm{g}_{21} & \mathrm{g}_{22} & \mathrm{g}_{23} \\ \mathrm{g}_{31} & \mathrm{g}_{32} & \mathrm{g}_{33} \end{pmatrix}$, *где g_{ij} получаются из g_{ij}, при помощи естественного гомоморфизма из $K[x^{(i)}, y^{(i)}]$ в G_2 как фактор-алгебру по элементу $b_2(x, y)$.*

Тогда

(a) $H'_{G_2} = \frac{10\sigma'_{12}}{3\sigma_{12}} H_{G_2}$;

(b) $f \cdot g' - f' \cdot g = 0$ для произвольных элементов матрицы H_{G_2};

(c) $\mathrm{g}_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot \mathrm{g}_{12} \cdot x \cdot y + \mathrm{g}_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot \mathrm{g}_{13} \cdot x + 2 \cdot \mathrm{g}_{32} \cdot y + \mathrm{g}_{33} = 0$*;*

(d) $\det H_{G_2} = -8 \cdot 729 \cdot \sigma_{12}^{10}$.

Как было определено в статье Ю.П.Размыслова[12] дифференциальная алгебра центрально-квадратичной динамики B_2 порождается двумя образующими и x, y и дифференциальными соотношениями типа Капелли

(a) $\sigma_{02} = 0$ - свойство центральности поля

(b) $b_2(x, y) = 0$ - условие квадратичной динамики.

Там же было доказано, что ее локализация по элементу σ_{01} изоморфна локализации по элементу σ_{01} дифференциальной алгебре Декарта-Уоттона D_2, заданной тремя дифференциальными образующими u, v, w и следующими соотношениями

(a) $u'' = -w \cdot u, v'' = -w \cdot v$,

(b) $9 \cdot w''' \cdot w^2 - 45 \cdot w'' \cdot w' \cdot w + 40 \cdot (w')^3 + 9 \cdot w' \cdot w^3 = 0$.

Теорема 3. *Рассмотрим алгебру G, получающуюся присоединением к алгебре Декарта-Уоттона D_2 еще одного элемента d (а также единичного элемента), связанного следующим соотношением $wd^3 = 1$. Локализация $G[d^{-1}]$ по элементу d вкладывается в локализацию $G_\delta[d^{-1}]$, где дифференциальная алгебра G_δ задается образующими x, y, d, δ и определяющими соотношениями $d^3 \cdot x'' = -x$, $d^3 \cdot y'' = -y$, $d^3 \cdot d'' = -(d - \delta)$, где $\delta' = 0$.*

Из теоремы непосредственно следует, что в трехмерном аффинном пространстве с координатами x, y, d любое гладкое решение $x(t), y(t), d(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$x'' = -\frac{1}{d^3}x, y'' = -\frac{1}{d^3}y, d'' = -\frac{1}{d^3}(d - \delta), \text{где } \delta' = 0. \tag{1}$$

должно лежать в плоскости, проходящей через точку $(0, 0, \delta)$,
где $d = \frac{\sigma_{01}(y,d)}{\sigma_{01}(x,y)}x - \frac{\sigma_{01}(x,d)}{\sigma_{01}(x,y)}y + \delta$, причем $\left(\frac{\sigma_{01}(y,d)}{\sigma_{01}(x,y)}\right)' = 0$, $\left(\frac{\sigma_{01}(x,d)}{\sigma_{01}(x,y)}\right)' = 0$.

Положим $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{01}(y,d)}{\sigma_{01}(x,y)}$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\sigma_{01}(d,x)}{\sigma_{01}(x,y)}$, таким образом, решения уравнения (1) сводятся к решению системы уравнений

$$(x, y)'' = -\frac{1}{(\alpha x + \beta y + \delta)^3}(x, y), \quad (\alpha' = 0, \beta' = 0, \delta' = 0).$$

Смотри для сравнения лемму о директрисе и фокусе.

[12] Ю.П.Размыслов, *Разъяснение к "Rolling simplexes and their commensurability" (уравнения поля по Тихо Браге)*, Фундамент. и прикл. матем. **17**:4 (2012), 193–215

В **главе 5** исследуется спектр коммутаторного гамильтониана.

Теорема 1. *Пусть* $|G|$ *— порядок конечной группы* G *и*

$$H_{[G,G]} \stackrel{def}{=} \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} [g,h] \quad ([g,h] \stackrel{def}{=} g^{-1}h^{-1}gh) \qquad -$$

элемент групповой алгебры $K[G]$, *где* $K = C$ *— поле комплексных чисел. Тогда для любого представления* $\rho : G \to End_K V$ *в произвольном пространстве* V *линейное преобразование* $\rho(H_{[G,G]})$ *диагонализируемо и его спектр имеет вид* $\frac{1}{n^2}$, *где* n *пробегает* $dim_K V_i$, *где* V_i *—неприводимые компоненты в пространстве* V *относительно действия группы* G.

Далее оператор $H_{[G,G]}$ обобщается на случай произвольной компактной группы.

Теорема 2. *Пусть мера Хаара* μ *на компактной группе* G *такова, что* $\mu(G) = 1$, *а* $\rho : G \to End_K V$ *— непрерывное представление* G *в банаховом пространстве* V *над полем комплексных чисел* K *и линейный оператор* $H^{\rho}_{[G,G]}$ *определяется формулой*

$$H^{\rho}_{[G,G]} \stackrel{def}{=} \iint\limits_{G} [\rho(g), \rho(h)] d\mu_g d\mu_h.$$

Тогда для любого n*–мерного подпространства* W, *на котором* $\rho(G)$ *действует неприводимо,* $H^{\rho}_{[G,G]}(w) = (\int\limits_G \rho(g^{-1})(\int\limits_G \rho(h^{-1})\rho(g)\rho(h) d\mu_h) d\mu_g) \cdot w =$
$= (\int\limits_G (\int\limits_G \rho(g^{-1})\rho(h^{-1})\rho(g) d\mu_g)\rho(h) d\mu_h) \cdot w = \frac{1}{n^2} \cdot w \quad$ (w *пробегает* W).

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико-математических наук профессору А.В. Михалёву и доктору физико-математических наук ведущему научному сотруднику Ю.П. Размыслову за постановку задач и внимание к работе.

Автор также выражает благодарность всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] *О. В. Герасимова.* Спектр коммутаторного гамильтониана водородоподобен // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 6 (2008), 71—74.

[2] *О. В. Герасимова.* Спектр коммутаторного гамильтониана сродни энергетическим уровням атома водорода // УМН, 64:4(388) (2009), 177–178.

[3] *О. В. Герасимова, Ю. П. Размыслов.* Гамильтоновость полиномиальных ниль-распределений на афинной плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1 (2010), 67–70. (Ю.П.Размыслову принадлежит формулировка теоремы 1, О.В. Герасимовой формулировка теоремы 2, доказательсто обеих теорем и следствий из нее.)

[4] *О. В. Герасимова* Плотные конечно порождённые подгруппы и интегрирование в компактных группах // Фундамент. и прикл. матем., 18:4 (2013), 71–77.

[5] *О. В. Герасимова, Ю. П. Размыслов.* Rolling simplexes and their commensurability (законы механики как проблема выбора между метрикой и мерой) // Фундамент. и прикл. матем., 16:3 (2010), 123–126. (Ю.П.Размыслову принадлежит формулировка теоремы 1, О.В. Герасимовой формулировка и доказательство теоремы 2.)

[6] *O.V.Gerasimova, Yu.P.Razmyslov.* Rolling simplexes and their commensurability (Laws of mechanics as a problem of choice between metrics and measure) // Journal of Mathematical Sciences (New York), 177:6 (2011), 860–861. (Ю.П.Размыслову принадлежит формулировка теоремы 1, О.В. Герасимовой формулировка и доказательство теоремы 2.)

[7] *О. В. Герасимова.* Rolling simplexes and their commensurability. I (аксиома и критерий несжимаемости и лемма о моменте) // Фундамент. и прикл. матем., 17:2 (2012), 87–95.

[8] *О. В. Герасимова.* Rolling simplexes and their commensurability. II (лемма о директрисе и фокусе) // Фундамент. и прикл. матем., 19:1, (2014), 13–19.

[9] *O.V.Gerasimova.* Rolling simplexes and their commensurability. I. The axiom and criterion of incompressibility and the momentum lemma // Journal of Mathematical Sciences (New York), 186:4 (2012), 586–591.

[10] *О. В. Герасимова.* Спектр коммутаторного гамильтониана водородоподобен, Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша. Тезисы докладов, с. 67–68, 2008.