ФГБОУ ВПО Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Герасимова Ольга Вячеславовна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ НА КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Научные руководители
доктор физико-математических наук,
проф. А.В. Михалёв.
доктор физико-математических наук,
в.н.с. Ю.П.Размыслов.

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2014

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Обучаясь на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова и проникаясь алгебраической культурой и терминологией на кафедре высшей алгебры, для себя я осознала, что за прошедшие годы (с 2006 по 2014) мною было сделано три следующих наблюдения в этом направлении.

Наблюдение первое. Для того, чтобы абстрактная проективная плоскость была дезарговой и ее координатное тело было коммутативным необходимо и достаточно, чтобы в хотя бы одной аффинной карте этой плоскости выполнялась следующая

Теорема (см [26],[28]). *Пусть точки Q_1, Q_2, Q_3, S таковы, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем l_1, l_2, l_3 прямые, проходящие через точку S и параллельные прямым Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_1Q_3, соответственно. Возьмем произвольную прямую параллельную SQ_2, но с ней не совпадающую, пусть она пересекает прямые l_1, l_2 в точках P_1 и P_2. Тогда точка пересечения прямых, проходящих через точки P_1 и P_2 и параллельных SQ_1 и SQ_3, соответственно, лежит на прямой l_3.*

Этот доказанный мной результат позволяет не только ввести геометрически наглядно привычное со времен Декарта понятие числа, доказав одним махом существование и коммутативность гомотетий с общим центром, но и указать естественный способ сравнения "ориентированных площадей "треугольников и строить теорию меры (в случае, когда координатное тело это поле действительных чисел) напрямую, не используя никакой евклидовой метрики.

Наблюдение второе.

Лемма о директрисе и фокусе (см. [30], [1]). *Для любых действительных α, β, δ, k бесконечно дифференцируемые решения $x(t)$, $y(t)$ $(x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t) \neq 0)$ уравнения*

$$(x'', y'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^3} \cdot (x, y)$$

лежат на кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке $(0,0)$, а директриса определяется уравнением $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta = 0$.

Теорема. *Для любых действительных $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k, a, b, c$ бесконечно дифференцируемые решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (не лежащие на прямой) уравнения*

$$(x'', y'', z'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma z + \delta)^3} \cdot (x - a, y - b, z - c) \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$

лежат на плоских кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке (a, b, c), а директриса является пересечением плоскости движения (содержащей (a, b, c)) и плоскости $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta = 0$.

Эти два утверждения оказались той последней каплей, которые переполнили чашу, содержащую известные и на первый взгляд разнородные модели движения объектов по кривым второго порядка (в частности по прямым) при которых ускорение во все время движения направлено в одну и ту же точку (аффинного) пространства, включив в повестку дня вопрос о существовании универсальной модели центрально-квадратичной динамики.

Наблюдение третье.

Теорема 1 (см. [22]). *Пусть $|G|$ — порядок конечной группы G и*

$$H_{[G,G]} \stackrel{def}{=} \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} [g, h] \quad ([g, h] \stackrel{def}{=} g^{-1} h^{-1} g h) \qquad -$$

элемент групповой алгебры $K[G]$, где $K = C$ — поле комплексных чисел. Тогда для любого представления $\rho : G \to End_K V$ в произвольном пространстве V линейное преобразование $\rho(H_{[G,G]})$ диагонализируемо и его спектр имеет вид $\frac{1}{n^2}$, где n пробегает $dim_K V_i$, где V_i —неприводимые компоненты в пространстве V относительно действия группы G.

Найденное мной доказательство этого несложного факта позволило мне перенести его на произвольные компактные группы.

Теорема 2 (см. [23]). *Пусть мера Хаара μ на компактной группе G такова, что $\mu(G) = 1$, а $\rho : G \to End_K V$ — непрерывное представление G в банаховом пространстве V над полем комплексных чисел K и линейный оператор $H^{\rho}_{[G,G]}$ определяется формулой*

$$H^{\rho}_{[G,G]} \stackrel{def}{=} \iint\limits_{G} [\rho(g), \rho(h)] d\mu_g d\mu_h.$$

Тогда для любого n–мерного подпространства W, на котором $\rho(G)$ действует неприводимо,

$$H^{\rho}_{[G,G]}(w) = (\int\limits_G \rho(g^{-1})(\int\limits_G \rho(h^{-1})\rho(g)\rho(h) d\mu_h) d\mu_g) \cdot w =$$

$$= (\int\limits_G (\int\limits_G \rho(g^{-1})\rho(h^{-1})\rho(g) d\mu_g)\rho(h) d\mu_h) \cdot w = \frac{1}{n^2} \cdot w \quad (w \text{ пробегает } W).$$

На мой взгляд, наиболее фундаментальным здесь является случай регулярного представления компактной группы $G = SU(2, \mathbb{C})$.

Важный пример. Пусть $SU(2, K)$ — группа унитарных 2×2 матриц над комплексным полем K с детерминантом, равным единице, V — линейное пространство всех функций $f : G \to K$, для которых $||f||^2 \stackrel{def}{=} \int\limits_G |f(g)|^2 d\mu_g < \infty$, и представление $\rho : G \to End_K V$ группы G реализуется правыми сдвигами $\rho(h) \times f(g) \stackrel{def}{=} f(hg)$. Хорошо известно (см. [16], [17],[20]), что

(a) в V с точностью до эквивалентности функций реализуется гильбертово пространство относительно полуторалинейной формы $(f(g), h(g)) \overset{def}{=} \int\limits_G f(g)\overline{h(g)}d\mu_g$,

(b) для любого натурального n единственное с точностью до изоморфизма n–мерное представление группы G реализуется в V и имеет в V кратность, равную n,

(c) сумма всех конечномерных неприводимых подпространств из V плотна в V.

Из теоремы 2 заключаем, что в гильбертовом пространстве V имеется полный ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $H^{\rho}_{[G,G]}$. В частности, для любого натурального n кратность собственного значения $\frac{1}{n^2}$ равна n^2. (См. для сравнения в книге [18] спектр оператора Шредингера для атома водорода.)

Вот, вкратце, мои основные результаты, вокруг которых были проведены исследования в данной диссертации: "Дифференциально-алгебраические и геометрические основы (начала) центральной динамики на квадратичных кривых".

Цель работы. Получить наглядное описание декартовой проективной плоскости, то есть дезарговой плоскости, координатное тело которой коммутативно. Восстановить меру в своих правах, показав ее первичный относительно метрики характер. Описать в наибольшей общности (в терминах дифференциальных алгебр) движение по кривой второго порядка, квадратичную динамику. Предоставить описание центральности движения. Показать, что язык дифференциальных алгебр является более естественным методом описания физических законов движения.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получена аксиоматика дезарговой проективной плоскости, координатное тело которой коммутативно, в терминах роллинга.

2. Доказана теорема о касательном расслоении к кривой второго порядка, а так же указан способ построения касательного расслоения с помощью угольника и линейки.

3. Доказана лемма о директрисе и фокусе, а так же приведено объяснение как центрально-квадратичная динамика может быть сведена к ней при помощи кубичного расширения. Приведены примеры применения данной леммы к классическим задачам: о гармоническом осцилляторе, полях кулонова типа, полях Птолемея.

4. С помощью полученного комбинаторного результата доказывается теорема о проинтегралах дифференциальной алгебры центрально-квадратичной динамики.

5. Исследован вопрос о спектре некоторого оператора, в том числе получены следующие результаты:

   Описан спектр для случая конечной группы.

   Оператор обобщен на случай компактной группы и приведен его спектр.

   Приведен пример, при котором полученный оператор является интегральным аналогом оператора Шредингера для атома водорода.

Методы исследования. В работе используются методы дифференциальной алгебры, тождества Капелли и определителей Вронского для дифференциальных алгебр, некоторые доказательства проведены при помощи аксиоматического, комбинаторного и геометрического методов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории дифференциальных алгебр, теоретической физике и квантовой теории. В виду их простоты и наглядности методы этой работы можно использовать в работе со студентами и даже школьниками для знакомства их с некоторыми базовыми математическими понятиями, составляющими основу математической интуиции. Это - понятия поля, меры, декартовой плоскости, а также введенное нами с Юрием Питиримовичем Размысловым понятие роллинга.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на

- научно-исследовательском семинаре по алгебре, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора В.Н.Латышева, профессора А.В.Михалева, 2014 г.

- научно-исследовательском семинаре Дополнительные главы алгебры под руководством В.И.Артамонова, 2010.

- международный алгебраический симпозиум , посвященный 80-летию кафедры и 70-летию профессора А. В. Михалева., Москва, 2010

- международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша, Москва, 2008.

Публикации. По теме диссертации автором было опубликовано 8 статей, 3 из которых — в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 31 наименования. Общий объем диссертации составляет 80 страниц.

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

В первой главе вводится понятие роллинга, хорошо известное в случае действительного поля любому школьнику.

Определение. Будем называть тройкой, тройкой точек, упорядоченной тройкой элемент декартового произведения $M_l \times M_l \times M_l$ и обозначать его (A, B, C).

Определение. Назовем шагом роллинга "передвижение"любой точки из тройки параллельно прямой, проходящей через две оставшиеся, причем порядок точек в тройке сохраняется, то есть тройка (A, B, C) может перейти в тройки (A', B, C), $\quad (A, B', C)$ либо (A, B, C'), где точки A', B', C' лежат на прямых, параллельных прямым BC, AC, AB и проходящих через точки A, B, C, соотвественно.

Дается объяснение, что как совершить шаг роллинга точки Q в произвольную точку Q' для тройки (Q, S, P), надо сначала сроллировать точку P в точку P', являющуюся точкой пересечения прямой, проходящей через P и параллельной прямой QS, и прямой, проходящей через S и параллельной QQ'. При этом если прямая QQ' параллельна прямой SP, то P' совпадет с P.

Вводится аксиоматика теории поля, основанной на понятии роллинга и выясняется какие из аксиом являются достаточными и необходимыми для построения теории.

(**R0**) (**Аксиома несжимаемости**). Если точки A, B, C аффинной плоскости M_l не лежат на одной прямой и точка D находится на одной прямой с B и C, но не совпадает с C, то тройку (A, B, D) нельзя перекатить в тройку (A, B, C).

(**R1**) (**Аксиома слабой аддитивности**). Если в аффинной плоскости M_l тройки точек S, A, A' и S, B, B' лежат на разных прямых, а прямые, проходящие через точки A, B и A', B' параллельны, то тройку (S, A', B) можно перекатить в тройку (S, A, B').

(**R2**) (**Аксиома аддитивности**). Если в аффинной плоскости M_l каждая тройка точек (A, B, C), $\quad (A', B', C')$ не лежит на одной прямой, $D \in BC$, $D' \in B'C'$ и тройки (A, B, D), $\quad (A, D, C)$ можно перекатить в тройки (A', B', D'), $\quad (A', D', C')$, соответственно, то (A, B, C) роллируется в (A', B', C').

Теорема 1. *Пусть в абстрактной аффинной плоскости выполняется свойство* (**RO**). *Тогда сама проективная плоскость дезаргова, ее координатное тело коммутативно и в ней выполняются аксиомы* (**R1**) *и* (**R2**).

Доказательство использует известные школьные методы и построения угольником и линейкой, не прибегая к помощи циркуля.

Теорема 2. *Пусть точки Q_1, Q_2, Q_3, S таковы, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем l_1, l_2, l_3 прямые, проходящие через точку S и параллельные прямым Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_1Q_3, соотвественно. Возьмем произвольную прямую параллельную SQ_2, но с ней не совпадающую, пусть она пересекает прямые l_1, l_2 в точках P_1 и P_2. Тогда точка пересечения прямых, проходящих через точки P_1 и P_2 и параллельных SQ_1 и SQ_3, соответственно, лежит на прямой l_3.*

Определение. Проективная плоскость называется декартовой, если она дезаргова и ее координатное тело коммутативно.

Далее формулируем основной результат Главы 1.

Критерий несжимаемости. Для того, чтобы проективная плоскость была декартовой необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одно аффинной карте M_l выполнялось любое из следующих условий

(**a**) в M_l справедливо (**RO**);

(**b**) в M_l справедлива **теорема 2**.

После этого приводится доказательство результата, приведенного в статье ([26]), о касательном расслоении кривой второго порядка и приводится простейший метод построения касательных к кривым второго порядка.

Теорема 1. *Пусть для какой-то прямой l аффинная карта M_l обладает свойствами* **(R0)** *и* **(R1)**. *Тогда для любых пяти точек A, B, C, D, E абстрактной проективной плоскости M, никакая тройка из которых не лежит на одной прямой, следующие прямые:*

$$l_1 \stackrel{\text{def}}{=} \textit{прямая, определяемая точками } AC \cap EB, AB \cap EC,$$
$$l_2 \stackrel{\text{def}}{=} \textit{прямая, определяемая точками } AC \cap ED, AD \cap EC,$$
$$l_3 \stackrel{\text{def}}{=} \textit{прямая, определяемая точками } AD \cap EB, AB \cap ED,$$

пересекаются в одной точке S, а тройки $(S, B, B'); (S, C, C'); (S, D, D')$, где $B' \stackrel{\text{def}}{=} AB \cap SE, C' \stackrel{\text{def}}{=} AC \cap SE, D' \stackrel{\text{def}}{=} AD \cap SE$, роллируются друг в друга в аффинной карте M_{AE}.

Глава 2.

Во второй главе формулируется и доказывается основной результат работы, на котором основано описание центрально-квадратичной динамики.

Лемма о директрисе и фокусе. *Для любых действительных α, β, δ, k бесконечно дифференцируемые решения $x(t)$, $y(t)$ $(x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t) \neq 0)$ уравнения*

$$(x'', y'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^3} \cdot (x, y)$$

лежат на кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке $(0, 0)$, а директриса определяется уравнением $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta = 0$.

А также приводится обобщение леммы с плоского случая до трехмерного.

Теорема. *Для любых действительных* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k, a, b, c$ *бесконечно дифференцируемые решения* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *(не лежащие на прямой) уравнения*

$$(x'', y'', z'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma z + \delta)^3} \cdot (x - a, y - b, z - c) \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$

лежат на плоских кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке (a, b, c), *а директриса является пересечением плоскости движения (содержащей* (a, b, c)*) и плоскости* $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta = 0$.

Далее рассматриваются примеры центральных полей динамика, которых квадратична, и дается подробное описание движения в этих полях.

2.2. Гармонический осциллятор:

$$x''(t) = -h \cdot x(t),$$
$$y''(t)) = -h \cdot y(t) \quad (h \in K).$$

2.3. Поля кулонова типа:

$$x''(t) = -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k}{(r(t))^3} \cdot x(t),$$

$$y''(t) = -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k}{(r(t))^3} \cdot y(t) \quad (r^2 = x^2 + y^2, k \in K).$$

2.4 Модифицированные поля Кулонова типа.

$$x'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3} x,$$

$$y'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3} y,$$

$$r^2 = m_{1,1} x^2 + 2 m_{1,2} xy + m_{2,2} y^2.$$

2.4. Поля птолемеева типа. Классика жанра:

$$x''(t) = -2 \cdot \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{x^2(t) + y^2(t) - \delta} \cdot x(t),$$

$$y''(t) = -2 \cdot \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{x^2(t) + y^2(t) - \delta} \cdot y(t) \quad (\delta \in K).$$

2.6 X-версии.

2.6.1 Случай однополостного гиперболоида. Рассматривается движение, при котором ускорение направлено в начало координат $(x, y)'' = -w(x, y)$, в аффинной системе координат Oxy по кривым кривых второго порядка, заданных уравнениями

$x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y + \delta)^2 = r_0^2$, где α, β, δ пробегают основное поле $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \quad r_0 \in K$.

Это семейство получается проекцией на плоскость Oxy всех невырожденных плоских сечений гиперболоида, заданного в трехмерном пространстве $Oxyz$ уравнением

$x^2 + y^2 - z^2 = r_0^2$.

2.6.1 Случай двуполостного гиперболоида. Аналогичным образом рассматривается центральное движение $(x, y)'' = -w(x, y)$ по некоторой кривой из семейства всех плоских сечений двуполостного гиперболоида, заданного в трехмерном пространстве $Oxyz$ уравнением

$x^2 + y^2 - z^2 = -r_0^2$.

Это семейство описывается уравнениями

$x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y + \delta)^2 = -r_0^2$, где α, β, δ пробегают основное поле $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, r_0 \in K$.

2.7 Универсальная квадратичная динамика в сигнатуре $y, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$. Доказывается, что некоторый тензор H обладает следующими свойствами

(a) $g_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot g_{12} \cdot x \cdot y + g_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot g_{13} \cdot x + 2 \cdot g_{32} \cdot y + g_{33} = 0$;

(b) $\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = -5832(y'')^{10}$;

(c) $f \cdot g' - f' \cdot g$ делится на $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$.

(d) $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| =$

$$4(y''\left(40\left(y^{(3)}\right)^3-30y^{(4)}y^{(3)}y''+9y^{(5)}\left(y''\right)^2\right)-5\left(y'\right)^2\left(4\left(y^{(3)}\right)^2-3y^{(4)}y''\right)-5y'\left(-4\left(y^{(3)}\right)^2y^{(4)}+3y^{(3)}\left(y''\right)^2+3\left(y^{(4)}\right)^2y''\right)).$$

Глава 3.

Третья глава является технической, в ней определяются методы и техники, которые используются для доказательства основных результатов. Это техника гомоморфизмов Тейлора, соотношения Капелли, которые в случае дифференциальных алгебр обращаются в определители Вронского, аналитический спектр.

Аналитический спектр. Для любого $M \in \mathrm{Spec}_K A$ обозначим ψ_M K-гомоморфизм K-алгебры A на фактор-алгебру A/M, которая изоморфна любо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$ (см. 3.1). Тогда с точностью до автоморфизма комплексного сопряжения можно считать, что ψ_M - это K-гомоморфизмом K-алгебры A в поле $\mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{\mathrm{Spec}}_K A$ такое подмножество в $\mathrm{Spec}_K A$, составленное из тех K-простых идеалов M K-алгебры, для которых при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M : A \to \mathbb{C}[[t]]$ образ $\tilde{\psi}_M(A)$ состоит из рядов, сходящихся в некоторой ε-окрестности нуля поля $\mathbb{C}$. Оказывается, что K-гомоморфизмов $\psi_M \to \mathbb{C}$ ($M \in \overline{\mathrm{Spec}}_K A$) достаточно много.

Теорема. *Пусть дифференциальная K-алгебра A имеет конечное число дифференциальных образующих относительно K-дифференцирования $D : A \to A$. Тогда для любого ненильпотентного элемента a K-алгебры A существует $M \in \overline{\mathrm{Spec}}_K A$ такой, что $\psi_M(a) \neq 0$ в поле $\mathbb{C}$.*

Лемма о нильпотентном элементе. Обозначим $W(a_1, \dots, a_n)$ матрицу, у которой в i-ой строке j-го столбца ($i = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n$) стоит элемент $D^i \times a_j$.

Лемма. *Если самый верхний минор $|a_1, \dots, a_n|$ матрицы $W(a_1, \dots, a_n)$ является нильпотентным элемен-*

тов в K-алгебре A, то все остальные миноры n-го порядка матрицы $W(a_1,\dots,a_n)$ нильпотентные элементы K-алгебры A.

Глава 4.

В четвертой главе формулируется и объясняется комбинаторный результат.

Теорема. Пусть $K[x^{(i)},y^{(i)}]$ свободная дифференциальная алгебра относительно сигнатурного дифференцирования $'$ с дифференциальными образующими x,y.

Пусть

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 2xx' & x'y+xy' & 2yy' & x' & y' & 0 \\ 2x'^2+2x'' & x''y+2x'y'+xy'' & 2y'^2+2yy'' & x'' & y'' & 0 \\ 6x'x''+2xx''' & x'''y+3x''y'+3x'y''+xy''' & 6y'y''+2yy''' & x''' & y''' & 0 \\ 6(x'')^2+8x'x'''+2xx^{(iv)} & x^{(iv)}y+4x'''y'+6x''y''+4x'y'''+xy^{(iv)} & 6(y'')^2+8y'y'''+2yy^{(iv)} & x^{(iv)} & y^{(iv)} & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим через m_i - минор матрицы H, получающийся вычеркиванием i-го столбца. Положим

$g_{11} \stackrel{\mathrm{def}}{=} m_1, \qquad g_{12}=g_{21} \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2}m_2,$

$g_{22} \stackrel{\mathrm{def}}{=} m_3, \qquad g_{1,3}=g_{3,1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2}m_4,$

$g_{33}=-m_6, \quad g_{3,2}=g_{2,3} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}m_5.$

Тогда

(a) $g_{11}\cdot x^2+2\cdot g_{12}\cdot x\cdot y+g_{22}\cdot y^2+2\cdot g_{13}\cdot x+2\cdot g_{32}\cdot y+g_{33}=0;$

(b) $\det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = -8\cdot 729\cdot \sigma_{12}^{10} - -8\cdot 729(x'\cdot y''-x''\cdot y')^10;$

(c) $f\cdot g'-f'\cdot g$ делится на $|x^2,xy,y^2,x,y,1|$;

(d)

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 2xx' & x'y+xy' & 2yy' & x' & y' & 0 \\ 2x'^2+2x'' & x''y+2x'y'+xy'' & 2y'^2+2yy'' & x'' & y'' & 0 \\ 6x'x''+2xx''' & x'''y+3x''y'+3x'y''+xy''' & 6y'y''+2yy''' & x''' & y''' & 0 \\ 6(x'')^2+8x'x'''+2xx^{(iv)} & x^{(iv)}y+4x'''y'+6x''y''+4x'y'''+xy^{(iv)} & 6(y'')^2+8y'y'''+2yy^{(iv)} & x^{(iv)} & y^{(iv)} & 0 \\ 20x''x'''+10x'x^{(iv)}+2xx^{(v)} & x^{(v)}y+4x^{(iv)}y'+10x'''y''+10x''y'''+5x'y^{(iv)}+xy^{(v)} & 20y''y'''+10y'y^{(iv)}+2yy^{(v)} & x^{(v)} & y^{(v)} & 0 \end{pmatrix}$$

$= -(\sigma_{12})^2 b_2(x,y)$.

С помощью этой комбинаторной теоремы, справедливой для свободной дифференциальной алгебры, доказывается основной результат центрально-квадратичной динамики, для следующих редуцированных алгебр.

Дифференциальная алгебру центрально-квадратичной динамики B_2 порожденную двумя образующими и x, y и дифференциальными соотношениями тип Капелли

а) $\sigma_{02} = 0$ - свойство центральности поля

б) $b_2(x,y) = 0$ - условие квадратичной динамики,

где $\sigma_{ij} = x^{(i)}y^{(j)} - x^{(j)}y^{(i)}$, $b_2(x,y) = -9 \cdot \sigma'''_{1,2} \cdot \sigma^2_{1,2} - 27 \cdot \sigma'_{2,3} \cdot \sigma^2_{1,2} + 45 \cdot \sigma''_{1,2} \cdot \sigma'_{1,2} \cdot \sigma_{1,2} + 45 \cdot \sigma_{2,3} \cdot \sigma'_{1,2} \cdot \sigma_{1,2} - 40 \cdot (\sigma'_{1,2})^3$.

И также дифференциальную алгебру Декарта-Уоттона D_2 с тремя дифференциальными образующими u, v, w и следующими соотношениями

(a) $u'' = -w \cdot u, v'' = -w \cdot v$,

(b) $9 \cdot w''' \cdot w^2 - 45 \cdot w'' \cdot w' \cdot w + 40 \cdot (w')^3 + 9 \cdot w' \cdot w^3 = 0$.

Теорема. Рассмотрим в дифференциальной алгебре $D_2[(xy' - x'y)^{-1}]$ тензор H_2 составленный из следующих элементов

$g_{33} = -2\sigma^4_{01}(4w'^2 - 3ww'' + 9w^3)$,

$g_{32} = g_{23} = 2\sigma^3_{01}(-4w'^2u' + 3ww''u' + 3w'w^2u)$,

$g_{31} = g_{13} = -2\sigma^3_{01}(-4w'^2v' + 3ww''v' + 3w'w^2v)$,

$g_{22} = 2\sigma^2_{01}(9w^4u^2 + 6w'w^2uu' + u'^2(9w^3 + 3w''w - 4w'^2))$,

$g_{11} = 2\sigma^2_{01}(9w^4v^2 + 6w'w^2vv' + v'^2(9w^3 + 3w''w - 4w'^2))$,

$g_{12} = g_{21} = -2\sigma^2_{01}(9w^4uv + 3u'u^2(uv' + u'v) + u'v'(9w^3 + 3w''w - 4w'^2))$.

Тогда выполняются следующие условия

(a) $H_2' = \frac{10w'}{3w}H_2$ (в частности, $fg' - f'g = 0$, $(f/g)' = 0$ для любых элементов f, g из матрицы H_2),

(b) $g_{11}u^2 + 2g_{12}uv + g_{22}v^2 + 2g_{13}u + 2g_{23}v + g_{33} = 0$,

(c) $\det H_2 = -8 \cdot 729\sigma_{01}^{10}w^{10} = -8 \cdot 729\sigma_{12}^{10}$.

Глава 5.

В пятой главе приведено доказательство следующей теоремы.

Теорема 1 (см. [22]). *Пусть $|G|$ — порядок конечной группы G и*

$$H_{[G,G]} \stackrel{def}{=} \frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}[g,h] \quad ([g,h] \stackrel{def}{=} g^{-1}h^{-1}gh) \qquad -$$

элемент групповой алгебры $K[G]$, где $K = C$ — поле комплексных чисел. Тогда для любого представления $\rho : G \to End_K V$ в произвольном пространстве V линейное преобразование $\rho(H_{[G,G]})$ диагонализируемо и его спектр имеет вид $\frac{1}{n^2}$, где n пробегает $dim_K V_i$, где V_i —неприводимые компоненты в пространстве V относительно действия группы G.

Теорема обобщается на случай произвольной компактной группы.

Теорема 2 (см. [23]). *Пусть мера Хаара μ на компактной группе G такова, что $\mu(G) = 1$, а $\rho : G \to End_K V$ — непрерывное представление G в банаховом пространстве V над полем комплексных чисел K и линейный оператор $H^{\rho}_{[G,G]}$ определяется формулой*

$$H^{\rho}_{[G,G]} \stackrel{def}{=} \iint\limits_G [\rho(g),\rho(h)]d\mu_g d\mu_h.$$

Тогда для любого n–мерного подпространства W, на котором $\rho(G)$ действует неприводимо,

$$H^{\rho}_{[G,G]}(w) = (\int\limits_G \rho(g^{-1})(\int\limits_G \rho(h^{-1})\rho(g)\rho(h)d\mu_h)d\mu_g)\cdot w =$$

$$= (\int\limits_G(\int\limits_G \rho(g^{-1})\rho(h^{-1})\rho(g)d\mu_g)\rho(h)d\mu_h)\cdot w = \frac{1}{n^2}\cdot w \quad (w \text{ пробегает } W).$$

Содержательный смысл доказанной теоремы поясняется на следующем примере.

Важный пример. Пусть $SU(2,K)$ — группа унитарных 2×2 матриц над комплексным полем K с детерминантом, равным едининице, V — линейное пространство всех функций $f : G \to K$, для которых $||f||^2 \stackrel{def}{=} \int\limits_G |f(g)|^2 d\mu_g < \infty$, и представление $\rho : G \to End_K V$ группы G реализуется правыми сдвигами $\rho(h) \times f(g) \stackrel{def}{=} f(hg)$.
Из теоремы 2 заключаем, что в гильбертовом пространстве относительно полуторалинейной формы $(f(g), h(g)) \stackrel{def}{=} \int\limits_G f(g)\overline{h(g)} d\mu_g$ V имеется полный ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $H^{\rho}_{[G,G]}$. В частности, для любого натурального n кратность собственного значения $\frac{1}{n^2}$ равна n^2. (См. для сравнения в книге [18] спектр оператора Шредингера для атома водорода.)

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико-математических наук профессору А.В. Михалёву и доктору физико-математических наук ведущему научному сотруднику Ю.П. Размыслову за руководство диссертационной работой и неизменный интерес к моей научно-исследовательской работе. И моим родителям, подарившим мне время.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за внимание к работе.

Глава 1

Аксиоматика и кривые второго порядка в декартовой проективной плоскости.

1.1 Основные определения.

Рассмотрим множество M и выберем в множестве всех подмножеств 2^M подмножество L, элементами которого являются прямые, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(P0) каждая прямая содержит не менее трех точек;

(P1) через любые две точки $X, Y \in M$ проходит ровно одна прямая $l \in L$;

(P2) любые две прямые $l_1, l_2 \in L$ пересекаются ровно в одной точке.

Выберем прямую $l \in L$, которую назовем бесконечно удаленной, тогда $M_l \stackrel{\text{def}}{=} M \setminus l$ является аффинной картой с системой прямых $L_l \stackrel{\text{def}}{=} L \setminus \{l\}$. Прямые $l_1, l_2 \in L_l$ аффинной плоскости M_l принято называть параллельными, если точка их пересечения лежит на бесконечно удаленной прямой l. Таким образом, множество M наделено структурой абстрактной проективной плоскости.

Определение. Будем называть тройкой, тройкой точек, упорядоченной тройкой элемент декартового произведения $M_l \times M_l \times M_l$ и обозначать его (A, B, C).

Определение. Назовем шагом роллинга "передвижение"любой точки из тройки параллельно прямой, проходящей через две оставшиеся, причем порядок точек в тройке сохраняется, то есть тройка (A, B, C) может перейти в тройки (A', B, C), (A, B', C) либо (A, B, C'), где точки A', B', C' лежат на прямых, параллельных прямым BC, AC, AB и проходящих через точки A, B, C, соотвественно.

Заметим, что для того, чтобы совершить шаг роллинга точки Q в произвольную точку Q' для тройки (Q, S, P), надо сначала сроллировать точку P в точку P', являющуюся точкой пересечения прямой, проходящей через P и параллельной прямой QS, и прямой, проходящей через S и параллельной QQ'. При этом если прямая QQ' параллельна прямой SP, то P' совпадет с P.

Докажем теорему, сформулированную в статье [1].

Предложение 1. *Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой и являются тройкой. Тогда любую тройку (A', B', C') за конечное число шагов можно перекатить (с сохранением на каждом шаге, в интуитивном понимании, "ориентированной площади $\Delta A'B'C'$") так, чтобы результат перекатывания точек A', B' совпал с A и B, соответственно, а точка C' оказалась на одной прямой с точками B и C.*

(**RO**) (**Аксиома несжимаемости**). Если точки A, B, C аффинной плоскости M_l не лежат на одной прямой и точка D находится на одной прямой с B и C, но не совпадает с C, то тройку (A, B, D) нельзя перекатить в тройку (A, B, C).

(**R1**) (**Аксиома слабой аддитивности**). Если в аффинной плоскости M_l тройки точек S, A, A' и S, B, B' лежат на разных прямых, а прямые, проходящие через точки A, B и A', B' параллельны, то тройку (S, A', B) можно перекатить в тройку (S, A, B').

(**R2**) (**Аксиома аддитивности**). Если в аффинной плоскости M_l каждая тройка точек (A, B, C), (A', B', C') не лежит на одной прямой, $D \in BC$, $D' \in B'C'$ и тройки (A, B, D), (A, D, C) можно перекатить в тройки (A', B', D'), (A', D', C'), соответственно, то (A, B, C) роллируется в (A', B', C').

Теорема 1. *Пусть в абстрактной аффинной плоскости выполняется свойство* (**RO**)*. Тогда сама проективная плоскость дезаргова, ее координатное тело коммутативно и в ней выполняются аксиомы* (**R1**) *и* (**R2**).

Доказательство теоремы разобьем на три шага.

(i) Для любых трех точек $S, A_1, A_2 \in M_l$, лежащих на одной прямой, существует единственное проективное преобразование $\gamma : M \to M$, называемое гомотетией аффинной плоскости M_l, которое оставляет на месте все точки прямой l и точку S, а A_1 переводит A_2.

Для доказательства пункта (i), докажем лемму.

1.2 Лемма о моменте.

Лемма о моменте. *Пусть даны точки Q_1, Q_2, Q_3, S из M_l такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Возьмем точку $P_0 \in M_l$ не лежащую на прямой SQ_1. Определим P_i как точку пересечения прямой, проходящей через P_{i-1} и параллельной Q_iS, и прямой, проходящей через S и параллельной Q_iQ_{i+1} для $i = 1, 2, 3$ (где $Q_4 \overset{\text{def}}{=} Q_1$). Тогда точки P_0, P_1, P_3 лежат на одной прямой параллельной прямой SQ_1.*

Доказательство. Тройки точек (Q_1, S, P_0), (Q_1, S, P_1), (Q_2, S, P_1), (Q_2, S, P_2), (Q_3, S, P_2), (Q_3, S, P_3), (Q_1, S, P_3) последовательно роллируются друг в друга, а, значит, по аксиоме несжимаемости (**RO**) тройка (Q_1, S, P_3) должна роллироваться в тройку (Q_1, S, P_1), но это возможно тогда и только тогда, когда прямая P_1P_3 параллельна прямой SQ_1.

Отметим, что точку P_0 можно выбрать на прямой SQ_1, но тогда точки P_1, P_2, P_3 сольются в точку S и утверждение леммы станет тривиальным. □

Следствие 1. *Пусть дано шесть таких точек $Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3 \in M_l$, что несовпадающие прямые Q_1R_1, Q_2R_2 и Q_3R_3 пересекаются в точке $S \in M_l$. Причем прямая R_1R_2 параллельна Q_1Q_2 и прямая R_2R_3 параллельна Q_2Q_3. Тогда прямая Q_1Q_3 параллельна R_1R_3.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $P_1 \in M_l$ на прямой, проходящей через S и параллельной прямой Q_1Q_2, сроллируем точку Q_1 относительно тройки (P_1, Q_1, S) по маршруту $Q_1Q_2Q_3$, тогда точка P_1 пройдет путь $P_1P_2P_3$ (описанный в предыдущей лемме). Теперь сроллируем точку P_1 как точку тройки (P_1, R_1, S) и по $P_1P_2P_3$. Для того чтобы сроллировать P_1 в P_2, надо сроллировать R_1 в точку пересечения прямой, проходящей через S и параллельной P_1P_2 (которая, следовательно, совпадает с прямой SQ_2) и прямой, проходящей через R_1 и параллельной P_1S (которая в свою очередь параллельна прямой Q_1Q_2), а так как по условию Q_1Q_2 параллельна R_1R_2, то R_1 сроллируется в R_2. Аналогично, чтобы сроллировать P_2 в P_3 надо перекатить R_2 в R_3. Следовательно, по лемме R_3R_1 параллельна SP_3, а так как по постороению SP_3 параллельна Q_1Q_3, то R_1R_3 параллельна Q_1Q_3 □

Теперь докажем, что отбражение определенное в пункте (i) существует. Считаем, что $\gamma(S) = S$, $\gamma(K) = K$ для всех точек K, лежащих на прямой l, и $\gamma(A_1) = \gamma(A_2)$. Для любой точки $B_1 \in M_l$, не лежащей на прямых l и SA_1, будем считать, что $\gamma(B_1) = B_2$, где B_2 является точкой пересечения прямой SB_1 и прямой, проходящей через точку A_2 параллельно прямой A_1B_1. Пусть C_2 точка пересечения прямой, проходящей через точку A_2 и параллельной прямой A_1C_1, и прямой SC_1, тогда $\gamma(C_1) = C_2$. Заметим, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в точке S, а прямые A_1B_1, A_1C_1 параллельны прямым A_2B_2, A_2C_2, соответственно, значит, по **следствию 1** прямая B_1C_1 параллельна прямой B_2C_2. Если аналогичным образом определить отображение δ, осталяющее точку S на месте и переводящее точку B_1 в точку B_2, то $\delta(C_1)$ будет точкой пересечения прямой SC_1 с прямой, проходящей через точку B_2 параллельно прямой B_1C_1, то есть является точкой C_2. Значит, $\gamma(C_1) = \delta(C_1) = C_2$ и отображения γ и δ совпадают на всех прямых SC_1C_2, на которых они определены, но отображение γ определено везде кроме точек прямой SA_1A_2, а δ на всех точках плоскости за исключением точек прямой SB_1B_2. Значит, определив $\gamma(A) = \delta(A)$, где точка A лежит на прямой SA_1A_2 получим отображение определенное на всех точкай плоскости.

Докажем, что при данном отображении три точки прямой переходят в три точки, лежащие на одной прямой. Пусть $\gamma(A_1) = A_2$ и l_1 произвольная прямая, не проходящая через точки A_1 и S. Если прямые l и l_1 пересекаются в точке B_3, а B_1, C_1 другие точки прямой l_1, пусть $\gamma(B_1) = B_2, \gamma(C_1) = C_2$ и $\gamma(B_3) = B_3$. Тогда прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в точке S и прямые A_1B_1, A_1C_1 параллельны прямым A_2B_2, A_2C_2, соответственно, следовательно, по **следствию 1** прямые B_1C_1 и B_2C_2 параллельны, то есть пересекаются на прямой l в точке B_3. Значит, γ переводит точки C_1 прямой $l_1 = B_3B_1$ в точки прямой B_3B_2, за исключением, возможно, случая, когда точка C_1 являетя точкой пересечения прямых B_1B_3 и SA_1A_2. Но если рассмотрим отображение $\delta(B_1) = \gamma(B_1) = B_2$, то $\delta(C_1) = C_2$, где C_2 является точкой пересечения прямых B_3B_2 и SA_1A_2. Значит отображение γ переводит все точки прямой B_1B_3 в точки прямой B_2B_3. Очевидно, что прямая l сохраняется, а любая прямая, проходящая через точку S переходит в себя.

(ii) Для любых двух точек $A, B \in M_l$ существует единственное проективное преобразование $\nu : M \to M$, называемое параллельным переносом аффинной плоскости M_l на вектор $\overline{AB}$, которое оставляет на месте

все точки прямой l, отображает A в B, а любую прямую, проходящую через точку $S \stackrel{\text{def}}{=} l \cap AB$ переводит в себя, при этом ν представимо в виде суперпозиции двух гомотетий из различных центров.

Назовем l_1 прямую проходящую через точки A, B; прямую, проходящую через точку S и не совпадающую с прямой l_1, назовем l_2, выберем на ней точку $S_1 \in M_l$, на прямой S_1A возьмем точку $A_1 \in M_l$ не лежащую на прямых l_1 и l_2, также назовем S_2 точку пересечения прямой l_2 и прямой A_1B. Пусть γ_{S_1} - гомотетия с центром в точке S_1, переводящая точку A в точку A_1, а γ_{S_2} - гомотетия с центром в точке S_2, отображающая A_1 в B.

Докажем, что $\nu = \gamma_{S_2} \circ \gamma_{S_1}$. Очевидно, что так определенная гомотетия отображает точку A в точку B и оставляет на месте все точки прямой l. Остается доказать, что любая прямая, проходящая через точку S переходит в себя. Понятно, что прямая l_2 переходит в себя. Предположим, что существует прямая l_C такая, что $\nu(l_C) \not\subseteq l_C$ и выберем точку C на ней, такую что $\nu(C)C$ не совпадает с l_C. Значит, точка $D \stackrel{\text{def}}{=} \nu(C)C \cap l_2$ не совпадает с S и переходит при гомотетии ν в себя. А, следовательно, является центром гомотетии ν, что невозможно, так как A переходит в B, но A, B, D не лежат на одной прямой.

Следствие 2. *Пусть точки $Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3 \in M_l$ таковы, что прямые Q_1R_1, Q_2R_2 и Q_3R_3 параллельны и не совпадают. Причем прямые R_1R_2, R_2R_3 параллельны прямым Q_1Q_2, Q_2Q_3. Тогда прямая Q_1Q_3 параллельна R_1R_3.*

Предложение 2. *В любой проективной плоскости, удовлетворяющей аксиоме (**RO**), выполняется аксиома (**R1**).*

Доказательство. Пусть l_1 прямая проходящая через точку S и параллельная прямой AB, прямая l_2 проходит через точку B и параллельна прямой SA, прямая l_3 параллельна прямой SB и проходит через точку A. Обозначим B'' точку пересечения прямых l_1 и l_2, а A'' точку пересечения прямой l_3 и прямой $A'B'$.

Тогда тройки точек (S, A', B), (S, A', B''), (S, A'', B''), (S, A'', B'), (S, A, B') последовательно роллируются друг в друга. Предпоследний шаг роллинга возможен, так как прямые SA'' и $B''B'$ параллельны по **следствию 2**, а именно тройки точек S, A, A'' и B'', B, B' удовлетворяют его условиям (прямые проходящие через соответствующие вершины SB'', AB, $A''B$ параллельны, так же как и прямые содержащие соответствующие пары точек троек: прямая l_3 параллельна BB' и прямая SA параллельна l_2). $\square$

(iii) Для любых трех точек S, A, B, не лежащих на одной прямой аффинной плоскости M_l, и произвольных ее гомотетий γ, δ с общим центром S тройка точек $(S, A, \gamma(\delta(B)))$ перекатывается в тройку $(S, A, \delta(\gamma(B)))$, в частности, $\gamma \circ \delta = \delta \circ \gamma$.

Сначала докажем, что тройку $(S, A, \gamma(B))$ можно перекатить в тройку $(S, \gamma(A), B)$, для этого надо показать, что прямая AB параллельна прямой $\gamma(A)\gamma(B)$. Предположим, что они пересекаются в точке $S' \notin l$, тогда $\gamma(S') = S'$, значит, при данной гомотетии сохраняются точки S и S', следовательно, все точки прямой SS' и все точки плоскости, но это противоречит предположению о том, что прямые AB и $\gamma(A)\gamma(B)$ пересекаются. Далее тройку точек $(S, \delta(A), \gamma(B))$ можно сроллировать в тройку $(S, A, \delta(\gamma(B)))$, так как прямая $A\gamma(B)$ параллельна прямой $\delta(A)\delta(\gamma(B))$. Аналогично тройка $(S, \gamma(A), \delta(B))$ перекатывается в тройку $(S, A, \gamma(\delta(B)))$. Заметим, что тройки $(S, \gamma(A), \delta(B))$ и $(S, \delta(A), \gamma(B))$ образуют конфигурацию, указанную в (**R1**), то есть точки $S, \gamma(A), \delta(A)$ и $S, \gamma(B), \delta(B)$ лежат на прямых, а прямая $\gamma(A)\gamma(B)$ параллельна прямой $\delta(A)\delta(B)$.

Теперь $(S, A, \delta(\gamma(B)))$ можно перекатить в $(S, A, \gamma(\delta(B)))$, так как тройки $(S, A, \delta(\gamma(B)))$, $(S, \delta(A), \gamma(B))$, $(S, \gamma(A), \delta(B))$, $(S, A, \gamma(\delta(B)))$ последовательно перекатываются друг в друга.

Рассмотрим множество гомотетий с одним центром как множество с двумя операциями суперпозицией и сложением. Суммой гомотетий γ и δ с центром в точке S назовем отображение $\gamma + \delta$ такое, что $(\gamma + \delta)(A) = B$, где точка B такова, что $\overline{SB} = \overline{S\gamma(A)} + \overline{S\delta(A)}$. Очевидно, что при данном отображении сохраняется точка S и любая прямая через нее проходящая. Остается доказать, что три точки, лежащие на одной на прямой, переходят в три точки на прямой. Пусть A, B, C точки, лежащие на прямой l_1, не проходящей через точку S. Из определения гомотетий следует, что тройки точек $\gamma(A), \gamma(B), \gamma(C)$ и $\delta(A), \delta(B), \delta(C)$ лежат на прямых, параллельных прямой l_1. Построим точки $(\gamma + \delta)(A_1)$, $(\gamma + \delta)(A_2)$, $(\gamma + \delta)(A_3)$, для этого параллельно перенесем точку S в точку S' на прямой $\gamma(A_1)\gamma(A_2)\gamma(A_3)$, назовем A_1', A_2', A_3' результат переноса точек A_1, A_2, A_3, соответственно. Тогда прямые $S'\delta(A_1'), S'\delta(A_2'), S'\delta(A_3')$ соотвественно параллельны прямым $S\gamma(A_1), S\gamma(A_2), S\gamma(A_3)$, а точки $\delta(A_1'), \delta(A_2'), \delta(A_3')$ лежат на прямой, параллельной прямой l_1. Для получения искомых точек нужно перенести векторы $\overline{S'\delta(A_1)}, \overline{S'\delta(A_2)}, \overline{S'\delta(A_3)}$ параллельно прямой l_1 так, чтобы их начала попали в точки $\gamma(A_1), \gamma(A_2), \gamma(A_3)$, но при таком переносе точки $\delta(A_1'), \delta(A_2'), \delta(A_3')$ двигаются по прямой, на которой лежат, а, значит, и результат их переноса будет лежать на одной прямой, параллельной прямой l_1.

Таким образом, сумма гомотетий также является гомотетией, причем относительно данной операции множество гомотетий с одним центром является группой и в силу коммутативности сложения векторов абелевой группой. По операции суперпозиция множество гомотетий также группа с единицей равной тождественному отображению и обратной для гомотетии с центром в точке S, переводящей точку A в точку B, является гомотетия с центром в точке S, переводящая точку B в точку A. Причем в силу пункта (iii) это коммутативная группа. Докажем дистрибутивность операций суперпозиции и сложения гомотетий, то есть выполнение для любой точки $A \in M_l$ соотношения

$\beta(\gamma+\delta)(A) = \beta(\gamma(A))+\beta(\delta(A))$. В силу коммутативности гомотетий имеем $\beta(\gamma(A))+\beta(\delta(A)) = \gamma(\beta(A))+\delta(\beta(A)) = (\gamma+\delta)(\beta(A)) = \beta(\gamma+\delta)(A)$.

Множество гомотетий с одним центром является полем относительно операций сложения и суперпозиция.

Заметим, что доказав лемму, мы доказали больше, а именно

Теорема 2. *Пусть точки Q_1, Q_2, Q_3, S таковы, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем l_1, l_2, l_3 прямые, проходящие через точку S и параллельные прямым Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_1Q_3, соответственно. Возьмем произвольную прямую параллельную SQ_2, но с ней не совпадающую, пусть она пересекает прямые l_1, l_2 в точках P_1 и P_2. Тогда точка пересечения прямых, проходящих через точки P_1 и P_2 и параллельных SQ_1 и SQ_3, соответственно, лежит на прямой l_3.*

1.3 Критерий несжимаемости.

Введем в нашей плоскости координаты, зафиксировав две прямые l_x и l_y, пересекающиеся в точке O, называемой началом координат, и две точки E_x и E_y на прямых l_x и l_y, соответственно. Построим точку P_x пересечения прямой l_x и прямой, проходящей через Р и параллельной l_y, и точку P_y пересечения l_y и прямой, проходящей через Р и параллельной l_x. Пусть x, y гомотетии с центром в точке O, переводящие точки E_x, E_y в точки P_x, P_y, соотвественно, получаем x и y координату точки P. Каждой точке ставится в соответствие пара (x, y).

Определение. Проективная плоскость называется декартовой, если она дезаргова и ее координатное тело коммутативно.

Критерий несжимаемости. Для того, чтобы проективная плоскость была декартовой необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одно аффинной карте M_l выполнялось любое из следующих условий

(**a**) в M_l справедливо (**RO**);

(**b**) в M_l справедлива **теорема 2**.

Отметим, что многими считается, для того, чтобы проективная плоскость была декартовой необходимо выполнение теоремы Паппа, которая говорит следующее.

Теорема Паппа. *Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, A', B', C' — три точки на другой прямой. Пусть три прямые AB', BC', CA' пересекают три прямые $A'B, B'C, C'A$, соответственно в точках X, Y, Z. Тогда точки X, Y, Z лежат на одной прямой.*

Но введенное нами понятие роллинга позволяет более осязаемо понять коммутативную геометрию плоскости.

Теперь докажем, что аксиома аддитивности (**R2**) является следствием аксиомы несжимаемости (**RO**).

1.4 Функционал промеры.

Определение. Каждой упорядоченной тройке точек (A, B, C) сопоставим число по правилу $I(A, B, C) = \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{pmatrix}$, где (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C) координаты точек A, B, C, соответственно.

Свойства функционала промеры I.

1. Для любых точек A, B, C выполняются равенства $I(A, B, C) = I(B, C, A) = I(C, A, B) = -I(A, C, B) = -I(B, A, C) = -I(C, B, A)$.

$$I(B, C, A) = \det \begin{pmatrix} x_C - x_B & y_C - y_B \\ x_A - x_B & y_A - y_B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_A - x_B & y_A - y_B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{pmatrix} = \mathrm{I(A, B, C)}.$$

$$I(A, C, B) = \det \begin{pmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{pmatrix} = -\mathrm{I(A, B, C)}.$$

Остальные равенства доказываются аналогично.

2. Если тройку (A, B, C) можно перекатить в тройку (A', B', C'), то $I(A, B, C) = I(A', B', C')$, то есть I инвариантен относительно роллинга. И, обратно, если $I(A, B, C) = I(A', B', C')$, то тройку (A, B, C) можно перекатить в тройку (A', B', C').

Достаточно доказать, что I не изменяется при шаге роллинга. Пусть, например, A роллируется параллельно вектору BC, то есть к координате точки A прибавляется $c \cdot \overrightarrow{BC} = c(x_C - x_B, y_C - y_B)$. $I(A, B, C) = I(B, C, A) = \det \begin{pmatrix} x_C - x_B & y_C - y_B \\ x_A - x_B & y_A - y_B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_C - x_B & y_C - y_B \\ x_A + c(x_C - x_B) - x_B & y_A + c(y_C - y_B) - y_B \end{pmatrix} = \mathrm{I(A', B, C)}$, где A' результат перекатывания точки A.

Обратно, по аксиоме (**RO**) точки A', B' можно перекатить в точки A, B, соответственно, а точку C' на прямую BC, тогда $I(A, B, C) = I(A, B, C')$, где $C' = (x_C + c(x_C - x_B), y_C + c(y_C - y_B))$. Тогда $I(A, B, C') = \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C + c(x_C - x_B) - x_A & y_C + c(y_C - y_B) - y_A \end{pmatrix} = \mathrm{I(A, B, C) + c\det} \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{pmatrix} = \mathrm{I(A, B, C) + cI(B, C, A) = (c + 1)I(A, B, C) = I(A, B, C)}$. Значит, $cI(A, B, C) = 0$ и либо $c = 0$, тогда C' совпадает с C, либо $I(A, B, C) = 0$, тогда точки A, B, C, C' лежат на одной прямой и точку C' можно перекатить в точку C.

3. Для любых точек A, B, C и точки D, лежащей на прямой BC, выполняется равенство $I(A, B, D) + I(A, D, C) = I(A, B, C)$.

$I(A, B, D) + I(A, D, C) = \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_D - x_A & y_D - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_B - x_C & y_B - y_C \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{pmatrix} = \mathrm{I(C, A, B)} = \mathrm{I(A, B, C)}$

Теперь

аксиома аддитивности легко следует из леммы. Так как (A, B, D) можно сроллировать в (A', B', D'), то $I(A, B, D) = I(A', B', D')$. Аналогично, $I(A, D, C) = I(A', D', C')$, значит, $I(A, B, C) = I(A', B', C')$, а, следовательно, по аксиоме несжимаемости (**RO**) (A, B, C) можно перекатить в (A', B', C'). Заметим, что предположение в аксиоме аддитивности (**R2**) о том, что точка D лежит на прямой BC необязательно.

1.5 Аксиоматика инвариантной промеры.

С точки зрения универсальной алгебры аксиоматика инвариантной промеры $I : M_l \times M_l \times M_l \to K$ задается всего тремя тождествами.

(**M1**) (**Тождество кососимметричности**) Для любых точек $A, B, C \in M_l$ выполняются равенства $I(A, B, C) = I(B, C, A) = I(C, A, B) = -I(A, C, B) = -I(B, A, C) = -I(C, B, A)$.

(**M2**) (**Тождество аддитивности**) Для произвольных точек $A, B, C \in M_l$ и точки $D \in M_l$, лежащей на прямой BC, выполняется равенство $I(A, B, D) + I(A, D, C) = I(A, B, C)$.

(**M3**) (**Тождество мультипликативности**) Для всех точек $S, A, B, C, D \in M_l$ верно равенство $\det \begin{pmatrix} I(S, A, B) & I(S, A, D) \\ I(S, C, B) & I(S, C, D) \end{pmatrix} = \mathrm{I(S, A, C) \cdot I(S, B, D)}$.

1.6 Кривые второго порядка.

Теорема 2. *Пусть для какой-то прямой l аффинная карта M_l обладает свойствами* (**R0**) *и* (**R1**). *Тогда для любых пяти точек A, B, C, D, E абстрактной проективной плоскости M, никакая тройка из которых не лежит на одной прямой, следующие прямые:*

$$l_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{\textit{прямая, определяемая точками }} AC \cap EB, AB \cap EC,$$

$l_2 \overset{\text{def}}{=}$ *прямая, определяемая точками* $AC \cap ED, AD \cap EC$,

$l_3 \overset{\text{def}}{=}$ *прямая, определяемая точками* $AD \cap EB, AB \cap ED$,

пересекаются в одной точке S, *а тройки* $(S, B, B'); (S, C, C'); (S, D, D')$, *где* $B' \overset{\text{def}}{=} AB \cap SE, C' \overset{\text{def}}{=} AC \cap SE, D' \overset{\text{def}}{=} AD \cap SE$, *роллируются друг в друга в аффинной карте* M_{AE}.

Доказательство. Как хорошо известно, см. например [4], существует единственная кривая второго порядка φ, проходящая через пять точек A, B, C, D, E. Пусть O - точка пересечения касательных к φ в точках A и E. Выберем в аффинной карте M_{AE}, где AE - принята за бесконечно удаленную прямую, систему координат с началом в точке O, за ось Ox возьмем прямую OE, за ось Oy прямую OA. В этой системе координат прямые OA и OE являются асимптотами к кривой второго порядка φ, а сама кривая второго порядка имеет уравнение $x \cdot y = a$.

Значит координаты собственных точек φ имеют следующий вид
$B = (x_B, \frac{a}{x_B}), C = (x_C, \frac{a}{x_C}), D = (x_D, \frac{a}{x_D})$.
Тогда
$1 = AC \cap EB = (x_C, \frac{a}{x_B}), 1' = AB \cap EC = (x_B, \frac{a}{x_C})$ - точки прямой l_1,
$2 = AC \cap ED = (x_C, \frac{a}{x_D}), 2' = AD \cap EC = (x_D, \frac{a}{x_C})$ - точки прямой l_2,
$3 = AD \cap EB = (x_D, \frac{a}{x_B}), 3' = AB \cap ED = (x_B, \frac{a}{x_D})$ - точки прямой l_3.
А уравнения прямых имеют вид
$l_1 : x_C \cdot x_B \cdot y = a \cdot x$;
$l_2 : x_C \cdot x_D \cdot y = a \cdot x$;
$l_3 : x_B \cdot x_D \cdot y = a \cdot x$.

Очевидно, что $l_1 \cap l_2 \cap l_3$ пересекаются в точке O. Значит точка S из условия теоремы совпадает с точкой O.

В этом случае
$B' = AB \cap OE = (x_B, 0)$,
$C' = AC \cap OE = (x_C, 0)$,

$D' = AD \cap OE = (x_D; 0)$

и выполняются равенства $I(O, B, B') = -x_B \cdot \frac{a}{x_B} = -a$.

Аналогично $I(O, C, C') = -a, I(O, D, D') = -a$. Значит по свойствам функционала I тройки точек (O, B, B'), (O, C, C'), (O, D, D') роллируются друг в друга. □

Обратим внимание, что теорема объясняет как построить касательное расслоение к кривой второго порядка. Возьмем точку S пересечения прямых l_1 и l_2 из формулировки теоремы. Тогда SA и SE будут касательными к точками A и E соответственно.

1.7 Свойства касательных к кривым второго порядка, директриса.

Рассмотрим несколько примеров построения касательных к кривым второго порядка.

Простейший случай. Пусть φ - окружность с центром в точке O, построим касательную к точке $A \in F$. Проведем прямую, параллельную диаметру AO и пересекающую окружность в точках B и C. Разделим отрезок BC пополам, обозначив D за середину отрезка. Тогда прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой OD будет искомой касательной.

Лемма о директрисе. *Пусть F произвольная точка внутри невырожденной кривая второго порядка φ, AB и CD хорды, проходящие через точку F. Тогда геометрическое место точек пересечения прямых $AC \cap BD$ и $AD \cap BC$ лежит на прямой, которую мы называем директрисой относительно фокуса F.*

Доказательство. Пусть l прямая проходящая через точки $L_1 = AC \cap BD$ и $L_2 = AD \cap BC$, сделаем проективное преобразование, которое переведет прямую l в бесконечно удаленную прямую. Тогда F станет центром кривой второго порядка, значит все хорды проходящие через точку F станут диаметрами. Хорошо известно, что прямые, проходящие, через соответствующие точки диаметров параллельны, то есть пересекаются на бесконечно удаленной прямой l. □

Лемма (альтернативный вариант). *Пусть F некоторая точка внутри невырожденной кривой второго порядка, CD хорда, проходящая через точку F, и l_1, l_2 касательные к точкам C и D соответственно. Тогда множество точек $S = l_1 \cap l_2$, построенных для произвольной хорды, лежит на одной прямой.*

Доказательство. Переведем проективным преобразованием точку F в центр кривой второго порядка, тогда CD - диаметр и хорошо известно, что касательные к диаметрам параллельны. □

Замечание. Как хорошо известно кривая второго порядка в аффинной плоскости задается уравнением $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$. Обратим внимание, что относительно фокуса в точке $(0,0)$, уравнение директрисы будет иметь вид $a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$.

Случай эллипса. Рассмотрим эллипс, точка A лежащую на нем и произвольную внутреннюю точку F. Директриса относительно фокуса F строится следующим образом, рассмотрим две хорда проходящие через точку F и пересекающие эллипс у точках A, B и C, D, соответственно. Пусть $AC \cap BD = L_1$ и $AD \cap BC = L_2$, тогда прямая L_1L_2 и будет директрисой. Построим прямую параллельную прямой AB и пересекающую эллипс в точках K и M. Пусть S середина отрезка KM, тогда прямая, параллельная FS и проходящая через точку A и есть касательная к эллипсу.

Глава 2

Лемма о директрисе и фокусе.

2.1 $\pm$-фокусировка плоских волн.

Пусть на аффинной действительной (комплексной) плоскости квадратичная кривая задана уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Проведём из точки $A \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, y_0)$ этой кривой прямую проходящую через начало координат $O \stackrel{\text{def}}{=} (0,0)$, пусть $A' \stackrel{\text{def}}{=} (x_0', y_0')$ - вторая точка прямой AO, лежащая на квадратичной кривой. Хорошо известно (1.7), что пересечение касательных проведенных к ней из точек A и A' лежит на прямой $a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$. Будем называть эту прямую директрисой нашей кривой относительно фокуса $O = (0,0)$.

Лемма о директрисе и фокусе. *Для любых действительных α, β, δ, k бесконечно дифференцируемые решения $x(t)$, $y(t)$ $(x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t) \neq 0)$ уравнения*

$$(x'', y'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^3} \cdot (x, y)$$

лежат на кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке $(0,0)$, а директриса определяется уравнением $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta = 0$.

Доказательство. Рассмотрим тензор $H = (g_{ij})_{i,j=1,2,3}$, составленный из следующих элементов:

$$g_{1,1} = -\frac{1}{(x \cdot y' - x' \cdot y)^2} \left(4 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot \frac{1}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2} (y-b)^2 + \right.$$
$$\left. + 2 \cdot \alpha \cdot ((x-a) \cdot y' - x' \cdot (y-b)) \cdot y' + \delta \cdot (y')^2 \right),$$

$$g_{1,2} = g_{2,1} = \frac{1}{(x \cdot y' - x' \cdot y)^2} \left(4 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot \frac{1}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2} (x-a) \cdot (y-b) + \right.$$
$$\left. + (\alpha \cdot x' - \beta \cdot y')((x-a) \cdot y' - x' \cdot (y-b)) + \delta \cdot x' \cdot y' \right),$$

$$g_{2,2} = -\frac{1}{(x \cdot y' - x' \cdot y)^2} \left(4 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot \frac{1}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2} (x-a)^2 - \right.$$
$$\left. - 2 \cdot \beta \cdot ((x-a) \cdot y' - x' \cdot (y-b)) \cdot x' + \delta \cdot (x')^2 \right),$$

$g_{1,3} = g_{3,1} = \alpha,$

$g_{2,3} = g_{3,2} = \beta,$

$g_{3,3} = \delta + \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$

Непосредственная проверка показывает, что

(a) для любого f элемента матрицы H выполняется $f' = 0$, то есть он является первым интегралом системы дифференциальных уравнений (**??**);

(b) выполняется равенство $g_{1,1} \cdot x^2 + 2 \cdot g_{1,2} \cdot x \cdot y + g_{2,2} \cdot y^2 + 2 \cdot g_{1,3} \cdot x + 2 \cdot g_{2,3} \cdot y + g_{3,3} = 0$;

(c) $\det H = \frac{4\pi^2 k}{\sigma^2}$, где $\sigma = xy' - x'y$.

Задача Коши для системы для дифференциальных уравнений (**??**) задается начальными условиями точкой начала движения и вектором скорости, а именно x_0, y_0, x'_0, y'_0. Подставим начальные условия задачи Коши в полученные выражения для g_{ij} и получим константы, которые g_{ij} задают по свойству (a). Далее обратим внимание, что равенство (b) является тождеством, значит оно выполняется и для начальных условий задачи. Значит, будучи специализированной в точке (x_0, y_0) матрица $H(x_0, y_0, x'_0, y'_0)$ задает уравнение кривой второго порядка. Движение происходит именно по этой кривой. $\square$

Замечание. Особо отметим, что умножив (**??**) скалярно на вектор (α, β). Получим дифференциальное уравнение на $r \stackrel{\text{def}}{=} \alpha x + \beta y + \delta$ следующего вида $r'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3}(r - \varepsilon)$, где $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a + \beta b + \delta$.

Из леммы непосредственно следует

Теорема 3. *Для любых действительных $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k, a, b, c$ бесконечно дифференцируемые решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (не лежащие на прямой) уравнения*

$$(x'', y'', z'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma z + \delta)^3} \cdot (x - a, y - b, z - c) \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$

лежат на плоских кривых второго порядка, у которых фокус расположен в точке (a, b, c), а директриса является пересечением плоскости движения (содержащей (a, b, c)) и плоскости $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta = 0$.

Доказательство. Обратим внимание, что для радиус-вектора $R \stackrel{\text{def}}{=} (x, y, z)$ выполняется тождество $[R, R''] = 0$, из которого следует, что $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}([R, R']) = 0$. Значит $[R, R'] = (a_1, b_1, c_1)$ для некоторых констант $a_1, a_1, a_1 \in \mathbb{C}$. Значит движение происходит в плоскости, которая задается уравнением $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot x = 0$. Значит доказательство теоремы сводится к доказательству плоского случая, для проверки истинности которого достаточно воспользоваться леммой о директрисе и фокусе. $\square$

Обратим внимание, что на самом деле мы решаем задачу Коши для системы дифференциальных уравнений, с заданными начальными условиями. Для целей нашего исследования достаточно частного случая теоремы Коши-Ковалевской, приведем его формулировку.

Обобщенная теорема Пикара (см [3]). *Пусть E - открытое подмножество K^{n+1} ($K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) и непрерывная функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ определяется следующим образом $f = (f_1, \ldots, f_n) : E \to K^n$. Если $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in E$ и f удовлетворяет условию Липшица относительно переменных $x_1, \ldots, x_n \in E$, то есть $|f_i(x, y_1, \cdots, y_n) - f_i(x, y_1', \cdots, y_n')| \leq M \cdot \max\limits_{1 \leq j \leq n} |y_j - y_j'|$, для всех $i \in \overline{1, n}$ и некоторой константы M.*

Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{2.1}$$

с начальными условиями $x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$ имеет единственное решение на некотором интервале $E_0 \in E$.

В рассматриваемых нами случаях функции f_i обладают свойством Липшица.

Теперь пройдемся по примерам центральных полей, динамика которых квадратична (см.[1] п.1).

2.2 Гармонический осциллятор.

Рассмотрим дифференциальную алгебру, определяющую движение гармонического осциллятора, заданную двумя образующими x, y и определяющими соотношениями

$x'' = -hx(t)$,
$y'' = -hy(t)$, где $h \in K$.

Заметим, что данная система уравнений, является частным случаем леммы о директрисе и фокусе при следующий параметрах $\alpha = 0, \beta =$

$0, \delta = 1$. Аналогично доказательству леммы рассмотрим тензор H_h, составленный из следующих элементов

$$g_{1,1} = -\frac{1}{(xy' - x'y)^2}\left(hy^2 + (y')^2\right),$$

$$g_{1,2} = g_{2,1} = \frac{1}{(xy' - x'y)^2}\,(hxy + x'y'),$$

$$g_{2,2} = -\frac{1}{(xy' - x'y)^2}\left(hx^2 + (x')^2\right),$$

$$g_{1,3} = g_{3,1} = 0,$$

$$g_{2,3} = g_{3,2} = 0,$$

$$g_{3,3} = 1.$$

Непосредственная проверка показывает, что

(a) $g_{1,1}x^2 + 2g_{1,2}xy + g_{2,2}y^2 + 2g_{1,3}x + 2g_{2,3}y + g_{3,3} = 0$ равенство является тождеством;

(b) $f' = 0$ для произвольного элемента матрицы H_h, то есть g_{ij} являются первыми интегралами системы дифференциальных уравнений;

(c) $\mathrm{detH_h} = \mathrm{h} \cdot \frac{1}{\sigma^2}$.

Значит, при начальных условиях задачи Коши для системы дифференциальных уравнений x_0, y_0, x'_0, y'_0 тензор $H_h(x_0, y_0, x'_0, y'_0)$ задает уравнение квадратичной кривой, по которой происходит движение.

2.3 Первые интегралы для полей Кулонова типа.

Дифференциальная алгебра E, отвечающая полям Кулонова типа, задается тремя образующими x, y, r и тремя определяющими соотношениями

$$r^3x'' = -4\pi^2kx,$$

$$r^3y'' = -4\pi^2ky,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \text{где } k \in K = \mathbb{R}.$$

Дважды продифференцировав последнее уравнение получим $rr'' +$

$(r')^2 = xx'' + yy'' + ((x')^2 + (y')^2)$. Умножим полученное равенство на r^4 и воспользуемся первыми двумя соотношения, после чего обнаружим, что $r\left(r^3r'' + 4\pi^2 k(r - \frac{\sigma^2}{4\pi^2 k})\right) = 0$, где $\sigma = xy' - x'y$.

Отсюда следует две возможности

1. $r = 0$ и $(x+iy)(x-iy) = 0$, но этот случай не физичен.

2. $r^3r'' = -4\pi^2 k(r - \frac{\sigma^2}{4\pi^2 k})$.

Таким образом в локализованной по r алгебре $E[r^{-1}]$ выполняются соотношения

$x'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3}x,$

$y'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3}y,$

$r'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3}(r - \frac{\sigma^2}{4\pi^2 k}),$

$r^2 = x^2 + y^2$

Пусть $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{4\pi^2 k}$. Положим $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{yr' - (r-\delta)y'}{\sigma}$, $\quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(r-\delta)x' - r'x}{\sigma}$, тогда выполняется следующее равенство $r = \alpha x + \beta y + \delta$. Непосредственная проверка показывает, что α, β, δ являются первыми интегралами для системы дифференциальных уравнений, задающих Кулоново поле.

Пусть задача Коши задана следующими начальными условиями $x_0, y_0, r_0, x'_0, y'_0, r'_0$, специализируем константы α, β, δ в начальных условиях, тогда уравнение $x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y + \delta)^2 = 0$ задает кривую второго порядка. Из последнего уравнения для системы, задающей Кулоново поля, и равенства для r следует, что движение проходит по этой кривой.

2.4 Модифицированные поля Кулонова типа.

Рассмотрим модификацию Кулонова поля, задающуюся системой уравнений

$x'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3}x,$

$y'' = -\frac{4\pi^2 k}{r^3} y,$

$r^2 = m_{1,1}x^2 + 2m_{1,2}xy + m_{2,2}y^2.$

Аналогично предыдущему определим $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{yr' - (r-\delta)y'}{\sigma}$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(r-\delta)x' - r'x}{\sigma}$, где $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{4\pi^2 k} \cdot \det \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{1,2} & m_{2,2} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим следующий тензор

$$H_{MK} = \begin{pmatrix} m_{1,1} - \alpha^2 & m_{1,2} - \alpha\beta & \alpha\delta \\ m_{1,2} - \alpha\beta & m_{2,2} - \beta^2 & \beta\delta \\ \alpha\delta & \beta\delta & -\delta^2 \end{pmatrix}$$

Непосредственная проверка показывает, что

(a) $g_{1,1}x^2 + 2g_{1,2}xy + g_{2,2}y^2 + 2g_{1,3}x + 2g_{2,3}y + g_{3,3} = 0$, где g_{ij} элементы матрицы H_{MK};

(b) $f' = 0$ для произвольного элемента матрицы H_{MK}.

Значит матрица H_{MK}, специализированная в начальных условий задачи Коши $x_0, y_0, r_0, x'_0, y'_0, r'_0$ задает квадратичную кривую, на которой лежит решение $x(t), y(t)$ рассматриваемой системы уравнений.

Замечание. В случае когда $\det \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{1,2} & m_{2,2} \end{pmatrix} = 0$, тогда уравнения принимают вид $(x'', y'') = -\frac{4\pi^2 k}{(\pm(\alpha x + \beta y))^3}(x, y)$, где $m_{1,1}x^2 + 2m_{1,2}xy + m_{2,2}y^2 = (\alpha x + \beta y)^2$.

2.5 Поля птолемеева типа.

Рассмотрим дифференциальную алгебру P, заданную двумя образующими x, y и двумя определяющими дифференциальными соотношениями

$(x^2 + y^2 - \delta) \cdot x'' = -2 \cdot (x'^2 + y'^2)x,$

$(x^2 + y^2 - \delta) \cdot y'' = -2 \cdot (x'^2 + y'^2)y,$

где $\delta \in K$. Из этих равенств последовательно получаем

$$(x^2+y^2-\delta)\cdot(x^2+y^2+\delta)'' = (x^2+y^2-\delta)(2(x'^2+y'^2)+2(xx''+yy'')) =$$
$$= (x^2+y^2-\delta)\cdot(2(x'^2+y'^2)) - 4(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) =$$
$$= -2(x'^2+y'^2)(x^2+y^2+\delta).$$

Локализуем алгебру P по элементу $x^2+y^2-\delta$. Тогда указанные соотношения между x, y, x', y' приобретают следующий вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2+\delta \end{pmatrix}'' = -2\cdot\frac{x'^2+y'^2}{x^2+y^2-\delta}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2+\delta \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

(третье уравнение – следствие первых двух). Эти уравнения задают поля птолемеева типа. Из них следует, что

(a) производная $[\bar{R},\bar{R}']'$ векторного произведения $[\bar{R},\bar{R}']$ векторов $\bar{R}'$, $\bar{R} \overset{\text{def}}{=} (x, y, x^2+y^2+\delta)$ равна нулю;

(b) вектор

$$[\bar{R},\bar{R}'] = \begin{pmatrix} y(x^2+y^2+\delta)' - y'(x^2+y^2+\delta) \\ (x^2+y^2+\delta)x' - x(x^2+y^2+\delta)' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

задает три первых интеграла для уравнения (2.2);

(c) скалярное произведение $([\bar{R},\bar{R}'],\bar{R})$ равно нулю, то есть

$$(xy'-x'y)(x^2+y^2+\delta) + (y(x^2+y^2+\delta)' - y'(x^2+y^2+\delta))x +$$
$$+ ((x^2+y^2+\delta)x' - x(x^2+y^2+\delta)')y = 0. \qquad (2.3)$$

Положим $\sigma \overset{\text{def}}{=} xy'-x'y$, $g_{33} \overset{\text{def}}{=} \delta$, $g_{11} \overset{\text{def}}{=} g_{22} \overset{\text{def}}{=} 1$, $g_{12} \overset{\text{def}}{=} 0$,
$g_{31} = g_{13} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\sigma}(y(x^2+y^2+\delta)' - y'(x^2+y^2+\delta))$,
$g_{32} = g_{23} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\sigma}(x'(x^2+y^2+\delta) - x(x^2+y^2+\delta)')$.
Тогда

(a) $g_{1,1}x^2 + 2g_{1,2}xy + g_{2,2}y^2 + 2g_{1,3}x + 2g_{2,3}y + g_{3,3} = 0$ (см. 2.3);

(b) $f' = 0$, где f - произвольный элемент тензора

$$H_P \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & g_{13} \\ 0 & 1 & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Будучи специализированным в начальных условиях x_0, y_0, x_0', y_0' задачи Коши тензор $H_P(x_0, y_0, x_0', y_0')$ задает уравнение окружности. Приведенные выше пункты (a),(b) объясняют, почему эта окружность является кривой движения для дифференциальных уравнений (2.2), задающих поля Птолемея.

2.6 X-версии.

В мистических передачах по ТВ часто можно увидеть картинку, как изображение конуса модифицируется в однополостный и двуполостный гиперболоид. Сразу вспоминаются ставшие теперь архаичными песочные часы, в которых наивно была зафиксирована идея о дискретности и соизмеримости времени.

2.6.1 Случай однополостного гиперболоида. Рассмотрим в аффинной системе координат Oxy семейство кривых второго порядка, заданное уравнениями

$$x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y + \delta)^2 = r_0^2,$$

где α, β, δ пробегают основное поле K (K совпадает с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), $\quad r_0 \in K$.

Это семейство получается проекцией на плоскость Oxy всех невырожденных плоских сечений гиперболоида, заданного в трехмерном пространстве $Oxyz$ уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = r_0^2.$$

Выведем уравнение движения по таким траекториям, при котором ускорение направлено в начало координат, то есть выполняются равенства

$$x'' = -wx, \quad y'' = -wy$$

или в векторной форме $(x, y)'' = -w(x, y)$.

Обозначим r новую величину, для которой

$$r^2 = x^2 + y^2 - r_0^2.$$

Продифференцировав ее получим $r' = \dfrac{xx' + yy'}{r}$. После второго дифференцирования получается следующее выражение $r'' = -\dfrac{(xx'+yy')^2}{r^3} + \dfrac{x'^2+y'^2}{r} - w\dfrac{x^2+y^2}{r} = \dfrac{\sigma^2 - r_0^2(x'^2+y'^2)}{r^3} - w\dfrac{r^2+r_0^2}{r}$. С другой стороны $r - \delta = \alpha x + \beta y$. Значит, $r'' = -w(r-\delta)$. Приравняв различные выражения для второй производной r получим линейное соотношения для w имеющее следующий вид

$$\left(\delta + \frac{r_0^2}{r}\right) \cdot w = \frac{\sigma^2 - r_0^2(x'^2+y'^2)}{r^3}.$$

Таким образом, уравнения центрального движения по рассматриваемому семейству квадратичных траекторий должны иметь вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ r-\delta \end{pmatrix}'' = -\frac{\sigma^2}{\delta} \cdot \frac{\left(1 - \frac{r_0^2(x'^2+y'^2)}{\sigma^2}\right)}{r^3\left(1 + \frac{r_0^2}{\delta r}\right)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ r-\delta \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

где $r \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x^2+y^2-r_0^2}$ и третье уравнение есть следствие первых двух. (При $r_0 = 0$, $\sigma^2/\delta = 4\pi^2 k$ эти уравнения задают поля кулонова типа.) Из уравнений (2.4) следует, что

(a) производная $[\bar{R}, \bar{R}']'$ векторного произведения $[\bar{R}, \bar{R}']$ векторов $\bar{R} \overset{\text{def}}{=} (x, y, r-\delta)$, $\bar{R}'$ равна нулю;

(b) вектор $[\bar{R}, \bar{R}'] = (y(r-\delta)' - y'(r-\delta), (r-\delta)x' - (r-\delta)'x, xy' - x'y)$ задает три первых интеграла для уравнения (2.4);

(c) скалярное произведение $([\bar{R}, \bar{R}'], \bar{R})$ равно нулю, то есть

$$(xy'-x'y)\cdot(\sqrt{x^2+y^2-r_0^2}-\delta)+(y(r-\delta)'-y'(r-\delta))x+((r-\delta)x'-(r-\delta)'x)y = 0. \tag{2.5}$$

Положим $\alpha \overset{\text{def}}{=} -\frac{y(r-\delta)'-y'(r-\delta)}{\sigma}$, $\beta \overset{\text{def}}{=} -\frac{(r-\delta)x'-(r-\delta)'x}{\sigma}$, $\sigma \overset{\text{def}}{=} xy' - x'y$. Тогда в силу свойства (b) $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\sigma' = 0$, а из равенства (2.5) вытекает, что $x^2(t) + y^2(t) - (\alpha x(t) + \beta y(t) + \delta)^2 = r_0^2$ для любого гладкого решения $x(t), y(t)$ уравнений (2.4). Таким образом, любое гладкое решение $x(t), y(t)$ системы уравнений (2.4) при $\sigma \neq 0$ ($x^2(t) + y^2(t) - r_0^2$ не обращается в ноль ни в одной точке области определения $x(t), y(t)$) лежит на квадратичной кривой

$$x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y + \delta)^2 = r_0^2,$$

где α, β однозначно определяется начальными условиями задачи Коши.

Замечание. Обсуждение физических аспектов уравнений (2.4)

(a) возможных соотношений между величинами r_0, δ, σ (например, $\frac{\sigma^2}{\delta} = 4\pi^2 k_s$ (см. [1]));

(b) возникновение силы отталкивания при бомбардировке частицами ядра: $\{x, y | x^2 + y^2 \leq r_0\}$

уводит далеко за математические рамки данной диссертации.

2.6.2 Случай двуполостного гиперболоида. Аналогичным образом рассмотрим семейство проекцией на плоскость Oxy всех плоских сечений двуполостного гиперболоида, заданного в трехмерном пространстве $Oxyz$ уравнением

$x^2 + y^2 - z^2 = -r_0^2$.

Это семейство описывается уравнениями

$x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y + \delta)^2 = -r_0^2$, где α, β, δ пробегают основное поле $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, r_0 \in K$.

Выведем уравнение движения по таким траекториям, при котором ускорение направлено в начало координат, то есть выполняется тождество

$(x, y)'' = -w(x, y)$.

Обозначим R новую величину, для которой $R^2 = x^2 + y^2 + r_0^2$. Продифференцировав ее получим $R' = \dfrac{xx' + yy'}{R}$. После арифметических преобразований второй производной получим $R'' = \dfrac{\sigma^2 - r_0^2(x'^2 + y'^2)}{R^3} - w\dfrac{R^2 - r_0^2}{R}$. С другой стороны $R - \delta = \alpha x + \beta y$. Значит вторая производная имеет вид $R'' = -w(R - \delta)$. Таким образом w выражается следующим образом

$$w = \frac{\sigma^2 + r_0^2(x'^2 + y'^2)}{R^2(R\delta - r_0^2)}.$$

Рассмотрим тензор H_{X2} составленный из следующих элементов

$$\mathrm{g}_{3,3} \overset{\text{def}}{=} -9 \cdot \cdot \sigma^4 \cdot R^2 \frac{(\sigma^2 + r_0^2 \cdot (x'^2 + y'^2))^3 (r_0^2 - \delta^2)}{(\delta \cdot R^3 - r_0^2 \cdot R^2)^4},$$

$$\mathrm{g}_{3,2} = \mathrm{g}_{2,3} \overset{\text{def}}{=} 9 \cdot \delta \cdot \sigma^3 \cdot R^2 \frac{(\sigma^2 + r_0^2 \cdot (x'^2 + y'^2))^3 (x' \cdot (R - \delta) - R' \cdot x)}{(\delta \cdot R^3 - r_0^2 \cdot R^2)^4},$$

$$\mathrm{g}_{3,1} = \mathrm{g}_{1,3} \overset{\text{def}}{=} 9 \cdot \delta \cdot \sigma^3 \cdot R^2 \frac{(\sigma^2 + r_0^2 \cdot (x'^2 + y'^2))^3 (y' \cdot (R - \delta) - R' \cdot y)}{(\delta \cdot R^3 - r_0^2 \cdot R^2)^4},$$

$$\mathrm{g}_{2,2} \overset{\text{def}}{=} 9 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{(\sigma^2 + r_0^2 \cdot (x'^2 + y'^2))^3}{(\delta \cdot R^3 - r_0^2 \cdot R^2)^4} ((\sigma^2 + r_0^2 \cdot (x'^2 + y'^2)) \cdot x^2 - 2 \cdot \delta \cdot R^2 \cdot R' \cdot x \cdot x' + \\ + x'^2 \cdot (2 \cdot \delta \cdot R^3 - R^2 \cdot (r_0^2 + \delta^2))),$$

$$\mathrm{g}_{1,1} \overset{\text{def}}{=} 9 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{(\sigma^2 + r_0^2 \cdot (x'^2 + y'^2))^3}{(\delta \cdot R^3 - r_0^2 \cdot R^2)^4} ((\sigma^2 + r_0^2 \cdot (x'^2 + y'^2)) \cdot y^2 - 2 \cdot \delta \cdot R^2 \cdot R' \cdot y \cdot y' + \\ + y'^2 \cdot (2 \cdot \delta \cdot R^3 - R^2 \cdot (r_0^2 + \delta^2))),$$

$$\mathrm{g}_{2,1} = \mathrm{g}_{1,2} \overset{\text{def}}{=} -9 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{(\sigma^2 + r_0^2 \cdot (x'^2 + y'^2))^3}{(\delta \cdot R^3 - r_0^2 \cdot R^2)^4} ((\sigma^2 + r_0^2 \cdot (x'^2 + y'^2)) \cdot x \cdot y - \\ - \delta \cdot R^2 \cdot R' \cdot (x \cdot y' + x' \cdot y) + x' \cdot y' \cdot (2 \cdot \delta \cdot R^3 - R^2 \cdot (r_0^2 + \delta^2))).$$

Тогда непосредственной проверкой выясняем, что

(a) $(f/g)' = 0$, где f и g некоторые элементы тензора H_{X2};

(b) $\mathrm{detH_{X2}} = -729\,\sigma^4\, \dfrac{(\sigma^2 + \mathrm{r}_0^2(\mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}'^2))^{10}}{(\delta \mathrm{R}^3 - \mathrm{r}_0^2 \mathrm{R}^2)^{10}}$.

2.7 Универсальная квадратичная динамика в сигнатуре $y, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$.

Рассмотрим свободную дифференциальную алгебру с образующими x, y и дифференцированием $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$. И рассмотрим тензор H, составленный из следующих элементов

$g_{3,3} \overset{\mathrm{def}}{=} 18x^2 (y'')^4 - 8x^2 \left(y^{(3)}\right)^2 (y')^2 - 12x^2 y^{(3)} y' (y'')^2 + 6x^2 y^{(4)} (y')^2 y'' + 12xyy^{(3)} (y'')^2 + 16xy \left(y^{(3)}\right)^2 y' - 36xy' (y'')^3 - 12xyy^{(4)} y' y'' + 36y (y'')^3 - 8y^2 \left(y^{(3)}\right)^2 + 6y^2 y^{(4)} y''$,

$$g_{3,2} = g_{2,3} \overset{\mathrm{def}}{=} -2 \left(-3xy^{(3)} (y'')^2 + 4 \left(y^{(3)}\right)^2 (y - xy') - 3y^{(4)} y'' (y - xy') - \right. \\ \left. -9 (y'')^3 \right),$$

$$g_{3,1} = g_{1,3} \overset{\mathrm{def}}{=} 2 \left(9x (y'')^4 + (y')^2 \left(3xy^{(4)} y'' - 4x \left(y^{(3)}\right)^2 \right) - \right. \\ \left. y' \left(6xy^{(3)} (y'')^2 - 4y \left(y^{(3)}\right)^2 + 9 (y'')^3 + 3yy^{(4)} y'' \right) + 3yy^{(3)} (y'')^2 \right),$$

$g_{2,2} \overset{\mathrm{def}}{=} 6y^{(4)} y'' - 8 \left(y^{(3)}\right)^2$,

$g_{1,1} \overset{\mathrm{def}}{=} 2 \left(9 (y'')^4 - 4 \left(y^{(3)}\right)^2 (y')^2 - 6y^{(3)} y' (y'')^2 + 3y^{(4)} (y')^2 y'' \right)$,

$g_{1,2} = g_{2,1} \overset{\mathrm{def}}{=} -2 \left(-3y^{(3)} (y'')^2 - 4 \left(y^{(3)}\right)^2 y' + 3y^{(4)} y' y'' \right)$.

Тогда этот тензор обладает следующими свойствами

(a) $g_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot g_{12} \cdot x \cdot y + g_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot g_{13} \cdot x + 2 \cdot g_{32} \cdot y + g_{33} = 0$;

(b) $\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = -5832 (y'')^{10}$;

(c) $f \cdot g' - f' \cdot g$ делится на $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$.

(d)

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 2x & y+xy' & 2yy' & 1 & y' & 0 \\ 2 & 2y'+xy'' & 2y'^2+2yy'' & 0 & y'' & 0 \\ 0 & 3y''+xy''' & 6y'y''+2yy''' & 0 & y''' & 0 \\ 0 & 4y'''+xy^{(iv)} & 6(y'')^2+8y'y'''+2yy^{(iv)} & 0 & y^{(iv)} & 0 \\ 0 & 5y^{(iv)}+xy^{(v)} & 20y''y'''+10y'y^{(iv)}+2yy^{(v)} & 0 & y^{(v)} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$4\left(y''\left(40\left(y^{(3)}\right)^3-30y^{(4)}y^{(3)}y''+9y^{(5)}\left(y''\right)^2\right)-5\left(y'\right)^2\left(4\left(y^{(3)}\right)^2-3y^{(4)}y''\right)-5y'\left(-4\left(y^{(3)}\right)^2y^{(4)}+3y^{(3)}\left(y''\right)^2+3\left(y^{(4)}\right)^2y''\right)\right)$$

Все свойства непосредственно следуют из определения и проверяются простым подсчетом.

Глава 3

Соотношения Капелли и их применение в дифференциальной алгебре.

3.1 Простые и максимальные идеалы в счетномерных коммутативно-ассоциативных алгебрах над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Обозначим $\bar{K}$ алгебраическое замыкание поля K.

Предложение 1. *Для любой коммутативно-ассоциативной K-алгебры A при ненулевом K-гомоморфизме $\varphi : A \to \bar{K}$ K-подалгебра $\varphi(A)$ в $\bar{K}$ является подполем, в частности ядро* $\mathrm{Ker}\varphi$ *- простой идеал в K-алгебре A.*

Доказательство. Любой ненулевой элемент $\varphi(a)$ в $\bar{K}$ является алгебраическим над K. Пусть $f(t)$-ненулевой многочлен наименьшей степени, для которого $f(\varphi(a)) = 0$ в $\bar{K}$. Тогда свободный член этого многочлена $f(0)$ не может быть равен нулю (в поле $\bar{K}$ нет делителей нуля). Следовательно. K-подалгебра, порожденная элементом $\varphi(a)$ содержит единицу поля K Более того, записав многочлен $f(t)$ в виде $f(0)+x\cdot g(t)$, из равенства $\varphi(0)+\varphi(a)\cdot g(\varphi(a))=0$ заключаем, что $-g(\varphi(a))/\varphi(0)$ обратный элемент к $\varphi(a)$, содержащийся в K-подалгебре $K[\varphi(a)]$ поля $\bar{K}$. $\square$

Предложение 2. *Любая простая коммутативно-ассоциативная алгебра A над полем K содержит единичный элемент и является полем.*

Доказательство. Так как A – простая K-алгебра, то в ней ненулевое умножение и в A нет идеалов кроме нулевого и самой A. Следовательно, для любого ненулевого элемента $a\in A$ идеал $A\cdot a\overset{\text{def}}{=}\{d\cdot a|d\in A\}$ должен совпадать со всей алгеброй A (в противном случае ненулевой одномерный идеал $K\cdot a$ должен совпадать с A и $A\cdot A=(K\cdot a)\cdot A=K\cdot(a\cdot A)=0$, то есть умножение в A было бы нулевым). Поэтому $a\in A\cdot a$ и $e\cdot a=a$ для некоторого элемента e ($e\in A$). Но тогда $e\cdot b=b$ для любого $b\in A=A\cdot a$, то есть e -единичный элемент в A. Более того, $e\in A=A\cdot a$ и $e=d\cdot a$ для некоторого $d\in A$, т.е. любой ненулевой элемент в A имеет обратный. $\square$

Теорема. *Пусть M -максимальный идеал коммутативно-ассоциативной K-алгебры A, содержащей единичный элемент, размерность которой строго меньше мощности поля K. Тогда фактор алгебра A/M является полем, в котором любой элемент алгебраичен над K.*

Доказательство. Рассматривая вместо A алгебру A/M, можно считать A полем и M нулевым идеалом. Рассмотрим произвольный $a\in A$. Мощность множества $\left\{\frac{1}{a-\alpha}|\alpha\in K\right\}$ превосходит $\dim_K A$. Значит, между элементами этого множества есть линейная зависимость над K:

$$0=\frac{\beta_1}{a-\alpha_1}+\ldots+\frac{\beta_n}{a-\alpha_n}=\frac{p(a)}{(a-\alpha_1)\ldots(a-\alpha_n)}$$

где $p(x)\in K[x]$. Таким образом, $p(a)=0$, то есть a алгебраичен над L. $\square$

Следствие 1. *Пусть $K = \mathbb{R}$ ($K = \mathbb{C}$) и A счетномерна над K. Тогда для любого максимального идеала $M \subset A$ поле A/M изоморфно или $\mathbb{R}$, или $\mathbb{C}$.*

Следствие 2. *Для любого ненильпотентного элемента a K-алгебры A, размерность которой строго меньше мощности поля K, существует такой K-гомоморфизм $\varphi : A \to \bar{K}$, при котором $\varphi(a) \neq 0$ в алгебраическом замыкании $\bar{K}$.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку K -гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\varepsilon_a} A[a^{-1}] \xrightarrow{\varepsilon_M} A[a^{-1}]/M \overset{\varepsilon}{\subset} \bar{K},$$

где $A[a^{-1}]$-локализация алгебры A по ненильпотентному элементн a, а M - произвольный максимальный идеал K-алгебры с единицей $A[a^{-1}]$, а ε - любое вложение алгебраического расширения $A[a^{-1}]/M$ поля K в $\bar{K}$. Тогда для K-гомоморфизма $\varphi \overset{\text{def}}{=} \varepsilon \circ \varepsilon_M \circ \varepsilon_a$

$$\varphi(a) \cdot (\varepsilon \circ \varepsilon_M(a^{-1})) = \varepsilon \circ \varepsilon_M(\varepsilon_a(a) \cdot a^{-1}) = \varepsilon \circ \varepsilon(a/a) = 1.$$

Следовательно, $\varphi(a) \neq 0$. □

Следствие 3. *Пересечение всех простых идеалов K-алгебры A, размерность которой строго меньше мощности поля K, совпадает с наибольшим в A идеалом, состоящем из нильпотентных элементов.*

3.2 Коммутативные алгебры с одним дифференцированием.

Определение. Коммутативно-ассоциативная K-алгебра A, на которой выделено K-дифференцирование $D : A \to A$

$$D \times (a_1 * a_2) = (D \times a_1) * a_2 + a_1 * (D \times a_2) \quad (a_1, a_2 \in A) \tag{3.1}$$

называется дифференциальной K-алгеброй. Ее полилинейными сигнатурными операциями являются билинейное умножение $* : A \otimes_K A \to A$ и линейная унарная операция $D : A \to A$, удовлетворяющая тождеству дифференцирования (3.1).

Определение. Гомоморфизмом дифференциальной K-алгебры A_1 относительно K-дифференцирования D_1 в дифференциальную K-алгебру A_2 относительно D_2 называется K-линейной отображение $\varphi : A_1 \to A_2$, при котором

$$\varphi(D_1 \times a_1) = D_2 \times \varphi(a_1), \quad \varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2) \quad (a_1, a_2 \in A).$$

В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением дифференциальных алгебр над полем действительных и комплексных чисел.

Пример 0. $A = K[[t]]$-алгебра формальных степенных рядов от переменной t относительно стандартного дифференцирования $D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$. Эта алгебра не содержит делителей нуля, а её поле частных совпадает с $K((t))$, алгеброй формальных рядов Лорана. В алгебрах $K[[t]], K((t))$ нет нетривиальных "констант", т.е. если $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} f(t) = 0$, то $f(t) \in K \cdot 1$. В алгебре A все идеалы являются главными (нетривиальные имеют вид $A \cdot t^i$ $(i \in 1, 2, \ldots)$), а так как основное поле K имеет нулевую характеристику $(D \times t^i = i \cdot t^{i-1} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots)$ в A нет нетривиальных дифференциальных идеалов. Таким образом, дифференциальная алгебра $K[[t]]$ является примером простой дифференциальной алгебры с единицей. Особо отметим, что любое дифференцирование алгебры $K[[t]]$ имеет вид $f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$, $(f(t) \in K[[t]])$.

Кроме того поле частных $K[[t]]$ совпадает с алгеброй рядов Лорана $K((t))$ и любой ряд $g(t)$ для которого $g'(t) = 0$ имеет вид $\alpha \cdot 1$, где $\alpha \in K$.

Предложение. *Если* $\mathrm{char} K = 0$, *то ряды Лорана* $f_1(t), \ldots, f_n(t) \in K((t))$ *линейно зависимы над* K *тогда и только тогда, когда определитель*

$$|f_1,\dots,f_n| \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \textit{равен нулю.}$$

Доказательство. Пусть $|f_1,\dots,f_n| = 0$. Если $f_1 = 0$, то $f_1,\dots,f_n$ линейно зависимы. Если $f_1 \neq 0$, то

$0 = |f_1, f_2, \dots, f_n| = |f_1, f_1\frac{f_2}{f_1}, \dots, f_1\frac{f_n}{f_1}| = f_1^n|1, \frac{f_2}{f_1}, \dots, \frac{f_n}{f_1}| = f_1^n|\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \dots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'|$.

Так как $|\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \dots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'| = 0$, то из индуктивных соображений ряды $\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \dots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'$ линейно зависимы, то есть $\lambda_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)' + \dots + \lambda_n\left(\frac{f_n}{f_1}\right)' = 0$ для некоторых $\lambda_2,\dots,\lambda_n \in K$ (не все $\lambda_2,\dots,\lambda_n$ равны нулю). Но тогда $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\lambda_2\frac{f_2}{f_1} + \dots + \lambda_n\frac{f_n}{f_1}\right) = 0$. Откуда следует, что ряд $\lambda_2\frac{f_2}{f_1} + \dots + \lambda_n\frac{f_n}{f_1}$ должен быть равен некоторой константе $-\lambda_1 \in K$ и $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0$. □

Пример 1. $A = H(D)$-алгебра всех дифференцируемых комплекснозначных функций от переменной z, определенных в некоторой области D комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$. Из элементарной теории функций одного комплексного переменного следует, что все такие функции бесконечно дифференцируемы относительно $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}$, непрерывны и в ε-окрестности любой точки $z_0 \in D$ ряд Тейлора любой такой функции сходится к ней самой. В частности, эта алгебра A не содержит делителей нуля и является областью целостности.

Пример 2. $A = K[x_1,\dots,x_n]$ ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)-алгебра многочленов с единицей и n порождающими. Произвольное дифференцирование $D : A \to A$ однозначно определяется своими значениями на $x_1,\dots,x_n$. При этом, если $D\times x_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \in A$ ($i = 1,\dots,n$), то $D = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Пусть φ-произвольный дифференциальный K-гомоморфизм дифференциальной K-алгебры A относительно D в дифференциальную K-алгебру

$\mathbb{C}[[t]]$ относительно $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$. Тогда степенные ряды $\varphi(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ от переменной t являются формальными решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\varphi(x_i)) = (\varphi(D \times x_i) = \varphi(f_i(x_1, \ldots, x_n))) =$$
$$= f_i(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

По упомянутой в главе 2 (2.1) обобщенной теоремы Пикара вытекает, что степенные ряды сходятся в некоторой окрестности нуля к решению системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

с начальным условием $x_i(0) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_i)|_{t=0}$.

Следствие. Пусть A – конечнопорожденная коммутативно-ассоциативная алгебра над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, D-произвольное её дифференцирование. Тогда для любого дифференциального K-гомоморфизма φ : $A \to \mathbb{C}[[t]]$ $\quad (\varphi(D \times x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\varphi(a))$ все степенные ряды $\varphi(a)$ (a пробегает A) сходятся в некоторой окрестности нуля поля $\mathbb{C}$.

Доказательство. Обозначим $a_1, \ldots, a_m$ порождающие элементы алгебры A. Дифференцирование $D : A \to A$ полностью определяется своими значениями на $a_1, \ldots, a_m$, которые полиномиально выражаются через $a_1, \ldots, a_m$.

Зафиксируем многочлены $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_m]$, для которых

$$D \times a_i = f_i(a_1, \ldots, a_m) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

и положим $\bar{D} \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x_1, \ldots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Но тогда эпиморфизм $\bar{\varphi}$: $K[x_1, \ldots, x_m] \to A$, при котором $\bar{\varphi}(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} a_i$ является гомоморфизмом дифференциальной алгебры $K[x_1, \ldots, x_m]$ относительно дифференцирования $\bar{D}$ на дифференциальную K-алгебру A относительно D. Действительно, для любого $g \in K[x_1, \ldots, x_m]$.

$\bar{\varphi}(\bar{D} \times g(x_1, \ldots, x_m)) = \bar{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot f_i(x_i, \ldots, x_m)\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{x_1=a_1,\ldots,x_m=a_m}\right) \cdot f_i(a_1, \ldots, a_m) = D \times g(a_1, \ldots, a_m) = D \times \bar{\varphi}(g)$.

Следовательно, как было отмечено в примере 2 степенные ряды $\varphi(\bar{\varphi}(x_i))$ $(i = 1, \ldots, m)$ сходятся в некоторой окрестности нуля поля $\mathbb{C}$.

□

Пример 3. $A = C^{\infty}(a, b)$ - K-алгебра $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ бесконечнодифференцируемых функций от одной действительной переменной t на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ относительно естественного дифференцирования $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$. Очевидно, что в этой алгебре есть делители нуля, но в ней нет нильпотентных элементов. Несмотря на более чем четырехвековую традицию использования этой алгебры отыскания решений обыкновенных дифференциальных уравнений, она не является естественным объектом (в отличие от алгебры из примеров 0,1) для представления конечнопорожденных дифференциальных K-алгебр. Известно огромное количество примеров функций $x(t) \in C^{\infty}(a, b)$, для которых её ряд Тейлора в каждой точке $t_0 \in (a, b)$ не сходится к $x(t)$ ни в какой ε-окрестности t_0. Например, ряд Тейлора функции $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sqrt{2^k}} \cos(2^k t)$ расходится в любой точке $t_0 \in (-\infty, \infty)$. Но и здесь теорема Пикара и следствие из нее позволяют нащупать подход в этом болоте.

Предложение. *Если в каждой точке $t_0 \in (a, b)$ ряд Тейлора функций $x(t) \in C^{\infty}(a, b)$ не сходится к $x(t)$ ни в какой ε-окрестности t_0, то (дифференциальная) K-подалгебра, порождённая $x(t), x'(t), \ldots, x^{(i)}(t), \ldots$ изоморфна свободной дифференциальной алгебре ранга 1, то есть функции $x(t), x'(t), \ldots, x^{(i)}(t)$ алгебраически независимы над K при ограничении их на любой подинтервал (a', b') интервала*

(a, b).

Доказательство более чем очевидно.

3.3 Техника гомоморфизмов Тейлора.

В этом параграфе все рассматриваемые дифференциальные K-алгебры являются счетномерными и K совпадает либо с полем действительных чисел или комплекстных чисел. Обозначим $\mathrm{Spec}_K A$ спектр простых идеалов K-алгебры A. Как было указано в (3.1) для любого K идеала $M \in \mathrm{Spec}_K A$ фактор-алгебра A/M является полем, изоморфным или полю $\mathbb{R}$ или полю $\mathbb{C}$. Пусть $\psi : A \to \mathbb{C}$-произвольный K-гомоморфизм K-алгебры A в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Для любого элемента $a \in A$ определим степенной ряд $\tilde{\psi}(a) \in \mathbb{C}[[t]]$, полагая

$\tilde{\psi}(a) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi(D^i \times a)\frac{t^i}{i!}$, где D-K-дифференцирование A.

Из этого определения немедленно следует, что

$\tilde{\psi}(a_1 * a_2) = \tilde{\psi}(a_1) * \tilde{\psi}(a_2), \quad \tilde{\psi}(D \times a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\tilde{\psi}(a)$

для любых элементов a_1, a_2, a алгебры A. То есть K-линейной отображение $\tilde{\psi} : A \to \mathbb{C}[[t]]$ является K-гомоморфизмом дифференциальной K-алгебры A относительно K-дифференцирования D в дифференциальную $\mathbb{C}$-алгебру степенных рядов $\mathbb{C}[[t]]$ относительно K-дифференцирования $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$. Этот дифференциальный K-гомоморфизм мы будем называть гомоморфизмом Тейлора в точке $\psi : A \to \mathbb{C}$.

Замечание. Очевидно, что любой дифференциальный K-гомоморфизм K-алгебры A в K-алгебру $\mathbb{C}[[t]]$ является гомоморфизмом Тейлора в точке $\psi = \varepsilon \circ \varphi$, где ε - канонический $\mathbb{C}$-гомоморфизм $\mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{C}$, при котором $\varepsilon(f(t)) \overset{\mathrm{def}}{=} f(0)$. Действительно, если $\varphi(a) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{t^i}{i!}$, то

$\tilde{\psi}(a) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(\varepsilon \circ \varphi)(D^i \times a)\frac{t^i}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon(\frac{\mathrm{d^i}}{\mathrm{dt^i}}\varphi(a))\frac{t^i}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{t^i}{i!} = \varphi(a)$.

Аналитический спектр. Для любого $M \in \mathrm{Spec}_K A$ обозначим

ψ_M K-гомоморфизм K-алгебры A на фактор-алгебру A/M, которая изоморфна любо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$ (см. 3.1). Тогда с точностью до автоморфизма комплексным сопряжением можно считать, что ψ_M - это K-гомоморфизмом K-алгебры A в поле $\mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{\mathrm{Spec}_K}A$ такое подмножество в $\mathrm{Spec}_K A$, составленное из тех K-простых идеалов M K-алгебры, для которых при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M : A \to \mathbb{C}[[t]]$ образ $\tilde{\psi}_M(A)$ состоит из рядов, сходящихся в некоторой ε-окрестности нуля поля $\mathbb{C}$. Оказывается, что K-гомоморфизмов $\psi_M \to \mathbb{C}$ ($M \in \overline{\mathrm{Spec}_K}A$) достаточно много.

Теорема. *Пусть дифференциальная K-алгебра A имеет конечное число дифференциальных образующих относительно K-дифференцирования $D : A \to A$. Тогда для любого ненильпотентного элемента a K-алгебры A существует $M \in \overline{\mathrm{Spec}_K}A$ такой, что $\psi_M(a) \neq 0$ в поле $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Локализация $A[a^{-1}]$ K-алгебры A по ненильпотентному элементу a имеет единичный элемент a/a и является конечно порожденной относительно D дифференциальной K-алгеброй. Пусть I-произвольный максимальный дифференциальный K-идеал, не содержащий единицу алгебры A. Тогда фактор-алгебра $B \stackrel{\mathrm{def}}{=} A/I$ является простой дифференциальной K-алгеброй с единицей, в которой элемент $a + I$ обратим. Из теоремы Ю.П.Размыслова (см. [9]) о простых конечнопорожденных дифференциальных K-алгебрах с единицей следует, что B-область целостности и в B существует такой элемент в b, что локализация $B[b^{-1}]$ K-алгебры B по элементу b имеет конечное число образующих, как коммутативно-ассоциативная (не дифференциальная) K-алгебра. Тогда согласно следствия из обобщенной теоремы Пикара (2.1) для любого идеала $N \in \mathrm{Spec}_K B[b^{-1}]$ при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M : B[b^{-1}] \to \mathbb{C}[[t]]$ образ $\tilde{\psi}_N(B[b^{-1}])$ состоит из степенных рядов, сходящихся в некоторой ε-окрестности нуля поля $\mathbb{C}$. Следовательно, ядро M K-гомоморфизма

$A \xrightarrow{\varepsilon_a} A[a^{-1}] \xrightarrow{\varepsilon_I} A[a^{-1}]/I = B \xrightarrow{\varepsilon_b} B[b^{-1}] \xrightarrow{\psi_N} \mathbb{C}$
является простым идеалом из $\overline{\mathrm{Spec}}_K A \quad (\tilde{\psi}_M = \tilde{\psi}_N \circ \varepsilon_b \circ \varepsilon_I \circ \varepsilon_a)$, для которого $\psi_M(a)$-обратимый элемент в $\mathbb{C}$, то есть $\psi_M(a) \neq 0$. □

Лемма о нильпотентном элементе. Обозначим бесконечную $W(a_1, \ldots, a_n)$ матрицу, у которой в i-ой строке j-го столбца ($i = 0, 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, n$) стоит элемент $D^i \times a_j$.

Лемма. *Если самый верхний $n \times n$-минор $|a_1, \ldots, a_n|$ матрицы $W(a_1, \ldots, a_n)$ является нильпотентным элементом в K-алгебре A, то все остальные миноры n-го порядка матрицы $W(a_1, \ldots, a_n)$ нильпотентные элементы K-алгебры A.*

Доказательство. Допустим, что какой-то минор n-го порядка матрицы $W(a_1, \ldots, a_n)$ не является нильпотентным элементом в A. Тогда дифференциальная K-подалгебра B относительно D, порожденная элементами $a_1, \ldots, a_n$ не более чем счетномерна и согласно результатам (3.1) существует гомоморфизм $\psi : B \to \mathbb{C}$ при котором этот минор b переходит в ненулевой элемент. Но при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi} : B \to \mathbb{C}[[t]]$ матрица $W(a_1, \ldots, a_n)$ переходит в матрицу $W(\tilde{\psi}(a_1), \ldots, \tilde{\psi}(a_n))$, а минор $|a_1, \ldots, a_n|$ в $|\tilde{\psi}(a_1), \ldots, \tilde{\psi}(a_n)|$. Так как в $\mathbb{C}[[t]]$ нет делителей нуля, а при гомоморфизме нильпотентные элементы переходят в нильпотентные, то $|\tilde{\psi}(a_1), \ldots, \tilde{\psi}(a_n)| = 0$. Так как $\tilde{\psi} : B \to \mathbb{C}[[t]]$ дифференциальный K-гомоморфизм, то это означает, что

$$\begin{vmatrix} \tilde{\psi}(a_1) & \tilde{\psi}(a_2) & \ldots & \tilde{\psi}(a_n) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\tilde{\psi}(a_1) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\tilde{\psi}(a_2) & \ldots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\tilde{\psi}(a_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\mathrm{d^{n-1}}}{\mathrm{dt^{n-1}}}\tilde{\psi}(a_1) & \frac{\mathrm{d^{n-1}}}{\mathrm{dt^{n-1}}}\tilde{\psi}(a_2) & \ldots & \frac{\mathrm{d^{n-1}}}{\mathrm{dt^{n-1}}}\tilde{\psi}(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно (см. предложение из 3.2), степенные ряды $\tilde{\psi}(a_1), \ldots, \tilde{\psi}(a_n)$ линейно зависимы над полем $\mathbb{C}$, в частности, линейно зависимы столбцы матрицы $W(\tilde{\psi}(a_1), \ldots, \tilde{\psi}(a_n))$ и все ее миноры n-го порядка обязаны быть нулевыми. Но тогда образ минора b матрицы $W(a_1, \ldots, a_n)$ при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}$ равен нулю, в частности равен нулю свободный член ряда $\tilde{\psi}(b)$, который совпадает с $\psi(b)$. Полученное противоречие $\psi(b) \neq 0, \psi(b) = 0$ доказывает, что все миноры n-го порядка матрицы $W(a_1, \ldots, a_n)$-нильпотентные элементы K-алгебры A. $\square$

Замечание. При $n = 1$ из этой леммы вытекает, что над полями нулевой характеристики нильпотентные элементы при дифференцировании переходят в нильпотентные. Комбинаторное доказательство этого факта приведено в ([8]).

3.4 Соотношения Капелли и теорема о ранге.

Определение. K-алгебра A сигнатуры Ω называется первичной, если равенство $(J_1, J_2) = 0$ влечет $J_1 = 0$ или $J_2 = 0$ и полупервичной, если из равенства $(J.J) = 0$ следует, что $J = 0$ для любых J, J_1, J_2 идеалов алгебры A.

Это определение можно проинтерпретировать следующим образом. Алгебра A первична, если для любых $a, b, a_i \in A$, где $i \in (1, n)$, существует полилинейный по a, b полином $p(a, b, a_i)$ такой что $p(a, b, a_i) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_i \cdot a \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_j \cdot b \cdot a_{j+1} \cdot \ldots \cdot a_n \neq 0$.

Алгебра A полупервична, если для любого $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ существует моном, в котором a встречается n раз, $\ldots a \cdot \ldots \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot \ldots \neq 0$.

Следуя за [2] введем понятие центроида Мартиндейла. Пусть A первичная K-алгебра сигнатуры Ω и $D = D(A)$ - связанная с ней ассоциативная подалгебра в $\mathrm{End}_K A$. Пусть P - инъективная оболочка D-модуля A, обозначим $E = \mathrm{End}_D P$ алгебру всех эндоморфизмов D-модуля P, а $Q = EA$ - D-подмодуль в P. Известно, что в таком случае ограничение ρ действия алгебры E на D-модуль Q коммутативно. Значит, алгебра $C = E/\mathrm{Ker}\rho$ - коммутативна, ее мы и называем **центроидом Март-**

индейла. Мы можем продолжить все операции Ω по C-линейности с алгебры A на Q и наделить Q структурой C-алгебры. Тогда C-алгебру Q сигнатуры Ω назовем **центральным замыканием** алгебры A.

Предложение (см. [2], 3.2).*Если A - первичная K-алгебра сигнатуры Ω, то центроид $C(A)$ является полем, $Q(A)$ - первичной K-алгеброй и C-алгебра Q характеризуется тремя свойствами*

1) $Q = CA$;

2) произвольный ненулевой D-подмодуль в Q имеет ненулевое пересечение с A;

3) любой частичный D-эндоморфизм $\varkappa$ ненулевого идеала J алгебры A в A однозначно определяет эндоморфизм $c \in C$, ограничение которого на J совпадает с $\varkappa$.

Для формулировки теоремы о ранге нам понадобятся следующие определения.

Определение. Пусть A обозначает K-алгебру сигнатуры Ω, а F - абсолютно свободную K-алгебру той же сигнатуры со свободными образующими $x_i, y_i (i = 1, 2, \cdots)$. Любой полином $d_k(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_l)$ из алгебры F, который полилинеен и кососимметричен относительно $x_1, \cdots, x_k$, мы называем полиномом Капелли порядка k. Пусть V - произвольное K-подпространство в A; будем говорить, что на V выполняются все тождества Капелли порядка k, если для любого полинома Капелли порядка k и любых элементов $v_1, \cdots, v_k \in V, a_1, \cdots, a_l \in A$ в алгебре A выполняется равенство

$$d_k(v_1, \cdots, v_k, a_1, \cdots, a_l) = 0.$$

Определение. Рангом K-линейного подпространства V относительно алгебры A назовем наименьшее число k, для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k. Будем обозначать это число $\mathrm{rank}(A, V)$.

Теорема о ранге.*Пусть V - K-подпространство в первичной K-*

алгебре A *сигнатуры* Ω. *Если* $\mathrm{rank}(A, V) < \infty$, *то в центральном замыкании* $Q(A)$ *алгебры* A

$$\dim_{C(A)} C(A)V = \mathrm{rank}(A, V) - 1.$$

K-алгебра A полилинейной сигнатуры Ω, среди операций которой есть не только унарные, называется простой, если она первична и в ней нет нетривиальных идеалов. В этом случае $D(A)$-модуль неприводим и для любого ненулевого элемента c из центроида Мартиндейла $C(A)$ ненулевой подмодуль $c \cdot A$ в $Q(A)$ также неприводим над $D(A)$ и в силу свойства 2 предложения должен иметь ненулевое пересечение с A. Следовательно, $c \cdot A$ совпадает с A и $c : A \to A$ - это эндоморфизм неприводимого $D(A)$-модуля A. По лемме Шура все такие эндоморфизмы в $\mathrm{End}_K A$ образуют тело, а так как в Ω есть неунарные операции, то это тело должно быть коммутативным. Это поле эндоморфизмов $D(A)$-модуля A принято называть центроидом K-алгебры A. Мы будем обозначать его C_A.

Следствие. Пусть V - K-подпространство в простой K-алгебре A, в сигнатуре Ω которой есть не только унарные операции. Если $\mathrm{rank}(A, V) < \infty$, то размерность пространства $C_V \cdot V$ над центроидом C_A K-алгебры A равна $\mathrm{rank}(A, V) - 1$.

Разумеется все эти утверждения, определения, понятия допускают истолкование применительно к коммутативно-ассоциативным дифференциальным K-алгебрам, сигнатура которых состоит из одной билинейной операции - умножения $*$ и одной унарной операции - дифференцирования $'$.

Для любого K-подпространства V дифференциальной K-алгебры A рассмотрим матрицу $M(A, V)$, столбцы которой пронумерованы элементами $v \in V$, а в i-ой строке этого столбца стоит i-ая производная элемента v $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда неравенство $\mathrm{rank}(A, V) < \infty$ просто-напросто означает все миноры порядка $1 + m = \mathrm{rank}(A, V)$ этой матрицы равны нулю, а какой-то минор m-го порядка нулю не равен. Более того, если

$v_1, \ldots, v_m \in V$ - это номера столбцов этого не равного нулю минора, то $v_1, \ldots, v_m$ можно выбрать в качестве базиса $C(A)$-подпространства $C(A) \cdot V$ в $Q(A)$. Остается разобраться с понятиями первичности и полупервичности применительно к дифференциальным K-алгебрам. Из данных выше определений очевидным образом следует, что полупервичность дифференциальной K-алгебры A – это в точности отсутствие в ней нильпотентных элементов, а первичность означает, что для любых двух ненулевых элементов a_1, a_2 алгебра A найдутся такие натуральные числа i, j, что i-я "производная" элемента a_1, умноженная на j-ю "производную" элемента a_2, не равняется нулю в A (см. примеры (3.2)).

Из указанного выше предложения немедленно следует

Теорема. *Если дифференциальная K-алгебра A является областью целостности и Q_A- ее классическое тело частных, то центроид Мартиндеила $C(A)$ дифференциальной алгебры A совпадает с подполем констант поля Q_A, т.е. $C(A) = \{q \in Q_A | q' = 0\}$. Более того, центральное замыкание $Q(A)$ совпадает с $C(A) \cdot Q(A)$.*

Последние результаты Глеба Погудина ([22]) показывают первичные дифференциальные коммутативно-ассоциативные K-алгебры не обязаны быть областями целостности, в частности, дифференциальная алгебра над полем рациональных чисел, заданная одним дифференциальным образующим x и одним дифференциальным соотношением $x^2 = 0$ является первичной и все её элементы нильпотентны. Так что теорема о ранге сохраняет свою актуальность и для класса дифференциальных алгебр.

Что же касается простых дифференциальных алгебр, то здесь дело обстоит совершенно идеально. Из результатов Ю.П. Размыслова (см. [9], [2]) вытекает следующая

Теорема. *Любая простая дифференциальная коммутативно-ассоциативная K-алгебра A ($\mathrm{char} K \neq 2$) содержит единичный элемент. Более того, если основное поле имеет нулевую характеристику, то алгебра A - это область целостности.*

3.5 Свойства определителя Капелли-Вронского.

Пусть $F_n = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ - свободная дифференциальная K-алгебра со свободными дифференциальными образующими $x_1, \cdots, x_n$. Как коммутативно-ассоциативная K-алгебра F_n порождена счетным числом алгебраически независимых переменных $x_i^{(j)}$ $(i = 1, \cdots, n; \quad j = 1, \cdots, n; \quad x_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} x_i)$, на которых сигнатурное дифференцирование $'$: $F_n \to F_n$ действует естественным образом $\left(x_i^{(j)}\right)' \stackrel{\text{def}}{=} x_i^{(j+1)}$.

Обозначим $W(x_1, \cdots, x_n)$ матрицу с n столбцами и счетным числом строк, у которой на пересечении j-й строки и i-го столбца стоит $x_i^{(j)}$- j-я производная элемента x_i $(j = 0, 1, 2 \cdots, n; \quad i = 1, 2, \cdots, n)$. Самый верхний минор n-го порядка этой матрицы обозначим $|x_1, \cdots, x_n|$ - будем называть его определителем Капели-Вронского для элементов $x_1, \cdots, x_n \in F_n$. Зададим дифференциальную K-алгебру $\bar{F}_n$ (теми же самыми) дифференциальными образующими $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ и одним определяющим дифференциальным соотношением $|\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n| = 0$. Ядром канонического дифференциального K-гомоморфизма $\varepsilon : F_n \to \bar{F}_n$, при котором $\varepsilon(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{x}_i$, является дифференциальный K-идеал в F_n, порожденный определителем $|x_1, \cdots, x_n|$. Из предложения параграфа 3.3 следует, что тогда все миноры n-го порядка матрицы $W(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$ будут нильпотентными элементами. Следовательно, в фактор-алгебре $\bar{F}_n/\mathrm{Rad}\bar{F}_n$ K-алгебры $\bar{F}_n$ по ее ниль-радикалу $\mathrm{Rad}\bar{F}_n$ отсутствуют нильпотентные элементы и в дифференциальной K-алгебре $\bar{F}_n/\mathrm{Rad}\bar{F}_n$ в K-подпространстве $V(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)/\mathrm{Rad}F_n \stackrel{\text{def}}{=} (K\bar{x}_1 + \cdots + K\bar{x}_n)/\mathrm{Rad}F$ выполняются все соотношения Капелли порядка n.

Предложение 5.1. Обозначим m_j^i алгебраическое дополнение для элемента $x_i^{(j)}$ в квадратной матрице

$$\begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Тогда

(a) $\sum_{i=1}^{n} x_i^{(s)} m_t^{(i)} = \begin{cases} 0, \text{ если } s \neq t \\ |x_1, \cdots, x_n|, \text{если } s = t \end{cases}$; $\sum_{i=0}^{n-1} x_s^{(i)} m_i^{(t)} = \begin{cases} 0, \text{ если } s \neq t \\ |x_1, \cdots, x_n|, \text{если } s = t \end{cases}$

(b) многочлен $m_s^i * m_i^j - m_s^j * m_t^i$ делится в алгебре многочленов $K[x_i^{(j)}|_{i=1,\cdots,n,j=0,\cdots,n-1}]$ на (многочлен) $|x_1, \cdots, x_n|$.

Доказательство. Утверждение (a) это азы линейной алгебры. Второе утверждение немедленно следует из неприводимости многочлена $|x_1, \cdots, x_n|$, так как в фактор-алгебре алгебры $K[x_i^{(j)}|_{i=1,\cdots,n,j=0,\cdots,n-1}]$ по главному идеалу, порожденному им, нет делителей нуля и все сводится к проверке утверждения (b) в поле частных этой фактор-алгебры. Но в ней определитель матрицы $(x_i^{(j)}|_{i=1,\cdots,n;j=0,\cdots,n-1})$ равен нулю и результат немедленно следует из линейной зависимости строк (столбцов) этой матрицы над полем частных. □

Следствие 1. *Положим* $r_i(x_1, \cdots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} m_{n-1}^i (i = 1, \cdots, n)$*. Тогда в фактор алгебре* $\bar{F}_n$ *имеют место следующие равенства*

(a) $r_1(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \cdot \bar{x}_1 + r_2(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \cdot \bar{x}_2 + \cdots + r_n(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \cdot \bar{x}_n = 0,$

(b) $\bar{r}_i \cdot \bar{r}'_j - \bar{r}'_i \cdot \bar{r}_j = 0.$

Более того, в дифференциальной фактор-алгебре $\bar{F}_n/\mathrm{Rad}\bar{F}_n$ ранг Капелли K-подпространства $(K\bar{r}_1 + \cdots + K\bar{r}_n)$ не превосходит единицу.

Элементы $\bar{r}_1(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n), \cdots, \bar{r}_n(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$ дифференциальной K-алгебры $\bar{F}_n$ будем называть проинтегралами, имея в виду, что в локализации $\bar{F}_n[\bar{r}_j^{-1}]$ элементы $\bar{r}_i/\bar{r}_j$ являются константами. Действительно из свойства (b) следствия вытекает, что $(\bar{r}_i/\bar{r}_j)' = 0$ в $\bar{F}_n$. На самом деле локализация $\bar{F}_n[r_j^{-1}]$ $j = 1, \cdots, n$ допускают прозрачное описание.

Алгебра Н.Никчемного. Обозначим R_n дифференциальную K-алгебру заданную дифференциальными образующими $v_1, \cdots, v_n; u_0, u_1, \cdots, u_{n-2}$ и n определяющими соотношениями

$$v_i^{(n-1)} - u_{n-2}v_i^{(n-2)} - u_{n-3}v_i^{(n-3)} - \cdots - u_1 v_i^{(i)} - u_0 v_0 = 0 \ (i = 1, \cdots, n).$$

Очевидно, что R_n как коммутативно-ассоциативная K-алгебра порождается следующими алгебраически независимыми элементами

$$v_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} v_i, v_i^{(1)}, \cdots, v_i^{(n-2)} (i = 1, \cdots, n),$$

$$u_j^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} u_j, u_j^{(1)}, \cdots, u_j^{(n-2)} (j = 0, 1, \cdots, n),$$

на которых сигнатурное дифференцирование $'$ действует естественным образом:

$$(u_j^{(k)})' \stackrel{\text{def}}{=} u_j^{(k+1)} \quad (j = 0, 1, \cdots, n-2; k = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$(v_i^{(n-2)})' \stackrel{\text{def}}{=} u_{n-2}v_i^{(n-2)} + u_{n-3}v_i^{(n-3)} + \cdots + u_1 v_i^{(1)} + u_0 v_i \quad (i = 1, \cdots, n),$$

$$(v_i^{(k)})' \stackrel{\text{def}}{=} v_i^{(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-3).$$

Из индуктивных соображений и определяющих соотношений дифференциальной K-алгебры R_n вытекает, что при $j > n-2$ j-я строка матрицы $W_n(v_1, \cdots, v_n)$ выражается в виде линейной комбинации предыдущих с коэффициентами из дифференциальной K-подалгебры, порожденной в R_n $u_0, u_1, \cdots, u_{n-2}$. Поэтому все миноры n-го порядка этой матрицы равняются нулю и в K-пространстве $K \cdot v_1 + K \cdot v_2 + \cdots + K \cdot v_n$ выполняются все соотношения Капелли порядка n. Так как коммутативно-ассоциативная K-алгебра R_n является областью целостности, то из результатов параграфа (3.4) в поле частных Q_{R_n} должны найтись (не все нулевые) элементы $q_q, \cdots, q_n$, для которых $q_1' = q_2' = \cdots = q_n' = 0$ и $q_1 \cdot v_1 + \cdots + q_n \cdot v_n = 0$ в Q_{R_n}. Но все миноры $(n-1)$-го порядка, подматрицы $W_n(v_1, \cdots, v_n)$, состоящей из строк $0, 1, \cdots, n-2$ отличны от нуля. Поэтому в силу следствия предыдущего подпункта в качестве $q_1, \cdots, q_n$ можно взять $r_1(v_1, \cdots, v_n)/r_j(v_1, \cdots, v_n), \cdots, r_n(v_1, \cdots, v_n)/r_j(v_1, \cdots, v_n)$. В частности справедлива следующая

Теорема. *Для любого* $j = 1, \cdots, n$ *локализация* $\bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^{-1}]$, $R_n[r_j(v_1, \cdots, v_n)^{-1}]$ K*-алгебр* $\bar{F}_n$, R_n *по элементам* $\bar{r}_j(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$, $r_j(v_1, \cdots, v_n)$, *соответственно, дифференциально изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку гомоморфизмов

$\bar{F}_n \overset{\varepsilon_0}{\to} R_n \overset{\varepsilon_1}{\to} \bar{F}_n[\bar{r}_j(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^{-1}] \overset{\varepsilon_2}{\to} R_n[r_j(v_1, \cdots, v_n)^{-1}]$,

при которых

(i) $\varepsilon_0(\bar{x}_i) \overset{\text{def}}{=} v_i \quad (i = 1, \cdots, n)$,

(ii) $\varepsilon_1(v_i) = \bar{x}_i \quad (i = 1, \cdots, n)$,

$$\varepsilon_1(u_i) \overset{\text{def}}{=} -m_j^{(i)}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)/r_j(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n);$$

(iii) $\varepsilon_2(\bar{x}_i) = v_i \quad (i = 1, \cdots, n), \quad \varepsilon_2(r_j(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^{-1}) \overset{\text{def}}{=} r_j(v_1, \cdots, v_n)$.

Корректность определения (i), (iii) для гомоморфизмов $\varepsilon_0, \varepsilon_2$ очевидна, а корректность (ii) вытекает из свойства (a) предложения 5.1. $\square$

Предложение. *Пусть* $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ *- бесконечнодифференцируемые функции на интервале* (a_0, b_0) *и их определитель Капелли-Вронского* $|y_1(t), \cdots, y_n(t)|$ *равен нулю. Тогда в любом подинтервале* (a', b') *существует интервал* (a'', b'')*, на котором эти функции линейно зависимы (над полем действительных (или комплексных) чисел).*

Доказательство. В качестве (a'', b'') достаточно взять такой интервал, что у дифференциальной K-алгебры A, порожденной $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ в $\mathbb{C}^\infty(a, b)$ все ограничения $A|_{(a'',b'')}$ будут изоморфны между собой при любом $(a'', b'') \in (a', b')$ (см. предложение 2 из параграфа 3.3). Действительно, тогда в поле частных $Q_{A|_{(a'',b'')}}$ области целостности $A|_{(a'',b'')}$ найдутся $q_1, \cdots, q_n$ (не все равные нулю), для которых $q_1' = q_2' = \cdots = q_n' = 0$ и $q_1 y_1 + \cdots + q_n y_n = 0$ в $Q_{A|_{(a',b')}}$ и $\alpha_1' y_1(t) + \cdots + \alpha_n y_n(t) = 0$ (не все $\alpha_i \in K$ равны нулю) на некотором подинтервале (a'', b''), а так как $A|_{(a,b)} \simeq A|_{(a'',b'')}$, то та же линейная зависимости над K должна выполняться на интервале (a, b). $\square$

Глава 4

Выразимость свойств центральности и квадратичности динамики на языке дифференциальных алгебр.

4.1 Алгебра квадратичной динамики и ее "проинтегралы".

Далее в этой главе будем пользоваться следующими обозначениями: $\sigma_{ij}(x,y) = x^{(i)}y^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}$, определитель Капели-Вронского для функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ обозначаем следующим образом $|f_1, f_2, \ldots, f_n|$. Также для дальнейших рассуждений нам необходим следующий элемент дифференциальной алгебры свободной дифференциальной алгебры от переменных x, y

$b_2(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} -9 \cdot \sigma_{1,5} \cdot \sigma_{1,2}^2 - 45 \cdot \sigma_{2,4} \cdot \sigma_{1,2}^2 + 45 \cdot \sigma_{1,4} \cdot \sigma_{1,3} \cdot \sigma_{1,2} + 90 \cdot \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{1,3} \cdot \sigma_{1,2} - 40 \cdot \sigma_{1,3}^3 =$

$-9 \cdot \sigma_{1,2}''' \cdot \sigma_{1,2}^2 - 27 \cdot \sigma_{2,3}' \cdot \sigma_{1,2}^2 + 45 \cdot \sigma_{1,2}'' \cdot \sigma_{1,2}' \cdot \sigma_{1,2} + 45 \cdot \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{1,2}' \cdot \sigma_{1,2} - 40 \cdot (\sigma_{1,2}')^3$.

Теорема 4. *Пусть $K[x^{(i)}, y^{(i)}]$ - свободная дифференциальная алгебра относительно сигнатурного дифференцирования $'$ с дифференциальны-*

ми образующими x, y. Пусть

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 2xx' & x'y + xy' & 2yy' & x' & y' & 0 \\ 2x'^2 + 2x'' & x''y + 2x'y' + xy'' & 2y'^2 + 2yy'' & x'' & y'' & 0 \\ 6x'x'' + 2xx''' & x'''y + 3x''y' + 3x'y'' + xy''' & 6y'y'' + 2yy''' & x''' & y''' & 0 \\ 6(x'')^2 + 8x'x''' + 2xx^{(iv)} & x^{(iv)}y + 4x'''y' + 6x''y'' + 4x'y''' + xy^{(iv)} & 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{(iv)} & x^{(iv)} & y^{(iv)} & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим через m_i - минор матрицы H, получающийся вычеркиванием i-го столбца. Положим

$g_{11} \stackrel{\text{def}}{=} m_1, \qquad g_{12} = g_{21} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}m_2,$

$g_{22} \stackrel{\text{def}}{=} m_3, \qquad g_{1,3} = g_{3,1} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}m_4,$

$g_{33} = -m_6, \quad g_{3,2} = g_{2,3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}m_5.$

Тогда

(a) $g_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot g_{12} \cdot x \cdot y + g_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot g_{13} \cdot x + 2 \cdot g_{32} \cdot y + g_{33} = 0$*;*

(b) $\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = -8 \cdot 729 \cdot \sigma_{12}^{10}$*;*

(c) $f \cdot g' - f' \cdot g$ *делится на* $|x^2, xy, y^2, x, y, 1|$*;*

(d)

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 2xx' & x'y + xy' & 2yy' & x' & y' & 0 \\ 2x'^2 + 2x'' & x''y + 2x'y' + xy'' & 2y'^2 + 2yy'' & x'' & y'' & 0 \\ 6x'x'' + 2xx''' & x'''y + 3x''y' + 3x'y'' + xy''' & 6y'y'' + 2yy''' & x''' & y''' & 0 \\ 6(x'')^2 + 8x'x''' + 2xx^{(iv)} & x^{(iv)}y + 4x'''y' + 6x''y'' + 4x'y''' + xy^{(iv)} & 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{(iv)} & x^{(iv)} & y^{(iv)} & 0 \\ 20x''x''' + 10x'x^{(iv)} + 2xx^{(v)} & x^{(v)}y + 4x^{(iv)}y' + 10x'''y'' + 10x''y''' + 5x'y^{(iv)} + xy^{(v)} & 20y''y''' + 10y'y^{(iv)} + 2yy^{(v)} & x^{(v)} & y^{(v)} & 0 \end{vmatrix} =$$

$= -(\sigma_{12})^2 b_2(x, y).$

Доказательство. Пунктов (a),(b),(d) было осуществлено при помощи программы символьных вычислений Mathematica 7. Пункт (c) доказан в предложении 5.1 в параграфе (3.5). □

Это нетривиальный комбинаторный факт: укажем явный вид каждого m_i.

$m_1 =$

$2(9\,(x')^2\,(y'')^4 + \left(3x^{(4)}x'' - 4\left(x^{(3)}\right)^2\right)(y')^4 - 6x'y'\,(y'')^2\left(3x''y'' + y^{(3)}x'\right) +$

$(y')^3\left(-12y^{(3)}(x'')^2+x'\left(8x^{(3)}y^{(3)}-3x^{(4)}y''\right)+x''\left(6x^{(3)}y''-3y^{(4)}x'\right)\right)+(y')^2(9(x'')^2(y'')^2+x'\left(-6x^{(3)}(y'')^2-4\left(y^{(3)}\right)^2x'+3y^{(4)}x'y''\right)+18y^{(3)}x'x''y''),$

$m_2=4(-3(x')^2(y'')^2\left(y^{(3)}x'-3x''y''\right)+(y')^3(-3x^{(3)}(x'')^2-4\left(x^{(3)}\right)^2x'+3x^{(4)}x'x'')+(y')^2(9(x'')^3y''+(x')^2\left(8x^{(3)}y^{(3)}-3x^{(4)}y''\right)-9y^{(3)}x'(x'')^2-3x'x''\left(y^{(4)}x'-4x^{(3)}y''\right))+x'y'(-18(x'')^2(y'')^2+x'\left(-9x^{(3)}(y'')^2-4\left(y^{(3)}\right)^2x'+3y^{(4)}x'y''\right)+12y^{(3)}x'x''y'')),$

$m_3=2((y')^2\left(9(x'')^4-4\left(x^{(3)}\right)^2(x')^2-6x^{(3)}x'(x'')^2+3x^{(4)}(x')^2x''\right)+(x')^2(9(x'')^2(y'')^2+x'\left(-12x^{(3)}(y'')^2-4\left(y^{(3)}\right)^2x'+3y^{(4)}x'y''\right)+6y^{(3)}x'x''y'')-x'y'(18(x'')^3y''+(x')^2\left(3x^{(4)}y''-8x^{(3)}y^{(3)}\right)+6y^{(3)}x'(x'')^2+3x'x''\left(y^{(4)}x'-6x^{(3)}y''\right))),$

$m_4=4((x')^4\left(4y\left(y^{(3)}\right)^2-9(y'')^3-3yy^{(4)}y''\right)-3(x'')^2(y')^2(xx^{(3)}y'-3xx''y''+3y(x'')^2)+(x')^3(3y''\left(\left(4x^{(3)}y-xy^{(3)}\right)y''-2yy^{(3)}x''\right)+y'(-8x^{(3)}yy^{(3)}+3x^{(4)}yy''+3x''\left(yy^{(4)}+9(y'')^2\right)-4x\left(y^{(3)}\right)^2+3xy^{(4)}y''))-(x')^2(9x''(y'')^2(yx''-xy'')+(y')^2(-8xx^{(3)}y^{(3)}+3xx^{(4)}y''-4\left(x^{(3)}\right)^2y+27(x'')^2y''+3\left(x^{(4)}y+xy^{(4)}\right)x'')-3y'(-3xx^{(3)}(y'')^2+2yy^{(3)}(x'')^2+2\left(2xy^{(3)}-3x^{(3)}y\right)x''y''))+x'y'(18(x'')^2y''(yx''-xy'')+\left(-4x\left(x^{(3)}\right)^2+9(x'')^3+3xx^{(4)}x''\right)(y')^2+3x''y'(4xx^{(3)}y''+\left(2x^{(3)}y-3xy^{(3)}\right)x''))),$

$m_5=4(\left(-4x\left(x^{(3)}\right)^2+9(x'')^3+3xx^{(4)}x''\right)(y')^4+3(x')^2(y'')^2(-3yx''y''+yy^{(3)}x'+3x(y'')^2)+(y')^3(3x''\left(2xx^{(3)}y''+\left(x^{(3)}y-4xy^{(3)}\right)x''\right)-x'(-8xx^{(3)}y^{(3)}+3xx^{(4)}y''-4\left(x^{(3)}\right)^2y+27(x'')^2y''+3\left(x^{(4)}y+xy^{(4)}\right)x''))+(y')^2(-9y(x'')^3y''+x'(-6xx^{(3)}(y'')^2-4y^{(3)}\left(2x^{(3)}y+xy^{(3)}\right)x'+3\left(x^{(4)}y+xy^{(4)}\right)x'y'')+9(x'')^2\left(yy^{(3)}x'+x(y'')^2\right)+3x'x''\left(2\left(3xy^{(3)}-2x^{(3)}y\right)y''+x'\left(yy^{(4)}+9(y'')^2\right)\right))-x'y'(-18y(x'')^2(y'')^2+x'(3\left(2xy^{(3)}-3x^{(3)}y\right)(y'')^2+x'(-4y\left(y^{(3)}\right)^2+9(y'')^3+3yy^{(4)}y''))+6x''\left(2yy^{(3)}x'y''+3x(y'')^3\right))),$

$$m_6 = -2(y(x')^4\left(-4y\left(y^{(3)}\right)^2+18(y'')^3+3yy^{(4)}y''\right) + (y')^2(9(x'')^2(yx''-xy'')^2 + x\left(-4x\left(x^{(3)}\right)^2+18(x'')^3+3xx^{(4)}x''\right)(y')^2 + 6xx''y'(xx^{(3)}y'' + \left(x^{(3)}y-2xy^{(3)}\right)x'')) - (x')^3(y'(-8yy^{(3)}\left(x^{(3)}y+xy^{(3)}\right) + 3y\left(x^{(4)}y+2xy^{(4)}\right)y'' + 3yx''(yy^{(4)} + 18(y'')^2) + 18x(y'')^3) - 6yy''\left(\left(xy^{(3)}-2x^{(3)}y\right)y''+yy^{(3)}x''\right)) + (x')^2(9(y'')^2(yx''-xy'')^2 + (y')^2(-16xx^{(3)}yy^{(3)} - 4\left(x^{(3)}\right)^2y^2 + x\left(3\left(2x^{(4)}y+xy^{(4)}\right)y''-4x\left(y^{(3)}\right)^2\right) + 54y(x'')^2y'' + 3x''\left(y\left(x^{(4)}y+2xy^{(4)}\right)+18x(y'')^2\right)) - 6y'(x\left(xy^{(3)}-3x^{(3)}y\right)(y'')^2 + y^2y^{(3)}(x'')^2 + y\left(4xy^{(3)}-3x^{(3)}y\right)x''y'')) - x'y'(18x''y''(yx''-xy'')^2 + (y')^2(x\left(-8xx^{(3)}y^{(3)}+3xx^{(4)}y''-8\left(x^{(3)}\right)^2y\right) + 54x(x'')^2y'' + 18y(x'')^3 + 3x\left(2x^{(4)}y+xy^{(4)}\right)x'') + 6y'(y\left(x^{(3)}y-3xy^{(3)}\right)(x'')^2 + x\left(4x^{(3)}y-3xy^{(3)}\right)x''y'' + x^2x^{(3)}(y'')^2))).$$

Дифференциальная алгебра квадратичной динамики E_2 (см. [1]) задается двумя образующими x, y и одним определяющим соотношением

$|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0.$

4.2 Редуцированная алгебра квадратичной динамики.

Редуцированная алгебра квадратичной динамики G_2 (см. [1]) также задается двумя образующими x, y и дифференциальным соотношением $b_2(x, y) = 0$ (смотри обозначение в начале главы 4.1).

Для нас важен следующий факт, который проверяется непосредственным подсчетом,

$|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = -(\sigma_{12})^2 b_2(x, y).$

Так как алгебра E_2 счетномерна, то для любого ненильпотентного элемента $a \in E_2$ существует гомоморфизм $\psi : E_2 \to K$, такой что $\psi(a) \neq 0$. Гомоморфизм Тейлора $\tilde{\psi} : E_2 \to K[[t]]$, определенный по гомоморфизму $\psi : E_2 \to K$ в алгебру степенных рядов, обнуляет элемент $b_2(x, y)$: в частности, свободный член $\tilde{\psi}(b_2(x, y)) = 0$. Значит, элемент $b_2(x, y)$ нильпотентный и лежит в радикале Джекобсона E_2. Следовательно, дифференциальные уравнения $|x^2, xy, y^2, x, y, 1| = 0$ и $b_2(x, y) = 0$ имеют одно и тоже множество решений в классах (a) аналитических функций, (b) формальных степенных рядов (c) бесконечно дифференцируемых функций.

Ясное описание редуцированной алгебры квадратичной динамики G_2 и ее проинтегралов дает следующая теорема.

Теорема 2. *Рассмотрим в дифференциальной алгебре G_2 следующую симметрическую матрицу*

$H_{G_2} = \begin{pmatrix} \mathrm{g}_{11} & \mathrm{g}_{12} & \mathrm{g}_{13} \\ \mathrm{g}_{21} & \mathrm{g}_{22} & \mathrm{g}_{23} \\ \mathrm{g}_{31} & \mathrm{g}_{32} & \mathrm{g}_{33} \end{pmatrix}$, *где g_{ij} получаются из g_{ij}, определенных в параграфе 4.1, при помощи естественного гомоморфизма из $K[x^{(i)}, y^{(i)}]$ в фактор-алгебру G_2 по дифференциальному идеалу порожденному элементом $b_2(x, y)$.*

Тогда

(a) $H'_{G_2} = \frac{10\sigma'_{12}}{3\sigma_{12}} H_{G_2}$;

(b) $f \cdot g' - f' \cdot g = 0$ *для произвольных элементов матрицы* H_{G_2};

(c) $\mathrm{g}_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot \mathrm{g}_{12} \cdot x \cdot y + \mathrm{g}_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot \mathrm{g}_{13} \cdot x + 2 \cdot \mathrm{g}_{32} \cdot y + \mathrm{g}_{33} = 0$;

(d) $\det H_{G_2} = -8 \cdot 729 \cdot \sigma_{12}^{10}$.

Доказательство. Пункты (b),(c), (d) непосредственно следуют из теоремы параграфа 4.1 и определения алгебры G_2.

Доказательство пункта (a) проведем осуществляется следующей цепочкой рассуждений: Так как $(f/g)' = 0$ для произвольных элементов матрицы H_{G_2}, то $g_1 g_2 g_3 / f_1 f_2 f_3 = \mathrm{const}$ для произвольных $g_1, g_2, g_3, f_1, f_2, f_3$ элементов тензора. Значит, $\left(\frac{\det H_{G_2}}{(g_{ij})^3}\right)' = 0$. Продифференцировав и воспользовавшись пунктом (d), получим, что для произвольного элемента матрицы $g'_{ij} = \frac{10\sigma'_{12}}{3\sigma'_{12}} g_{ij}$. □

4.3 Кубичное расширение дифференциальной алгебры центрально-квадратичной динамики.

Рассмотрим дифференциальную алгебру центрально-квадратичной динамики B_2 (см. [1]) порожденную двумя образующими x, y и дифференциальными соотношениями типа Капелли

(a) $\sigma_{02} = 0$ - свойство центральности поля

(b) $b_2(x, y) = 0$ - условие квадратичной динамики,

где $\sigma_{ij} = x^{(i)}y^{(j)} - x^{(j)}y^{(i)}$, $b_2(x, y) = -9 \cdot \sigma'''_{1,2} \cdot \sigma^2_{1,2} - 27 \cdot \sigma'_{2,3} \cdot \sigma^2_{1,2} + 45 \cdot \sigma''_{1,2} \cdot \sigma'_{1,2} \cdot \sigma_{1,2} + 45 \cdot \sigma_{2,3} \cdot \sigma'_{1,2} \cdot \sigma_{1,2} - 40 \cdot (\sigma'_{1,2})^3$.

И также рассмотрим дифференциальную алгебру Декарта-Уоттона D_2 с тремя дифференциальными образующими u, v, w и следующими соотношениями

(a) $u'' = -w \cdot u, v'' = -w \cdot v$,

(b) $9 \cdot w''' \cdot w^2 - 45 \cdot w'' \cdot w' \cdot w + 40 \cdot (w')^3 + 9 \cdot w' \cdot w^3 = 0$.

В работе [1] было доказано, что локализации $B_2[\sigma^{-1}_{01}(x, y)]$ и $D[\sigma^{-1}_{01}(u, v)]$ дифференциально изоморфны. Это следует из существования цепочки гомоморфизмов $E_2 \overset{\varepsilon_{-2}}{\to} G_2 \overset{\varepsilon_{-1}}{\to} B_2 \overset{\varepsilon_0}{\to} D_2 \overset{\varepsilon_1}{\to} B_2[(x \cdot y' - x' \cdot y)^{-1}] \overset{\varepsilon_2}{\to} D_2[(u \cdot v' - u' \cdot v)^{-1}]$.

Гомоморфизмы $\varepsilon_0 : B_2 \to D_2$, $\varepsilon_1 : D_2 \to B_2[\sigma^{-1}_{0,1}(x, y)]$ алгебр B_2, D_2 определяются естественным образом на их образующих:

$\varepsilon_0(x) \overset{\text{def}}{=} u$, $\varepsilon_0(y) \overset{\text{def}}{=} v$,

$\varepsilon_1(u) \overset{\text{def}}{=} x$, $\varepsilon_1(v) \overset{\text{def}}{=} y$, $\varepsilon_1(w) \overset{\text{def}}{=} \sigma_{1,2}(x, y)/\sigma_{0,1}(x, y)$.

Корректность гомоморфизма ε_0 устанавливается при помощи соотношений $\sigma_{0,2}(u, v) = 0$, $\sigma_{1,2}(u, v) = w \cdot \sigma_{0,1}(u, v)$, $w^2 \cdot \sigma_{0,1}(u, v) = \sigma_{2,3}(u, v)$.

Из этих соотношений и из теоремы из п.4.1 получается основной результат работы [1], следующая теорема.

Теорема 3. *Рассмотрим в дифференциальной алгебре $D_2[w^{-1}]$ симметрическую матрицу H_2 составленную из следующих элементов*

$g_{33} = -2\sigma^4_{01}(4w'^2 - 3ww'' + 9w^3)$,

$g_{32} = g_{23} = 2\sigma_{01}^3(-4w'^2u' + 3ww''u' + 3w'w^2u)$,
$g_{31} = g_{13} = -2\sigma_{01}^3(-4w'^2v' + 3ww''v' + 3w'w^2v)$,
$g_{22} = 2\sigma_{01}^2(9w^4u^2 + 6w'w^2uu' + u'^2(9w^3 + 3w''w - 4w'^2))$,
$g_{11} = 2\sigma_{01}^2(9w^4v^2 + 6w'w^2vv' + v'^2(9w^3 + 3w''w - 4w'^2))$,
$g_{12} = g_{21} = -2\sigma_{01}^2(9w^4uv + 3u'u^2(uv' + u'v) + u'v'(9w^3 + 3w''w - 4w'^2))$.

Тогда выполняются следующие условия

(a) $H_2' = \frac{10w'}{3w}H_2$ *(в частности,* $fg' - f'g = 0$, $(f/g)' = 0$ *для любых элементов* f, g *из матрицы* H_2*),*

(b) $g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2 + 2g_{13}x + 2g_{23}y + g_{33} = 0$,

(c) $\det H_2 = -8 \cdot 729 \cdot \sigma_{01}^{10} \cdot w^{10} = -8 \cdot 729 \cdot \sigma_{12}^{10}$.

Кубичное расширение.

Рассмотрим алгебру, получающуюся присоединением к алгебре Декарта-Уоттона D_2 еще одного элемента d (а также единичного элемента), связанного следующим соотношением $wd^3 = 1$. Отметим, что в полученной алгебре элементы d и w обратимы.

Из ключевого уравнения центрально-квадратичной динамики $9 \cdot w''' \cdot w^2 - 45 \cdot w'' \cdot w' \cdot w + 40 \cdot (w')^3 + 9 \cdot w' \cdot w^3 = 0$ получаем $d^3d''' + 3d^2d'd'' + d' = 0$. Следовательно локализация по элементу d алгебры G, заданной тремя образующими x, y, d и определяющими соотношениями

$$d^3x'' = -x, d^3y'' = -y, d^3d''' + 3d^2d'd'' + d' = 0 \tag{4.1}$$

содержит локализацию алгебры Декарта-Уоттона D_2 по элементу w.

Рассмотрим симметрическую матрицу H_G, составленную из следующих элементов алгебры $G[d^{-1}]$

$\mathrm{g}_{3,3} \stackrel{\text{def}}{=} -(xy' - x'y)^4(d^2d'' + 1)d$,
$\mathrm{g}_{3,2} = \mathrm{g}_{2,3} \stackrel{\text{def}}{=} -(xy' - x'y)^3(d^3d''x' + d'x)$,
$\mathrm{g}_{3,1} = \mathrm{g}_{1,3} \stackrel{\text{def}}{=} -(xy' - x'y)^3(d^3d''y' + d'y)$,
$\mathrm{g}_{2,2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{d^2}(xy' - x'y)^2(x^2 - 2d^2d'xx' + (x')^2(1 - d^2d'')d^3)$
$\mathrm{g}_{1,1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{d^2}(xy' - x'y)^2(y^2 - 2d^2d'yy' + (y')^2(1 - d^2d'')d^3)$

$g_{2,1} = g_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{d^2}(xy - \frac{4}{3}d^2d'(xy' + x'y) + x'y'(1 - d^2d'')d^3)$.

Непосредственной проверкой выясняем, что

(a) $g_{1,1}x^2 + 2g_{1,2}xy + g_{2,2}y^2 + 2g_{1,3}x + 2g_{2,3}y + g_{3,3} = 0$

(b) $(g_{i,j})' = 0$, то есть $g_{i,j}$ являются "первыми интегралами"(константами) дифференциальной алгебры $G[d^{-1}]$.

(c) $detH_G = -\sigma_{12}^1 0$

Тогда в локализованной алгебре $G[d^{-1}]$ решение этой системы дифференциальных уравнений лежит на квадратичной кривой, задающейся матрицей H_G, специализированной для начальных условий $x_0, y_0, d_0, x_0', y_0', d_0', d_0''$. Более того множитель $d^3d'' + d = \delta$ является первым интегралом для третьего уравнения системы (4.1).

Теорема 4. *Локализация $G[d^{-1}]$, содержащая локализацию $D_2[(\sigma_{12}(u,v))^{-1}]$ алгебры квадратичной динамики $B_2(u,v)$, вкладывается в локализацию $G_\delta[d^{-1}]$, где локализованная по d дифференциальная алгебра G_δ задается образующими x, y, d, δ и четырьмя определяющими соотношениями*

$d^3x'' = -x, d^3y'' = -y, d^3d'' = -(d - \delta), \delta' = 0.$

Теперь очевидно, что в трехмерном аффинном пространстве с координатами x, y, d любое гладкое решение $x(t), y(t), d(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$x'' = -\frac{1}{d^3}x, y'' = -\frac{1}{d^3}y, d'' = -\frac{1}{d^3}(d - \delta), \text{где } \delta' = 0. \tag{4.2}$$

должно лежать в плоскости, проходящей через точку $(0, 0, \delta)$. Несложные вычисления показывают, что

$d = \dfrac{\sigma_{01}(y, d-\delta)}{\sigma_{01}(x,y)}x - \dfrac{\sigma_{01}(x, d-\delta)}{\sigma_{01}(x,y)}y + \delta$, $\left(\frac{\sigma_{01}(y,d-\delta)}{\sigma_{01}(x,y)}\right)' = 0$, $\left(\frac{\sigma_{01}(x,d-\delta)}{\sigma_{01}(x,y)}\right)' = 0$.

Положим $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\sigma_{01}(y,d)}{\sigma_{01}(x,y)}$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} -\dfrac{\sigma_{01}(d,x)}{\sigma_{01}(x,y)}$ и обратим внимание, что решения уравнения 4.2 сводятся к решению системы уравнений

$$(x, y)'' = -\frac{1}{(\alpha x + \beta y + \delta)^3}(x, y), \quad (\alpha' = 0, \beta' = 0, \delta' = 0).$$

Смотри для сравнения лемму о директрисе и фокусе.

Глава 5

О спектре интегрального оператора на компактной группе.

Теорема 1. *Пусть* $|G|$ *— порядок конечной группы* G *и*

$$H_{[G,G]} \stackrel{def}{=} \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} [g,h] \quad ([g,h] \stackrel{def}{=} g^{-1}h^{-1}gh) \qquad -$$

элемент групповой алгебры $K[G]$, *где* $K = C$ *— поле комплексных чисел. Тогда для любого представления* $\rho : G \to End_K V$ *в произвольном пространстве* V *линейное преобразование* $\rho(H_{[G,G]})$ *диагонализируемо и его спектр имеет вид* $\frac{1}{n^2}$, *где* n *пробегает* $dim_K V_i$, *где* V_i *—неприводимые компоненты в пространстве* V *относительно действия группы* G.

Теорема 2. *Пусть мера Хаара* μ *на компактной группе* G *такова, что* $\mu(G) = 1$, *а* $\rho : G \to End_K V$ *— непрерывное представление* G *в банаховом пространстве* V *над полем комплексных чисел* K *и линейный оператор* $H^{\rho}_{[G,G]}$ *определяется формулой*

$$H^{\rho}_{[G,G]} \stackrel{def}{=} \iint\limits_{G} [\rho(g), \rho(h)] d\mu_g d\mu_h.$$

Тогда для любого n–мерного подпространства W, на котором $\rho(G)$ действует неприводимо,

$$H^{\rho}_{[G,G]}(w) = (\int\limits_G \rho(g^{-1})(\int\limits_G \rho(h^{-1})\rho(g)\rho(h)d\mu_h)d\mu_g) \cdot w =$$

$$= (\int\limits_G (\int\limits_G \rho(g^{-1})\rho(h^{-1})\rho(g)d\mu_g)\rho(h)d\mu_h) \cdot w = \frac{1}{n^2} \cdot w \quad (w \textit{ пробегает } W).$$

Замечание. Пусть $SU(2,K)$ — группа унитарных 2×2 матриц над комплексным полем K с детерминантом, равным едининице, V — линейное пространство всех функций $f : G \to K$, для которых $||f||^2 \stackrel{def}{=} \int\limits_G |f(g)|^2 d\mu_g < \infty$, и представление $\rho : G \to End_K V$ группы G реализуется правыми сдвигами $\rho(h) \times f(g) \stackrel{def}{=} f(hg)$. Хорошо известно (см. [16], [17],[20]), что

(a) в V с точностью до эквивалентности функций реализуется гильбертово пространство относительно полуторалинейной формы $(f(g), h(g)) \stackrel{def}{=} \int\limits_G f(g)\overline{h(g)} d\mu_g$,

(b) для любого натурального n единственное с точностью до изоморфизма n–мерное представление группы G реализуется в V и имеет в V кратность, равную n,

(c) сумма всех конечномерных неприводимых подпространств из V плотна в V.

Из теоремы 2 заключаем, что в гильбертовом пространстве V имеется полный ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $H^{\rho}_{[G,G]}$. В частности, для любого натурального n кратность собственного значения $\frac{1}{n^2}$ равна n^2. (См. для сравнения в книге [18] спектр оператора Шредингера для атома водорода.)

Доказательство теоремы 1. Пусть $b : A \otimes_K A \to K$ — невырожденная билинейная симметрическая ассоциативная форма на конечномерной ассоциативной алгебре A (над алгебраически замкнутым полем

K), $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — базис в A, $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*$ — дуальный базис относительно b.

Предложение 1. *Элементы*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} e_i^* e_j^* e_i e_j,\ \sum_{i=1}^{m} e_i e_i^*,\ \sum_{i=1}^{m} e_i a e_i^* (a \in A)$$

не зависят от выбора базиса в A, *лежат в центре и*

$$\sum_{i=1}^{m} e_i a b e_i^* = \sum_{i=1}^{m} e_i b a e_i^* (a, b \in A)$$

Доказательство можно найти в книгах [18], [19] и следует из формул $e_i' = \sum_{k=1}^{m} c_i^{(k)} e_k$, $e_k^* = \sum_{i=1}^{m} c_i^{(k)} e_i'^*$, $L_a = R_a^*$, где L_a, R_a — линейные операторы левого и правого умножения на элемент $a \in A$, а через H^* мы обозначаем сопряженный оператор к H относительно формы b, для которой $b(x * a, y) = b(x, a * y)$ (свойство ассоциативности). $\square$

Пример 1. Пусть $A = M_n(K)$ — полная матричная алгебра порядка n над полем K, $b(a_1, a_2) \stackrel{def}{=} tr(a_1 * a_2)$. Очевидно, что билинейная форма b невырождена, симметрична и ассоциативна. Непосредственная проверка показывает, что для стандартного базиса $\{E_{ij} | i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ матричных единиц в $M_n(K)$ $\{E_{ij}^* = E_{ji} | i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ — дуальный базис и указанные в предложении 1 элементы равны 1, $n \cdot 1$, $tr(a) \cdot 1$, соответственно. (Здесь 1 обозначает единичную матрицу.)

Пример 2. Пусть $\chi_{reg} : A \to K$ — регулярный характер на m–мерной ассоциативной алгебре A. Хорошо известно (см. [19]), что в случае поля нулевой характеристики, билинейная форма $b_{reg}(x, y) \stackrel{def}{=} \chi_{reg}(x * y)$ невырождена на A тогда и только тогда, когда A полупроста (не содержит нильпотентных двусторонних идеалов). Если поле K алгебраически замкнуто, то в случае невырожденности b_{reg} алгебра A раскладывается в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов, каждый из которых изоморфен полной матричной алгебре. Следовательно,

$$A = M_{n_1}(K) \oplus M_{n_2}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(K),$$

$$\chi_{reg} = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \chi_i, \qquad m \stackrel{def}{=} dim_K A = \sum_{i=1}^{s} n_i^2 = \chi_{reg}(1),$$

где $\chi_i|_{M_{n_j}(K)} = 0$ при $i \neq j$, $\chi_i|_{M_{n_i}(K)} = tr$ — неприводимые характеры алгебры A. Пусть теперь $e_1, e_2, \ldots, e_m$ и $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*$ — произвольные дуальные базисы относительно билинейной формы $\frac{1}{m} \cdot b_{reg}$. Тогда, переходя к базису матричных единиц в каждом прямом слагаемом, из примера 1 (и предложения 1) заключаем, что

$$\frac{1}{m^2} \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} e_i^* e_j^* e_i e_j = \frac{1}{n_1^2} \cdot 1_1 + \frac{1}{n_2^2} \cdot 1_2 + \cdots + \frac{1}{n_s^2} \cdot 1_s,$$

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} e_i a e_i^* = \frac{1}{n_1} \cdot \chi_1(a) \cdot 1_1 + \frac{1}{n_2} \cdot \chi_2(a) \cdot 1_2 + \cdots + \frac{1}{n_s} \cdot \chi_s(a) \cdot 1_s,$$

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} e_i e_i^* = 1 \in A,$$

где 1_i — центральные идемпотенты в $M_{n_i}(K)$.

Утверждение теоремы 1 теперь непосредственно вытекает из примера 2, если заметить, что для групповой алгебры $K[G]$

$$\frac{1}{|G|} \cdot \chi_{reg}(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } g = 1 \text{ в } G \\ 0, & \text{если } g \neq 1 \text{ в } G \end{cases}$$

и для стандартного базиса $\{g | g \in G\}$ в дуальном базисе $\{g^* | g \in G\}$ относительно формы $\frac{1}{|G|} \cdot b_{reg} : K[G] \otimes_K K[G] \to K$ справедливо равенство $g^* = g^{-1}$. □

Доказательство теоремы 2. Для любого (конечного) покрытия группы G измеримыми подмножествами Δ_i выберем произвольно $g_i \in \Delta_i$. Тогда для покрытия $\Delta_i' = g * \Delta_i$ и представителей $g * g_i \in \Delta_i'$ в силу левой инвариантности меры μ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{s} \rho((g*g_i)^{-1}) * \rho(h) * \rho(g*g_i) \cdot \mu(\Delta_i') = \sum_{i=1}^{s} \rho((g_i)^{-1}) * \rho(g^{-1}*h*g) * \rho(g_i) \cdot \mu(\Delta_i),$$

из которого следует

Предложение 2. *Для любого непрерывного представления $\rho : G \to End_K V$ компактной группы G в банаховом пространстве V над полем комплексных чисел K и любых $t, h \in G$ в пространстве непрерывных операторов $E(V)$ имеет место равенство*

$$\int\limits_G \rho(g^{-1}) * \rho(t^{-1} * h * t) * \rho(g) d\mu_g = \int\limits_G \rho(g^{-1}) * \rho(h) * \rho(g) d\mu_g.$$

Обозначим через $\chi_\rho(h)$ правую часть этого равенства и продолжим по линейности отображения $\rho : G \to E(V)$, $\chi_\rho : G \to E(V)$ на любые формальные конечные линейные комбинации групповой алгебры $K[G]$. Тогда $\chi_\rho(a_1 * a_2) = \chi_\rho(a_2 * a_1)$ для всех $a_1, a_2 \in K[G]$. Ограничим операторы $\chi_\rho(K[G])$ на любое конечномерное инвариантное подпространство W, не содержащее нетривиальных инвариатных подпространств относительно действия $K[G]$. Тогда в силу непрерывности ρ и того, что интеграл является пределом конечных частичных сумм, имеем

$$\chi_\rho(h)|_W = \int\limits_G \rho(g^{-1})|_W * \rho(h)|_W * \rho(g)|_W d\mu_g =$$

$$\int\limits_G \rho_W(g^{-1}) * \rho_W(h) * \rho_W(g) d\mu_g = \chi_{\rho_W}(h),$$

где непрерывное представление $\rho_W : G \to End_K W$ группы G в банаховом подпространстве W таково, что $\rho_W(h) \overset{def}{=} \rho(h)|_W$, и $\chi_{\rho_W}(a_1 * a_2) = \chi_{\rho_W}(a_2 * a_1)$. Определим отображение $\overline{\chi_{\rho_W}} : End_K W \to End_K W$, полагая для любого $a \in End_K W$

$$\overline{\chi_{\rho_W}}(a) \overset{def}{=} \int\limits_G \rho_W(g^{-1}) * a * \rho_W(g) d\mu_g.$$

Следствие 1. *Для любого элемента $a \in End_K W$*

$$\overline{\chi_{\rho_W}}(a) = \frac{1}{n} \cdot tr(a) \cdot 1_W \qquad (n = dim_K W, \quad 1_W \ - \quad End_K W) \tag{5.1}$$

Доказательство. Ясно, что $\chi_{\rho_W}(d) = \overline{\chi_{\rho_W}}(\rho(d))$ Так как $\rho_W : K[G] \to End_K W$ — неприводимое представление в конечномерном пространстве W и поле K алгебраически замкнуто, то по теореме плотности $\rho_W(K[G]) = End_K W$ и $\overline{\chi_{\rho_W}}(d_1 * d_2) = \overline{\chi_{\rho_W}}(d_2 * d_1)$. Хорошо известно, что в конечномерном случае линейное подпространство линейных операторов с нулевым следом в $End_K W$ порождается коммутаторами $a_1 * a_2 - a_2 * a_1$ (a_1, a_2 пробегают $End_K W$). Но $\overline{\chi_{\rho_W}}$ на этом подпространстве коразмерности 1 принимает нулевое значение. Следовательно, образ $\overline{\chi_{\rho_W}}$ должен лежать в каком–то одномерном подпространстве. Прямое вычисление дает

$$\overline{\chi_{\rho_W}}(1_W) = \int\limits_G (\rho_W((g)^{-1}) * 1_W * \rho_W(g)) d\mu_g =$$

$$\int\limits_G (\rho_W((g)^{-1}) * \rho_W(g) * 1_W) d\mu_g = \int\limits_G 1_W d\mu_g = 1_W.$$

Следовательно, правая и левые части (5.1) принимают на $End_K W$ одинаковые значения. □

Следствие 2. *Для произвольного базиса матричных единиц* $\{E_{ij} | i, j = 1, \ldots, n = dim_K W\}$ *и любого* $a \in End_K W$

$$\overline{\chi_{\rho_W}}(a) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E_{ij} * a * E_{ji}. \tag{5.2}$$

Доказательство вытекает из примера 1 и равенства (1). □

Прямое вычисление с использованием 5.2 показывает, что

$$(\int\limits_G \rho(g^{-1})(\int\limits_G \rho(h^{-1})\rho(g)\rho(h)d\mu_h)d\mu_g) \times w =$$

$$(\int\limits_G \rho_W(g^{-1})(\int\limits_G \rho_W(h^{-1})\rho_W(g)\rho_W(h)d\mu_h)d\mu_g) \times w =$$

$$(\int\limits_G \rho_W(g^{-1})(\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_{ij} * \rho_W(g) * E_{ji})d\mu_g) \times w =$$

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\int\limits_G \rho_W(g^{-1}) * E_{ij} * \rho_W(g)d\mu_g) * E_{ji}) \times w =$$

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} E_{pq} * E_{ij} * E_{qp}) * E_{ji}) \times w =$$

$$(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} E_{pq} * E_{ij} * E_{qp} * E_{ji}) \times w = \frac{1}{n^2} \cdot 1_W \times w = \frac{1}{n^2} \cdot w.$$

Эти аргументы справедливы и при другом порядке интегрирования и приводят к тому же ответу. Теорема 2 полностью доказана. □

Литература

[1] *Размыслов Ю.П.* Разъяснение к “Rolling simplexes and their commensurability” (уравнения поля по Тихо Браге) //Фундамент. и прикл. матем. 17:4 (2012), 193–215

[2] *Размыслов Ю.П.* Тождества алгебр и их представлений // Наука 1989

[3] *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры // Наука 1979

[4] *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений

[5] *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во ИЛ, 1962.

[6] *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.

[7] *Kolchin E.R.* Differential algebra and algebraic groups.: Academic Press, 1973.

[8] *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебр. М.: ИЛ, 1959.

[9] *Размыслов Ю.П.* О конечно порожденных простых алгебрах Ли, удовлетворяющих стандартному Лиеву тождеству степени 5 // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика, механика. 1, 3 (1990), 37–41

[10] *Погудин Г.А.* Первичные дифференциальные ниль-алгебры существуют // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика, механика. 1 (2014), 50-53

[11] *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968

[12] *Ламбек И.* Кольца и модули М.: Мир, 1971

[13] *Михалёв А.В., Панкратьев Е.В.* Компьютерная алгебра. Вычисления в дифференциально-разностной алгебре М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989

[14] *Джекобсон Н.* Теория колец М.: Гос. изд-во ин. лит., 1947

[15] *Херстейн Н.* Некоммутативные кольца М.: Мир, 1972

[16] *Наймарк М.А.* Нормированные кольца. М.: Изд-во "Наука 1968.

[17] *Желобенко Д.П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Изд-во "Наука 1976.

[18] *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М.: Изд-во "Наука 1974.

[19] *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Изд-во Наука, 1969.

[20] *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. — М.: Изд-во Наука, 1984.

[21] *И.Р.Шафаревич* Основные понятия алгебры. — М.: ВИНИТИ Итоги науки и техники, 1986.

Работы автора по теме диссертации:

[22] *О. В. Герасимова.* Спектр коммутаторного гамильтониана водородоподобен // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 6 (2008), 71—74.

[23] *О. В. Герасимова.* Спектр коммутаторного гамильтониана сродни энергетическим уровням атома водорода // УМН, 64:4(388) (2009), 177–178

[24] *О. В. Герасимова, Ю. П. Размыслов.* Гамильтоновость полиномиальных ниль-распределений на афинной плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1 (2010), 67-70

[25] *О. В. Герасимова* Плотные конечно порождённые подгруппы и интегрирование в компактных группах // Фундамент. и прикл. матем., 18:4 (2013), 71–77

[26] *О. В. Герасимова, Ю. П. Размыслов.* Rolling simplexes and their commensurability (законы механики как проблема выбора между метрикой и мерой) // Фундамент. и прикл. матем., 16:3 (2010), 123–126

[27] *O.V.Gerasimova, Yu.P.Razmyslov.* Rolling simplexes and their commensurability (Laws of mechanics as a problem of choice between metrics and measure) // Journal of Mathematical Sciences (New York), 177:6 (2011), 860-861 (translation)

[28] *О. В. Герасимова.* Rolling simplexes and their commensurability. I (аксиома и критерий несжимаемости и лемма о моменте) // Фундамент. и прикл. матем., 17:2 (2012), 87–95

[29] *O.V.Gerasimova.* Rolling simplexes and their commensurability. I. The axiom and criterion of incompressibility and the momentum lemma // Journal of Mathematical Sciences (New York), 186:4 (2012), 586-591 (translation)

[30] *О. В. Герасимова.* Rolling simplexes and their commensurability. II (лемма о директрисе и фокусе) // Фундамент. и прикл. матем., 19:1, (2014), 13-19

[31] *О. В. Герасимова.* Спектр коммутаторного гамильтониана водородоподобен, Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша. Тезисы докладов, с. 67-68, 2008