ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Герасимовой Ольги Вячеславовны
«Дифференциально-алгебраические и геометрические основы центральной динамики на кривых второго порядка»,
представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Представленная работа при первом невдумчивом прочтении может произвести обманчивое впечатление простоты своим обращением к таким на первый взгляд «школьным» понятиям как декартова проективная геометрия и классические модели механики, первоисточниками которых являются исследования натурфилософов-естествоиспытателей 16-17 веков. Может даже показаться, что само перечисление в этом контексте имён Г.Галилея, Т.Браге, И.Кеплера, Р.Декарта, Р.Гука и И.Ньютона переводит предмет обсуждения в область истории науки и проблематики природы трансформации их философского мировоззрения в созданные ими математические модели физических явлений (Ньютон-алхимик и Ньютон-создатель математической физики и математического анализа не оппоненты друг другу, а равноправные партнёры по творчеству). При более детальном изучении работы становится понятно, что в действительности её предметом являются вовсе не собранные в коллекцию «исторические» разделы теории поля, а реализованные на них как на модельных примерах приёмы дифференциальной алгебры. Последние можно с некоторой долей условности объединить в рамках следующей схемы: поиск решений системы дифференциальных уравнений с заданными аналитическими свойствами сводится к задаче описания соответствующей части максимального дифференциального спектра связанной с ней дифференциальной алгебры, вопрос классификации моделей решается в терминах дифференциальных изоморфизмов определяемых ими дифференциальных алгебр, а технология сведения задачи к известному интегрируемому случаю реализуется на уровне разнообразных расширений дифференциальной алгебры, отвечающих преобразованиям исходной системы уравнений.

Необходимо отметить, что ключом к правильному прочтению представленной диссертации служит статья Ю.П.Размыслова «Разъяснения к «Rolling simplexes and their commensurability» (уравнения поля по Тихо Браге)», в которой обсуждаются необходимость возвращения в арсенал математических понятий роллинга и связанного с ним функционала промеры, а также переосмысления математических идей Т.Браге, И.Кеплера и Р.Декарта с современных позиций. Этой же работе мы обязаны появлению и самого термина дифференциальная алгебра центральных полей с квадратичной динамикой и выражением условий центральности поля и квадратичности динамики в терминах соотношений дифференциальной алгебры.

Диссертация состоит из введения и пяти глав.

Основным результатом первой главы является обоснование эквивалентности между условиями декартовости проективной плоскости и выполнения на ней аксиомы несжимаемости, формулируемой с использованием понятия роллинга. В техническом плане это сводится к обоснованию коммутативности координатного тела (или тела гомотетий с общим центром) проективной плоскости, удовлетворяющей аксиоме несжимаемости. Кроме того, вводится понятие функционала промеры, который определён на множестве упорядоченных троек точек проективной плоскости и принимает значения в её координатном теле. Наиболее важным из этих свойств является то, что совпадение функционалов промеры равносильно роллируемости их аргументов.

Вторая глава представляет собой серию примеров, иллюстрирующих общие построения двух последующих глав. Её центральным результатом является лемма о директрисе и фокусе в двумерной и трёхмерной версии, которая по всей видимости может быть сформулирована и в n-мерном варианте с использованием квадрик. Остальная часть главы посвящена детальному обоснованию центральности поля и движения по квадратичным кривым и гиперболоидам для поля гармонического осциллятора, полей кулонова и птолемеева типа, а также получению систем их первых интегралов, вывод которых опирается исключительно на математический аппарат без обращения к его физической интерпретации. Завершающим результатом главы являются проинтегральные соотношения в свободной дифференциальной алгебре с двумя порождающими в сигнатуре с формальным дифференцированием по одной из них.

В третьей главе приведено описание понятийного и технического аппарата, участвующего в выводе результатов четвёртой главы. Основным предметом её исследования являются конечно порождённые дифференциальные алгебры над полями нулевой характеристики, а точнее над полями действительных и комплексных чисел, и условие конечномерности центральных замыканий дифференциальных первичных алгебр над их центроидами Мартиндейла. Последнее согласно теореме Размыслова о ранге можно заменить равносильным ему условием обращения в нуль на рассматриваемой первичной дифференциальной алгебре всех миноров максимального порядка определителя Капелли-Вронского некоторой фиксированной размерности. Основным структурным результатом данной главы является теорема об аналитическом спектре конечно порождённой дифференциальной алгебры над полем действительных или комплексных чисел, в соответствии с которой первичный радикал такой алгебры представим в виде пересечения элементов её аналитического спектра. Доказанная вслед за этой теоремой лемма о нильпотентном элементе позволяет утверждать, что ограниченность некоторой общей константой размерностей центральных замыканий дифференциальных первичных фактор-алгебр конечно порождённой дифференциальной алгебры над полем действительных или комплексных чисел над их центроидами Мартиндейла эквивалентна включению в её первичный радикал (а значит, нильпотентности) всех значений определителя Вронского (верхнего минора максимального порядка определителя Капелли-Вронского) некоторой размерности. Отметим, что понятие аналитического спектра и лежащая в его основе конструкция гомоморфизма Тейлора, которая также подробно обсуждается в рассматриваемой главе, имеют самое непосредственное отношение к решениям систем дифференциальных уравнений с заданными в нуле начальными условиями. Точнее применительно к отвечающей такой системе уравнений дифференциальной алгебре построение гомоморфизма Тейлора эквивалентно нахождению решения в пространстве формальных степенных рядов с начальными условиями, определяющими гомоморфизм этой алгебры в поле комплексных чисел, на основе которого строится данный гомоморфизм Тейлора. В свою очередь каждая фактор-алгебра указанной алгебры по элементу её аналитического спектра отвечает одному из решений соответствующей системы в рамках пространства аналитических функций, сходящихся в некоторой окрестности нуля. В финальной части третьей главы определяются проинтегралы свободной n-порождённой дифференциальной алгебры и выводятся базовые соотношения между ними.

Следует подчеркнуть, что помимо участвующей в построениях третьей главы конструкции Ю.П.Размыслова центрального замыкания полупервичной алгебры, которая в случае дифференциальной алгебры определяется как квазиинъективная оболочка этой алгебры рассматриваемой в качестве модуля над алгеброй, порождённой над основным кольцом элементами её алгебры умножений с единицей и дифференцированием, можно было бы использовать на правах равносильной замены соответствующий дифференциальный вариант конструкции центрального замыкания, базирующийся на понятии расширенного центроида и построенный по аналогии с центральным замыканием полупервичных алгебр с инволюцией. Отметим также, что условие конечной порождённости центрального замыкания полупервичной алгебры над центроидом Мартиндейла (расширенным центроидом) влечёт за собой его совпадение с её инъективной оболочкой как модуля над алгеброй умножений с единицей.

Ряд результатов третьей главы может быть естественным образом перенесён на случай произвольного несчётного поля нулевой характеристики. Можно высказать предположение, что лемма о нильпотентном элементе представляет собой самоценный комбинаторный факт верный для всех полей характеристики нуль и в ограниченной версии для полей положительной характеристики.

Четвёртая глава посвящена изложению наиболее значимых результатов диссертации. Она начинается с вывода соотношений свободной дифференциальной алгебры с двумя образующими. Затем на основе этих соотношений впоследствии выводятся основные проинтегральные соотношения алгебры квадратичной динамики, редуцированной алгебры квадратичной динамики, а также ряда важных расширений алгебры Декарта – Уотона (в терминологии Ю.П.Размыслова), последовательное построение которых осуществляется с целью перехода к дифференциальной алгебре системы уравнений, отвечающей интегрируемой ситуации, рассмотренной ранее во второй главе.

Пятая глава представляет собой самостоятельный раздел работы, не имеющий непосредственного отношения к предшествующему изложению. В ней приводится доказательство двух связанных между собой по форме теорем о спектре оператора, который в дискретном случае представляет собой усреднение суммы коммутаторов элементов конечной группы, а в непрерывном случае – интеграл по квадрату рассматриваемой компактной группы от коммутатора операторов, отвечающих её элементам при действии непрерывного линейного представления данной группы в пространстве операторов на банаховом пространстве. Несмотря на то, что эти, по-своему весьма интересные, результаты лежат вне основного направления диссертации они, тем не менее, демонстрируют широту научных интересов соискателя и могут служить основой для его дальнейших исследований в данном направлении.

Основным критическим замечанием к стилистике представленной работы может служить непривычный и потому затрудняющий её восприятие при первом прочтении порядок изложения материала, в соответствии с которым на передний план вынесены не основные результаты диссертации, а подводящие к ним соображения пояснительного и иллюстративного порядка. Необходимо отметить также то, что ряд определений следовало бы по всей видимости привести перед утверждениями, в формулировках которых они участвуют, а не в рамках доказательства этих утверждений. Так, например, понятие координатного тела, фигурирующее в формулировке теоремы 1 на с. 22 вводится путём его построения в процессе её доказательства. При этом операция сложения гомотетий с общим центром (необходимая составляющая сигнатуры координатного тела) не выделена в виде отдельного определения, а вводится неявным, понимаемым исключительно из контекста рассуждения образом через композицию параллельных переносов. Полезное для понимания теоремы понятие дезарговой проективной плоскости также не приводится. Стоит сказать и о том, что в ряде случаев можно столкнуться с некоторой недосказанностью в плане обоснования рассматриваемых утверждений. В частности, доказательство единственности определения проективных преобразований, входящей в ряд промежуточных утверждений доказательства той же теоремы 1 не проводится (последняя, естественно, имеет место), а в рамках критерия несжимаемости не приводится необходимых ссылок на выводимость несжимаемости из декартовости.

В представленном тексте встречается также известное количество неточностей и опечаток. К примеру, на с. 29 значение функционала промеры названо числом, а не элементом координатного тела, которое в общем случае не обязано иметь числовую природу; в формулировке теоремы 2 на с. 31 требование выполнения аксиомы (R1) является избыточным в силу доказанной выше теоремы 1; имеются опечатки на с. 33 в формулировке леммы о директрисе и предшествующем ей наблюдении; на с. 37 в доказательстве теоремы 3 (вместо трёх констант указана одна, причём не из поля действительных чисел, а из поля комплексных чисел), неточности встречаются и в формулировке теоремы 3 (опечатка в символе, обозначающем действительные числа, и отсутствие указания на «центростремительность» движения, которая существенным образом используется в доказательстве); имеется опечатка в формулировке теоремы на с. 62 (центральное замыкание рассматриваемой алгебры должно быть равным порождённой её элементами линейной оболочке над полем констант); в п. (b) формулировки предложения на с. 64 имеется опечатка как в индексе минора, так и в символике операции; в п. (c) формулировки теоремы 4 на с. 68 должно стоять указание на принадлежность элементов f и g матрице H; имеются неточности в формулировке и доказательстве предложения на с. 53; в рамках доказательства теоремы 1 на с. 78 элементы дуального базиса традиционно понимаемые как координатные линейные функционалы отождествляются с отвечающими им векторами при действии изоморфизма (в комплексном случае сопряжённо-линейного) между пространством и сопряжённым к нему.

Отмеченные недостатки представленной диссертационной работы нисколько не снижают ценность её результатов, демонстрирующих широкий математический кругозор соискателя, а также его знание разнообразной терминологической и технической базы современной алгебры. На основании выше изложенного полагаю, что диссертационная работа О.В.Герасимовой «Дифференциально-алгебраические и геометрические основы центральной динамики на кривых второго порядка» удовлетворяет всем основным требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

К.ф.-м.н., доцент кафедры ИУ-9
“Теоретическая информатика и
компьтерные технологии”
МГТУ им. Н.Э.Баумана
8 декабря 2014 г.

А.Ю.Голубков

Подпись Голубкова А.Ю

Научно-учебный комплекс «Информатика и системы управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (НУК ИУ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Гл. бухгалтер
НУК ИУ

Косьяненко О.Г.