ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Тимергалиев Ирек Саматович

О распределении значений коротких арифметических сумм

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Бояринов Роман Николаевич**,
доктор физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа

Официальные оппоненты: **Королев Максим Александрович**,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
(ФГБУН «Математический институт имени
В.А. Стеклова Российской академии наук,
отдел алгебры и теории чисел)

Авдеев Иван Федорович,
кандидат физико-математических наук,
доцент (ФГБОУ ВПО «Орловский
государственный университет»,
физико-математический факультет)

Ведущая организация: **ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический университет»**

Защита диссертации состоится 26 декабря 2014 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», по адресу: Российская Федерация, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А).

Автореферат разослан 26 ноября 2014 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор Александр Олегович Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к аналитической теории чисел. Одним из объектов её исследования является распределение значений сумм арифметических функций. Значения некоторых из них будут распределены по различным вероятностным законам (нормальному, показательному и др.).

Данные исследования были начаты в 1952 году Г. Давенпортом и П. Эрдешем[1], которые доказали, что значения «коротких» сумм символов Лежандра распределены по нормальному закону. Ю. В. Линник и Й. П. Кубилюс[2,3,4] продолжили исследования в этом направлении.

В. Н. Чубариковым[5,6,7] в конце 90-х годов были поставлены задачи о распределении значений классических тригонометрических сумм, таких как коротких сумм Гаусса, аналогов сумм Клостермана, сумм характеров Дирихле по простым числам, сумм коротких рациональных тригонометрических сумм с показательной функцией в экспоненте по «сдвигам» интервалов суммирования. В решении этих задач приняли участие Э. К. Жимбо, Р. Н. Бояринов, И. С. Нгонго и др.

В 2001г. Э. К. Жимбо и В. Н. Чубариков[6,7] получили асимптотическую формулу четных моментов аналогов сумм Клостермана с остатком вида $O\left(\frac{1}{z}\right)$. Также Э. К. Жимбо[8] показал, что для неполных сумм Гаусса $\mathbf{M}\xi_p^{2r} = r! + O\left(\frac{1}{p}\right) + O\left(\frac{h^r}{\sqrt{p}}\right) + O\left(\frac{1}{h^{m-2}}\right)$.

В 2002г. И. С. Нгонго[9] при исследовании сумм характеров абелевых групп показал, что $\mathbf{M}\xi_n^{2r} = r! + O\left(\frac{r^2}{s_n}\right)$. Для короткой показательной рациональной три-

[1] Davenport H., Erdös P. The distribution of quadratic and higher residues. Publ. Math., Debrecen. 1952. **2**. №3 – 4. 252 – 265.

[2] Кубилюс Й. П., Линник Ю. В. Арифметическое моделирование броуновского движения. Изв. вузов. Математика. 1959. 6(13). 88 – 95.

[3] Кубилюс Й. П. Вероятностные методы в теории чисел. Госполитнаучиздат Литов. ССР, Вильнюс. 1962.

[4] Кубилюс Й. П. Об асимптотических законах распределения аддитивных арифметических функций. Литов. матем. сб. **5,** №2. 1965. 261 – 272.

[5] Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н. О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи. ДАН. 2001. Т.379, №1. С.9–11.

[6] Жимбо Э. К., Чубариков В. Н. О распределении арифметических функций по простому модулю. Дискретная математика.2001. Т.13, выпуск 3. 32–41.

[7] Жимбо Э. К., Чубариков В. Н. Об асимптотических распределениях значений арифметических функций. Докл. РАН. 2001.**377.** №2.

[8] Жимбо Э. К. О распределении значений модулей неполных сумм Гаусса. Вестник Московского Университета. Сер. Математика. Механика.2001. №2. С.67–69

[9] Нгонго И. С. О распределении значений коротких сумм. Диссертация кандидата физ.–мат. наук. Москва. МГУ им. Ломоносова, мех.–мат. ф–т, 2002.

гонометрической суммы по «сдвигам» интервалов суммирования он получил, что $\mathbf{M}\xi_x^{2r} = r! + O\left(\frac{1}{h}\right) + O\left(\frac{h^r}{p}\right)$.

В 2004г. Р. Н. Бояринов[10] показал, что для аналогов дзетовой суммы $\mathbf{M}\xi^{2r} = r! + 7\theta\frac{r!r^2}{z} + \theta\frac{h^{3r}}{T}$.

Важной задачей при исследовании арифметических функций является проблема оценки скорости сходимости к предельному распределению. Р. Н. Бояриновым[11,12] был предложен метод решения этой проблемы с использованием только асимптотических выражений для четных моментов.

В 1960 году А. Г. Постников[13] вывел закон распределения значений очень коротких рациональных тригонометрических сумм с показательной функцией в экспоненте. М. П. Минеев[14,15,16] и др. доказали новые метрические теоремы о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями. Аналогичные исследования, связанные с поведением частичных сумм лакунарных тригонометрических рядов, были проведены Р. Форте[17], М. Кацем[18,19], А. Зигмундом[20], И. А. Ибрагимовым[21],

---

[10] Бояринов Р. Н. О распределении значений аналога дзетовой суммы. Вестник Московского Университета. Сер. Математика. Механика.2004. №3. С.55–56.

[11] Бояринов Р. Н. О скорости сходимости распределений случайных величин// ДАН.2010. Т.435, №3. С.295–297.

[12] Бояринов Р. Н. Вероятностные методы в теории чисел и приложения в теории аргумента дзета–функции Римана. Диссертация доктора физ.–мат. наук, Москва, МГУ им. Ломоносова, мех.–мат. ф–т. 2012.

[13] Постников А. Г. Об очень короткой показательной рациональной тригонометрической сумме. ДАН СССР, 1960. **133.** №6.

[14] Минеев М. П. Метрическая теорема о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями. Успехи матем. наук 1959. **14.** в. 3, 169 – 171.

[15] Минеев М. П. Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы. Изв. АН СССР, серия матем. 1958. **26.** №5. 282 – 298.

[16] Минеев М. П. О проблеме Тарри для быстрорастущих функций. Мат. сб. 1958. **46(88).** №4. 451 –454.

[17] Fortet R. Sur une suite egalement repartie. Studia math., 1940. **1.** 54 – 69.

[18] Kac M. Statistical independence in probability and analysis and number theory. N. Y., 1952.

[19] Kac M. On distribution of values of sums of the type $\sum f(2^k t)$. Ann.Math. 1946. **47.** №1. 33 – 49.

[20] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. т. II, М., ИЛ, 1964.

[21] Ибрагимов И. А. Центральная предельная теорема для сумм функций независимых случайных величин и сумм вида $\sum f(2^k t)$. Теория вероятностей и ее применения, 1967. **12**, вып. 4, 655 – 665.

В. Ф. Гапошкиным[22,23], В. Н. Чубариковым[5,24], Р. Н. Бояриновым[25,26,27] и др.

Цель и задачи исследования

Получение асимптотических формул дробных моментов коротких арифметических сумм, оценка скорости сходимости к предельному распределению и меры больших значений для различных коротких арифметических сумм. Получение асимптотической формулы распределения абсолютных значений тригонометрической суммы на коротких интервалах.

Методы исследования

В работе применяются методы аналитической теории чисел, теории вероятностей и математического анализа.

Научная новизна

Результаты, полученные в диссертации, являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1. Доказаны асимптотические формулы дробных моментов аналогов сумм Клостермана, сумм характеров абелевых групп, неполных сумм Гаусса, аналога дзетовой суммы, короткой показательной рациональной тригонометрической суммы по «сдвигам» интервалов суммирования.

2. Получена оценка скорости сходимости к предельному распределению и оценка меры больших значений различных коротких арифметических сумм.

[22] Гапошкин В. Ф. О скорости приближения к нормальному закону распределений взвешенных сумм лакунарных рядов. Теория вероятностей и ее применения, 1968. **13**, вып. 3, 445–461.

[23] Гапошкин В. Ф. О центральной предельной теореме для некоторых слабо зависимых последовательностей. Теория вероятностей и ее применения, 1970. **15**, вып. 5, 666–684.

[24] Бояринов Р. Н., Нгонго И. С., Чубариков В. Н. О новых метрических теоремах в методе А.Г. Постникова. Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Труды IV Межд. Конф. Тула, 2002, С.5–31.

[25] Бояринов Р. Н. Центральная предельная теорема для равномерного распределения дробных долей быстрорастущих последовательностей. Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2001. №5, 52 –54.

[26] Бояринов Р. Н. О распределении значений сумм, связанных с быстрорастущими последовательностями. Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2003. №2, 57-58.

[27] Бояринов Р. Н. О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы. Дискретная математика. 24:1, 2012, С. 26–29.

3. Доказаны теоремы о распределении абсолютных значений тригонометрической суммы с лакунарной последовательностью натуральных чисел на коротких интервалах.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Её результаты представляют интерес для специалистов в области аналитической теории чисел и могут найти применение в различных её разделах.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и всероссийских и международных конференциях:

1. Семинар «Аналитическая теория чисел» под руководством профессора В. Н. Чубарикова и профессора М. П. Минеева. Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (2014 г.).

2. Семинар «Арифметические функции» под руководством профессора В. Н. Чубарикова, доцента Р. Н. Бояринова и доцента С. Н. Преображенского. Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (2011—2012 гг.).

3. XI Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, 9—14 сентября 2013 г.

4. Международная алгебраическая конференция, посвященная 100–летию со дня рождения Л. А. Калужина. г. Нальчик 6—11 сентября 2014 г.

5. XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, 12—15 апреля 2010 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора, список которых приведён в конце автореферата [1—5]; из них первые две — в журналах, включенных Высшей аттестационной комиссией России в список изданий, рекомендуемых для опубликования основных научных результатов диссертации на соискание ученой степени кандидата и доктора наук.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы, насчитывающего 106 наименований. Объём диссертации составляет 75 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации содержится обзор результатов, относящихся к теме диссертации, а также формулируются основные полученные в ней результаты.

Первая глава «Моменты арифметических сумм» посвящена асимптотическим формулам четных и дробных моментов арифметических сумм.

В §1 рассматриваются аналоги сумм Клостермана. Пусть p — простое число, x — натуральное число. Рассмотрим сумму

$$S_p(x) = \sum_{q \leqslant h} e^{2\pi i x q^*/p},$$

где $h = \ln p$, а суммирование ведется по простым числам q, и q^* определяется из сравнения

$$qq^* \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

Для того, чтобы в дальнейшем провести теоретико-вероятностную аналогию, положим $z = \pi(h)$ и

$$\xi_p(x) = \left| \frac{S_p(x)}{\sqrt{z}} \right|.$$

Получена формула четных моментов с явно выписанными постоянными в остаточном члене и зависимостью от порядка момента.

Теорема 1. *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда для $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{z}$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = r! \left(1 + \theta \frac{r^2}{z} \right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

На основании теоремы 1 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым[12,28], полу-

[28] Бояринов Р. Н. О дробных моментах случайных величин. ДАН.2011. Т.436, №3. С.299—301.

чена формула дробных моментов.

Теорема 2. *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое p_0, что для любого $p > p_0$ и $0 < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln p$ справедливо равенство*

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_p,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера, $|\theta| \leqslant 1$ и

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p} < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln p, \end{cases}$$

где $R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln\ln p}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2a}\right)}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2^{27}}\right)$.

Параграф 2 посвящен суммам характеров абелевых групп. Рассмотрим бесконечную последовательность конечных абелевых групп G_n, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, где s_n — количество примарных циклических подгрупп в разложении группы G_n, и величину вида $\xi_n(\chi) = \left|\frac{1}{\sqrt{s_n}}\sum\nolimits'_{a\in G_n}\chi(a)\right|$, где штрих у суммы означает, что суммирование ведется по образующим примарных циклических подгрупп в разложении группы G_n, а χ — характер абелевой группы G_n. Обозначим через D_n порядок группы G_n.

Получена формула четных моментов с явно выписанными постоянными в остаточном члене и зависимостью от порядка момента.

Теорема 4. *Пусть $\xi_n(\chi)$ — величина, определенная выше. Тогда для $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{s_n}$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_n^{2r} = r!\left(1 + \theta\frac{r^2}{s_n}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

На основании теоремы 4 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым[12,28], получена формула дробных моментов.

Теорема 5. *Пусть $\xi_n(\chi)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое*

n_0, что для любого $n > n_0$ и $0 < a \leqslant \frac{1}{2^6}\ln s_n$ справедливо равенство:

$$m_a(n) = \Gamma(0.5a+1) + \theta R_n,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера, $|\theta| \leqslant 1$ и

$$R_n = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\frac{\ln s_n}{2}}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\frac{\ln s_n}{2}} < a \leqslant \frac{1}{2^6}\ln s_n; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{27}\ln\ln s_n}{\ln s_n}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{19}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln s_n}}{a\sqrt{2}}\right)}{\ln s_n}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln s_n}}{2^{27}}\right)$.

В §3 рассматриваются неполные суммы Гаусса. Пусть p — простое, c — целое, $(c;p) = 1$, числа h и x целые в пределах $0 < h < p$ и $0 \leqslant x < p$, а $\chi(n)$ — комплексный характер по модулю p. Пусть

$$S_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(n) \cdot e^{2\pi i cn/p}.$$

Рассмотрим нормированную неотрицательную величину

$$\xi = \xi_p(x) = \left|\frac{S_h(x)}{\sqrt{h}}\right|.$$

Получена формула четных моментов с явно выписанными постоянными в остаточном члене и зависимостью от порядка момента.

Теорема 6. *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда для $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{h}$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = r! + \theta\left(r!\frac{r^2}{h} + \frac{r!^2}{h} + \frac{2rh^r}{\sqrt{p}}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Для $h = [\ln p]$ на основании теоремы 6 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым[12,28], получена формула дробных моментов.

Теорема 7. *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое*

p_0, *что для любого* $p > p_0$ *и* $0 < a \leqslant \frac{1}{2^5} \ln\ln\ln p$ *справедливо равенство*:

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a+1) + \theta R_p,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — *гамма–функция Эйлера,* $|\theta| \leqslant 1$ *и*

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\ln\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\ln\ln\ln p} < a \leqslant \frac{1}{2^5}\ln\ln\ln p; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{26}\ln\ln\ln\ln p}{\ln\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{18}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln\ln p}}{a}\right)}{\ln\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln\ln p}}{2^{26}}\right)$.

В параграфе 4 изучается аналог дзетовой суммы $S_h(x;T) = \sum\limits_{p\leqslant h} e^{2\pi i x T \ln p}$. Рассмотрим нормированную случайную величину $\xi(x) = \left|\frac{S_h(x;T)}{\sqrt{z}}\right|$, где p — простое, $z = \pi(h)$ — число простых чисел, не превосходящих $h = h(T)$, $\lim\limits_{T\to+\infty} h = +\infty$ и $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{\ln h}{\ln T} = 0$.

Улучшены известные остатки для формулы четных моментов рассматриваемой величины.

Теорема 8. *Пусть* $\xi(x)$ — *величина, определенная выше. Тогда для* $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{z}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi^{2r} = r! + \theta \cdot \left(\frac{r!r^2}{z} + \frac{h^r}{Tz^r}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Для $h = \ln T$ на основании теоремы 8 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым[12,28], получена формула дробных моментов.

Теорема 9. *Пусть* $\xi(x)$ — *величина, определенная выше. Тогда найдется такое* T_0, *что для любого* $T > T_0$ *и* $0 < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln T$ *справедливо равенство*:

$$m_a(n) = \Gamma(0.5a+1) + \theta R_m,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — *гамма–функция Эйлера,* $|\theta| \leqslant 1$ *и*

$$R_T = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln T}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln T} < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln T; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln\ln T}{\ln\ln T}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln T}}{2a}\right)}{\ln\ln T}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln T}}{2^{27}}\right)$.

В §5 рассматривается короткая показательная рациональная тригонометрическая сумма по «сдвигам» интервалов суммирования.

Рассмотрим сумму вида $S_p(x;h) = \sum\limits_{x\leqslant n\leqslant x+h} e^{2\pi i\frac{ag^n}{p}}$ и нормированную случайную величину $\xi_x = \left|\frac{S_p(x;h)}{\sqrt{h}}\right|$, где p — простое, $(a,p) = 1$, g — первообразный корень по модулю p, а числа x, n, a, h — натуральные, $x < p$. Также $hg^h < p$ и $\lim\limits_{p\to+\infty} h(p) = +\infty$.

Получена формула четных моментов с явно выписанными постоянными в остаточном члене и зависимостью от порядка момента.

Теорема 10. *Пусть* $\xi(x)$ *— величина, определенная выше. Тогда существует такое* p_1*, что для всех* $p \geqslant p_1$ *и для* $1 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{2h}}{4}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_x^{2r} = r!\left(1 + \theta\frac{9\cdot 4^r}{h}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Для $h = \left[\sqrt{\ln p}\right] + 1$ на основании теоремы 10 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым[12,28], получена формула дробных моментов.

Теорема 12. *Пусть* ξ_x *— величина, определенная выше. Тогда найдется такое* p_0*, что для любого* $p > p_0$ *и* $0 < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln p$ *справедливо равенство*:

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_p,$$

где $\Gamma(\cdot)$ *— гамма–функция Эйлера,* $|\theta| \leqslant 1$ *и*

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p} < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln p; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln\ln p}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2a}\right)}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2^{27}}\right)$.

Во **второй главе** «О распределении значений арифметических сумм» решается проблема оценки скорости сходимости к предельному распределению. Кроме того, получены оценки мер больших значений.

В §1 рассматриваются аналоги сумм Клостермана. Пусть p — простое число, x — натуральное число. Рассмотрим сумму

$$S_p(x) = \sum_{q \leqslant h} e^{2\pi i x q^*/p},$$

где $h = \ln p$, а суммирование ведется по простым числам q, и q^* определяется из сравнения $qq^* \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

Обозначим через μ меру больших значений суммы $S_p(x)$, где $\mu = \frac{\nu}{p}$ и $\nu = \#\{x : |S_p(x)| \geqslant \lambda\sqrt{z}\}$ — количество x, для которых выполняется неравенство в скобках. Доказана следующая теорема.

Теорема 13. *Для меры* μ *больших значений суммы* $S_p(x)$ *выполняется неравенство*

$$\mu < 6 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

Положим $z = \pi(h)$ и $\xi_p(x) = \left|\frac{S_p(x)}{\sqrt{z}}\right|$. Доказана следующая теорема о скорости сходимости к предельному распределению.

Теорема 14. *Пусть* $\xi_p(x)$ *— величина, определенная выше. Тогда найдется такое* p_0*, что для любого* $p > p_0$ *справедливо равенство*

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

где $F_p(\lambda)$ *— функция распределения величины* $\xi_p(x)$ *и* $|R_p| \leqslant \frac{4600\ln\ln\ln p}{\sqrt{\ln\ln p}}$.

В §2 рассматривается бесконечная последовательность конечных абелевых групп G_n, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, где s_n — количество примарных циклических подгрупп в разложении группы G_n, и величина вида $S_n(\chi) = \sum\limits_{a\in G_n}{}' \chi(a)$, где штрих у суммы означает, что суммирование ведется по образующим примарных циклических подгрупп в разложении группы G_n, а χ — характер абелевой группы G_n. Обозначим через D_n порядок группы G_n.

Пусть μ — мера больших значений суммы $S_n(\chi)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{D_n}$, где $\nu = \#\{\chi : |S_n(\chi)| \geqslant \lambda\sqrt{s_n}\}$ — количество χ, для которых выполняется неравенство в скобках. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 16. *Для меры μ больших значений суммы $S_n(\chi)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

Пусть $\xi_n(\chi) = \left|\frac{1}{\sqrt{s_n}} \sum\limits_{a\in G_n}{}' \chi(a)\right|$. Доказана следующая теорема о скорости сходимости к предельному распределению.

Теорема 17. *Пусть $\xi_n(\chi)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое n_0, что для любого $n > n_0$ справедливо равенство*:

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_n,$$

где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_n(\chi)$ и $|R_n| \leqslant \frac{3240 \ln\ln s_m}{\sqrt{\ln s_m}}$.

В §3 рассматриваются неполные суммы Гаусса. Пусть p — простое, c — целое, $(c;p) = 1$, числа h и x целые в пределах $0 < h < p$ и $0 \leqslant x < p$, а $\chi(n)$ — комплексный характер по модулю p. Пусть

$$S_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(n) \cdot e^{2\pi i c n/p}.$$

Обозначим как μ меру больших значений суммы $S_h(x)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{p}$, где $\nu = \#\{x : |S_h(x)| \geqslant \lambda\sqrt{h}\}$ — количество x, для которых выполняется неравенство в скобках. Доказана следующая теорема о мере больших значений суммы $S_h(x)$.

Теорема 18. *При $\lambda > 0$ для меры μ больших значений суммы $S_h(x)$ верно неравенство*

$$\mu < 15 \cdot e^{-\frac{2\lambda}{e}}.$$

Рассмотрим нормированную неотрицательную величину $\xi_p(x) = \left|\frac{S_h(x)}{\sqrt{h}}\right|$. Для $h = [\ln p]$ доказана теорема о скорости сходимости к предельному распределению.

Теорема 19. *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое p_0, что для любого $p > p_0$ справедливо равенство:*

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_p(x)$ и $|R_p| \leqslant \frac{810(\ln\ln\ln p)^2}{\sqrt{\ln\ln p}}$.

Параграф 4 посвящен аналогу дзетовой суммы $S_h(x;T) = \sum\limits_{p\leqslant h} e^{2\pi ixT\ln p}$ и нормированной случайной величине $\xi(x) = \left|\frac{S_h(x;T)}{\sqrt{z}}\right|$, где p — простое, $\lim\limits_{T\to+\infty} h = +\infty$ и $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{\ln h}{\ln T} = 0$. Оценим меру μ больших значений суммы $S_h(x)$. Здесь $\mu = meas\{x \in (0;1) : |S_h(x)| \geqslant \lambda\sqrt{z}\}$ — мера x, для которых выполняется неравенство в скобках, где $z = \pi(h)$ — число простых чисел, не превосходящих $h = h(T)$. Доказана следующая теорема.

Теорема 20. *Для меры μ больших значений суммы $S_h(x)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 9 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

Для $h = [\ln T]$ доказана теорема о скорости сходимости распределения значений.

Теорема 21. *Пусть $\xi(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое T_0, что для любого $T > T_0$ справедливо равенство:*

$$F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_T,$$

где $F(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi(x)$ и $|R_T| \leqslant \frac{4600\ln\ln\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}$.

В §5 изучается короткая показательная рациональная тригонометрическая сумма по «сдвигам» интервалов суммирования $S_p(x;h) = \sum\limits_{x\leqslant n\leqslant x+h} e^{2\pi i\frac{ag^n}{p}}$ и нормированная случайная величина $\xi_x = \left|\frac{S_p(x;h)}{\sqrt{h}}\right|$, где p — простое, $(a,p) = 1$, g — первообразный корень по модулю p, а числа x, n, a, h — натуральные, $x < p$. Также $\lim\limits_{p\to+\infty} h(p) = +\infty$ и $hg^h < p$.

Мера μ больших значений суммы $S_p(x)$ определяется как $\mu = \frac{\nu}{p-1}$, где $\nu = \#\{x : |S_p(x)| \geqslant \lambda\sqrt{h}\}$ — количество x, для которых выполняется неравенство в скобках. Доказана следующая теорема.

Теорема 22. *Для меры μ больших значений суммы $S_h(x)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2e}}.$$

Для $h = \left[\sqrt{\ln p}\right] + 1$ доказана теорема о скорости сходимости распределения значений.

Теорема 23. *Пусть ξ_x — величина, определенная выше. Тогда найдется такое p_0, что для любого $p > p_0$ справедливо равенство*:

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины ξ_x и $|R_p| \leqslant \frac{6480 \ln\ln\ln p}{\sqrt{\ln\ln p}}$.

В **третьей главе** «О распределении абсолютных значений специальной арифметической суммы» изучается поведение тригонометрической суммы с с быстрорастущими функциями на коротких интервалах.

Пусть $J_{a,b} = \int\limits_a^b \left|\sum\limits_{x \leqslant P} e^{2\pi i \alpha F_x}\right|^{2k} d\alpha$, где F_x — лакунарная последовательность, то есть $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$; $F_x, m \in Z$ и существует такое $A > 0$, что $F_x \leqslant A\beta^x$.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 25. *Пусть F_x — последовательность натуральных чисел, такая что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$, k — фиксированное натуральное число, P — растущее натуральное число. Положим $T = \max\left(\left[\frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}\right] + 1, T_0\right)$, где $T_0 \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{\beta^{T_0}} < (1 - 1/\beta)^2$. Тогда при $2k^2T \leqslant P$ и $b - a \geqslant \frac{\ln P}{P}$ имеет место равенство*

$$J_{a,b} = (b-a)k!P^k + (b-a)\theta 2c_0^k k! T P^{k-1} +$$

$$+4\theta_2\left((\gamma+1)c^k k! P^{k-1} + 2c^k k! C_k^2 T P^{k-1}\right)\ln P + 4\theta_1 c^k k! P^{k-1}\ln P,$$

где $|\theta|, |\theta_1|, |\theta_2| \leqslant 1$, $c_0 = \frac{2\beta}{\beta-1}$, $c = \frac{\beta}{\beta-1}$.

Следствие 1. *Если $b - a \geqslant \frac{\ln P}{P^{1-\varepsilon}}$, где $0 < \varepsilon < 1$ и $2k^2T \leqslant P$, то имеет место равенство*

$$J_{a,b} = (b-a)k!P^k\left(1 + \theta\frac{14c^k(\gamma+1)^k T}{P^\varepsilon}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Следствие 2. *При $b - a \geqslant \frac{\ln P}{P}$ имеет место следующее неравенство*:

$$J_{a,b} \leqslant (b-a)c_0^k k! P^k\left(2\gamma + 4T + 5\right).$$

Доказательство этих утверждений существенно опирается на следующую оценку числа решений несимметричного диофантова уравнения.

Теорема 24. *Пусть F_x — лакунарная последовательность натуральных чисел, такая что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$, $F_x \leqslant A\beta^x$, k — фиксированное натуральное число, $m \in \mathbb{Z}$ и $m \neq 0$, P — растущее натуральное число, T_m — количество решений диофантова уравнения*

$$F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} = F_{y_1} + \ldots + F_{y_k} + m$$

в целых числах $1 \leqslant x_i, y_j \leqslant P$. Тогда верно неравенство

$$T_m \leqslant (\gamma+1)c^k k! P^{k-1} + 2c^k k! C_k^2 T P^{k-1},$$

где $\gamma = \left[\frac{\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{\ln\beta}\right] + 1$, $c = \frac{\beta}{\beta-1}$, $c_1 = \frac{1}{2A}$, $c_2 = \frac{\beta}{\varkappa F_1}$, $\varkappa = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$ *и* $T = \left[\frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}\right] + 1$.

Положим $S_P(\alpha) = \sum\limits_{x \leqslant P} e^{2\pi i \alpha F_x}$. Оценим меру μ больших значений суммы $S_P(\alpha)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{b-a}$, где $\nu = meas\{\alpha \in (a;b) : |S_P(\alpha)| \geqslant \lambda\sqrt{P}\}$ — мера α, для которых выполняется неравенство в скобках.

Теорема 26. *Для меры μ больших значений суммы $S_P(\alpha)$ при $b - a \geqslant \frac{\ln P}{P}$ верно неравенство*

$$\mu < 3(2\gamma + 4T + 5) \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{c_0 e}},$$

где $c_0 = \frac{2\beta}{\beta-1}$, γ — из теоремы 24 и T — из теоремы 25.

Рассмотрим случайную величину $\xi = \left|\frac{S_P(\alpha)}{\sqrt{P}}\right|$.

Теорема 27. *Если длина отрезка $b - a \geqslant \frac{\ln P}{P^{1-\varepsilon}}$, где $0 < \varepsilon < 1$, то найдется такое P_0, что для любого $P > P_0$ справедливо равенство*

$$F_P(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p, \quad |R_P| \leqslant \frac{1620\sqrt{2\eta}\ln\ln P}{\sqrt{\varepsilon \ln P}},$$

где $F_P(\lambda)$ — функция распределения величины ξ, c— константа из теоремы 25 и $\eta = 3\ln\left(c(\gamma+1)\right)$.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту Р. Н. Бояринову за постановку задач и внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Тимергалиев И. С. *О распределении значений аналогов сумм Клостермана*// Вестник МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 2013. №5. С. 37—41.

[2] Тимергалиев И. С. *О распределении значений сумм характеров абелевых групп и коротких показательных сумм*// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) Краснодар: КубГАУ, 2014. №04(098). С. 769–782.

[3] Тимергалиев И. С., Бояринов Р. Н. *О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы на коротких интервалах*// Чебышевский сб., 14:2 (2013), С. 154–163

[4] Тимергалиев И. С., Бояринов Р. Н. *О распределении значений неполных сумм Гаусса*//Чебышевский сб., 14:3 (2013), С. 127–133

[5] Тимергалиев И. С. *О распределении значений аналогов сумм Клостермана*// Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тезисы докл. XI Межд. Конф. Саратов. 2013 С. 80

В работах [3], [4] И. С. Тимергалиеву принадлежат основные результаты, Р.Н. Бояринову принадлежат постановки задач и общая редакция работ.