ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 511.3

**Тимергалиев Ирек Саматович**

# О распределении значений коротких арифметических сумм

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Р. Н. Бояринов

Москва — 2014

# СОДЕРЖАНИЕ

**Введение** **4**

**I Моменты арифметических сумм** **18**

§ 1 О моментах аналогов сумм Клостермана . . . . . . . . . . . . . 18

§ 2 О моментах сумм характеров абелевых групп . . . . . . . . . . . 25

§ 3 О моментах неполных сумм Гаусса . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

§ 4 О моментах аналога дзетовой суммы . . . . . . . . . . . . . . . . 32

§ 5 О моментах короткой показательной рациональной тригонометрической суммы по «сдвигам» интервалов суммирования . . 35

**II О распределении значений арифметических сумм** **40**

§ 1 О распределении значений аналогов сумм Клостермана . . . . . 40

§ 2 О распределении значений сумм характеров абелевых групп . . 43

§ 3 О распределении значений неполных сумм Гаусса . . . . . . . . 45

§ 4 О распределении значений аналога дзетовой суммы . . . . . . . 48

§ 5 О распределении значений короткой показательной рациональной тригонометрической суммы по «сдвигам» интервалов суммирования . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

**III О распределении абсолютных значений специальной арифметической суммы** **52**

§ 1 О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы на коротких интервалах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52

**Список литературы** **65**

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящая диссертация относится к аналитической теории чисел. Одним из объектов её исследования является распределение значений сумм арифметических функций. Значения некоторых из них будут распределены по различным вероятностным законам (нормальному, показательному и др.).

Данные исследования были начаты в 1952 году Г. Давенпортом и П. Эрдешем [84], которые доказали, что значения «коротких» сумм символов Лежандра распределены по нормальному закону. Ю. В. Линник и Й. П. Кубилюс [54]-[56] продолжили исследования в этом направлении.

В. Н. Чубариковым [28],[38],[40] в конце 90-х годов были поставлены задачи о распределении значений классических тригонометрических сумм, таких как коротких сумм Гаусса, аналогов сумм Клостермана, сумм характеров Дирихле по простым числам, сумм коротких рациональных тригонометрических сумм с показательной функцией в экспоненте по «сдвигам» интервалов суммирования. В решении этих задач приняли участие Э. К. Жимбо, Р. Н. Бояринов, И. С. Нгонго и др. К этому же направлению исследований относится настоящая диссертация.

Глава 1 настоящей диссертации посвящена асимптотическим формулам четных и дробных моментов арифметических сумм.

В §1 рассматриваются аналоги сумм Клостермана. Пусть $p$ — простое число, $x$ — натуральное число. Рассмотрим сумму

$$S_p(x) = \sum_{q\leqslant h} e^{2\pi i x q^*/p},$$

где $h = \ln p$, а суммирование ведется по простым числам $q$, и $q^*$ определяется из сравнения

$$qq^* \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

Для того, чтобы в дальнейшем провести теоретико-вероятностную аналогию, положим $z = \pi(h)$ и

$$\xi_p(x) = \left| \frac{S_p(x)}{\sqrt{z}} \right|.$$

Э. К. Жимбо и В. Н. Чубариков [38],[40] получили асимптотическую формулу четных моментов с остатком вида $O\left(\frac{1}{z}\right)$. В настоящей работе остаточный член получен с явно выписанными постоянными.

**Теорема 1.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда для $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{z}$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = r! \left( 1 + \theta \frac{r^2}{z} \right),$$

*где $|\theta| \leqslant 1$.*

На основании теоремы 1 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым [19], [23], получена формула дробных моментов.

**Теорема 2.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0$, что для любого $p > p_0$ и $0 < a \leqslant \frac{1}{2^7} \ln\ln p$ справедливо равенство*

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_p,$$

*где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера, $|\theta| \leqslant 1$ и*

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p} < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln p, \end{cases}$$

*где* $R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln\ln p}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2a}\right)}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2^{27}}\right)$.

Параграф 2 посвящен суммам характеров абелевых групп. Рассмотрим бесконечную последовательность конечных абелевых групп $G_n$, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, где $s_n$ — количество примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, и величину вида $\xi_n(\chi) = \left|\frac{1}{\sqrt{s_n}}\sum_{a\in G_n}{}' \chi(a)\right|$, где штрих у суммы означает, что суммирование ведется по образующим примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, а $\chi$ — характер абелевой группы $G_n$. Обозначим через $D_n$ порядок группы $G_n$.

И. С. Нгонго [65] показал, что $\mathbf{M}\xi_n^{2r} = r! + O\left(\frac{r^2}{s_n}\right)$. Автором вычислены постоянные в данной формуле.

**Теорема 4.** *Пусть* $\xi_n(\chi)$ *— величина, определенная выше. Тогда для* $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{s_n}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_n^{2r} = r!\left(1+\theta\frac{r^2}{s_n}\right),$$

*где* $|\theta| \leqslant 1$.

На основании теоремы 4 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым [19], [23], получена формула дробных моментов.

**Теорема 5.** *Пусть* $\xi_n(\chi)$ *— величина, определенная выше. Тогда найдется такое* $n_0$, *что для любого* $n > n_0$ *и* $0 < a \leqslant \frac{1}{2^6}\ln s_n$ *справедливо равенство*:

$$m_a(n) = \Gamma(0.5a+1) + \theta R_n,$$

*где* $\Gamma(\cdot)$ — *гамма–функция Эйлера,* $|\theta| \leqslant 1$ *и*

$$R_n = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\frac{\ln s_n}{2}}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\frac{\ln s_n}{2}} < a \leqslant \frac{1}{2^6}\ln s_n; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{27}\ln\ln s_n}{\ln s_n}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{19}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln s_n}}{a\sqrt{2}}\right)}{\ln s_n}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln s_n}}{2^{27}}\right)$.

В §3 рассматриваются неполные суммы Гаусса. Пусть $p$ — простое, $c$ — целое, $(c;p) = 1$, числа $h$ и $x$ целые в пределах $0 < h < p$ и $0 \leqslant x < p$, а $\chi(n)$ — комплексный характер по модулю $p$. Пусть

$$S_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(n) \cdot e^{2\pi icn/p}.$$

Рассмотрим нормированную неотрицательную величину

$$\xi = \xi_p(x) = \left|\frac{S_h(x)}{\sqrt{h}}\right|.$$

Э. К. Жимбо [39] показал, что $\mathbf{M}\xi_p^{2r} = r! + O\left(\frac{1}{p}\right) + O\left(\frac{h^r}{\sqrt{p}}\right) + O\left(\frac{1}{h^{m-2}}\right)$, где $m$ — минимальное натуральное число, такое, что $\chi^m = \chi_0$. Автором вычислены постоянные в данной формуле.

**Теорема 6.** *Пусть* $\xi_p(x)$ — *величина, определенная выше. Тогда для* $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{h}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = r! + \theta\left(r!\frac{r^2}{h} + \frac{r!^2}{h} + \frac{2rh^r}{\sqrt{p}}\right),$$

*где* $|\theta| \leqslant 1$.

Для $h = [\ln p]$ на основании теоремы 6 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым [19], [23], получена формула дробных моментов.

**Теорема 7.** *Пусть* $\xi_p(x)$ *— величина, определенная выше. Тогда найдется такое* $p_0$, *что для любого* $p > p_0$ *и* $0 < a \leqslant \frac{1}{2^5} \ln\ln\ln p$ *справедливо равенство*:

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_p,$$

*где* $\Gamma(\cdot)$ *— гамма–функция Эйлера,* $|\theta| \leqslant 1$ *и*

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\ln\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\ln\ln\ln p} < a \leqslant \frac{1}{2^5}\ln\ln\ln p; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{26}\ln\ln\ln\ln p}{\ln\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{18}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln\ln p}}{a}\right)}{\ln\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln\ln p}}{2^{26}}\right)$.

В параграфе 4 изучается аналог дзетовой суммы $S_h(x;T) = \sum\limits_{p\leqslant h} e^{2\pi i x T \ln p}$. Рассмотрим нормированную случайную величину $\xi(x) = \left|\frac{S_h(x;T)}{\sqrt{z}}\right|$, где $p$ — простое, $z = \pi(h)$ — число простых чисел, не превосходящих $h = h(T)$, $\lim\limits_{T\to+\infty} h = +\infty$ и $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{\ln h}{\ln T} = 0$.

Р. Н. Бояринов [13] показал, что $\mathbf{M}\xi^{2r} = r! + 7\theta\frac{r!r^2}{z} + \theta\frac{h^{3r}}{T}$. В настоящей работе получены несколько улучшенные остатки.

**Теорема 8.** *Пусть* $\xi(x)$ *— величина, определенная выше. Тогда для* $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{z}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi^{2r} = r! + \theta \cdot \left(\frac{r!r^2}{z} + \frac{h^r}{Tz^r}\right),$$

*где* $|\theta| \leqslant 1$.

Для $h = \ln T$ на основании теоремы 8 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым [19], [23], получена формула дробных моментов.

**Теорема 9.** *Пусть* $\xi(x)$ — *величина, определенная выше. Тогда найдется такое* $T_0$, *что для любого* $T > T_0$ *и* $0 < a \leqslant \frac{1}{2^7} \ln\ln T$ *справедливо равенство*:

$$m_a(n) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_m,$$

*где* $\Gamma(\cdot)$ — *гамма–функция Эйлера,* $|\theta| \leqslant 1$ *и*

$$R_T = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln T}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln T} < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln T; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln\ln T}{\ln\ln T}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln T}}{2a}\right)}{\ln\ln T}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,
$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln T}}{2^{27}}\right)$.

В §5 рассматривается короткая показательная рациональная тригонометрическая сумма по «сдвигам» интервалов суммирования.

Рассмотрим сумму вида $S_p(x;h) = \sum\limits_{x\leqslant n\leqslant x+h} e^{2\pi i \frac{ag^n}{p}}$ и нормированную случайную величину $\xi_x = \left|\frac{S_p(x;h)}{\sqrt{h}}\right|$, где $p$ — простое, $(a,p) = 1$, $g$ — первообразный корень по модулю $p$, а числа $x, n, a, h$ — натуральные, $x < p$. Также $hg^h < p$ и $\lim\limits_{p\to+\infty} h(p) = +\infty$.

И. С. Нгонго [65] показал, что $\mathbf{M}\xi_x^{2r} = r! + O\left(\frac{1}{h}\right) + O\left(\frac{h^r}{p}\right)$. В настоящей работе остатки получены в явном виде.

**Теорема 10.** *Пусть* $\xi(x)$ — *величина, определенная выше. Тогда сущест-*

*вует такое* $p_1$, *что для всех* $p \geqslant p_1$ *и для* $1 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{2h}}{4}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_x^{2r} = r!\left(1 + \theta\frac{9 \cdot 4^r}{h}\right),$$

*где* $|\theta| \leqslant 1$.

Для $h = \left[\sqrt{\ln p}\right] + 1$ на основании теоремы 10 и метода, предложенного Р. Н. Бояриновым [19], [23], получена формула дробных моментов.

**Теорема 12.** *Пусть* $\xi_x$ *— величина, определенная выше. Тогда найдется такое* $p_0$, *что для любого* $p > p_0$ *и* $0 < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln p$ *справедливо равенство*:

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_p,$$

*где* $\Gamma(\cdot)$ *— гамма–функция Эйлера,* $|\theta| \leqslant 1$ *и*

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p} < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln p; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln\ln p}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2a}\right)}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2^{27}}\right)$.

Важной задачей при исследовании арифметических функций является проблема оценки скорости сходимости к предельному распределению. В [23] Р. Н. Бояриновым был предложен метод решения этой проблемы с использованием только асимптотических выражений для четных моментов. В главе 2 настоящей диссертации с помощью метода Р.Н.Бояринова и результатов главы 1 получены такие оценки. Кроме того, получены оценки мер больших значений.

В §1 рассматриваются аналоги сумм Клостермана. Пусть $p$ — простое число, $x$ — натуральное число. Рассмотрим сумму

$$S_p(x) = \sum_{q \leqslant h} e^{2\pi i x q^*/p},$$

где $h = \ln p$, а суммирование ведется по простым числам $q$, и $q^*$ определяется из сравнения $qq^* \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$.

Обозначим через $\mu$ меру больших значений суммы $S_p(x)$, где $\mu = \frac{\nu}{p}$ и $\nu = \#\{x : |S_p(x)| \geqslant \lambda\sqrt{z}\}$ — количество $x$, для которых выполняется неравенство в скобках. Доказана следующая теорема.

**Теорема 13.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_p(x)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 6 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

Положим $z = \pi(h)$ и $\xi_p(x) = \left|\frac{S_p(x)}{\sqrt{z}}\right|$. Доказана следующая теорема о скорости сходимости к предельному распределению.

**Теорема 14.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0$, что для любого $p > p_0$ справедливо равенство*

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

*где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_p(x)$ и $|R_p| \leqslant \frac{4600 \ln\ln\ln p}{\sqrt{\ln\ln p}}$.*

В §2 рассматривается бесконечная последовательность конечных абелевых групп $G_n$, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, где $s_n$ — количество примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, и величина вида $S_n(\chi) = \sum\nolimits'_{a \in G_n} \chi(a)$, где штрих у суммы означает, что суммирование ведется по образующим примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, а $\chi$ — характер абелевой группы $G_n$. Обозначим через $D_n$ порядок группы $G_n$.

Пусть $\mu$ — мера больших значений суммы $S_n(\chi)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{D_n}$, где $\nu = \#\{\chi : |S_n(\chi)| \geqslant \lambda\sqrt{s_n}\}$ — количество $\chi$, для которых выполняется неравенство в скобках. Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 16.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_n(\chi)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

Пусть $\xi_n(\chi) = \left| \frac{1}{\sqrt{s_n}} \sum'_{a \in G_n} \chi(a) \right|$. Доказана следующая теорема о скорости сходимости к предельному распределению.

**Теорема 17.** *Пусть $\xi_n(\chi)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $n_0$, что для любого $n > n_0$ справедливо равенство*:

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_n,$$

*где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_n(\chi)$ и $|R_n| \leqslant \frac{3240 \ln\ln s_m}{\sqrt{\ln s_m}}$.*

В §3 рассматриваются неполные суммы Гаусса. Пусть $p$ — простое, $c$ — целое, $(c;p) = 1$, числа $h$ и $x$ целые в пределах $0 < h < p$ и $0 \leqslant x < p$, а $\chi(n)$ — комплексный характер по модулю $p$. Пусть

$$S_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(n) \cdot e^{2\pi i cn/p}.$$

Обозначим как $\mu$ меру больших значений суммы $S_h(x)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{p}$, где $\nu = \#\{x : |S_h(x)| \geqslant \lambda\sqrt{h}\}$ — количество $x$, для которых выполняется неравенство в скобках. Доказана следующая теорема о мере больших значений суммы $S_h(x)$.

**Теорема 18.** *При $\lambda > 0$ для меры $\mu$ больших значений суммы $S_h(x)$ верно неравенство*

$$\mu < 15 \cdot e^{-\frac{2\lambda}{e}}.$$

Рассмотрим нормированную неотрицательную величину $\xi_p(x) = \left|\frac{S_h(x)}{\sqrt{h}}\right|$. Для $h = [\ln p]$ доказана теорема о скорости сходимости к предельному распределению.

**Теорема 19.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0$, что для любого $p > p_0$ справедливо равенство:*

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

*где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_p(x)$ и $|R_p| \leqslant \frac{810(\ln\ln\ln p)^2}{\sqrt{\ln\ln p}}$.*

Параграф 4 посвящен аналогу дзетовой суммы $S_h(x;T) = \sum\limits_{p \leqslant h} e^{2\pi i x T \ln p}$ и нормированной случайной величине $\xi(x) = \left|\frac{S_h(x;T)}{\sqrt{z}}\right|$, где $p$ — простое, $\lim\limits_{T\to+\infty} h = +\infty$ и $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{\ln h}{\ln T} = 0$. Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_h(x)$. Здесь $\mu = meas\{x \in (0;1) : |S_h(x)| \geqslant \lambda\sqrt{z}\}$ — мера $x$, для которых выполняется неравенство в скобках, где $z = \pi(h)$ — число простых чисел, не превосходящих $h = h(T)$. Доказана следующая теорема.

**Теорема 20.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_h(x)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 9 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

Для $h = [\ln T]$ доказана теорема о скорости сходимости распределения значений.

**Теорема 21.** *Пусть $\xi(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется* *такое* $T_0$*, что для любого* $T > T_0$ *справедливо равенство*:

$$F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_T,$$

*где* $F(\lambda)$ *— функция распределения величины* $\xi(x)$ *и* $|R_T| \leqslant \frac{4600 \ln\ln\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}$.

В §5 изучается короткая показательная рациональная тригонометрическая сумма по «сдвигам» интервалов суммирования $S_p(x;h) = \sum\limits_{x\leqslant n\leqslant x+h} e^{2\pi i \frac{ag^n}{p}}$ и нормированная случайная величина $\xi_x = \left|\frac{S_p(x;h)}{\sqrt{h}}\right|$, где $p$ — простое, $(a,p) = 1$, $g$ — первообразный корень по модулю $p$, а числа $x, n, a, h$ — натуральные, $x < p$. Также $\lim\limits_{p\to+\infty} h(p) = +\infty$ и $hg^h < p$.

Мера $\mu$ больших значений суммы $S_p(x)$ определяется как $\mu = \frac{\nu}{p-1}$, где $\nu = \#\{x : |S_p(x)| \geqslant \lambda\sqrt{h}\}$ — количество $x$, для которых выполняется неравенство в скобках. Доказана следующая теорема.

**Теорема 22.** *Для меры* $\mu$ *больших значений суммы* $S_h(x)$ *выполняется неравенство*

$$\mu < 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2e}}.$$

Для $h = \left[\sqrt{\ln p}\right] + 1$ доказана теорема о скорости сходимости распределения значений.

**Теорема 23.** *Пусть* $\xi_x$ *— величина, определенная выше. Тогда найдется такое* $p_0$*, что для любого* $p > p_0$ *справедливо равенство*:

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

*где* $F_p(\lambda)$ *— функция распределения величины* $\xi_x$ *и* $|R_p| \leqslant \frac{6480 \ln\ln\ln p}{\sqrt{\ln\ln p}}$.

В 1960 году А. Г. Постников [69] вывел закон распределения значений очень коротких рациональных тригонометрических сумм с показательной функцией в экспоненте. М. П. Минеев [59]-[61] и др. доказали новые метрические теоремы о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями. Аналогичные исследования, связанные с поведением частичных сумм лакунарных тригонометрических рядов были проведены Р. Форте [85], М. Кацем [88] – [89], А. Зигмундом [41], И. А. Ибрагимовым [42], В. Ф. Гапошкиным [35] -[36], В. Н. Чубариковым [26],[28], Р. Н. Бояриновым [8],[11],[24] и др. В главе 3 изучается поведение такой суммы на коротких интервалах.

Рассмотрим

$$\int_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} e^{-2\pi i m\alpha} d\alpha,$$

где $F_x$ — лакунарная последовательность, то есть $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$; $F_x, m \in Z$ и существует такое $A > 0$, что $F_x \leqslant A\beta^x$. Доказаны следующие утверждения.

**Теорема 24.** *Пусть $F_x$ — лакунарная последовательность натуральных чисел, такая что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$, $F_x \leqslant A\beta^x$, $k$ — фиксированное натуральное число, $m \in \mathbb{Z}$ и $m \neq 0$, $P$ — растущее натуральное число, $T_m$ — количество решений диофантова уравнения*

$$F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} = F_{y_1} + \ldots + F_{y_k} + m$$

*в целых числах $1 \leqslant x_i, y_j \leqslant P$. Тогда верно неравенство*

$$T_m \leqslant (\gamma+1)c^k k! P^{k-1} + 2c^k k! C_k^2 T P^{k-1},$$

*где* $\gamma = \left[\frac{\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{\ln\beta}\right] + 1$, $c = \frac{\beta}{\beta-1}$, $c_1 = \frac{1}{2A}$, $c_2 = \frac{\beta}{\varkappa F_1}$, $\varkappa = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$ *и* $T = \left[\frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}\right] + 1$.

Далее рассмотрим следующий интеграл

$$J_{a,b} = \int_a^b \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} d\alpha.$$

**Теорема 25.** *Пусть $F_x$ — последовательность натуральных чисел, такая что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$, $k$ — фиксированное натуральное число, $P$ — растущее натуральное число. Положим $T = \max\left(\left[\frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}\right] + 1, T_0\right)$, где $T_0 \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{\beta^{T_0}} < (1-1/\beta)^2$. Тогда при $2k^2T \leqslant P$ и $b-a \geqslant \frac{\ln P}{P}$ имеет место равенство*

$$J_{a,b} = (b-a)k!P^k + (b-a)\theta 2c_0^k k!TP^{k-1} +$$

$$+4\theta_2\left((\gamma+1)c^k k!P^{k-1} + 2c^k k!C_k^2 TP^{k-1}\right)\ln P + 4\theta_1 c^k k!P^{k-1}\ln P,$$

*где $|\theta|, |\theta_1|, |\theta_2| \leqslant 1$, $c_0 = \frac{2\beta}{\beta-1}$, $c = \frac{\beta}{\beta-1}$.*

**Следствие 1.** *Если $b-a \geqslant \frac{\ln P}{P^{1-\varepsilon}}$, где $0<\varepsilon<1$ и $2k^2T \leqslant P$, то имеет место равенство*

$$J_{a,b} = (b-a)k!P^k\left(1 + \theta\frac{14c^k(\gamma+1)^k T}{P^\varepsilon}\right),$$

*где $|\theta| \leqslant 1$.*

**Следствие 2.** *При $b-a \geqslant \frac{\ln P}{P}$ имеет место следующее неравенство*

$$J_{a,b} \leqslant (b-a)c_0^k k!P^k\left(2\gamma + 4T + 5\right).$$

Положим $S_P(\alpha) = \sum\limits_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}$. Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_P(\alpha)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{b-a}$, где $\nu = meas\{\alpha \in (a;b) : |S_P(\alpha)| \geqslant \lambda\sqrt{P}\}$ — мера $\alpha$, для которых выполняется неравенство в скобках.

**Теорема 26.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_P(\alpha)$ при $b-a \geqslant \frac{\ln P}{P}$ верно неравенство*

$$\mu < 3(2\gamma + 4T + 5)\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{c_0 e}},$$

*где $c_0 = \frac{2\beta}{\beta-1}$, $\gamma$ — из теоремы 24 и $T$ — из теоремы 25.*

Рассмотрим случайную величину $\xi = \left|\frac{S_P(\alpha)}{\sqrt{P}}\right|$.

**Теорема 27.** *Если длина отрезка $b-a \geqslant \frac{\ln P}{P^{1-\varepsilon}}$, где $0<\varepsilon<1$, то найдется* *такое* $P_0$*, что для любого* $P > P_0$ *справедливо равенство*

$$F_P(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p, \quad |R_P| \leqslant \frac{1620\sqrt{2\eta}\ln\ln P}{\sqrt{\varepsilon \ln P}},$$

*где* $F_P(\lambda)$ *— функция распределения величины* $\xi$*,* $c$*— константа из теоремы* 25 *и* $\eta = 3\ln(c(\gamma+1))$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.м.н Р. Н. Бояринову за постановку задач и внимание к работе.

# Глава 1

# Моменты арифметических сумм

## § 1. О моментах аналогов сумм Клостермана

Пусть $p$ — простое число, $x$ — натуральное число. Рассмотрим сумму

$$S_p(x;h) = \sum_{q \leqslant h} e^{2\pi i x q^*/p},$$

где $h = \ln p$, а суммирование ведется по простым числам $q$, и $q^*$ определяется из сравнения

$$qq^* \equiv 1 (\bmod\ p).$$

Для того чтобы в дальнейшем провести теоретико-вероятностную аналогию, положим $z = \pi(h)$ и

$$\xi = \xi_p(x) = \left| \frac{S_p(x)}{\sqrt{z}} \right|.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть $q_1, \ldots, q_r, q_{r+1}, \ldots, q_{2r}$ — простые числа, не превосходящие $h$, и $h^{2r-1} < (2r)^{-1}p$. Тогда для числа $T(h) = T_p(h)$ решений сравнения*

$$q_1^* + \ldots + q_r^* - q_{r+1}^* - \ldots - q_{2r}^* \equiv 0\,(\bmod\ p) \tag{1.1}$$

*при* $h \to \infty$ *и* $r \leqslant \sqrt{z}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$T(h) = r!z^r + \theta r! r^2 z^{r-1},$$

*где* $|\theta| \leqslant 1$, *а при* $r \leqslant z$ *верно неравенство*

$$T(h) \leqslant 2r^r z^r.$$

*Доказательство.* При рассуждениях будем следовать доказательству из [38]. Домножив сравнение (1.1) на

$$Q = q_1 \dots q_r q_{r+1} \dots q_{2r} \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p),$$

получим сравнение

$$q_2 \dots q_r q_{r+1} \dots q_{2r} + \dots + q_1 \dots q_{r-1} q_{r+1} \dots q_{2r} -$$

$$-q_1 \dots q_r q_{r+2} \dots q_{2r} \dots - q_1 \dots q_r q_{r+1} \dots q_{2r-1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p).$$

Поскольку каждое слагаемое в этом сравнении меньше, чем $p/(2r)$, оно будет уравнением

$$\frac{Q}{q_1} + \dots + \frac{Q}{q_r} - \frac{Q}{q_{r+1}} - \dots - \frac{Q}{q_{2r}} = 0. \quad (1.2)$$

Наборы $(q_{r+1}, \dots, q_{2r})$, являющиеся перестановкой набора $(q_1, \dots, q_r)$, будут решениями последнего уравнения. Обозначим их количество через $T_1$. Очевидно, что

$$r!z(z-1)(z-2)\dots(z-r+1) \leqslant T_1(h) \leqslant r!z^r.$$

Оценим сверху число решений $q_1, \dots, q_r, q_{r+1}, \dots, q_{2r}$, для которых набор $(q_{r+1}, \dots, q_{2r})$ не является перестановкой набора $(q_1, \dots, q_r)$. Без ограничения общности можно считать, что $q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_r$ и $q_{r+1} \leqslant \ldots \leqslant q_{2r}$.

Пусть $q$ — максимальное из чисел $q_s$ и $q_{r+s}$, такое что

$$q_{2r} = q_r, \ldots q_{r+s+1} = q_{s+1},\, q_{r+s} \neq q_s.$$

Тогда уравнение (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{Q}{q_1} + \ldots + \frac{Q}{q_s} = \frac{Q}{q_{r+1}} + \ldots + \frac{Q}{q_{r+s}}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим случай $q > r$.

Без ограничения общности положим $q = q_s$. Пусть также $t$ таково, что $q_{t+1} = \ldots = q_s = q$ и $q_t \neq q_{t+1}$. Очевидно, что $t \leqslant s-1$, $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_t < q$ и $q_{r+1} \leqslant q_{r+2} \leqslant \ldots \leqslant q_{r+s} < q$.

Обозначим $Q_1 = \frac{Q}{q_{s+1}\cdots q_r \cdot q_{r+s+1}\cdots q_{2r}}$. Тогда $Q_1 = q^{s-t}A$, где $(A, q) = 1$. Равенство (1.3) равносильно следующему уравнению:

$$\frac{Q_1}{q_1} + \ldots + \frac{Q_1}{q_s} = \frac{Q_1}{q_{r+1}} + \ldots + \frac{Q_1}{q_{r+s}},$$

из которого, если собрать все слагаемые, равные $\frac{Q_1}{q}$, в левой части, а остальные в правой, следует равенство

$$(s-t)\frac{Q_1}{q} = q^{s-t}B, \tag{1.4}$$

где $(B, q) = 1$. Из равенства (1.4) получаем следующую цепочку:

$$(s-t)q^{s-t-1}A = q^{s-t}B \Rightarrow (s-t)\cdot A = q \cdot B \Rightarrow q \mid (s-t) \Rightarrow s-t \geqslant q.$$

При этом очевидно, что $s - t < r$, то есть получили противоречие первоначальному предположению.

Рассмотрим теперь случай $q \leqslant r$. Очевидно, что уравнение (1.3) имеет не более $r^{2s}$ решений, и соответственно уравнение (1.2) имеет не более $r^{2s}z^{r-s}$ решений. Отсюда следуют неравенства

$$r!z(z-1)(z-2)\dots(z-r+1) \leqslant T(h) \leqslant r!z^r + r^{2s}z^{r-s}.$$

Для $r \leqslant z$ можно записать следующее неравенство:

$$T(h) \leqslant r^r z^r + r^r z^r \left(\frac{r}{z}\right)^s \leqslant 2r^r z^r.$$

Пусть теперь $r \leqslant \sqrt{z}$. Тогда верно неравенство $r^{2s}z^{r-s} = z^{r-1}r^2\left(\frac{r^2}{z}\right)^{s-1} \leqslant z^{r-1}r^2$. Обозначим

$$\prod = z(z-1)(z-2)\dots(z-r+1) = z^r\left(1-\frac{1}{z}\right)\dots\left(1-\frac{r-1}{z}\right).$$

Поделив это равенство на $z^r$ и прологарифмировав его, получаем

$$\ln\frac{\prod}{z^r} = \sum_{k=1}^{r-1}\ln\left(1-\frac{k}{z}\right).$$

Так как верно неравенство $k \leqslant r-1 < \sqrt{z}$, то $1-\frac{k}{z} > 1-\frac{1}{\sqrt{z}}$, и, считая, что $z \geqslant 4$, заключаем

$$\frac{k/z}{1-\frac{k}{z}} \leqslant \frac{k}{z-\sqrt{z}} \leqslant \frac{2k}{z}.$$

Поскольку $\ln\left(1-\frac{k}{z}\right) > -\frac{k/z}{1-\frac{k}{z}}$, то с учетом полученного выше неравенства имеем

$$\ln\frac{\prod}{z^r} > \sum_{k=1}^{r-1} -\frac{2k}{z} = -\frac{r(r-1)}{z}.$$

Из последнего неравенства следует

$$z^r e^{-\frac{r(r-1)}{z}} < \prod.$$

А с учетом того, что $e^{-\frac{r(r-1)}{z}} > 1 - \frac{r(r-1)}{z} > 1 - \frac{r^2}{z}$, получаем следующие неравенства:

$$r!z^r - r!r^2z^{r-1} \leqslant T(h) \leqslant r!z^r + z^{r-1}r^2.$$

Таким образом, можно записать $T(h) = r!z^r + \theta r!r^2z^{r-1}$, где $|\theta| \leqslant 1$.

□

Далее предположим, что $x$ принимает значения из интервала $1 \leqslant x \leqslant p$ с одинаковой вероятностью $1/p$. Существует такое $p_1$, что при $p > p_1$ верно неравенство $(2r)^{-1}p > (\ln p)^{2r-1} = h^{2r-1}$, а значит для такого $h$ выполняются условия леммы 1.

Докажем теорему о моментах порядка $2r$ рассматриваемой случайной величины $\xi_p(x)$.

**Теорема 1.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда для $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{z}$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = r!\left(1 + \theta\frac{r^2}{z}\right),$$

*где $|\theta| \leqslant 1$.*

*Доказательство.*

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = \frac{1}{p}\sum_{x=1}^{p}\xi_p^{2r}(x) = \frac{1}{pz^r}\sum_{x=1}^{p}\left|\sum_{q\leqslant h} e^{2\pi i x q^*/p}\right|^{2r}.$$

Обозначим через $T(h) = T_p(h)$ число решений сравнения

$$q_1^* + \ldots + q_r^* - q_{r+1}^* - \ldots - q_{2r}^* \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p).$$

Ясно, что

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = \frac{1}{pz^r} \sum_{1\leqslant q_1,\dots,q_{2r}\leqslant h} \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i x(q_1^*+\ldots+q_r^*-q_{r+1}^*-\ldots-q_{2r}^*)/p} = z^{-r}T(h),$$

поскольку верно следующее равенство:

$$\frac{1}{p}\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i x m/p} = \begin{cases} 1, \text{ если } m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; p); \\ 0, \text{ если } m \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; p). \end{cases}$$

Воспользовавшись леммой 1, получим утверждение теоремы. □

Пусть $m_a(p) = \frac{1}{p}\sum\limits_{x=1}^{p} \xi_p^a(x)$ — моменты рассматриваемой случайной величины. Докажем справедливость следующей теоремы о дробных моментах.

**Теорема 2.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0$, что для любого $p > p_0$ и $0 < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln p$ справедливо равенство*

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a+1) + \theta R_p,$$

*где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $|\theta| \leqslant 1$ и*

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p} < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln p, \end{cases}$$

*где* $R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln\ln p}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_2 = 2^7\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2a}\right)}{\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_3 = 2^3\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2^{27}}\right)$.

*Доказательство.* Согласно теореме 1 для $r \leqslant \sqrt{z}$ будем иметь $m_{2r}(p) =$

$r! + \theta\frac{r!r^2}{z} = r!\left(1 + \theta\frac{r^2}{z}\right)$, где $|\theta| \leqslant 1$. Тогда при $r \leqslant \sqrt[4]{z}$ справедливо равенство $m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$.

Неравенства $z = \pi(h) \geqslant \frac{h}{2\ln h} = \frac{\ln p}{2\ln\ln p} \geqslant \sqrt{\ln p}$ верны для всех $p$, начиная с некоторого $p_2$.

Положим $p_0 =\max(p_1, p_2)$. Тогда при $p > p_0$ и при $r \leqslant \sqrt[4]{z}$ верно следующее равенство:

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta_1\frac{1}{(\ln p)^{1/4}}\right),$$

где $|\theta_1| \leqslant 1$.

Положим $\rho = \frac{1}{2^4}$. Поскольку

$$\left[\frac{1}{2^4}\ln(\ln p)^{1/4}\right] + 1 < \ln(\ln p)^{1/8} + 1 \leqslant \sqrt[4]{(\ln p)^{1/2}},$$

то можно применить следующую теорему.

**Теорема 3.** *Пусть существует абсолютная постоянная $n_0 \geqslant 1$, такая что для любого $n > n_0$ и любых целых чисел $1 \leqslant \nu \leqslant [\varrho\ln f(n)] + 1$, где $0 < \varrho \leqslant 0.1$ — некоторая постоянная, справедливо следующее равенство*:

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu}\left(1 + \frac{\theta}{f(n)}\right),\ |\theta| \leqslant 1,$$

*где $f(\cdot)$ — вещественнозначная функция и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, а $\sigma_{2\nu}$ — некоторая последовательность положительных чисел, определяемая ниже. Тогда найдется вещественное число $n_1 > n_0$, такое что для любого $n > n_1$ и любого $0 < a \leqslant 0.5\varrho\ln f(n)$ справедливо равенство*

$$m_a(n) = \mu(a) + \theta R_n,$$

*где $\mu(a)$ — некоторая функция параметра $a$, определяемая ниже, $|\theta| \leqslant 1$ и*

$$R_n = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{\varrho}{2^{16+2\delta}}\sqrt{\ln f(n)}; \\ R_3, & \frac{\varrho}{2^{16+2\delta}}\sqrt{\ln f(n)} < a \leqslant 0.5\varrho \ln f(n); \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{11-\delta}}{a}\left(\frac{2^{22}\ln\ln f(n)}{\varrho \ln f(n)}\right)^{\frac{a+1+\delta}{2}},$$

$$R_2 = 2^7\mu(a)\left(\frac{2^{12+2\delta}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln f(n)}}{a}\right)}{\varrho\ln f(n)}\right)^{\frac{a+1+\delta}{2}},$$

$$R_3 = 2^{2+\delta}\mu(a)\exp\left(-\frac{\varrho\sqrt{\ln f(n)}}{2^{20+2\delta}}\right).$$

$$\mu(a) \equiv \begin{cases} 2^{0.5a}\Gamma(0.5a+0.5)\pi^{-0.5}, & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!} \text{ и } \delta = 0; \\ \Gamma(0.5a+1), & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \nu! \text{ и } \delta = 1, \end{cases}$$

*где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера.*

Доказательство см. в [19]

Применив теорему 3 для рассматриваемой величины и для $\sigma_{2\nu} \equiv \nu!$, $\delta = 1$, $f(p) = (\ln p)^{1/4}$, получаем требуемое утверждение. □

## § 2. О моментах сумм характеров абелевых групп

Рассмотрим бесконечную последовательность конечных абелевых групп $G_n$, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, где $s_n$ — количество примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, и величину вида $\xi_n(\chi) = \left|\frac{1}{\sqrt{s_n}}\sum\limits_{a\in G_n}{}' \chi(a)\right|$, где штрих у суммы означает, что суммирование ведется по образующим примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, а $\chi$ — характер абелевой группы $G_n$. Обозначим через $D_n$ порядок группы $G_n$.

**Теорема 4.** *Пусть $\xi_n(\chi)$ — величина, определенная выше. Тогда для $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{s_n}$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_n^{2r} = r!\left(1 + \theta\frac{r^2}{s_n}\right),$$

*где $|\theta| \leqslant 1$.*

*Доказательство.* Вычислим момент порядка $2r$ случайной величины $\xi_n(\chi)$ для каждого $r \geqslant 1$:

$$\mathbf{M}\xi_n^{2r} = \frac{1}{D_n}\sum_{\chi}\xi_n^{2r}(\chi) = \frac{1}{D_n}\cdot\frac{1}{s_n^r}\sum_{\chi}\left|\sum_{a\in G_n}{}'\chi(a)\right|^{2r} =$$

$$= \frac{1}{s_n^r}\sum_{a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r\in G_n}{}'\frac{1}{D_n}\sum_{\chi}\chi(a_1)\overline{\chi(b_1)}\ldots\chi(a_r)\overline{\chi(b_r)} =$$

$$= \frac{1}{s_n^r}\sum_{a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r\in G_n}{}'\frac{1}{D_n}\sum_{\chi}\chi(a_1\ldots a_r)\overline{\chi(b_1\ldots b_r)}.$$

Имеет место следующее равенство

$$\frac{1}{D_n}\sum_{\chi}\chi(t)\overline{\chi(a)} = \begin{cases} 1, & \text{если } t = a; \\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{M}\xi_n^{2r}(\chi) = \frac{1}{s_n^r}\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_r\in G_n\\ a_1\ldots a_r=b_1\ldots b_r}}{}' 1.$$

Найдем количество решений уравнения $a_1\ldots a_r = b_1\ldots b_r$. В силу однозначности разложения на примарные сомножители набор чисел $b_1,\ldots,b_r$ является перестановкой $a_1,\ldots,a_r$. Если $a_1,\ldots,a_r$ — различные числа, то таких наборов будет ровно $s_n(s_n-1)\ldots(s_n-r+1)$, а число решений уравнения будет $r!s_n(s_n-1)\ldots(s_n-r+1)$.

Если среди чисел $a_1,\ldots,a_r$ есть хотя бы два одинаковых, то число таких наборов не превосходит $r(r-1)s_n^{r-1} \leqslant r^2 s_n^{r-1}$. Соответственно, число решений уравнения $a_1 \dots a_r = b_1 \dots b_r$ среди таких наборов не превосходит $r! r^2 s_n^{r-1}$.

При доказательстве леммы 1 было показано, что при $r \leqslant \sqrt{s_n}$

$$s_n^r \left(1 - \frac{r^2}{s_n}\right) < s_n(s_n - 1) \dots (s_n - r + 1).$$

Таким образом, при $r \leqslant \sqrt{s_n}$ верна следующая формула

$$\mathbf{M}\xi_n^{2r}(\chi) = \frac{1}{s_n^r}(r! s_n^r + \theta r! r^2 s_n^{r-1}) = r! + \theta \frac{r^2 r!}{s_n},$$

где $|\theta| \leqslant 1$. □

Докажем теорему о дробных моментах рассматриваемой случайной величины.

**Теорема 5.** *Пусть $\xi_n(\chi)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $n_0$, что для любого $n > n_0$ и $0 < a \leqslant \frac{1}{2^6} \ln s_n$ справедливо равенство*:

$$m_a(n) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_n,$$

*где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $|\theta| \leqslant 1$ и*

$$R_n = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\frac{\ln s_n}{2}}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\frac{\ln s_n}{2}} < a \leqslant \frac{1}{2^6} \ln s_n; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a} \left(\frac{2^{27} \ln\ln s_n}{\ln s_n}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \left(\frac{2^{19} a^2 \ln\left(\frac{\sqrt{\ln s_n}}{a\sqrt{2}}\right)}{\ln s_n}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{\ln s_n}}{2^{27}}\right)$.

*Доказательство.* Из теоремы 4 следует, что при $r \leqslant \sqrt[4]{s_n}$ верно равенство

$$m_{2r}(n) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt{s_n}}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Положим $\rho = \frac{1}{2^4}$. Поскольку $\left[\frac{1}{2^4}\ln\sqrt{s_n}\right] + 1 < \sqrt[4]{s_n}$, то можно воспользоваться теоремой 3 для $\sigma_{2\nu} \equiv \nu!$, $\delta = 1$ и $f(n) = \sqrt{s_n}$. Теорема доказана. $\square$

## § 3. О моментах неполных сумм Гаусса

Пусть $p$ — простое, $c$ — целое, $(c;p) = 1$, числа $h$ и $x$ целые в пределах $0 < h < p$ и $0 \leqslant x < p$, а $\chi(n)$ — комплексный характер по модулю $p$. Пусть

$$S_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(n) \cdot e^{2\pi icn/p}.$$

Рассмотрим нормированную неотрицательную величину

$$\xi_p(x) = \left|\frac{S_h(x)}{\sqrt{h}}\right|.$$

**Теорема 6.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда для $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{h}$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = r! + \theta\left(r!\frac{r^2}{h} + \frac{r!^2}{h} + \frac{2rh^r}{\sqrt{p}}\right),$$

*где $|\theta| \leqslant 1$.*

*Доказательство.* При рассуждениях будем следовать работе [39].

Предположим, что $x$ принимает значения из интервала $0 \leqslant x < p$ с одинаковой вероятностью $1/p$. Тогда момент порядка $2r$ случайной величины $\xi_p(x)$

будет равен
$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = \frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}\xi_p^{2r}(x) = \frac{1}{ph^r}\sum_{x=0}^{p-1}|S_h(x)|^{2r} =$$
$$= \frac{1}{ph^r}\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{n_1,\dots,n_{2r}=1}^{h}\chi\left(\frac{(x+n_1)\cdot\ldots\cdot(x+n_r)}{(x+n_{r+1})\cdot\ldots\cdot(x+n_{2r})}\right)\cdot e^{2\pi ic(n_1+\ldots+n_r-n_{r+1}-\ldots-n_{2r})/p} =$$
$$= \frac{1}{ph^r}\sum_{n_1,\dots,n_{2r}=1}^{h} e^{2\pi ic(n_1+\ldots-n_{2r})/p}\cdot\sum_{x=0}^{p-1}\chi\left(\frac{(x+n_1)\cdot\ldots\cdot(x+n_r)}{(x+n_{r+1})\cdot\ldots\cdot(x+n_{2r})}\right) =$$
$$= \frac{1}{ph^r}\left(J_1+J_2+J_3\right),$$
где в сумму $J_s$, $s = 1,2,3$ входят наборы $(n_1,\dots,n_{2r})$ из класса $K_s$. Класс $K_1$ состоит только из тех наборов, для которых $(n_{r+1},\dots,n_{2r})$ есть перестановка набора $(n_1,\dots,n_r)$. В класс $K_2$ входят только те наборы, для которых рациональная функция, стоящая под знаком характера, является $m$-ой степенью, где $m$ — минимальное натуральное число, такое что $\chi^m = \chi_0$ (так как $\chi$ — комплексный характер, то $m \geqslant 3$). Кроме того, набор из $K_2$ не входит в $K_1$, то есть $(n_{r+1},\dots,n_{2r})$ не является перестановкой набора $(n_1,\dots,n_r)$. Все оставшиеся наборы отнесем к классу $K_3$.

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно.
$$\frac{1}{ph^r}J_1 = \frac{1}{ph^r}\sum_{(n_1,\dots,n_{2r})\in K_1} p = \frac{1}{h^r}\sum_{(n_1,\dots,n_{2r})\in K_1} 1 = \frac{1}{h^r}T_1,$$
где $T_1$ — количество наборов в классе $K_1$. Очевидно, что
$$r!h(h-1)(h-2)\ldots(h-r+1) \leqslant T_1 \leqslant r!h^r.$$
При доказательстве леммы 1 было показано, что при $r \leqslant \sqrt{h}$
$$h^r\left(1-\frac{r^2}{h}\right) < h(h-1)(h-2)\ldots(h-r+1).$$

Таким образом, верны следующие неравенства:

$$r!\left(1-\frac{r^2}{h}\right)\leqslant\frac{1}{ph^r}J_1\leqslant r!<r!\left(1+\frac{r^2}{h}\right),$$

или $\frac{1}{ph^r}J_1 = r!+\theta\cdot r!\frac{r^2}{h}$, где $|\theta|\leqslant 1$.

Оценим $J_2$. Пусть $f(x)=(x+n_1)\cdot\ldots(x+n_r)$ и $g(x)=(x+n_{r+1})\cdot\ldots(x+n_{2r})$. В силу того, что $(n_1,\ldots,n_{2r})\in K_2$, получаем что $f(x)=d(x)f_0^m(x)$, $g(x)=d(x)g_0^m(x)$, где $d(x)$ — многочлен, делители которого являются многочленами степени меньшей, чем $m$. Степени многочленов $f$ и $g$ можно представить в виде $r=d+mt_0$, где $d$ — степень многочлена $d(x)$, $t_0$ — степень многочленов $f_0$ и $g_0$. Тогда количество наборов в классе $K_2$ не превосходит

$$r!^2h^dh^{2t_0}=r!^2h^{r-(m-2)t_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{ph^r}J_2=\frac{1}{h^r}\sum_{(n_1,\ldots,n_{2r})\in K_2}e^{2\pi ia(n_1+\ldots-n_{2r})/p}\leqslant\frac{1}{h^r}r!^2h^{r-(m-2)t_0}\leqslant\frac{r!^2}{h}.$$

Пусть теперь $(n_1,\ldots,n_{2r})\in K_3$. В силу оценки А.Вейля

$$\left|\sum_{x=0}^{p-1}\chi\left(\frac{(x+n_1)\cdot\ldots\cdot(x+n_r)}{(x+n_{r+1})\cdot\ldots\cdot(x+n_{2r})}\right)\right|\leqslant 2r\sqrt{p}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{ph^r}J_3\leqslant\frac{1}{ph^r}2h^{2r}r\sqrt{p}=2rh^r\cdot p^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, при $r\leqslant\sqrt{h}$ верно, что

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r}=r!+\theta\left(r!\frac{r^2}{h}+\frac{r!^2}{h}+\frac{2rh^r}{\sqrt{p}}\right).$$

□

Далее будем считать $h = [\ln p]$. Докажем справедливость следующей теоремы о дробных моментах.

**Теорема 7.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0$, что для любого $p > p_0$ и $0 < a \leqslant \frac{1}{2^5}\ln\ln\ln p$ справедливо равенство*:

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a+1) + \theta R_p,$$

*где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера, $|\theta| \leqslant 1$ и*

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\ln\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\ln\ln\ln p} < a \leqslant \frac{1}{2^5}\ln\ln\ln p; \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{26}\ln\ln\ln\ln p}{\ln\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$
$$R_2 = 2^7\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{18}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln\ln p}}{a}\right)}{\ln\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$
$$R_3 = 2^3\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln\ln p}}{2^{26}}\right).$$

*Доказательство.* Неравенство $\frac{r^2}{h} \leqslant \frac{2r!}{h}$ верно для всех $r$. Также существует такое $p_1$, что для любого $p > p_1$ при $r \leqslant \sqrt{\ln p}$ выполняется $\frac{2rh^r}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{r!^2}{h}$.

Таким образом, с учетом теоремы 6 можно записать, что $m_{2r}(p) = r!\left(1+\theta\frac{4r!}{h}\right)$ для всех $p > p_1$.

Пусть $r \leqslant \ln\ln\ln p$. Тогда $\ln r \leqslant \ln\ln\ln\ln p$. Следовательно, $r\ln r \leqslant \ln\ln\ln\ln p\cdot\ln\ln\ln p$. То есть

$$r! < r^r < e^{\ln\ln\ln p\cdot\ln\ln\ln\ln p} = (\ln\ln p)^{\ln\ln\ln\ln p}.$$

Существует такое $p_2$, что неравенство $(\ln\ln p)^{\ln\ln\ln\ln p} \leqslant \frac{\ln p-1}{4\ln\ln p}$ выполняется для всех $p > p_2$.

Таким образом, для $p > p_0 = \max(p_1; p_2)$ и при $r \leqslant \ln\ln\ln p$ верно равенство:

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\ln\ln p}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Положим $\rho = \frac{1}{2^4}$. Поскольку

$$\left[\frac{1}{2^4}\ln\ln\ln p\right] + 1 < \ln\ln\ln p,$$

то можно применить теорему 3. В данном случае $\sigma_{2\nu} \equiv \nu!$, $\delta = 1$ и $f(p) = \ln\ln p$, откуда получаем требуемое утверждение. $\square$

## § 4. О моментах аналога дзетовой суммы

Рассмотрим аналог дзетовой функции $S_h(x;T) = \sum\limits_{p\leqslant h} e^{2\pi i x T\ln p}$ и нормированную случайную величину $\xi(x) = \left|\frac{S_h(x;T)}{\sqrt{z}}\right|$, где $p$ — простое, $z = \pi(h)$ — число простых чисел, не превосходящих $h = h(T)$, $\lim\limits_{T\to+\infty} h = +\infty$ и $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{\ln h}{\ln T} = 0$.

**Теорема 8.** *Пусть $\xi(x)$ — величина, определенная выше. Тогда для $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{z}$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi^{2r} = r! + \theta\cdot\left(\frac{r!r^2}{z} + \frac{h^r}{Tz^r}\right),$$

*где $|\theta| \leqslant 1$.*

*Доказательство.* Вычислим моменты порядка $2r$ случайной величины $\xi(x)$ для каждого $r \geqslant 1$. При этом будем следовать доказательству [13].

$$\mathbf{M}\xi^{2r}(x) = \int\limits_0^1 \xi^{2r}(x)dx = \frac{1}{z^r}\sum_{p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_r\leqslant h}\int\limits_0^1 e^{2\pi i x T\ln\left(\frac{p_1\cdots p_r}{q_1\cdots q_r}\right)}dx =$$

$$= \frac{1}{z^r}A(r,h) + \frac{1}{z^r}B(r,h),$$

где $A(r,h) = \sum\limits_{\substack{p_1\cdot\ldots\cdot p_r = q_1\cdot\ldots\cdot q_r\\ p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_r\leqslant h}} 1$ и $B(r,h) = \sum\limits_{\substack{p_1\cdot\ldots\cdot p_r \neq q_1\cdot\ldots\cdot q_r\\ p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_r\leqslant h}} \int\limits_0^1 e^{2\pi i x T \ln\left(\frac{p_1\cdot\ldots\cdot p_r}{q_1\cdot\ldots\cdot q_r}\right)}dx.$

Оценим $B(r,h)$. Очевидно, что

$$\left|\int\limits_0^1 e^{2\pi i x T \ln\left(\frac{p_1\cdot\ldots\cdot p_r}{q_1\cdot\ldots\cdot q_r}\right)}dx\right| = \left|\frac{e^{2\pi i T \ln\left(\frac{p_1\cdot\ldots\cdot p_r}{q_1\cdot\ldots\cdot q_r}\right)} - 1}{2\pi i T \ln\left(\frac{p_1\cdot\ldots\cdot p_r}{q_1\cdot\ldots\cdot q_r}\right)}\right| \leqslant \frac{2}{2\pi T\left|\ln\left(\frac{p_1\cdot\ldots\cdot p_r}{q_1\cdot\ldots\cdot q_r}\right)\right|}.$$

Используя неравенство $\left|\ln\frac{a}{b}\right| \geqslant \min\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$ при $a\neq b$, получим $\left|\ln\left(\frac{p_1\cdot\ldots\cdot p_r}{q_1\cdot\ldots\cdot q_r}\right)\right| \geqslant \frac{1}{h^r}$ при $p_1\cdot\ldots\cdot p_r \neq q_1\cdot\ldots\cdot q_r$. Отсюда $|B(r,h)| \leqslant \frac{h^r}{T}$.

При доказательстве теоремы 4 было показано, что у уравнения $p_1\cdot\ldots\cdot p_r = q_1\cdot\ldots\cdot q_r$ при $p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_r \leqslant h$ и $r\leqslant\sqrt{z}$ есть $r!z^r + \theta r! r^2 z^{r-1}$ решений.

Таким образом, $A(r,h) = r!z^r + \theta r! r^2 z^{r-1}$ при $r\leqslant\sqrt{z}$ и

$$\mathbf{M}\xi^{2r}(x) = r! + \theta\cdot\left(\frac{r!r^2}{z} + \frac{h^r}{Tz^r}\right),$$

где $|\theta|\leqslant 1$. □

Положим $h = \ln T$ и докажем теорему о дробных моментах рассматриваемой случайной величины.

**Теорема 9.** *Пусть $\xi(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $T_0$, что для любого $T > T_0$ и $0 < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln T$ справедливо равенство*:

$$m_a(n) = \Gamma(0.5a+1) + \theta R_m,$$

*где* $\Gamma(\cdot)$ — *гамма–функция Эйлера,* $|\theta| \leqslant 1$ *и*

$$R_T = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln T}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln T} < a \leqslant \frac{1}{2^7}\ln\ln T; \end{cases}$$

$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln\ln T}{\ln\ln T}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln T}}{2a}\right)}{\ln\ln T}\right)^{\frac{a+2}{2}}$,

$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln T}}{2^{27}}\right)$.

*Доказательство.* Существует такое $T_1$, что для всех $T > T_1$, с учетом теоремы 8 можно записать $\mathbf{M}\xi^{2r}(x) = r! + \theta \cdot \frac{2r!r^2}{z}$.

Неравенства $z = \pi(h) \geqslant \frac{h}{2\ln h} \geqslant 2\sqrt{h}$ верны для всех $T$, начиная с некоторого $T_2$.

Положим $T_0 =$max$(T_1, T_2)$. Тогда при $T > T_0$ и при $r \leqslant \sqrt[8]{h} = \sqrt[8]{\ln T}$ верно следующее равенство:

$$\mathbf{M}\xi^{2r}(x) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{(\ln T)^{1/4}}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Положим $\rho = \frac{1}{2^4}$. Поскольку

$$\left[\frac{1}{2^4}\ln\left(\sqrt[4]{\ln T}\right)\right] + 1 < \sqrt[8]{\ln T},$$

то можно применить теорему 3. В нашем случае $\sigma_{2\nu} \equiv \nu!$, $\delta = 1$ и $f(T) = \sqrt[4]{\ln T}$, откуда получаем требуемое утверждение. □

## § 5. О моментах короткой показательной рациональной тригонометрической суммы по «сдвигам» интервалов суммирования

Рассмотрим сумму вида $S_p(x;h) = \sum\limits_{x\leqslant n\leqslant x+h} e^{2\pi i \frac{ag^n}{p}}$ и нормированную случайную величину $\xi_x = \left|\frac{S_p(x;h)}{\sqrt{h}}\right|$, где $p$ — простое, $(a,p) = 1$, $g$ — первообразный корень по модулю $p$, а числа $x, n, a, h$ — натуральные, $x < p$. Также $\lim\limits_{p\to+\infty} h(p) = +\infty$ и $hg^h < p$.

**Теорема 10.** *Пусть $\xi(x)$ — величина, определенная выше. Тогда существует такое $p_1$, что для всех $p \geqslant p_1$ и для $1 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{2h}}{4}$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathbf{M}\xi_x^{2r} = r!\left(1 + \theta\frac{9\cdot 4^r}{h}\right),$$

*где $|\theta| \leqslant 1$.*

*Доказательство.* Вычислим моменты порядка $2r$ случайной величины $\xi_x$ для каждого $r \geqslant 1$. При этом будем следовать доказательству из [65].

$$\mathbf{M}\xi_x^{2r} = \frac{1}{p-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant p-1}\xi_x^{2r} = \frac{1}{p-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant p-1}\left|\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{1\leqslant m\leqslant h} e^{2\pi i\frac{ag^{x+m}}{p}}\right|^{2r} =$$

$$= \frac{1}{h^r}\cdot\frac{1}{p-1}\sum_{m_1,\ldots,m_{2r}=1}^{h}\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i\frac{ag^x}{p}(g^{m_1}+\ldots+g^{m_r}-g^{m_{r+1}}-\ldots-g^{m_{2r}})}.$$

Поскольку $x$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю $p$, а $g$ — первообразный корень, то $ag^x$ тоже пробегает приведенную систему вычетов по модулю $p$.

Имеет место следующее равенство:

$$\sum_{b=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{b\sigma}{p}} = \begin{cases} p-1, & \text{если } \sigma \equiv 0 \pmod{p}; \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathbf{M}\xi_x^{2r} = \frac{1}{h^r} A_1 - \frac{1}{h^r} \frac{1}{p-1} A_2,$$

где $A_1$ — количество решений сравнения

$$g^{m_1} + \ldots + g^{m_r} \equiv g^{m_{r+1}} + \ldots + g^{m_{2r}} \pmod{p},$$

а $A_2 = h^{2r} - A_1$.

Поскольку $hg^h < p$, вместо сравнения

$$g^{m_1} + \ldots + g^{m_r} \equiv g^{m_{r+1}} + \ldots + g^{m_{2r}} \pmod{p}$$

при $r \leqslant h$ можно рассмотреть равенство

$$g^{m_1} + \ldots + g^{m_r} = g^{m_{r+1}} + \ldots + g^{m_{2r}}.$$

Воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 11.** *Пусть $F_x$ — последовательность натуральных чисел, такая что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$, $k$ — фиксированное натуральное число, $P$ — растущее натуральное число, $T$ — натуральное число, для которого верно неравенство $\frac{1}{\beta^T} < (1 - 1/\beta)^2$, $A_k(P)$ — количество решений диофантова уравнения*

$$F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} = F_{y_1} + \ldots + F_{y_k}$$

*в целых числах* $1 \leqslant x_i, y_j \leqslant P$. *Тогда при* $2k^2T \leqslant P$

$$A_k(P) = k!P^k + \theta 2c_0^k k!TP^{k-1},$$

*где* $|\theta| \leqslant 1$, $c_0 = \frac{2\beta}{\beta-1}$.

Доказательство теоремы см. в [10] (стр. 19).

В нашем случае $F_x = g^x$, соответственно, $\beta = g \geqslant 2$, $P = h$, $k = r$. Все условия теоремы 11 выполняются, а значит при $2r^2T \leqslant h$ и $\frac{1}{g^T} < (1 - 1/g)^2$ имеем

$$A_1 = r!h^r + \theta 2c_0^r Tr!h^{r-1},$$

где $|\theta| \leqslant 1$, $c_0 = \frac{2g}{g-1}$.

Тогда $A_2 = h^{2r} - r!h^r - \theta 2c_0^r Tr!h^{r-1}$ и

$$\mathbf{M}\xi_x^{2r} = r! + \theta 2c_0^r Tr!\frac{1}{h} - \frac{1}{h^r}\frac{1}{p-1} \cdot \left(h^{2r} - r!h^r - \theta 2c_0^r Tr!h^{r-1}\right) =$$

$$= r! + \theta 2c_0^r Tr!\frac{1}{h} - \frac{h^r}{p-1} + \frac{r!}{p-1} + \theta 2c_0^r Tr!\frac{1}{(p-1)h}.$$

Положим $T = 4$. Поскольку $g \geqslant 2$, то $c_0 \leqslant 4$ и, таким образом, для $r \leqslant \frac{\sqrt{2h}}{4}$

$$\mathbf{M}\xi_x^{2r} = r! + 8\theta 4^r r!\frac{1}{h} - \frac{h^r}{p-1} + \frac{r!}{p-1} + 8\theta 4^r r!\frac{1}{(p-1)h}.$$

Тогда существует такое $p_1$, что для всех $p \geqslant p_1$ и $r \leqslant \frac{\sqrt{2h}}{4}$ можно записать

$$\mathbf{M}\xi_x^{2r} = r!\left(1 + \theta\frac{9 \cdot 4^r}{h}\right).$$

□

Для дальнейших рассуждений положим $h = \left[\sqrt{\ln p}\right] + 1$.

Верна следующая теорема о дробных моментах рассматриваемой случайной величины.

**Теорема 12.** *Пусть $\xi_x$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0$, что для любого $p > p_0$ и $0 < a \leqslant \frac{1}{2^7} \ln\ln p$ справедливо равенство*:

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a + 1) + \theta R_p,$$

*где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера, $|\theta| \leqslant 1$ и*

$$R_p = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30; \\ R_2, & 30 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p}; \\ R_3, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln\ln p} < a \leqslant \frac{1}{2^7} \ln\ln p; \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{10}}{a} \left( \frac{2^{28} \ln\ln\ln p}{\ln\ln p} \right)^{\frac{a+2}{2}},$$
$$R_2 = 2^7 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \left( \frac{2^{20} a^2 \ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2a}\right)}{\ln\ln p} \right)^{\frac{a+2}{2}},$$
$$R_3 = 2^3 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \exp\left( -\frac{\sqrt{\ln\ln p}}{2^{27}} \right).$$

*Доказательство.* Для $r \leqslant \frac{\ln h}{4}$ верны неравенства

$$4^r \leqslant e^{\frac{\ln h}{4} \ln 4} = e^{\frac{\ln h}{2} \frac{\ln 4}{2}} = (\sqrt{h})^{\frac{\ln 4}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{h}}{9}.$$

Существует такое $p_2$, что для всех $p > p_2$ верно неравенство $\frac{\ln h}{4} < \frac{\sqrt{2h}}{4}$. Таким образом, с учетом теоремы 10 при $p > p_0$, где $p_0 = \max(p_1, p_2)$, и при $r \leqslant \frac{\ln\ln p}{8} \leqslant \frac{\ln h}{4}$ имеет место выражение

$$m_{2r}(p) = r! \left( 1 + \theta \frac{1}{\sqrt[4]{\ln p}} \right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Положим $\rho = \frac{1}{2^4}$. Поскольку

$$\left[ \frac{1}{2^4} \ln\left(\sqrt[4]{\ln p}\right) \right] + 1 < \frac{\ln\ln p}{8},$$

то можно применить теорему 3.

В нашем случае $\sigma_{2\nu} \equiv \nu!$, $\delta = 1$ и $f(p) = \sqrt[4]{\ln p}$, откуда получаем требуемое утверждение. $\square$

# Глава 2

# О распределении значений арифметических сумм

## § 1. О распределении значений аналогов сумм Клостермана

Пусть $p$ — простое число, $x$ — натуральное число. Рассмотрим сумму

$$S_p(x;h) = \sum_{q \leqslant h} e^{2\pi i x q^*/p},$$

где $h = \ln p$, а суммирование ведется по простым числам $q$, и $q^*$ определяется из сравнения

$$qq^* \equiv 1(\text{mod } p).$$

Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_p(x)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{p}$, где $\nu = \#\{x : |S_p(x)| \geqslant \lambda\sqrt{z}\}$ — количество $x$, для которых выполняется неравенство в скобках.

**Теорема 13.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_p(x)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 6 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

*Доказательство.* Очевидно, что при $\lambda > \sqrt{z}$ имеем $\nu = 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda \leqslant \sqrt{z}$. Рассмотрим $\lambda \geqslant \sqrt{e}$. Тогда

$$\frac{\nu}{p}\lambda^{2r}z^r = \frac{\nu}{p}(\lambda\sqrt{z})^{2r} \leqslant \frac{1}{p}\sum_{x=1}^{p}|S_p(x)|^{2r} = T(h).$$

В лемме 1 было показано, что $T(h) \leqslant 2r^r z^r$ при $r \leqslant z$, откуда следует, что $\mu \leqslant 2\left(\frac{r}{\lambda^2}\right)^r$.

Для $r = \left[\frac{\lambda^2}{e}\right]$ верны неравенства $\frac{\lambda^2}{e} - 1 < r \leqslant \frac{\lambda^2}{e} \leqslant \frac{z}{e}$. С учетом данных неравенств получаем:

$$\mu \leqslant 2 \cdot e^{-r} < 2 \cdot e \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}} < 6 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

Если $\lambda < \sqrt{e}$, то воспользуемся тривиальной оценкой $\mu \leqslant 1$. Так как при таких $\lambda$ оценка $1 \leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{e}}$ верна, то теорема доказана. $\square$

Положим $z = \pi(h)$ и

$$\xi = \xi_p(x) = \left|\frac{S_p(x)}{\sqrt{z}}\right|.$$

Справедлива следующая теорема о скорости сходимости распределения значений рассматриваемой случайной величины.

**Теорема 14.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0$, что для любого $p > p_0$ справедливо равенство*

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

*где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_p(x)$ и $|R_p| \leqslant \frac{4600 \ln\ln\ln p}{\sqrt{\ln\ln p}}$.*

*Доказательство.* Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2, получим, что существует такое $p_0$, что при $p > p_0$ и при $r \leqslant$

$\sqrt[4]{(\ln p)^{1/2}}$ верно равенство

$$m_{2r}(p) = r!\left(1+\theta\frac{1}{(\ln p)^{1/4}}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Верны следующие утверждения.

**Теорема 15.** *Пусть существует абсолютная постоянная $n_0 \geqslant 1$, такая что для любого $n > n_0$ существует натуральное число $N = N(n) \geqslant 3$, такое что для любых целых чисел $1 \leqslant \nu \leqslant N$ справедливо равенство*

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu}\left(1+\frac{\theta}{f(n)}\right), \quad |\theta| \leqslant 1,$$

*где $f(\cdot)$ — вещественнозначная функция и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, а $\sigma_{2\nu}$ — некоторая последовательность положительных чисел. Тогда найдется вещественное число $n_1 > n_0$, такое что для любого $n > n_1$ и любого $a > 0$ справедливо равенство*

$$F_n(a) = F(a) + R_n,$$

*где*

$$|R_n| \leqslant 6\left(\frac{134(\ln N+1)}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2^N} + \frac{3^N}{f(n)}\right),$$

$$F(a) \equiv \begin{cases} 1-e^{-a^2}, \ \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \nu!; \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^a e^{-t^2/2}dt, \ \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!}. \end{cases}$$

**Следствие 1.** *Если $N = [\kappa \ln f(n)] + 1$, где $0 < \kappa \leqslant \frac{1}{\ln 6}$ — некоторая постоянная, то*

$$|R_n| \leqslant \frac{1620 \ln\ln f(n)}{\sqrt{\kappa \ln f(n)}}.$$

Доказательства см. в [18].

Положим $\kappa = \frac{1}{2}$ и $N = \left[\frac{1}{8}\ln\ln p\right] + 1$. Тогда $N \leqslant \ln(\ln p)^{1/8} + 1 \leqslant$

$\sqrt[4]{(\ln p)^{1/2}} \leqslant \sqrt[4]{z}$, а значит, при $p > p_0$ для $1 \leqslant r \leqslant N$ верно, что

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta_1 \frac{1}{(\ln p)^{1/4}}\right).$$

Следовательно можно применить следствие 1 из теоремы 15, то есть

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

где $|R_p| \leqslant \frac{1620 \ln\ln((\ln p)^{1/4})}{\sqrt{1/2 \ln((\ln p)^{1/4})}} = \frac{3240\sqrt{2}\ln\left(\frac{1}{4}\ln\ln p\right)}{\sqrt{\ln\ln p}} \leqslant \frac{4600 \ln\ln\ln p}{\sqrt{\ln\ln p}}$. □

## § 2. О распределении значений сумм характеров абелевых групп

Рассмотрим бесконечную последовательность конечных абелевых групп $G_n$, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, где $s_n$ — количество примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, и величину вида $\xi_n(\chi) = \left|\frac{1}{\sqrt{s_n}} \sum\limits_{a\in G_n}{}' \chi(a)\right|$, где штрих у суммы означает, что суммирование ведется по образующим примарных циклических подгрупп в разложении группы $G_n$, а $\chi$ — характер абелевой группы $G_n$. Обозначим через $D_n$ порядок группы $G_n$.

Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_n(\chi) = \sum\limits_{a\in G_n}{}' \chi(a)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{D_n}$, где $\nu = \#\{\chi : |S_n(\chi)| \geqslant \lambda\sqrt{s_n}\}$ — количество $\chi$, для которых выполняется неравенство в скобках.

**Теорема 16.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_n(\chi)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

*Доказательство.* Очевидно, что при $\lambda > \sqrt{s_n}$ будет верно, что $\nu = 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda \leqslant \sqrt{s_n}$. Рассмотрим $\lambda \geqslant \sqrt{e}$. Тогда

$$\frac{\nu}{D_n}\lambda^{2r}s_n^r = \frac{\nu}{D_n}(\lambda\sqrt{s_n})^{2r} \leqslant \frac{1}{D_n}\sum_{\chi}|S_n(\chi)|^{2r}.$$

Пусть $r \leqslant s_n$. Верна тривиальная оценка $\mathbf{M}\xi_n^{2r}(\chi) \leqslant r!$. Воспользовавшись ею, получим

$$\frac{\nu}{D_n}\lambda^{2r}s_n^r \leqslant r!s_n^r \leqslant r^r s_n^r,$$

откуда следует, что $\mu \leqslant \left(\frac{r}{\lambda^2}\right)^r$.

Для $r = \left[\frac{\lambda^2}{e}\right]$ верны неравенства $\frac{\lambda^2}{e} - 1 < r \leqslant \frac{\lambda^2}{e} \leqslant \frac{s_n}{e}$.

С учетом данных неравенств получаем

$$\mu \leqslant e^{-r} < e \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}} < 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

Если $\lambda < \sqrt{e}$, то воспользуемся тривиальной оценкой $\mu \leqslant 1$. Так как при таких $\lambda$ оценка $1 \leqslant 3e^{-\frac{\lambda^2}{e}}$ верна, то теорема доказана. □

Докажем теорему о скорости сходимости распределения значений рассматриваемой случайной величины.

**Теорема 17.** *Пусть $\xi_n(\chi)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $n_0$, что для любого $n > n_0$ справедливо равенство:*

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_n,$$

*где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_n(\chi)$ и $|R_n| \leqslant \frac{3240\ln\ln s_n}{\sqrt{\ln s_n}}$.*

*Доказательство.* В теореме 4 было доказано, что для $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{s_n}$ имеет место формула

$$\mathbf{M}\xi_n^{2r}(\chi) = r!\left(1 + \theta\frac{r^2}{s_n}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$. Таким образом, при $r \leqslant \sqrt[4]{s_n}$ верно, что

$$\mathbf{M}\xi_n^{2r}(\chi) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt{s_n}}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Положим $N = \left[\frac{1}{2}\ln\sqrt{s_n}\right] + 1$. Очевидно, что $N \leqslant \sqrt[4]{s_n}$. Применив следствие 1 теоремы 15, получим утверждение теоремы. □

## § 3. О распределении значений неполных сумм Гаусса

Пусть $p$ — простое, $c$ — целое, $(c;p) = 1$, числа $h$ и $x$ целые в пределах $0 < h < p$ и $0 \leqslant x < p$, а $\chi(n)$ — комплексный характер по модулю $p$. Пусть

$$S_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(n) \cdot e^{2\pi icn/p}.$$

Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_h(x)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{p}$, где $\nu = \#\{x : |S_h(x)| \geqslant \lambda\sqrt{h}\}$ — количество $x$, для которых выполняется неравенство в скобках.

**Теорема 18.** *При $\lambda > 0$ для меры $\mu$ больших значений суммы $S_h(x)$ верно неравенство*

$$\mu < 15 \cdot e^{-\frac{2\lambda}{e}}.$$

*Доказательство.* Очевидно, что при $\lambda > \sqrt{h}$ верно, что $\nu = 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda \leqslant \sqrt{h}$. Рассмотрим $\lambda \geqslant e$. Тогда

$$\frac{\nu}{p}\lambda^{2r}h^r = \frac{\nu}{p}(\lambda\sqrt{h})^{2r} \leqslant \frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}|S_h(x)|^{2r} = h^r\mathbf{M}\xi_p^{2r}.$$

С учетом оценок, полученных в теореме 6,

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} \leqslant r! + \frac{r!^2}{h} + \frac{2rh^r}{\sqrt{p}} \leqslant 2r!^2 < 2r^{2r}$$

для всех $p$ начиная с некоторого $p_0$.

Получаем, что $\mu \leqslant 2\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{2r}$.

Для $r = \left[\frac{\lambda}{e}\right]$ верны неравенства $\frac{\lambda}{e} - 1 < r \leqslant \frac{\lambda}{e} < \sqrt{h}$. С учетом данных неравенств получаем:

$$\mu \leqslant 2e^{-2r} < 2e^2 \cdot e^{-\frac{2\lambda}{e}} < 15 \cdot e^{-\frac{2\lambda}{e}}.$$

Если $0 < \lambda < e$, то воспользуемся тривиальной оценкой $\mu \leqslant 1$. При таких $\lambda$ верно, что $1 \leqslant \frac{15}{e^2} \leqslant 15e^{-\frac{2\lambda}{e}}$. □

Рассмотрим нормированную неотрицательную величину

$$\xi = \xi_p(x) = \left|\frac{S_h(x)}{\sqrt{h}}\right|.$$

Положим $h = [\ln p]$. Справедлива следующая теорема о скорости сходимости распределения значений рассматриваемой случайной величины.

**Теорема 19.** *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0$, что для любого $p > p_0$ справедливо равенство*:

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

*где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_p(x)$ и $|R_p| \leqslant \frac{810(\ln\ln\ln p)^2}{\sqrt{\ln\ln p}}$.*

*Доказательство.* В ходе доказательства теоремы 7 было показано, что при $r \leqslant \sqrt{\ln p}$ для всех $p$, начиная с некоторого $p_1$, имеет место равенство $\mathbf{M}\xi_p^{2r} = r!\left(1 + \theta\frac{4r!}{h}\right)$.

Пусть $r \leqslant \frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}$. Тогда $\ln r \leqslant \ln\ln\ln p$. Следовательно, $r\ln r \leqslant \frac{2\ln\ln p}{\ln\ln\ln p}$. Существует такое $p_2$, что для любого $p > p_2$ верно

$$r! < r^r < e^{\frac{2\ln\ln p}{\ln\ln\ln p}} < (\ln p)^{\frac{1}{3}}$$

Таким образом, для $p > \max(p_1, p_2)$ и при $r \leqslant \frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}$ верно равенство:

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt{\ln p}}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Положим $N = \left[\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}\right] + 1$. Так как $\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2} < N < \frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}$ и для данного $N$ выполнены условия теоремы 15, то

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

где $|R_p| \leqslant 6\left(\frac{134\left(\ln\left(\frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}\right)+1\right)}{\sqrt{\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}} + \frac{1}{2^{\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}} + \frac{3^{\frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}}{\sqrt{\ln p}}\right)$.

Существует $p_3$, такое что для всех $p > p_3$ верна цепочка

$$\frac{3^{\frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}}{\sqrt{\ln p}} = \frac{\ln p^{\frac{2\ln 3}{(\ln\ln\ln p)^2}}}{\sqrt{\ln p}} \leqslant \frac{(\ln p)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\ln p}} = \frac{1}{(\ln p)^{\frac{1}{4}}}.$$

Также существует $p_4$, такое что для всех $p > p_4$ верна цепочка

$$2^{\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}} = (\ln p)^{\frac{\ln 2}{(\ln\ln\ln p)^2}} > \ln\ln p.$$

С учетом того, что

$$\frac{134\left(\ln\left(\frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}\right)+1\right)}{\sqrt{\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}} \leqslant \frac{135(\ln\ln\ln p)^2}{\sqrt{\ln\ln p}},$$

для всех $p > p_0 = \max(p_1, p_2, p_3, p_4)$ получаем

$$|R_p| \leqslant 810\frac{(\ln\ln\ln p)^2}{\sqrt{\ln\ln p}}.$$

$\square$

## § 4. О распределении значений аналога дзетовой суммы

Рассмотрим аналог дзетовой функции $S_h(x;T) = \sum\limits_{p\leqslant h} e^{2\pi i x T\ln p}$ и нормированную случайную величину $\xi(x) = \left|\frac{S_h(x;T)}{\sqrt{z}}\right|$, где $p$ — простое, $z = \pi(h)$ — число простых чисел, не превосходящих $h = h(T)$, $\lim\limits_{T\to+\infty} h = +\infty$ и $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{\ln h}{\ln T} = 0$.

Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_h(x)$. В данному случае $\mu = meas\{x \in (0;1) : |S_h(x)| \geqslant \lambda\sqrt{z}\}$ — мера $x$, для которых выполняется неравенство в скобках.

**Теорема 20.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_h(x)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 9\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

*Доказательство.* Очевидно, что при $\lambda > \sqrt{z}$ будет верно, что $\mu = 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda \leqslant \sqrt{z}$. Рассмотрим $\lambda \geqslant \sqrt{e}$. Тогда

$$\mu(\lambda\sqrt{z})^{2r} \leqslant \int\limits_0^1 |S_h(x)|^{2r} = z^r\mathbf{M}\xi(x)^{2r} = A(r,h) + B(r,h),$$

где $A(r,h)$ и $B(r,h)$ были определены в теореме 8. Там же было показано, что $|B(r,h)| \leqslant \frac{h^r}{T}$.

Далее, при доказательстве теоремы 4 было показано, что у уравнения $p_1\cdot\ldots\cdot p_r = q_1\cdot\ldots\cdot q_r$ при $p_1,\ldots,p_r,q_1,\ldots,q_r \leqslant h$ и при $r \leqslant z$ не более чем $r!z^r + r!r^2z^{r-1}$ решений. То есть $A(r,h) \leqslant r!z^r + r!r^2z^{r-1}$ и, соответственно,

$$\mu\lambda^{2r}z^r \leqslant r!z^r + r!r^2z^{r-1} + \frac{h^r}{T} \leqslant 3r^rz^r,$$

начиная с некоторого $T_0$. Откуда следует, что $\mu \leqslant 3\left(\frac{r}{\lambda^2}\right)^r$.

Для $r = \left[\frac{\lambda^2}{e}\right]$ верны неравенства $\frac{\lambda^2}{e} - 1 < r \leqslant \frac{\lambda^2}{e} \leqslant \frac{h}{e}$.

С учетом данных неравенств получаем:

$$\mu \leqslant 3 \cdot e^{-r} < 3 \cdot e \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}} < 9 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}.$$

Если $\lambda < \sqrt{e}$, то воспользуемся тривиальной оценкой $\mu \leqslant 1$. Так как при таких $\lambda$ оценка $1 \leqslant 9 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{e}}$ верна, то теорема доказана. □

Пусть $h = \ln T$. Докажем теорему о скорости сходимости распределения значений случайной величины $\xi(x)$.

**Теорема 21.** *Пусть $\xi(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $T_0$, что для любого $T > T_0$ справедливо равенство*:

$$F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_T,$$

*где $F(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi(x)$ и $|R_T| \leqslant \frac{4600 \ln\ln\ln T}{\sqrt{\ln\ln T}}$.*

*Доказательство.* При доказательстве теоремы 9 было показано, что существует такое $T_0$, что при $T > T_0$ и $r \leqslant \sqrt[8]{\ln T}$ верно, что

$$\mathbf{M}\xi^{2r} = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt[4]{\ln T}}\right).$$

Пусть $N = \left[\frac{1}{2}\ln(\sqrt[4]{\ln T})\right] + 1$. Поскольку $\left[\ln(\sqrt[8]{\ln T})\right] + 1 < \sqrt[8]{\ln T}$, то можно воспользоваться следствием 1 теоремы 15, из которого следует требуемое утверждение. □

## § 5. О распределении значений короткой показательной рациональной тригонометрической суммы по «сдвигам» интервалов суммирования

Рассмотрим сумму вида $S_p(x;h) = \sum\limits_{x\leqslant n\leqslant x+h} e^{2\pi i\frac{ag^n}{p}}$ и нормированную случайную величину $\xi_x = \left|\frac{S_p(x;h)}{\sqrt{h}}\right|$, где $p$ — простое, $(a,p) = 1$, $g$ — первообразный корень по модулю $p$, а числа $x, n, a, h$ — натуральные, $x < p$. Также $\lim\limits_{p\to+\infty} h(p) = +\infty$ и $hg^h < p$.

Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_p(x)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{p-1}$, где $\nu = \#\{x : |S_p(x)| \geqslant \lambda\sqrt{h}\}$ — количество $x$, для которых выполняется неравенство в скобках.

**Теорема 22.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_h(x)$ выполняется неравенство*

$$\mu < 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2e}}.$$

*Доказательство.* Очевидно, что при $\lambda > \sqrt{h}$ будет верно, что $\nu = 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda \leqslant \sqrt{h}$. Рассмотрим $\lambda \geqslant \sqrt{2e}$. Тогда

$$\frac{\nu}{p-1}\lambda^{2r}h^r = \frac{\nu}{p-1}(\lambda\sqrt{h})^{2r} \leqslant \frac{1}{p-1}\sum_{x=1}^{p-1}|S_h(x)|^{2r} = h^r\mathbf{M}\xi_p^{2r}.$$

В ходе доказательства теоремы 10 было получено, что

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} = \frac{1}{h^r}A_1 - \frac{1}{h^r}\frac{1}{p-1}A_2,$$

то есть $\mathbf{M}\xi_p^{2r} \leqslant \frac{1}{h^r}A_1$, где $A_1$ — количество решений уравнения

$$g^{m_1} + \ldots + g^{m_r} = g^{m_{r+1}} + \ldots + g^{m_{2r}}.$$

Из следствия 1 леммы 1 ([10], стр. 17) получаем, что $A_1$ не превосходит $c^r r! h^r$, где $c = \frac{g}{g-1}$. Так как $g \geqslant 2$, то $c \leqslant 2$ и верна оценка

$$\mathbf{M}\xi_p^{2r} \leqslant \frac{1}{h^r} A_1 \leqslant 2^r r! \leqslant (2r)^r,$$

откуда получаем, что $\mu \leqslant \left(\frac{2r}{\lambda^2}\right)^r$.

Для $r = \left[\frac{\lambda^2}{2e}\right]$ верны неравенства $\frac{\lambda^2}{2e} - 1 < r \leqslant \frac{\lambda^2}{2e} \leqslant \frac{h}{e}$.

С учетом данных неравенств получаем:

$$\mu \leqslant e^{-r} < e \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2e}} < 3 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2e}}.$$

Если $\lambda < \sqrt{2e}$, то воспользуемся тривиальной оценкой $\mu \leqslant 1$. Так как при таких $\lambda$ оценка $1 \leqslant 3e^{-\frac{\lambda^2}{2e}}$ верна, то теорема доказана. □

Пусть $h = \left[\sqrt{\ln p}\right] + 1$. Докажем теорему о скорости сходимости распределения значений случайной величины $\xi(x)$.

**Теорема 23.** *Пусть $\xi_x$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0$, что для любого $p > p_0$ справедливо равенство:*

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

*где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_x$ и $|R_p| \leqslant \frac{6480 \ln\ln\ln p}{\sqrt{\ln\ln p}}$.*

*Доказательство.* При доказательстве теоремы 12 было показано, что существует такое $p_0$, что при $p > p_0$ и $r \leqslant \frac{\ln\ln p}{8}$ верно, что

$$\mathbf{M}\xi_x^{2r} = r! \left(1 + \theta \frac{1}{\sqrt[4]{\ln p}}\right).$$

Пусть $N = \left[\frac{1}{4}\ln(\sqrt[4]{\ln p})\right] + 1$. Поскольку $\left[\frac{1}{16}\ln\ln p\right] + 1 < \frac{\ln\ln p}{8}$, то можно воспользоваться следствием 1 теоремы 15, из которого следует требуемое утверждение. □

# Глава 3

# О распределении абсолютных значений специальной арифметической суммы

## § 1. О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы на коротких интервалах

Рассмотрим
$$\int\limits_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} e^{-2\pi i m\alpha} d\alpha,$$
где $F_x$ — лакунарная последовательность, то есть $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$; $F_x, m \in Z$ и существует такое $A > 0$, что $F_x \leqslant A\beta^x$.

Из соотношения
$$\int\limits_0^1 e^{2\pi i\alpha n}\, d\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 0; \\ 0, \text{ если } n \text{ — целое}, n \neq 0 \end{cases}$$
следует, что
$$\int\limits_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} e^{-2\pi i m\alpha} d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^1 \sum_{x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k \leqslant P} e^{2\pi i\alpha(F_{x_1}+\ldots+F_{x_k}-F_{y_1}-\ldots-F_{y_k}-m)} d\alpha = T_m,$$

где $T_m$ — количество решений уравнения

$$F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} = F_{y_1} + \ldots + F_{y_k} + m.$$

Следуя М. П. Минееву, назовем систему чисел $x_1, \ldots, x_k$ основной, если при $i \neq j$ $|x_i - x_j| \geqslant T$, где $T$ — некоторое натуральное число. В противном случае система $x_1, \ldots, x_k$ называется вспомогательной.

В дальнейших рассуждениях нам понадобится следующая лемма

**Лемма 2.** *Пусть $N, k, m_1, \ldots, m_k$ — натуральные числа, а $F_x$ — последовательность натуральных чисел, такая что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$. Тогда для количества решений $r_k(N)$ уравнения $N = m_1 F_{x_1} + \ldots + m_k F_{x_k}$ в целых числах $x_1, \ldots, x_k \geqslant 1$ справедлива следующая оценка: $r_k(N) \leqslant c^k k!$, где $c = \frac{\beta}{\beta-1}$.*

Доказательство см. в ([10] стр. 16, [28]).

Верна следующая теорема

**Теорема 24.** *Пусть $F_x$ — лакунарная последовательность натуральных чисел, такая что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$, $F_x \leqslant A\beta^x$, $k$ — фиксированное натуральное число, $m \in \mathbb{Z}$ и $m \neq 0$, $P$ — растущее натуральное число, $T_m$ — количество решений диофантова уравнения*

$$F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} = F_{y_1} + \ldots + F_{y_k} + m \tag{3.1}$$

*в целых числах $1 \leqslant x_i, y_j \leqslant P$. Тогда верно неравенство*

$$T_m \leqslant (\gamma + 1) c^k k! P^{k-1} + 2c^k k! C_k^2 T P^{k-1},$$

*где* $\gamma = \left[\frac{\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{\ln \beta}\right] + 1$, $c = \frac{\beta}{\beta-1}$, $c_1 = \frac{1}{2A}$, $c_2 = \frac{\beta}{\varkappa F_1}$, $\varkappa = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$ *и*

$T = \left[ \frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta} \right] + 1.$

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что $m > 0$.

Сначала рассмотрим вспомогательные системы чисел $y_1, ..., y_k$. Ясно, что таких систем будет не более $C_k^2 P^{k-1} T$. Из леммы 2 следует, что количество решений уравнения (3.1), в которых либо система $y_1, \ldots, y_k$, либо система $x_1, \ldots, x_k$ является вспомогательной, либо вспомогательными являются обе системы, не превзойдет $2c^k k! C_k^2 T P^{k-1}$.

Рассмотрим основные системы $y_1, \ldots, y_k$ и $x_1, \ldots, x_k$. Будем считать, что они упорядочены по убыванию: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_k$. Следовательно верны неравенства

$$x_s \leqslant x_1 - (s-1)T, \quad y_s \leqslant y_1 - (s-1)T, \quad 1 \leqslant s \leqslant k.$$

В силу неравенства $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$ получаем, что

$$\frac{F_{x_s}}{F_{x_1}} \leqslant \frac{1}{\beta^{(s-1)T}}, \quad \frac{F_{y_s}}{F_{y_1}} \leqslant \frac{1}{\beta^{(s-1)T}} \tag{3.2}$$

при $1 \leqslant s \leqslant k$.

Запишем уравнение (3.1) в следующем виде

$$F_{x_1}\left(1 + \frac{F_{x_2}}{F_{x_1}} + \ldots + \frac{F_{x_k}}{F_{x_1}}\right) = F_{y_1}\left(1 + \frac{F_{y_2}}{F_{y_1}} + \ldots + \frac{F_{y_k}}{F_{y_1}}\right) + m.$$

Пусть $x_1 > y_1$, то есть $x_1 \geqslant y_1 + 1$. Перепишем уравнение в следующем виде

$$F_{x_1}\left(1 + \frac{F_{x_2}}{F_{x_1}} + \ldots + \frac{F_{x_k}}{F_{x_1}} - \frac{F_{y_1}}{F_{x_1}} - \frac{F_{y_1}}{F_{x_1}}\left(\frac{F_{y_2}}{F_{y_1}} + \ldots + \frac{F_{y_k}}{F_{y_1}}\right)\right) = m.$$

Обозначим $H = 1 + \frac{F_{x_2}}{F_{x_1}} + \ldots + \frac{F_{x_k}}{F_{x_1}} - \frac{F_{y_1}}{F_{x_1}} - \frac{F_{y_1}}{F_{x_1}}\left(\frac{F_{y_2}}{F_{y_1}} + \ldots + \frac{F_{y_k}}{F_{y_1}}\right)$. Оценим $H$.

С учетом неравенств (3.2) можно записать:

$$H \leqslant 1 + \frac{1}{\beta^T} + \ldots + \frac{1}{\beta^{kT}} \leqslant 1 + \frac{1}{\beta^T} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta^T}} = 1 + \frac{1}{\beta^T - 1}.$$

То есть $H \leqslant 2$, если $\beta^T \geqslant 2$.

Оценим $H$ снизу.

$$H \geqslant 1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta^T} + \ldots + \frac{1}{\beta^{kT}}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^T - 1}.$$

При $\beta^T > \frac{4\beta}{\beta-1} > 2$ имеем $\frac{1}{\beta^T-1} = \frac{1}{\beta^T}\frac{1}{1-\frac{1}{\beta^T}} \leqslant \frac{\beta-1}{4\beta}2 = \frac{\beta-1}{2\beta}$. То есть

$$H \geqslant 1 - \frac{1}{\beta} - \frac{\beta - 1}{2\beta} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \varkappa.$$

Таким образом, при $T > \frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}$ получаем $0 < \varkappa \leqslant H \leqslant 2$.

Поскольку $F_{x_1} = \frac{m}{H}$, то $\frac{m}{2} \leqslant F_{x_1} \leqslant \frac{m}{\varkappa}$. Так как $F_{x_1} \leqslant A\beta^{x_1}$, то $\frac{m}{2A} \leqslant \beta^{x_1}$. С другой стороны $\frac{F_1}{\beta}\beta^{x_1} \leqslant F_{x_1}$. Отсюда имеем $\beta^{x_1} \leqslant \frac{m\beta}{\varkappa F_1}$. Обозначим $c_1 = \frac{1}{2A}$ и $c_2 = \frac{\beta}{\varkappa F_1}$. Таким образом, $mc_1 \leqslant \beta^{x_1} \leqslant mc_2$. Прологарифмировав и разделив на $\ln\beta$, получим

$$\frac{\ln(mc_1)}{\ln\beta} \leqslant x_1 \leqslant \frac{\ln(mc_2)}{\ln\beta}.$$

Получаем, что количество возможных значений $x_1$ можно оценить следующим образом:

$$\#\{x_1\} \leqslant \left[\frac{\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{\ln\beta}\right] + 1 = \gamma.$$

Из леммы 2 следует, что количество решений уравнения (3.1), в которых системы $y_1, \ldots, y_k$ и $x_1, \ldots, x_k$ является основными и $x_1 > y_1$, не превзойдет $c^k k! \gamma P^{k-1}$.

Рассмотрим случай $x_1 < y_1$. Запишем уравнение в виде

$$F_{y_1}\left(1+\frac{F_{y_2}}{F_{y_1}}+\ldots+\frac{F_{y_k}}{F_{y_1}}-\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}}-\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}}\left(\frac{F_{x_2}}{F_{x_1}}+\ldots+\frac{F_{x_k}}{F_{x_1}}\right)\right)=-m$$

и обозначим $H'=1+\frac{F_{y_2}}{F_{y_1}}+\ldots+\frac{F_{y_k}}{F_{y_1}}-\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}}-\frac{F_{x_1}}{F_{y_1}}\left(\frac{F_{x_2}}{F_{x_1}}+\ldots+\frac{F_{x_k}}{F_{x_1}}\right)$.

Заметим, что при $T>\frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}$ аналогично случаю $x_1>y_1$ получаем, что $0<\varkappa\leqslant H'\leqslant 2$. При этом из условия $\frac{F_{x+1}}{F_x}\geqslant\beta>1$ следует, что $F_{y_1}>0$. Таким образом, в левой части уравнения находится положительная величина, а в правой отрицательная, то есть при $x_1<y_1$ уравнение решений не имеет.

Рассмотрим случай $x_1=y_1$. Тогда уравнение (3.1) принимает вид

$$F_{x_2}+\ldots+F_{x_k}=F_{y_2}+\ldots+F_{y_k}+m.$$

Наборов $y_2,\ldots,y_k$ не более чем $P^{k-1}$, следовательно, из леммы 2 получаем, что количество решений такого уравнения не превосходит $c^{k-1}(k-1)!P^{k-1}$.

Таким образом, для количества решений $T_m$ уравнения (3.1) получаем

$$T_m\leqslant(\gamma+1)c^k k!P^{k-1}+2c^k k!C_k^2TP^{k-1}.$$

Теорема доказана. □

Далее рассмотрим следующий интеграл

$$J_{a,b}=\int\limits_a^b\left|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k}d\alpha.$$

Напомним, что характеристической функцией $\chi$ интервала $(a,b)$ называется следующая функция:

$$\chi(\alpha) = \chi_{a,b}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \in [a, b]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В [1] было показано, что

$$\chi_{a,b}(\alpha) = b - a + \sum_{0<|m|\leqslant N} a_m e^{2\pi i m\alpha} + R_N,$$

причем для остатка $R_N$ верно неравенство

$$|R_N| \leqslant \psi_N(b-\alpha) + \psi_N(a-\alpha),$$

где $\psi_N(x) = 4/\sqrt{1 + N^2 \sin^2 \pi x}$ и коэффициенты Фурье функции $\psi_N(x)$ оцениваются следующим образом:

$$|c_m| \leqslant (\pi N)^{-1} (4 + \ln N)\, e^{-|m|/N}.$$

**Лемма 3.** *Пусть $M = [N \ln N]$. Существует $N_0$ такое, что для всех $N > N_0$ можно записать, что*

$$\psi_N(\alpha) = \sum_{0<|m|\leqslant M} c_m e^{2\pi i m\alpha} + 2\theta_1 \frac{\ln N}{N},$$

*где $|\theta_1| \leqslant 1$.*

*Доказательство.* Функцию $\psi_N$ можно представить в виде

$$\psi_N(\alpha) = \sum_{0<|m|\leqslant M} c_m e^{2\pi i m\alpha} + c_0 + \sum_{M<|m|} c_m e^{2\pi i m\alpha}.$$

Оценим $\left(c_0+\sum\limits_{M<|m|}c_m e^{2\pi i m\alpha}\right)$:

$$\left|c_0+\sum_{M<|m|}c_m e^{2\pi i m\alpha}\right|\leqslant\frac{4+\ln N}{\pi N}+\frac{4+\ln N}{\pi N}\left|\sum_{M<|m|}e^{-\frac{|m|}{N}}\right|=$$

$$=\frac{4+\ln N}{\pi N}+2\frac{4+\ln N}{\pi N}\sum_{M<m}e^{-\frac{m}{N}}=\frac{4+\ln N}{\pi N}+2\frac{4+\ln N}{\pi N}e^{-\frac{M+1}{N}}\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{N}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4+\ln N}{\pi N}+2\frac{4+\ln N}{\pi N}e^{-\frac{N\ln N}{N}}2N\leqslant\frac{4+\ln N}{\pi N}+4\frac{4+\ln N}{\pi N}=\frac{20+5\ln N}{\pi N}.$$

Существует $N_0$ такое, что для всех $N>N_0$ верно $\frac{20+5\ln N}{\pi N}\leqslant\frac{2\ln N}{N}$. То есть для всех $N>N_0$ функцию $\psi_N(x)$ можно представить в виде

$$\psi_N(\alpha)=\sum_{0<|m|\leqslant M}c_m e^{2\pi i m\alpha}+2\theta_1\frac{\ln N}{N},$$

где $|\theta_1|\leqslant 1$. □

Верна следующая теорема.

**Теорема 25.** *Пусть $F_x$ — последовательность натуральных чисел, такая что $\frac{F_{x+1}}{F_x}\geqslant\beta>1$, $k$ — фиксированное натуральное число, $P$ — растущее натуральное число. Положим $T=\max\left(\left[\frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}\right]+1,T_0\right)$, где $T_0\in\mathbb{N}$ и $\frac{1}{\beta^{T_0}}<(1-1/\beta)^2$. Тогда при $2k^2T\leqslant P$ и $b-a\geqslant\frac{\ln P}{P}$ имеет место равенство*

$$J_{a,b}=(b-a)k!P^k+(b-a)\theta 2c_0^k k!TP^{k-1}+$$

$$+4\theta_2\left((\gamma+1)c^k k!P^{k-1}+2c^k k!C_k^2TP^{k-1}\right)\ln P+4\theta_1 c^k k!P^{k-1}\ln P,$$

*где $|\theta|,|\theta_1|,|\theta_2|\leqslant 1$, $c_0=\frac{2\beta}{\beta-1}$, $c=\frac{\beta}{\beta-1}$, $\gamma$ — константа из теоремы 24.*

*Доказательство.* Можно записать, что

$$J_{a,b}=\int\limits_a^b\left|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k}\,d\alpha=\int\limits_0^1\left|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k}\chi(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=(b-a)\int\limits_0^1\left|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k}\,d\alpha+\sum_{0<|m|\leqslant N}a_m\int\limits_0^1\left|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k}e^{2\pi i m\alpha}\,d\alpha+$$

$$+\int\limits_0^1\left|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k}R_N\,d\alpha.$$

Из теоремы 11 следует, что

$$\int\limits_0^1\left|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k}\,d\alpha=k!P^k+\theta 2c_0^k k!TP^{k-1}.$$

Таким образом,

$$J_{a,b}=(b-a)(k!P^k+\theta 2c_0^k k!TP^{k-1})+\sum_{0<|m|\leqslant N}a_mT_m+\int\limits_0^1\left|\sum_{x\leqslant P}e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k}R_N\,d\alpha.$$

Оценим $\left|\sum\limits_{0<|m|\leqslant N}a_mT_m\right|$. Пусть $D=(\gamma+1)c^kk!P^{k-1}+2c^kk!C_k^2TP^{k-1}$. Так как согласно теореме 24 $T_m\leqslant D$, то

$$\left|\sum_{0<|m|\leqslant N}a_mT_m\right|\leqslant 2D\sum_{m=1}^N|a_m|.$$

Так как $|a_m|\leqslant\min\left(b-a,\frac{1}{\pi|m|}\right)$, то $\sum\limits_{m=1}^N|a_m|\leqslant\min\left((b-a)N,\frac{\ln N}{\pi}\right)$.

При $b-a\geqslant\frac{\ln N}{N}$ имеем $\min\left((b-a)N,\frac{\ln N}{\pi}\right)=\frac{\ln N}{\pi}$ и, соответственно, $\left|\sum\limits_{0<|m|\leqslant N}a_mT_m\right|\leqslant 2D\ln N$.

Оценим последнее слагаемое:

$$\left|\int\limits_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} R_N\,d\alpha\right| \leqslant \int\limits_0^1 \left(\psi_N(b-\alpha)+\psi_N(a-\alpha)\right)\left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\sum_{0<|m|\leqslant M} c_m e^{2\pi i m(b-\alpha)} + \sum_{0<|m|\leqslant M} c_m e^{2\pi i m(a-\alpha)} + 4\theta_1\frac{\ln N}{N}\right)\cdot$$

$$\cdot\left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} d\alpha = \sum_{0<|m|\leqslant M} c_m e^{2\pi i m b}\int\limits_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} e^{-2\pi i m\alpha}\,d\alpha+$$

$$+\sum_{0<|m|\leqslant M} c_m e^{2\pi i m a}\int\limits_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} e^{-2\pi i m\alpha}\,d\alpha + \int\limits_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} 4\theta_1\frac{\ln N}{N}\,d\alpha =$$

$$= \sum_{0<|m|\leqslant M} T_m c_m e^{2\pi i m b} + \sum_{0<|m|\leqslant M} T_m c_m e^{2\pi i m a} + 4\theta_1\frac{\ln N}{N}c^k k! P^k.$$

Оценим $\sum\limits_{0<|m|\leqslant M} T_m c_m e^{2\pi i m b}$.

$$\left|\sum_{0<|m|\leqslant M} T_m c_m e^{2\pi i m b}\right| \leqslant \sum_{0<|m|\leqslant M} D\left|c_m e^{2\pi i m b}\right| = D\sum_{0<|m|\leqslant M}|c_m| \leqslant$$

$$\leqslant D\sum_{0<|m|\leqslant M}(\pi N)^{-1}(4+\ln N)\,e^{-|m|/N} =$$

$$= 2D\frac{4+\ln N}{\pi N}\sum_{0<m\leqslant[N\ln N]} e^{-m/N} \leqslant 2D\frac{4+\ln N}{\pi N}N \leqslant D\ln N.$$

Аналогично можно оценить сумму $\sum\limits_{0<|m|\leqslant M} T_m c_m e^{2\pi i m a}$.

Получаем, что когда длина отрезка $b-a \geqslant \frac{\ln N}{N}$, можно записать, что

$$J_{a,b} = (b-a)k!P^k + (b-a)\theta 2c_0^k k! T P^{k-1} + 4\theta_2 D\ln N + 4\theta_1\frac{\ln N}{N}c^k k! P^k.$$

Положим $N = P$ :

$$J_{a,b} = (b-a)k!P^k + (b-a)\theta 2c_0^k k!TP^{k-1} +$$

$$+4\theta_2\left((\gamma+1)c^k k!P^{k-1} + 2c^k k!C_k^2 TP^{k-1}\right)\ln P + 4\theta_1 c^k k!P^{k-1}\ln P.$$

Теорема доказана. $\square$

**Следствие 1.** *Если $b - a \geqslant \frac{\ln P}{P^{1-\varepsilon}}$, где $0 < \varepsilon < 1$ и $2k^2T \leqslant P$, то имеет место равенство*

$$J_{a,b} = (b-a)k!P^k\left(1 + \theta\frac{14c^k(\gamma+1)^k T}{P^\varepsilon}\right),$$

*где $|\theta| \leqslant 1$.*

*Доказательство.* Заметим, что $c_0 = \frac{2\beta}{\beta-1} = 2c$. А так как $2C_k^2 < 2^k < (\gamma+1)^k$, то

$$(\gamma+1)c^k k!P^{k-1} + 2c^k k!C_k^2 TP^{k-1} \leqslant$$

$$\leqslant (\gamma+1)^k c^k k!P^{k-1} + (\gamma+1)^k c^k k!TP^{k-1} \leqslant 2(\gamma+1)^k c^k k!TP^{k-1}.$$

При этом очевидно, что $c^k k!P^{k-1} \leqslant (\gamma+1)^k c^k k!TP^{k-1}$ и

$$(b-a)2c_0^k k!TP^{k-1} \leqslant 2(\gamma+1)^k c^k k!TP^{k-1}\ln P.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$J_{a,b} = (b-a)k!P^k + \theta 2(\gamma+1)^k c^k k!TP^{k-1}\ln P +$$

$$+\theta_2 8(\gamma+1)^k c^k k!TP^{k-1}\ln P + \theta_1 4(\gamma+1)^k c^k k!TP^{k-1}\ln P =$$

$$= (b-a)k!P^k\left(1 + \theta\frac{14c^k(\gamma+1)^k T\ln P}{(b-a)P}\right).$$

С учетом того, что $b - a \geqslant \frac{\ln P}{P^{1-\varepsilon}}$, получаем требуемое утверждение. $\square$

**Следствие 2.** *При $b-a \geqslant \frac{\ln P}{P}$ имеет место следующее неравенство:*

$$J_{a,b} \leqslant (b-a)c_0^k k! P^k \left(2\gamma + 4T + 5\right).$$

*Доказательство.* Из леммы 2 следует, что

$$\int\limits_0^1 \left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}\right|^{2k} d\alpha \leqslant c^k k! P^k.$$

Далее, так как $\ln P \leqslant (b-a)P$ и $2C_k^2 < 2^k$, то

$$\left((\gamma+1)c^k k! P^{k-1} + 2c^k k! C_k^2 T P^{k-1}\right)\ln P \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)c^k k! P^k \left((\gamma+1) + 2^k T\right) \leqslant (b-a)(2c)^k k! P^k \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + T\right)$$

и $\ln P c^k k! P^{k-1} \leqslant (b-a)\frac{c_0^k}{2^k} k! P^k$. Итого

$$J_{a,b} \leqslant (b-a)c_0^k k! P^k \left(\frac{1}{2} + 2\gamma + 2 + 4T + 2\right).$$

□

Положим $S_P(\alpha) = \sum\limits_{x\leqslant P} e^{2\pi i\alpha F_x}$ и $b-a \geqslant \frac{\ln P}{P}$. Оценим меру $\mu$ больших значений суммы $S_P(\alpha)$. Здесь $\mu = \frac{\nu}{b-a}$, где $\nu = meas\{\alpha \in (a;b) : |S_P(\alpha)| \geqslant \lambda\sqrt{P}\}$ — мера $\alpha$, для которых выполняется неравенство в скобках.

**Теорема 26.** *Для меры $\mu$ больших значений суммы $S_P(\alpha)$ при $b-a \geqslant \frac{\ln P}{P}$ верно неравенство*

$$\mu < 3(2\gamma + 4T + 5)\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{c_0 e}},$$

*где $c_0 = \frac{2\beta}{\beta-1}$, $\gamma$ — из теоремы 24 и $T$ — из теоремы 25*

*Доказательство.* Очевидно, что при $\lambda > \sqrt{P}$ будет верно, что $\nu = 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda \leqslant \sqrt{P}$. Рассмотрим $\lambda \geqslant \sqrt{c_0 e}$. Тогда

$$\frac{\nu}{b-a}\lambda^{2k}P^k = \frac{\nu}{b-a}(\lambda\sqrt{P})^{2k} \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |S_P(\alpha)|^{2k} \leqslant \frac{1}{b-a}J_{a,b}.$$

Воспользовавшись следствием 2 теоремы 25 получим, что

$$\frac{\nu}{b-a}\lambda^{2k}P^k \leqslant c_0^k k! P^k \left(2\gamma + 4T + 5\right),$$

откуда следует, что $\mu \leqslant (2\gamma + 4T + 5)\left(\frac{c_0 k}{\lambda^2}\right)^k$

Для $k = \left[\frac{\lambda^2}{c_0 e}\right]$ верны неравенства $\frac{\lambda^2}{c_0 e} - 1 < k \leqslant \frac{\lambda^2}{c_0 e}$. С учетом данных неравенств получаем

$$\mu \leqslant (2\gamma + 4T + 5)\cdot e^{-k} < (2\gamma + 4T + 5)\cdot e \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{c_0 e}} < 3(2\gamma + 4T + 5)\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{c_0 e}}.$$

Если $\lambda < \sqrt{c_0 e}$, то воспользуемся тривиальной оценкой $\mu \leqslant 1$. При таких $\lambda$ верно, что $1 \leqslant \frac{3(2\gamma+4T+5)}{e} \leqslant 3(2\gamma + 4T + 5)e^{-\frac{\lambda^2}{c_0 e}}$. Теорема доказана. □

Рассмотрим случайную величину $\xi = \left|\frac{S_P(\alpha)}{\sqrt{P}}\right|$.

**Теорема 27.** *Если длина отрезка* $b - a \geqslant \frac{\ln P}{P^{1-\varepsilon}}$, *где* $0 < \varepsilon < 1$, *то найдется такое* $P_0$, *что для любого* $P > P_0$ *справедливо равенство*

$$F_P(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p, \quad |R_P| \leqslant \frac{1620\sqrt{2\eta}\ln\ln P}{\sqrt{\varepsilon \ln P}},$$

*где* $F_P(\lambda)$ *— функция распределения величины* $\xi$, $c$*— константа из теоремы 25 и* $\eta = 3\ln\left(c(\gamma+1)\right)$.

*Доказательство.* Рассмотрим момент порядка $2k$ рассматриваемой случайной величины.

$$\mathbf{M}\xi^{2k} = \frac{1}{P^k}\cdot\frac{1}{b-a}\int\limits_0^1 |S_P(\alpha)|^{2k}\,d\alpha = \frac{1}{P^k}\cdot\frac{1}{b-a}J_{a,b}.$$

Воспользуемся следствием 1 теоремы 25, получаем:

$$\mathbf{M}\xi^{2k} = k!\left(1+\theta\frac{14c^k(\gamma+1)^kT}{P^\varepsilon}\right) = k!\left(1+\frac{\theta}{f(P)}\right),$$

где $f(P) = \frac{P^\varepsilon}{14c^k(\gamma+1)^kT}$ и равенство верно для всех $k$ из промежутка $1 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{P}{2T}}$.

При $1 \leqslant k \leqslant \frac{\varepsilon}{3\ln(c(\gamma+1))}\ln P$ верно, что $c^k(\gamma+1)^k \leqslant P^{\varepsilon/3}$, а значит начиная с некоторого $P_1$ верно, что $f(P) \geqslant P^{\varepsilon/2}$. Таким образом, при $1 \leqslant k \leqslant \frac{\varepsilon}{3\ln(c(\gamma+1))}\ln P$ имеем, что

$$\mathbf{M}\xi^{2k} = k!\left(1+\frac{\theta}{P^{\varepsilon/2}}\right),$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Заметим, что, начиная с некоторого $P_2$, верны неравенства

$$\left[\frac{1}{\eta}\ln P^{\varepsilon/2}\right]+1 = \left[\frac{\varepsilon}{2\eta}\ln P\right]+1 \leqslant \frac{\varepsilon}{\eta}\ln P.$$

Таким образом, для всех $P > P_0 = \max(P_1, P_2)$ выполняются условия следствия 1 теоремы 15, откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

# Литература

[1] *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004.

[2] *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей.// ГИТТЛ, 1946.

[3] *Бочкарев С. В.* Логарифмический рост средних арифметических от функций Лебега ограниченных ортонормированных систем// Докл. АН СССР, 1975, т. 223, №1, с. 16-19.

[4] *Бочкарев С. В.* Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопросы теории базисов// Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. CXLVI, 1978.

[5] *Бочкарев С. В.* Об одном методе оценки $L_1$ - нормы экспоненциальной суммы //Тр. МИАН, 1997, т. 218, с. 74-76.

[6] *Бояринов Р. Н.* Центральная предельная теорема для равномерного распределения дробных долей последовательности, связанной с числами Фибоначчи.// Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в третьем тысячелетии»: Тезисы докл. Межд. Конф. Алматы. 2000. 71 – 72.

[7] *Бояринов Р. Н.* Многомерный аналог теоремы Форте–Каца// Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Тезисы докл. IV Межд. Конф. - Тула. - 2001 г. 97–98.

[8] *Бояринов Р. Н.* Центральная предельная теорема для равномерного распределения дробных долей быстрорастущих последовательностей.// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2001. №5, 52 – 54.

[9] *Бояринов Р. Н.* Об одной предельной теореме типа Форте–Каца.// Третий всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докладов. «Обозрение прикладной и промышленной математики» 2002. **9**. вып. 2. 343 – 344.

[10] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений сумм арифметических функций// Диссертация кандидата физ.–мат. наук, Москва, МГУ им. Ломоносова, мех.–мат. ф–т, 2002

[11] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений сумм, связанных с быстрорастущими последовательностями// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2003. №2, 57-58.

[12] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости к предельному показательному распределению// Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тезисы докл. VI Межд. Конф. - Саратов. - 2004 г. 25-26.

[13] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений аналога дзетовой суммы// Вестник Московского Университета. Сер. Математика. Механика.2004. №3. С.55–56

[14] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости к предельному показательному распределению// Чебышевский сборник , т. 6, вып. 1, 2005, с.50–57.

[15] *Бояринов Р. Н.* Матричный аналог теоремы Форте-Каца//Восьмой всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докладов. «Обозрение прикладной и промышленной мате-матики» 2008. Т. 15. №1, С. 86–87.

[16] *Бояринов Р. Н.* Аргумент дзета–функции Римана// Труды VII международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы. Тула 2010, т. 11, вып. 1, 54–67.

[17] *Бояринов Р. Н.* О распределении больших значений аргумента дзета-функции Римана// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2010, №6, 55–58.

[18] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости распределений случайных величин// ДАН.2010. Т.435, №3. С.295–297

[19] *Бояринов Р. Н.* О дробных моментах случайных величин// ДАН.2011. Т.436, №3. С.299—301.

[20] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости к предельному распределению// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2011, №2, 20-27.

[21] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений дзета-функции Римана// ДАН.2011.Т. 438. №1. С. 14-16.

[22] *Бояринов Р. Н.* Вероятностные методы в теории аргумента дзета-функции Римана// Теория вероятностей и ее применения, 2011. Т.56. №2. с. 209-223.

[23] *Бояринов Р. Н.* Вероятностные методы в теории чисел и приложения в теории аргумента дзета–функции Римана// диссертация доктора физ.–мат. наук, Москва, МГУ им. Ломоносова, мех.–мат. ф–т, 2012

[24] *Бояринов Р. Н.* О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы// Дискретная математика. 24:1, 2012, С. 26–29.

[25] *Бояринов Р.Н., Нгонго И.С.* О распределении значений коротких сумм характеров Дирихле по простым числам// Алгебра и теория чисел: совре-

менные проблемы и приложения: Тезисы докл. VI Межд. Конф. Саратов, 2004, 26–27.

[26] *Бояринов Р. Н., Нгонго И. С., Чубариков В. Н.* О новых метрических теоремах в методе А.Г. Постникова// Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Труды IV Межд. Конф. Тула, 2002, С.5–31.

[27] *Бояринов Р.Н., Нгонго И.С., Чубариков В.Н.* О моделировании случайных величин на последовательности конечных абелевых групп// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2004. №2, 69-71.

[28] *Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н.* О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи// ДАН. 2001. Т.379, №1. С.9–11

[29] *Бредихин Б. М., Линник Ю. В.* Бинарные аддитивные задачи с эргодическими свойствами решений.// ДАН СССР. **166.** № 6. 1966.

[30] *Виноградов И. М.* Sur la distribution des residues et des non residues des puissances.// Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те. 1918. **1.** С. 94–98.

[31] *Виноградов И. М.* О распределении квадратичных вычетов и невычетов.// Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те. 1919. **2.** С. 1–16.

[32] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел.// М., Наука, 1972.

[33] *Виноградов И. М.* Избранные труды.// Изд. АН СССР, 1952.

[34] *Гараев М. З.* О нижних оценках $L_1$ - нормы некоторых экспоненциальных сумм//Матем. заметки, 68:6 (2000), С. 842–850.

[35] *Гапошкин В. Ф.* О скорости приближения к нормальному закону распределений взвешенных сумм лакунарных рядов// Теория вероятностей и ее применения, 1968. **13**, вып. 3, 445–461.

[36] *Гапошкин В. Ф.* О центральной предельной теореме для некоторых слабо зависимых последовательностей// Теория вероятностей и ее применения, 1970. **15**, вып. 5, 666–684.

[37] *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений.// М., Высшая школа. 2000. 312.

[38] *Жимбо Э. К., Чубариков В. Н.* О распределении арифметических функций по простому модулю // Дискретная математика.2001. Т.13, выпуск 3. 32–41

[39] *Жимбо Э. К.* О распределении значений модулей неполных сумм Гаусса // Вестник Московского Университета. Сер. Математика. Механика.2001. №2. С.67–69

[40] *Жимбо Э. К., Чубариков В. Н.* Об асимптотических распределениях значений арифметических функций.// Докл. РАН. 2001.**377.** №2.

[41] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды// т. II, М., ИЛ, 1964.

[42] *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для сумм функций независимых случайных величин и сумм вида $\sum f(2^k t)$// Теория вероятностей и ее применения, 1967. **12**, вып. 4, 655 – 665.

[43] *Карацуба А. А.* Аналоги сумм Клостермана// Изв. РАН. Сер. математика. 1995. Т.59, № 5. 93–102

[44] *Карацуба А. А.* Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю.// Докл. РАН. 1993. **333.** №2. 138 –139.

[45] *Карацуба А. А.* Двойные суммы Клостермана. // Матем. заметки. 1999. **66.** вып. 5. 682 – 687.

[46] *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел.// Едиториал УРСС, 2004.

[47] *Карацуба А. А.* О функции S(t)// Изв. РАН. Сер. матем., 60:5 (1996), 27–56.

[48] *Карацуба А. А.* Об оценке $L_1$ - нормы одной экспоненциальной суммы// Матем. заметки, 64:3 (1998), С. 465–468.

[49] *Карацуба А. А., Королев М. А.* Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой// Успехи математических наук, 2006. Т.61, №3(369), С. 3–92

[50] *Карацуба А. А., Королев М. А.* Аргумент дзета-функции Римана // Успехи математических наук, 2005, Т. 60, №3 (363), С. 41–96

[51] *Конягин С. В.* О проблеме Литтлвуда// Изв. АН СССР, сер. матем., 1981, т. 45, №2, с. 243-265.

[52] *Конягин С. В.* Об оценке $L_1$ — нормы одной экспоненциальной суммы// Теория приближений функций и операторов, тезисы докладов международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения С. Б. Стечкина. Екатеринбург, 2000, с. 88-89.

[53] *Королев М. А.* Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой//Тр. Мат. Ин. В.А.Стеклова. 2002. **239.** 215–238.

[54] *Кубилюс Й. П., Линник Ю. В.* Арифметическое моделирование броуновского движения.// Изв. вузов. Математика. 1959. 6(13). 88 – 95.

[55] *Кубилюс Й. П.* Вероятностные методы в теории чисел.// Госполитнаучиздат Литов. ССР, Вильнюс. 1962.

[56] *Кубилюс Й. П.* Об асимптотических законах распределения аддитивных арифметических функций.// Литов. матем. сб. **5,** №2. 1965. 261 – 272.

[57] *Лоэв М.* Теория вероятностей.// Из – во иностр. лит. 1962. 719.

[58] *Марков А. А.* Исчисление вероятностей// Москва, Гос. из-во, 1924.

[59] *Минеев М. П.* Метрическая теорема о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями// Успехи матем. наук 1959. **14.** в. 3, 169 – 171.

[60] *Минеев М. П.* Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы// Изв. АН СССР, серия матем. 1958. **26.** №5. 282 – 298.

[61] *Минеев М. П.* О проблеме Тарри для быстрорастущих функций// Мат. сб. 1958. **46(88).** №4. 451 – 454.

[62] *Мухутдинов Р. Х.* Диофантово уравнение с матричной показательной функцией// ДАН СССР 1962. **142.** №1, 36 – 38.

[63] *Нгонго И. С.* О распределении значений коротких сумм характеров дирихле по простым числам// Вестник МГУ. Сер.1,мат. мех., 2002. №6. 45 – 48

[64] *Нгонго И. С.* О распределении значений коротких сумм характеров абелевых групп// Третий всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докладов. «Обозрение прикладной и промышленной математики» 2002. **9**. вып. 2. 426.

[65] *Нгонго И. С.* О распределении значений коротких сумм //диссертация кандидата физ.–мат. наук, Москва, МГУ им. Ломоносова, мех.–мат. ф–т, 2002

[66] *Олевский А. М.* Ряды Фурье и функции Лебега//Успехи матем. наук, 1967, т. 22, вып. 2 (134), с. 237-239.

[67] *Постников А. Г.* Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых// ИАН, сер. матем. **20,** №6, 1956, 751 – 764.

[68] *Постников А. Г.* Эргодические вопросы теории диофантовых приближений// Труды МИ АН СССР, 1966. **82.**

[69] *Постников А. Г.* Об очень короткой показательной рациональной тригонометрической сумме// ДАН СССР, 1960. **133.** №6.

[70] *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел// М., Наука. 1971.

[71] *Постников А. Г.* Оценка показательной тригонометрической суммы// Изв. РАН. Сер. матем., 1956. **70.** 661–666.

[72] *Прохоров Ю. В.* Некоторые уточнения теоремы Ляпунова//Изв. АН СССР. Сер. матем., 16:3 (1952), 281-292.

[73] *Риман Б.* О числе простых чисел, не превышающих данной величины// Б. Риман, Сочинения, ОГИЗ, М., 1948, 216-224.

[74] *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика.// Москва, «Наука», 1989.

[75] *Спринджук В. Г.* Закон ошибок Гаусса в распределении значений коротких сумм Вейля.// Докл. АН БССР. 1969. **13.** № 10. 873– 875.

[76] *Усольцев Л. П.* Аддитивная задача с растущим количеством слагаемых с показательной функцией// Известия высших учебных заведений СССР, Математика **3(58),** 1967, 96 – 104.

[77] *Фрейман Г. А.* Проблема Варинга с растущим числом слагаемых// Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та. №3, 1958, 105 – 119.

[78] *Хамитов Г. П.* Производящая функция в теории вероятностей. Новосибирск, 1999.

[79] *Ширяев А. Н.* Вероятность.// Москва, «Наука», 1979 г.

[80] *Boyarinov R.N., Chubarikov V.N., Ngongo I.S.* Asymptotic formulas for fractional moments of special sums// Чебышевский сборник , т. 9, вып. 4, 2003, 173-183.

[81] *Burgess D. A.* О распределении значений модулей неполных сумм Гаусса.// The distribution of quadratic residues and nonresidues.// Math. 1957. **4.** №8. 106 – 112.

[82] *Carleman T.* Sur les équations intégrales singuliéres a noyau réel et symétrique// Upsala, Lundequis, 1923.

[83] *Carleman T.* Sur le problème des moments//C. R. Acad. Sei. Paris **174** (1922), 1680-1682.

[84] *Davenport H., Erdös P.* The distribution of quadratic and higher residues.// Publ. Math., Debrecen. 1952, **2**, №3 – 4. 252 – 265.

[85] *Fortet R.* Sur une suite egalement repartie.// Studia math., 1940. **1.** 54 – 69.

[86] *Frechet M. and Shohat* A proof of the generalized second limit-theorem in the theory of probability// Trans. Amer. Math. Soc. **33,** 1931, №2, 533 – 543.

[87] *Ghosh A.* On the Riemann zeta-function-mean value theorems and the disribution of |S(T)|// J. Number Theory, 17:1 (1983), 93-102.

[88] *Кас М.* Statistical independence in probability and analysis and number theory.// N. Y., 1952.

[89] *Кас М.* On distribution of values of sums of the type $\sum f(2^k t)$// Ann.Math. 1946. **47.** №1. 33 – 49.

[90] *Kolmogoroff A.* Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung// Изв. АН СССР. VII серия. Отд. матем. и естест. наук, 1933, №3, 363–372.

[91] *Liapounoff A.* Sur une proposition de la théorie des probabilités//Извѣстія Императорской Академіи Наукъ, 13:4 (1900), 359-386.

[92] *Olevskii A. M.* Fourier series with respect to general orthogonal systems// Berlin - Heidelberg - New York, Springer - Verl., 1975.

[93] *Salem R., Zygmund A.* On lacunary trigonometric series// Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.**33** (1947), 333 – 348; **34** (1948), 54 – 62.

[94] *Selberg A.* Contributions to the theory of the Riemann zeta-function//Arch. Math. Naturvid., 48:5 (1946), 89–155.

[95] *Selberg A.* On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$// Avh. Norske Vid. Akad. Oslo I, 1944, №1.

[96] *Selberg A.* The zeta function and the Riemann hypothesis//Dixième Congrès Math. Skandinaves 1946, vol. 10, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen 1947, pp. 187–200.

[97] *Tsang K. M.* The distribution of the values of the Riemann zeta function// Ph.D. dissertation, Princeton University, 1984.

[98] *Turan P.* On a theorem of Hardy and Ramanujan.// J. London Math. Soc. 1934, **9**. №4. 274 – 276.

[99] *Vaughan R. C., Wooley T. D.* On the distribution of generating functions// Bull. London Math. Soc., 1998. **30.** 113 – 122.

[100] *Weil A.* On some exponential sums.// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **34.** № 5. 204 – 207. 1948.

[101] *Weyl H.* Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins// Math. Ann., 1916. **77.** 313 – 352.

**Работы автора по теме диссертации:**

[102] *Тимергалиев И. С.* О распределении значений аналогов сумм Клостермана// Вестник МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 2013. №5. С. 37—41

[103] *Тимергалиев И. С.* О распределении значений сумм характеров абелевых групп и коротких показательных сумм// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) Краснодар: КубГАУ, 2014. №04(098). С. 769–782. IDA [article ID]: 0981404058. Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/04/pdf/58.pdf

[104] *Тимергалиев И. С., Бояринов Р. Н.* О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы на коротких интервалах// Чебышевский сб., 14:2 (2013), С. 154–163

[105] *Тимергалиев И. С., Бояринов Р. Н.* О распределении значений неполных сумм Гаусса//Чебышевский сб., 14:3 (2013), С. 127–133

[106] *Тимергалиев И. С.* О распределении значений аналогов сумм Клостермана// Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тезисы докл. XI Межд. Конф. Саратов. 2013 С. 80