ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

ТИМЕРГАЛИЕВА ИРЕКА САМАТОВИЧА

«О распределении значений коротких арифметических сумм»,

представленной на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация И.С. Тимергалиева посвящена изучению распределения ряда арифметических сумм, возникающих при решении многих задач аналитической теории чисел. В их числе:

– неполные суммы Клоостермана по простым числам

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant q \leqslant h} \exp\left(2\pi i \,\frac{xq^*}{p}\right),$$

x - целое, p, q - простые, $qq^* \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$;

– суммы значений характеров абелевых групп

$$S_2 = \sum_{a \in G} \chi(a),$$

G - конечная абелева группа, a пробегает образующие примарных циклических подгрупп G;

– суммы Гаусса

$$S_3 = \sum_{x < n \leqslant x+h} \chi(n) \exp\left(2\pi i \,\frac{cn}{p}\right),$$

χ - комплексный характер Дирихле по простому модулю p, c - целое число;

– показательные рациональные тригонометрические суммы

$$S_4 = \sum_{x < n \leqslant x+h} \exp\left(2\pi i \,\frac{ag^n}{p}\right),$$

g - первообразный корень по простому модулю p, a - целое число;

– так называемые “дзетовые” суммы

$$S_5 = \sum_{2 \leqslant p \leqslant h} \exp\left(2\pi i x t \ln p\right) = \sum_{2 \leqslant p \leqslant h} p^{2\pi i x t},$$

p - простые числа, x, t - вещественные, $0 < x < 1$, $t \gg h \gg 1$.

В ряде случаев современные методы аналитической теории чисел, а также аддитивной комбинаторики позволяют получать нетривиальные оценки сумм, подобных $S_1 - S_5$ в случаях, когда длина h промежутка, по которому ведётся суммирование, очень мала по сравнению с некоторым параметром, входящим в определение суммы (для S_1, S_3, S_4 им является модуль p, для S_5 - величина t, для S_2 - число примарных подгрупп в G).

Классическим примером служит принадлежащая И.М. Виноградову оценка "дзетовой" суммы по сплошному промежутку вида

$$\sum_{n\leqslant N} n^{it} \ll N\exp\left(-c\,\frac{(\ln N)^3}{(\ln t)^2}\right),$$

нетривиальная уже при $N \geqslant e^{c_1(\ln t)^{2/3+\varepsilon}}$.

Другим примером может служить полученная совсем недавно Ж. Бургейном и М.З. Гараевым оценка неполной суммы Клоостермана

$$\sum_{n\leqslant N} \exp\left(2\pi i\,\frac{an^*}{p}\right) \ll N\,\frac{(\ln p)(\ln\ln p)^3}{(\ln N)^{3/2}},$$

дающая понижение уже при $N > e^{(\ln p)^{2/3+\varepsilon}}$.

Оценки сумм $S_1 - S_5$ и им подобных при очень маленьком числе слагаемых h (скажем, при h, равном фиксированной степени логарифма основного параметра) находятся за пределами возможностей современной теории чисел. Более того, в некоторых случаях получение такое оценки невозможно в принципе. Малое число слагаемых зачастую позволяет подобрать (с помощью принципа Дирихле) значения параметров так, что соответствующую сумму лучше, чем тривиально, оценить нельзя.

Однако такие короткие суммы, рассматриваемые "в совокупности", демонстрируют замечательные статистические закономерности, вполне поддающиеся изучению. Под совокупностью в случае сумм Клоостермана S_1 понимается множество таких сумм, отвечающих одному модулю p и всевозможным значениям целочисленного параметра x, $1\leqslant x\leqslant p$. В случае сумм S_2 совокупность образуют суммы, отвечающие различным характерам χ одной и той же группы G. Для сумм S_3, S_4 эту совокупность образуют суммы, отвечающие различным левым концам x интервалов суммирования. Наконец, в последнем случае "дзетовых" сумм S_5 совокупность образована суммами, отвечающими одному значению параметра t и различным значениям переменной x, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Указанное выше свойство "коротких" сумм демонстрировать устойчивые статистические закономерности было впервые обнаружено, по-видимому, П. Эрдешем и Г. Дэвенпортом в 1952 г. Именно, они нашли, что короткие суммы символов Лежандра имеют распределение, сходящееся к нормальному.

Эти исследования получили развитие в работах многих учёных, в числе которых Ю.В. Линник, Й. Кубилюс, А.Г. Постников, Л.П. Усольцев. В 1990-2000-е гг. задачам такого рода ряд работ посвятили В.Н. Чубариков и его ученики (Р.Н. Бояринов, И.С. Нгонго, Э.К. Жимбо, А.Х. Гияси и др.). В последние годы (2010-2014) ряд новых результатов в этой проблематике получен зарубежными математиками (Н. Нг, К.Х. Марк, А. Захареску и др.).

Работа И.С. Тимергалиева продолжает исследования, связанные с распределением коротких арифметических сумм, и содержит новые результаты по данной проблематике.

Прежде всего, в диссертации получены асимптотические формулы чётных моментов сумм $S_1 - S_5$, причём оценки остаточных членов в этих формулах являются равномерными по всем входящим в них параметрам и в ряде случаев уточняют аналогичные оценки, полученные ранее другими авторами.

Далее, в диссертации впервые получены асимптотические формулы для дробных моментов сумм $S_1 - S_5$ с весьма точной оценкой остаточных членов, справедливые для очень широкого диапазона значений показателя момента. В качестве примера можно указать на следующую асимптотическую формулу для первого момента суммы Клоостермана, которая имеет вид

$$\frac{1}{p}\sum_{x=1}^{p}\left|\sum_{q\leqslant h}\exp\left(2\pi i\,\frac{xq^*}{p}\right)\right| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\pi(h)}\left(1+O\left(\frac{(\ln\ln h)^{3/2}}{(\ln h)^{3/2}}\right)\right).$$

Следует отметить, что даже получение правильных по порядку верхних и нижних оценок дробных или нечётных моментов тригонометрических сумм, возникающих в теоретико-числовых исследованиях, является, как правило, нелёгкой задачей. Рассмотренные диссертантом примеры принадлежат к числу тех замечательных случаев, когда для моментов с дробным показателем удаётся получить много больше, а именно очень точные асимптотические формулы.

Для сумм $S_1 - S_5$, должным образом отнормированных и рассматриваемых как случайные величины, диссертантом найдены предельные функции распределения и получена оценка скорости сходимости к ним. В частности, для доли $F_p(\lambda)$ тех x из полной системы вычетов по модулю p, что удовлетворяют условию

$$\left|\sum_{q\leqslant h}\exp\left(2\pi i\,\frac{xq^*}{p}\right)\right| \leqslant \lambda\sqrt{\pi(h)},$$

получена формула вида

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p(\lambda), \quad \text{где} \quad |R_p(\lambda)| \ll \frac{\ln\ln h}{\sqrt{\ln h}}.$$

При λ, превышающих $\sqrt{\ln\ln h}$, формула для $F_p(\lambda)$ перестаёт быть асимптотической. Для таких λ в диссертации получены верхние оценки на число сумм, которые "аномально велики" по сравнению со своим "средним значением" $\sqrt{\pi(h)}$. Аналогичные результаты установлены диссертантом и для сумм $S_2 - S_5$.

В диссертации также рассмотрена задача о поведении среднего значения тригонометрической суммы $S_P(\alpha)$, в показателе экспоненты которой фигурируют члены лакунарной последовательности $\{F_x\}_{x=1}^{\infty}$, то есть задача о поведении интеграла

$$J_{a,b}(P;k) = \int_a^b |S_P(\alpha)|^{2k}\,d\alpha, \qquad S_P(\alpha) = \sum_{x\leqslant P}\exp\left(2\pi i\alpha F_x\right),$$

где P неограниченно возрастает, а длина промежутка $(a,b]$ может быть много меньше длины периода $S_P(\alpha)$, равного единице. При этом оказывается, что уже при $b-a \gg P^{-1+\varepsilon}$ и целых k с условием $k \ll \ln P$ для $J_{a,b}(P;k)$ оказывается справедливой асимптотическая формула вида

$$J_{a,b}(P;k) = (b-a)k!P^k\,(1+\delta), \quad \text{где} \quad \delta \ll c^k P^{-\varepsilon},$$

а постоянные в знаках $\ll$ зависят от некоторых характеристик лакунарной последовательности $\{F_x\}_{x=1}^{\infty}$.

Наличие асимптотик такого рода позволяет автору исследовать вопрос о распределении значений суммы $S_P(\alpha)$ на очень коротких промежутках $(a, b]$. Таким образом диссертантом получены асимптотика для функции распределения нормированной суммы $S_P(\alpha)$ и верхняя оценка меры множества тех $\alpha \in (a, b]$, для которых модуль этой суммы "аномально" велик.

К тексту диссертации имеется ряд замечаний. Все они носят либо технический, либо рекомендательный характер, и никак не влияют на научную значимость полученных результатов. Перечислим их по порядку.

1. Прежде всего, для удобства восприятия читателем излагаемого материала в диссертации было бы желательно выделить особый раздел, в который помещаются все вспомогательные утверждения, используемые автором. В него, в частности, можно поместить теорему 3 со стр. 24-25, используемую на стр. 30 оценку А. Вейля для суммы значений характера от рациональной функции, теорему 11 со стр. 36 о числе решений симметричного диофантова уравнения, теорему 15 со стр. 42 об оценке скорости сходимости к предельному распределению, лемму 2 со стр. 53 и, возможно, формулу со стр. 57 для характеристической функции $\chi_{a,b}(\alpha)$.

2. Далее, автор при изучении коротких арифметических сумм ограничился лишь случаем, когда длина h промежутков суммирования имееет строго определённый вид и равна $[\ln p]$ для сумм S_1, S_3, $[\ln T]$ для суммы S_4 и $[\sqrt{\ln p}] + 1$ для суммы S_5. По-видимому, такой выбор был осуществлён автором для того, чтобы подчеркнуть, что исследуемые им суммы являются "аномально" короткими.

Между тем, применяемые диссертантом методы позволяют без особого труда получать аналогичные утвержения и для более длинных сумм. Скажем, для сумм Клоостермана S_1 все рассуждения с минимальными изменениями переносятся на случай $h \asymp e^{(\ln p)^{\beta}}$, где $0 < \beta \leqslant 0.5$. Соответственно, расширяются и диапазоны изменения показателей r и a чётных и дробных мометнов, для которых могут быть выведены асимптотические формулы.

Также необходимо отметить, что перечисленные выше значения параметров h в каждом из случаев приводятся в тексте, предваряющем условия теорем, но отсутствуют в самих формулировках основных утверждений. Последнее затрудняет восприятие работы.

3. Наконец, при подсчёте чётного момента "дзетовой" суммы на стр. 33 в оценке величины $B(r, h)$ пропущено суммирование по наборам $p_1, \ldots, q_r$ с условием $p_1 \ldots p_r \neq q_1 \ldots q_r$. С учётом такого суммирования оценка $B(r, h)$ приобретает вид

$$|B(r, h)| \leqslant \frac{h^r z^{2r}}{T},$$

а формула для $2r$-го момента - вид

$$\mathbf{M}\xi^{2r}(x) = r! + \theta\left(\frac{r!r^2}{z} + \frac{(hz)^r}{T}\right).$$

Эти поправки не влияют, однако, на окончательный вид формулы для дробного момента (теорема 9), на оценку величины μ в теореме 20 и на оценку остатка в формуле для функции распределения в теореме 21.

Подводя итог, отмечу, что в диссертации И. С. Тимергалиева получены решения новых задач, имеющих существенное значение для теории чисел и математического анализа.

Все утверждения работы, принадлежащие автору, снабжены полными доказательствами. Основное содержание диссертации опубликовано в пяти работах автора. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

По актуальности, объёму и научному уровню выполненных исследований диссертация полностью удовлетворяет всем требованиям Минобрнауки РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
доктор физико - математических наук
старший научный сотрудник
Отдела алгебры и теории чисел
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова М.А.Королёв
119991, Москва, ул. Губкина, 8 04.12.2014г.
Тел.: 8(495)9848141 (доб. 37-32)
E-mail: korolevma@mi.ras.ru

Подпись старшего научного сотрудника
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова
Королёва М.А. заверяю

Доктор физико - математических наук
учёный секретарь
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова А.Н. Печень