МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517

Радомский Артем Олегович

НЕРАВЕНСТВА ТИПА СИДОНА И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА КВАЗИНЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2014

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	академик РАН, профессор, доктор физико-математических наук Кашин Борис Сергеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Лившиц Евгений Давидович (руководитель исследовательской группы «ООО Эверноут»)
	кандидат физико-математических наук Лифанцева Ольга Валерьевна (ведущий программист ФБУ "Центральная клиническая больница гражданской авиации")
Ведущая организация:	Московский физико-технический институт

Защита диссертации состоится 26 декабря 2014 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8 этаж) и на сайте механико-математического факультета: http://mech.math.msu.su.

Автореферат разослан   ноября 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физ.-матем. наук,
профессор   В.Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации получены новые результаты о неравенствах типа Сидона, улучшающие известные. Исследован вопрос о возможности усиления неравенств типа Сидона. Эти результаты помимо их самостоятельного интереса могут применяться для вычисления энтропийных чисел классов функций многих переменных. Последний параграф диссертации посвящен изучению некоторых свойств пространства квазинепрерывных функций, которое приобретает важное значение в теории функций в связи, в частности, с возможным приложением к вычислению аппроксимационных характеристик классов функций многих переменных с ограничением на смешанную производную или с условием липшицева типа на смешанную разность.

Актуальность темы.

Везде в диссертации под $\|f\|_p$ мы будем понимать норму в пространстве $L^p(a,b)$:

$$\|f\|_\infty \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{[a,\,b]} |f(x)|, \qquad \|f\|_p \equiv \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leqslant p < \infty,$$

где отрезок $[a,b]$ будет, как правило, $[0,2\pi]$ или $[0,1]$, что всегда будет ясно из контекста.

Через $c_n(f)$ будем обозначать n-й коэффициент Фурье функции f :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Мы используем также сокращение О.Н.С. — ортонормированная система.

Параграф 1 диссертации посвящен неравенствам типа Сидона. Напомним несколько основных определений:

Определение 1. Последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ называется *лакунарной*, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Определение 2. Тригонометрический ряд называется *лакунарным*, если он имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x,$$

где натуральные числа n_k удовлетворяют неравенству

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Лакунарные ряды занимают важное место в классе общих тригонометрических рядов. В 20 в. они подверглись серьезному исследованию и было получено много интересных результатов в данной области. Как выяснилось, лакунарные ряды обладают рядом интересных свойств. Нас прежде всего будут интересовать вопросы, связанные с абсолютной сходимостью данных рядов. В 1927 г. Сидон доказал следующую теорему.

Теорема (Сидон [1]). *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Тогда, если тригонометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

есть ряд Фурье ограниченной функции $f(x)$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty.$$

Метод доказательства Сидона основан на произведениях Рисса, которые стали важным аппаратом для теории тригонометрических и общих ортогональных рядов. Эти произведения впервые появились в 1918 г. в работе Ф. Рисса [2], и названы в его честь. Также в работе [1] Сидон отмечает, что теорема сохраняет силу и тогда, когда $f(x)$ ограничена только с одной стороны, т. е. $f(x) \leqslant M$ или $f(x) \geqslant -M$.

В действительности из доказательства в работе Сидона [1] вытекало следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leqslant C(\lambda) \|f\|_{\infty}, \tag{2}$$

[1] *Sidon S. Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken // Mathematische Annalen, **97** (1927), p. 675–676.*

[2] *Riesz F. Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung // Mathematische Zeitschrift, **2** (1918), p. 312–315.*

где $C(\lambda) > 0$ — величина, зависящая лишь от λ. Неравенство (2) мы будем называть *неравенством Сидона.* В частности, если последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$, то существует константа $c(\lambda) > 0$, зависящая лишь от λ, такая, что для любого тригонометрического полинома вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos n_k x$$

справедливо неравенство

$$\|f\|_\infty \geqslant c(\lambda) \sum_{k=1}^{N} |a_k|. \tag{3}$$

Дальнейшее продвижение по усилению теоремы Сидона проходило по нескольким направлениям. Как было показано в 1931 г. Зигмундом [3], вместо отрезка $[-\pi, \pi]$ можно рассматривать некоторый интервал I. Другое направление в усилении теоремы Сидона было по пути ее доказательства в предположениях более широких, чем требование лакунарности последовательности $\{n_k\}$. Сам Сидон [4] перенес ее на случай, когда $\{n_k\}$ можно разбить на конечное число лакунарных последовательностей. Дальнейшее продвижение в этом вопросе принадлежало С. Б. Стечкину [5]. В связи с теоремой Сидона в теории абсолютно сходящихся рядов Фурье возникло следующее определение.

Определение 3. Множество целых чисел Λ называется *множеством Сидона*, если существует такая постоянная $c > 0$, что для любого тригонометрического полинома

$$p(x) = \sum_{n\in\Lambda} a_n e^{inx}$$

справедливо неравенство

$$\|p\|_\infty \geqslant c \sum_{n\in\Lambda} |a_n|.$$

Если переформулировать теорему Сидона в новых терминах, то она утверждает следующее (см. (3)): множество $\Lambda = \{\pm n_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$,

[3] *Zygmund A. Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances // Studia Mathematica, **3** (1931), p. 77–91.*

[4] *Sidon S. Ueber orthogonale Entwicklungen // Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae, **10** (1943), p. 206–253.*

[5] *Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Известия Академии наук СССР, серия математическая, 1953, Т. 17, с. 87–98; 1955, Т. 19, с. 221–246; 1956, Т. 20, с. 385–412.*

где последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (1), является множеством Сидона. Характеризация множеств Сидона была получена Ж. Пизье [6,7,8].

Теорема Сидона породила следующее определение в теории ортогональных рядов.

Определение 4. О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, называется *системой Сидона*, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

сходится в пространстве $L^{\infty}(0,1)$ тогда и только тогда, когда конечна сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Можно показать, что для того чтобы система $\Phi = \{\varphi_n\}$ была системой Сидона, необходимо и достаточно, чтобы для любого полинома

$$P(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x)$$

выполнялись неравенства

$$c \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leqslant \|P\|_{\infty} \leqslant C \sum_{n=1}^{N} |a_n|, \tag{4}$$

где постоянные $c > 0$ и $C > 0$ не зависят от полинома $P(x)$. Из неравенства (4), в частности, вытекает, что системами Сидона могут быть только равномерно ограниченные системы, т. е. системы, для которых

$$\|\varphi_n\|_{\infty} \leqslant M, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Системами Сидона являются, например, (см. (3)) системы вида $\{\sqrt{2}\cos 2\pi n_k x\}_{k=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, где последовательность натуральных чисел n_k, $k = 1, 2, \ldots$, лакунарна, а также система Радемахера. Как показал в 1966 г. В. Ф. Гапошкин, из любой равномерно ограниченной О.Н.С.

[6] *Pisier G. De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon // Mathematical Analysis and its Applications, Part B, Advances in Mathematics Supplementary Studies, 1981, Vol. 7, p. 685–726.*

[7] *Pisier G. Conditions d'entropie et caractérisations arithmétiques des ensembles de Sidon // in: Topics in Modern Harmonic Analysis, Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. F. Severi, Roma, 1983, p. 911–944.*

[8] *Pisier G. Arithmetic characterizations of Sidon sets // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1983, Vol. 8, №1, p. 87–89.*

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выделить бесконечную подсистему Сидона $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема (В. Ф. Гапошкин [9]). *Из любой О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выделить бесконечную подсистему $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которой соотношение*

$$\frac{1}{M}\left\|\sum_{k=1}^{s} a_k\varphi_{n_k}\right\|_\infty \leqslant \sum_{k=1}^{s}|a_k| \leqslant C(M)\left\|\sum_{k=1}^{s} a_k\varphi_{n_k}\right\|_\infty \quad \forall\ \{a_k\}_{k=1}^{s}$$

верно при всех $s = 1, 2, \ldots$ (здесь $C(M) > 0$ — константа, зависящая лишь от M).

Количественный аналог этого результата принадлежит Б. С. Кашину.

Теорема (Б. С. Кашин [10] (см. также [11], с. 367)). *Из всякого ортонормированного набора функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$ с $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant M$ при $n = 1, 2, \ldots, N$ можно выбрать функции $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{s}$, $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_s \leqslant N$, с $s \geqslant \max\left\{\left[\frac{1}{6}\log_2 N\right], 1\right\}$ такие, что для любых чисел a_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, справедливы неравенства*

$$\frac{1}{M}\left\|\sum_{k=1}^{s} a_k\varphi_{n_k}\right\|_\infty \leqslant \sum_{k=1}^{s}|a_k| \leqslant 4M\left\|\sum_{k=1}^{s} a_k\varphi_{n_k}\right\|_\infty.$$

Пример тригонометрической системы показывает, что оценка $s \geqslant \left[\frac{1}{6}\log_2 N\right]$ по порядку неулучшаема (см. [11], с. 368). О приложениях утверждений типа предыдущей теоремы к вопросам геометрии нормированных пространств см. работу Мильмана, Вольфсона [12]. Отметим, что при доказательстве последних двух теорем использовались произведения Рисса.

В 1998 г. Б. С. Кашин и В. Н. Темляков [13, 14] начали исследование нового направления в усилении теоремы Сидона. В связи с оценкой энтропий-

---

[9] *Гапошкин В. Ф. Лакунарные ряды и независимые функции // Успехи матем. наук, 1966, Т. 21, №6, с. 3–82.*

[10] *Кашин Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Труды МИАН, 1980, Т. 145, с. 111–116.*

[11] *Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. М.: Изд-во АФЦ, 1999.*

[12] *Milman V. D., Wolfson H. Minkowski spaces with extremal distance from the Euclidean space // Israel J. Math., 1978, Vol. 29, №2-3, p. 113–131.*

[13] *Кашин Б. С., Темляков В. Н. Об одной норме и связанных с ней приложениях // Матем. заметки, 1998, Т. 64, №4, с. 637–640.*

[14] *Кашин Б. С., Темляков В. Н. Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. Сборник статей. Посвящается Петру Лаврентьевичу Ульянову к его семидесятилетию, М.: АФЦ, 1999, с. 69–99.*

ных чисел некоторых классов функций они исследовали вопрос о возможном обобщении неравенства Сидона (3) заменой $a_k \cos n_k x$ на $p_k(x) \cos n_k x$, где $p_k(x)$ являются тригонометрическими полиномами. Ими была доказана следующая теорема.

Теорема А (Б. С. Кашин, В. Н. Темляков [13, 14]). *Для любого тригонометрического полинома вида*

$$f(x) = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x) \cos 4^k x,$$

где $p_k(x)$ *— вещественные тригонометрические полиномы с* $\deg p_k \leqslant 2^l,\ k = l+1, \ldots, 2l,\ l = 1, 2, \ldots,$ *справедливо неравенство*

$$\|f\|_\infty \geqslant c \sum_{k=l+1}^{2l} \|p_k\|_1, \tag{5}$$

где $c > 0$ *— абсолютная постоянная.*

Неравенства типа (5) мы будем называть *неравенствами типа Сидона.* Это обосновано тем, что если $p_k(x)$ являются константами, т. е. тригонометрическими полиномами нулевой степени, то неравенство (5) превращается в неравенство Сидона (3).

Дальнейшее исследование было продолжено автором. В параграфе 1 доказывается теорема (теорема 1.1), из которой, в частности, следует, что в теореме А условие $\deg p_k \leqslant 2^l$ может быть заменено условием $\deg p_k \leqslant \frac{1}{6} 4^l$. Также в параграфе 1 доказывается утверждение аналогичного характера для системы Уолша (теорема 1.2).

Параграф 2 посвящен вопросу о возможности усиления неравенств типа Сидона, т. е., другими словами, вопросу о точности теоремы 1.1. В нем доказывается результат (теорема 2.1), из которого следует, что в теореме 1.1 при $n_k = 2^k$ условие $\deg p_k \leqslant \frac{1}{6} 2^l$ нельзя заменить на $\deg p_k \leqslant \left[2^{k-k^\varepsilon}\right]$ ни при каком $\varepsilon \in (0,1)$.

Доказательство теоремы 2.1 опиралось на идеи из работы П. Г. Григорьева [15], где была доказана следующая теорема.

Теорема В (П. Г. Григорьев [15]). *Существуют абсолютная постоянная* $A > 0$ *и последовательность тригонометрических полиномов*

$$\sigma_k(x) = \sum_{2^k \leqslant |j| < 2^{k+1}} c_j e^{ijx}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

[15] *Григорьев П. Г. Об одной последовательности тригонометрических полиномов // Матем. заметки, 1997, Т. 61, №6, с. 935–938.*

такие, что $\|\sigma_k\|_1 \geqslant \frac{\pi}{4}$, $\|\sigma_k\|_\infty \leqslant 6$, $k = 1, 2, \dots,$ *и*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} \sigma_k\Big\|_\infty \leqslant A\sqrt{n},\ n = 1, 2, \dots .$$

Позднее совместно П. Г. Григорьевым и автором [16] был доказан результат, усиливающий теорему 2.1.

Параграф 3 диссертации посвящен изучению пространства квазинепрерывных функций — функций с конечной QC нормой. Эта норма была введена в работах [13, 14] Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым. Она определяется следующим образом: для функции $f \in L^1(0, 2\pi)$ с рядом Фурье

$$f \sim \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(f, x),$$

$$\delta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \qquad \delta_s(f, x) = \sum_{2^{s-1}\leqslant|k|<2^s} c_k(f)e^{ikx},\ s = 1, 2, \dots,$$

положим

$$\|f\|_{QC} \equiv \int_0^1 \Big\|\sum_{s=0}^{\infty} r_s(t)\delta_s(f, x)\Big\|_\infty dt, \tag{6}$$

где $\{r_s(t)\}_{s=0}^{\infty}$ — система Радемахера. *Пространством квазинепрерывных функций* называется замыкание множества тригонометрических полиномов по норме (6).

В многомерном случае QC норма вводится следующим образом: для функции f на $[0, 2\pi]^d$ $(d \geqslant 2)$ положим

$$\|f\|_{QC} \equiv \big\|\|f(\cdot, x^1)\|_{QC}\big\|_\infty, \tag{7}$$

где по определению для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ полагаем $x^1 = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$. Другими словами, в (7) берется QC норма по переменной x_1 и sup-норма по остальным переменным.

Для функций одной переменной Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым была доказана следующая теорема.

[16] *Григорьев П. Г., Радомский А. О. Некоторые тригонометрические полиномы с экстремально малой равномерной нормой // Матем. заметки (принято к печати). Предварительный вариант на английском языке доступен по ссылке: http://arxiv.org/pdf/1406.3042v1.pdf*

Теорема C (Б. С. Кашин, В. Н. Темляков [13, 14]). *Для любой действительной функции $f \in L^1(0, 2\pi)$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_{QC} \geqslant \frac{1}{32\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_s(f, \cdot)\|_1. \tag{8}$$

В параграфе 3 этот результат обобщается на произвольный лакунарный случай (теорема 3.1).

Обозначим через $\mathrm{T}(n)$ пространство вещественных тригонометрических полиномов степени $\leqslant n$. Из теоремы C и теоремы B вытекает, что

$$\sup_{t \in \mathrm{T}(2^k)} \frac{\|t\|_{QC}}{\|t\|_\infty} \geqslant c\sqrt{k}, \quad c > 0.$$

С другой стороны, как показал К. И. Осколков (см. [14], с. 96),

$$\sup_{t \in \mathrm{T}(2^k)} \frac{\|t\|_\infty}{\|t\|_{QC}} \geqslant c\sqrt{k}, \qquad c > 0. \tag{9}$$

А именно, он показал, что для тригонометрических полиномов

$$t_k(x) = \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-s} \sum_{j=2^s}^{2^{s+1}-1} \cos jx$$

справедлива оценка $\|t_k\|_{QC} \leqslant \gamma\sqrt{k}$, где $\gamma > 0$ — абсолютная постоянная. Поскольку $\|t_k\|_\infty = t_k(0) = k$, то отсюда следует (9). В теореме 3.2 пример К. И. Осколкова обобщается. В качестве следствия мы находим точный порядок роста величин $\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n} \|_{QC}$.

Интерес к изучению QC нормы связан прежде всего с возможным ее приложением для исследования аппроксимационных характеристик классов функций многих переменных с ограничением на смешанную производную или с условием липшицева типа на смешанную разность. Известно, что многие задачи теории приближения данных классов по норме L^∞ остаются нерешенными до сих пор. В то же время в решении этих вопросов удалось продвинуться, если заменить норму L^∞ на близкую норму — QC норму. Поэтому, в частности, задача о выявлении связи между QC и равномерной нормами является очень важной. Введем необходимые определения.

Для $r > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ определим одномерное ядро Бернулли

$$F_r(x, \alpha) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kx - \frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad x \in [0, 2\pi],$$

и многомерное для $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$

$$F_r(x, \alpha) = \prod_{j=1}^{d} F_r(x_j, \alpha_j).$$

Определим класс периодических функций с ограниченной смешанной производной:

$$W^r_{q,\alpha} \equiv \{f : \ f = F_r(\cdot, \alpha) * \varphi(\cdot), \ \|\varphi\|_q \leqslant 1\},$$

где $*$ — операция свертки.

Для $r > 0$ положим $l = [r] + 1$ и рассмотрим операторы $\Delta_h^{l,j}$ взятия l-й разности с шагом h по переменной x_j. Для набора натуральных чисел $e \subset \{1, \ldots, d\}$ определим оператор смешанной разности

$$\Delta_t^l(e) = \prod_{j \in e} \Delta_{t_j}^{l,j}, \quad t = (t_1, \ldots, t_d), \ \ \Delta_t^l(\varnothing) = \mathrm{Id}.$$

Определим класс функций с ограниченной смешанной разностью:

$$H^r_q \equiv \left\{ f \in L^q \left([0, 2\pi]^d\right) : \forall e \subset \{1, \ldots, d\} \ \|\Delta_t^l(e) f\|_q \leqslant \prod_{j \in e} |t_j|^r \right\}.$$

Напомним определения ε-энтропии и поперечников по Колмогорову. Для компакта K в банаховом пространстве X с единичным шаром B_X величины

$$d_n(K, X) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^n \subset X} \sup_{f \in K} \inf_{c_i} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \right\|_X,$$

$$\varepsilon_n(K, X) = \inf \left\{ \varepsilon : \exists \{f_i\}_{i=1}^q \in X, \ q \leqslant 2^{n-1}, \ K \subset \bigcup_{i=1}^{q} \{f_i + \varepsilon B_X\} \right\}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ называются соответственно *n-м поперечником по Колмогорову* и *n-м энтропийным числом* множества K в пространстве X.

Аппроксимационные характеристики (ε-энтропия и поперечники по Колмогорову) классов W^r_q и H^r_q в L^p при $1 \leqslant p < \infty$ известны (см., например, [17, 18]). Наиболее трудным является случай, когда $X = L^\infty$. Здесь точные порядки поперечников по Колмогорову получены лишь для случая

[17] *Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН, 1986, Т. 178.*

[18] *Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Труды МИАН, 1989, Т. 189, с. 138–168.*

$d = 1$ Б. С. Кашиным [19] и $d = 2$ В. Н. Темляковым [20, 21]. В случае $d \geqslant 2$ наилучшие верхние оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов H_q^r и W_q^r были получены Э. С. Белинским [22, 23] (отметим, что при $d = 2$ эти оценки были получены ранее В. Н. Темляковым (см. [17] доказательство теоремы 1.1 гл. 3)). Приведем эти оценки:

Теорема (Э. С. Белинский [22]). 1) *Для* $r > \max(\frac{1}{q}, \frac{1}{2})$, $d \geqslant 2$ *и* $1 < q \leqslant \infty$ *существует константа* $C = C(r, d, q) > 0$ *такая, что справедливы неравенства*

$$\varepsilon_n(H_q^r, L^\infty) \leqslant C n^{-r} (\log n)^{r(d-1)+\frac{d}{2}}; \tag{10}$$

$$\varepsilon_n(W_q^r, L^\infty) \leqslant C n^{-r} (\log n)^{r(d-1)+\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

2) *Для* $r > 1/2$, $d \geqslant 2$ *и* $2 \leqslant q \leqslant \infty$ *существует константа* $C' = C'(r, d) > 0$ *такая, что справедливы неравенства*

$$d_n(H_q^r, L^\infty) \leqslant C' n^{-r} (\log n)^{r(d-1)+\frac{d}{2}}; \tag{12}$$

$$d_n(W_q^r, L^\infty) \leqslant C' n^{-r} (\log n)^{r(d-1)+\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

В. Н. Темляков в [20, 21] показал, что эти оценки точны по порядку при $d = 2$. Случай $d > 2$ до сих пор остается открытым. Доказательство при $d = 2$ соответствующих нижних оценок в [20, 21] было основано на одном неравенстве. Чтобы его сформулировать введем несколько определений.

Для $s \in \mathbb{Z}_+^d$ положим

$$\rho(s) \equiv \{n = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d : \ [2^{s_j - 1}] \leqslant |n_j| < 2^{s_j}, \ j = 1, \ldots, d\}.$$

Для четных k и $d \geqslant 2$ обозначим

$$Y_k^d = \left\{ s = (2l_1, \ldots, 2l_d), \ l_1 + \ldots + l_d = k/2, \ l \in \mathbb{Z}_+^d \right\}.$$

[19] *Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР, 1977, Т. 41, №2, с. 334–351.*

[20] *Temlyakov V. N. An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers // J. Complexity, 1995, Vol. 11, p. 293–307.*

[21] *Temlyakov V. N. An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approx., 1996, Vol. 2, №2, p. 253–262.*

[22] *Белинский Э. С. Асимптотические характеристики классов функций с условием на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Сб. статей. Ярославль. ЯГУ, 1990, с. 22–37.*

[23] *Belinskiy E. S. Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative // J. Approx. Theory, 1998, Vol. 93, №1, p. 114–127.*

В двумерном случае В. Н. Темляковым было доказано следующее неравенство (см. [20]):

$$\Big\|\sum_{s\in Y_k^2}\delta_s\Big\|_\infty \geqslant c\sum_{s\in Y_k^2}\|\delta_s\|_1, \quad c>0, \tag{14}$$

$$\text{где } \delta_s(x)=\sum_{n\in\rho(s)}a_n e^{i(n,x)}, \quad x\in[0,2\pi]^2.$$

В работе [21] В. Н. Темляков высказал предположение, что для случая $d\geqslant 3$ справедливо неравенство:

$$\Big\|\sum_{s\in Y_k^d}\delta_s\Big\|_\infty \geqslant c(d)k^{-(d-2)/2}\sum_{s\in Y_k^d}\|\delta_s\|_1, \quad c(d)>0, \tag{15}$$

$$\text{где } \delta_s(x)=\sum_{n\in\rho(s)}a_n e^{i(n,x)}, \quad x\in[0,2\pi]^d.$$

Это предположение является открытым вопросом.

Используя неравенство (14), В. Н. Темляков в [20, 21] доказал точность оценок (10)–(13) при $d=2$, т. е. получил такие же по порядку нижние оценки аппроксимационных характеристик классов W_q^r и H_q^r. Отметим, что если бы при каком-то $d\geqslant 3$ удалось доказать неравенство (15), то, повторяя рассуждения из [20, 21], для этого d была бы установлена точность оценок (10)–(13).

В работах [13, 14] Б. С. Кашин и В. Н. Темляков доказали неравенство, аналогичное неравенству (15), где норма L^∞ была заменена на QC норму.

Теорема D (Б. С. Кашин, В. Н. Темляков [13, 14])**.** *Для любого вещественного тригонометрического полинома d переменных $(d=2,3,\ldots)$ вида*

$$f(x)=\sum_{s:\ \|s\|_1=n}\delta_s(x), \quad \text{где } \delta_s(x)=\sum_{k\in\rho(s)}a_k e^{i(k,x)},$$

обладающего свойствами

1) $\|\delta_s\|_4\leqslant 1 \ \ \forall s:\ \|s\|_1=n;$
2) $\|f\|_2\geqslant bn^{(d-1)/2}$, *где $b>0$ — абсолютная постоянная;*

справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC}\geqslant cn^{d/2}, \quad c=c(d,b)>0.$$

Используя теорему D, Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым [13, 14] были получены точные порядки энтропийных чисел и поперечников по Колмогорову классов W_q^r и H_q^r по QC норме. Доказательство теоремы D было основано на одномерном неравенстве для QC нормы (8). Из результата П. Г. Григорьева (теорема B) вытекает, что неравенство (8) перестает быть верным, если в нем QC норму заменить на норму L^∞, поэтому доказательство неравенств (15) при $d \geqslant 3$ должно идти другим путем. В параграфе 3 доказывается, что утверждение теоремы D сохраняет силу при более слабых условиях: $\|\delta_s\|_p \leqslant 1,\ p > 2$ (теорема 3.3 и следствие 3.1).

Цель работы: исследовать возможность усиления неравенств типа Сидона и свойства пространства квазинепрерывных функций.

Научная новизна работы. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Получен результат о неравенствах типа Сидона для тригонометрической системы (теорема 1.1), улучшающий известные.

2. Исследуется вопрос об окончательности установленных в §1 результатов: построены тригонометрические полиномы, обладающие специальными свойствами, из которых следует, что в теореме 1.1 при $n_k = 2^k$ условие $\deg p_k \leqslant \frac{1}{6}2^l$ нельзя заменить на $\deg p_k \leqslant [2^{k-k^\varepsilon}]$ ни при каком $\varepsilon \in (0,1)$.

3. Получен результат, обобщающий пример К.И. Осколкова: доказано, что если последовательность вещественных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию $\sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |a_n - a_{n+1}| + |a_{2^j-1}| \leqslant 2^{-j}$, $\quad j = 1, 2, \ldots$, то $\left\|\sum_{n=1}^{2^k-1} a_n \cos nx\right\|_{QC} \leqslant C\sqrt{k}$, $\quad k = 1, 2, \ldots$, где $C > 0$ — абсолютная постоянная. Получен точный порядок роста величин $\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n} \|_{QC}$.

4. Доказан аналог неравенства типа Сидона для системы Уолша.

Методы исследования. В работе используются методы теории тригонометрических рядов, современной теории приближения, теории вероятностей.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории тригонометрических рядов, теории приближения и теории вероятностей.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар по ортогональным рядам в МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством академика РАН Б.С. Кашина и чл.-корр. РАН С.В. Конягина (2010, 2011, 2012);

- семинар по тригонометрическим рядам в МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора М.К. Потапова и профессора М.И. Дьяченко (2012, 2013);

- научный семинар кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета) под руководством профессора Е.С. Половинкина (2014);

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Международная конференция «Probability, Analysis and Geometry» в Ульме (Германия, 1 – 7 сентября 2013).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 3 работах (две из перечня ВАК и одна депонирована в ВИНИТИ), список которых приведён в конце автореферата.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх параграфов и списка литературы из 39 наименований. Общий объем диссертации — 79 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, а также изложены основные результаты диссертации.

В параграфе 1 диссертации получен результат о неравенствах типа Сидона для тригонометрической системы, улучшающий известные, а также доказывается результат аналогичного характера для системы Уолша.

Теорема 1.1. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$, $k = 1, 2, \dots$. *Существует константа* $c(\lambda) > 0$, *зависящая лишь от* λ, *такая, что для любого тригонометрического полинома вида*

$$f(x) = \sum_{k=l}^{N} p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k — *вещественные тригонометрические полиномы с* $\deg(p_k) \leqslant \gamma n_l$, $\gamma = \min(\frac{1}{6}, \frac{\lambda-1}{3})$, $k = l, \ldots, N$, $N \geqslant l$, $l = 1, 2, \ldots$, *справедливо неравенство*

$$\|f\|_\infty \geqslant c(\lambda) \sum_{k=l}^{N} \|p_k\|_1.$$

Для $m \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{W}(m)$ будем обозначать множество полиномов $p(x)$ по системе Уолша вида

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n w_n(x), \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1.2. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* $2^{k-1} \leqslant n_k < 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда для любой функции* $f(x)$ *вида*

$$f(x) = \sum_{k=l+1}^{m} p_k(x) w_{n_k}(x),$$

где $p_k \in \mathcal{W}(2^l - 1)$, $k = l + 1, \ldots, m$, $m \geqslant l + 1$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, *справедливо неравенство*

$$\|f\|_\infty \geqslant \sum_{k=l+1}^{m} \|p_k\|_1.$$

Результаты этого параграфа опубликованы в [1], [2].

В параграфе 2 диссертации исследуется вопрос об окончательности установленных в §1 результатов. В частности, установлено, что в теореме 1.1 при $n_k = 2^k$ условие $\deg p_k \leqslant \frac{1}{6} 2^l$ нельзя заменить на $\deg p_k \leqslant [2^{k-k^\varepsilon}]$ ни при каком $\varepsilon \in (0, 1)$.

Теорема 2.1. *Пусть* ε, $\widetilde{\varepsilon}$ — *действительные числа, причем* $\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon < \widetilde{\varepsilon} < 1$. *Для любого* $W \in \mathbb{N}$ *существуют вещественные тригонометрические полиномы* $p_k(x)$, $k = 1, \ldots, W$, *такие, что* $\deg p_k \leqslant \left[2^{k-k^\varepsilon}\right]$, $\|p_k\|_1 \geqslant \frac{2\pi}{3}$, $\|p_k\|_\infty \leqslant 70$, $k = 1, \ldots, W$, *и*

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant W} \left\| \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \cos 2^k x \right\|_\infty \leqslant C W^{\widetilde{\varepsilon}},$$

где $C = C(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) > 0$ — *константа, зависящая лишь от* ε *и* $\widetilde{\varepsilon}$.

Результаты этого параграфа опубликованы в [2].

В параграфе 3 диссертации изучаются некоторые свойства пространства квазинепрерывных функций, обобщается на произвольный лакунарный случай неравенство для QC нормы, полученное Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым, обощается пример К. И. Осколкова тригонометрических полиномов, на которых достигается экстремальная разница между C и QC нормами, получен точный порядок роста величин $\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n} \|_{QC}$, частично изучается пространство квазинепрерывных функций в многомерном случае.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1,\ k = 1, 2, \ldots.$ *Существует константа* $c(\lambda) > 0$, *зависящая лишь от* λ, *такая, что для любого тригонометрического полинома вида*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k *— вещественные тригонометрические полиномы с* $\deg(p_k) \leqslant n_k/3$, $k = 1, \ldots, N,\ N = 1, 2, \ldots,$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{N} r_k(t) p_k(x) \cos n_k x \right\|_{\infty} dt \geqslant c(\lambda) \sum_{k=1}^{N} \|p_k\|_1.$$

Теорема 3.2. *Пусть последовательность вещественных чисел* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |a_n - a_{n+1}| + |a_{2^j-1}| \leqslant \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

(*мы полагаем* $\sum_1^0 := 0$). *Тогда*

$$\left\| \sum_{n=1}^{2^k-1} a_n \cos nx \right\|_{QC} \leqslant C\sqrt{k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $C > 0$ *— абсолютная постоянная.*

В качестве следствия мы выводим, что

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n} \Big\|_{QC} \asymp \sqrt{\ln N},$$

в то время как

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n} \Big\|_\infty \asymp \ln N.$$

Теорема 3.3. *Для любого вещественного тригонометрического полинома d переменных $(d = 2, 3, \dots)$ вида*

$$f(x) = \sum_{s:\ \|s\|_1 = n} \delta_s(x), \quad \text{где } \delta_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k,x)},$$

обладающего свойством

$$\|\delta_s\|_p \leqslant 1 \ \ \forall s :\ \|s\|_1 = n, \ \text{где } p > 2,$$

справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC} \geqslant C(d,\, p) n^{\left(1 - \frac{p}{2(p-1)} d\right) \frac{p-1}{p-2}} \|f\|_2^{\frac{2(p-1)}{p-2}}, \quad C(d, p) > 0.$$

Следствие 3.1. *Для любого вещественного тригонометрического полинома d переменных $(d = 2, 3, \dots)$ вида*

$$f(x) = \sum_{s:\ \|s\|_1 = n} \delta_s(x), \quad \text{где } \delta_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k,x)},$$

обладающего свойствами

1) $\|\delta_s\|_p \leqslant 1 \ \ \forall s :\ \|s\|_1 = n,$ *где* $p > 2$,
2) $\|f\|_2 \geqslant b n^{(d-1)/2}$, *где* $b > 0$ *— абсолютная постоянная,*

справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC} \geqslant c n^{d/2}, \quad c = c(d, b, p) > 0.$$

Результаты этого параграфа опубликованы в [3].

Я хочу выразить глубокую благодарность своему научному руководителю академику РАН Борису Сергеевичу Кашину за постановки задач и постоянное внимание к моей работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Радомский А. О. Об одном неравенстве типа Сидона для тригонометрических полиномов // Матем. заметки, 2011, Т. 89, №4, с. 589–595.

[2] Радомский А. О. О возможности усиления неравенств типа Сидона // Матем. заметки, 2013, Т. 94, №5, с. 792–795.

[3] Радомский А. О. О QC норме тригонометрических полиномов специального вида // Депонировано в ВИНИТИ 2014, №275-В2014, 6 с.