Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517

Радомский Артем Олегович

Неравенства типа Сидона и некоторые свойства пространства квазинепрерывных функций

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
академик РАН, профессор,
доктор физико-математических наук
Б. С. Кашин

Москва 2014

Оглавление

Введение

В диссертации получены новые результаты о неравенствах типа Сидона, улучшающие известные. Исследован вопрос о возможности усиления неравенств типа Сидона. Эти результаты помимо их самостоятельного интереса могут применяться для вычисления энтропийных чисел классов функций многих переменных. Последний параграф диссертации посвящен изучению некоторых свойств пространства квазинепрерывных функций, которое приобретает важное значение в теории функций в связи, в частности, с возможным приложением к вычислению аппроксимационных характеристик классов функций многих переменных с ограничением на смешанную производную или с условием липшицева типа на смешанную разность.

Везде в диссертации под $\|f\|_p$ мы будем понимать норму в пространстве $L^p(a,b)$:

$$\|f\|_\infty \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{[a,\,b]} |f(x)|, \qquad \|f\|_p \equiv \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p < \infty,$$

где отрезок $[a,b]$ будет, как правило, $[0,2\pi]$ или $[0,1]$, что всегда будет ясно из контекста.

Через $c_n(f)$ будем обозначать n-й коэффициент Фурье функции f :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Мы используем также сокращение О.Н.С. — ортонормированная система.

Параграф 1 диссертации посвящен неравенствам типа Сидона. Напомним несколько основных определений:

Определение 0.1. Последовательность натуральных чисел $n_1 <$

$n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ называется *лакунарной*, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Определение 0.2. Тригонометрический ряд называется *лакунарным*, если он имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x,$$

где натуральные числа n_k удовлетворяют неравенству

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Лакунарные ряды занимают важное место в классе общих тригонометрических рядов. В 20 в. они подверглись серьезному исследованию и было получено много интересных результатов в данной области (см., например, [1], гл. XI). Как выяснилось, лакунарные ряды обладают рядом интересных свойств. Нас прежде всего будут интересовать вопросы, связанные с абсолютной сходимостью данных рядов. В 1927 г. Сидон доказал следующую теорему.

Теорема (Сидон [30])**.** *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{0.1}$$

Тогда, если тригонометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

есть ряд Фурье ограниченной функции $f(x)$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty.$$

Отметим, что сначала в работе [29] Сидон доказал более слабое утверждение: вместо условия (0.1) последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots$ удовлетворяла условию

$$\sum_{j=1}^{k-1} n_j < \frac{n_k}{2}, \qquad k = 2, 3, \dots,$$

и затем в [30], разбивая произвольную лакунарную последовательность натуральных чисел на конечное число подпоследовательностей с высокой степенью лакунарности, он доказал вышесформулированную теорему. Метод доказательства Сидона основан на произведениях Рисса, которые стали важным аппаратом для теории тригонометрических и общих ортогональных рядов. Эти произведения впервые появились в 1918 г. в работе Ф. Рисса [27], и названы в его честь. Также в [30] Сидон отмечает, что теорема сохраняет силу и тогда, когда $f(x)$ ограничена только с одной стороны, т. е. $f(x) \leq M$ или $f(x) \geq -M$.

В действительности из доказательства в [30] вытекало следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leq C(\lambda) \|f\|_\infty, \tag{0.2}$$

где $C(\lambda) > 0$ — величина, зависящая лишь от λ. Неравенство (0.2) мы будем называть *неравенством Сидона*. В частности, если последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$, $k = 1, 2, \dots$, то существует константа $c(\lambda) > 0$, зависящая лишь от λ, такая, что для любого тригонометрического полинома вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos n_k x$$

справедливо неравенство

$$\|f\|_\infty \geq c(\lambda) \sum_{k=1}^{N} |a_k|. \qquad (0.3)$$

Дальнейшее продвижение по усилению теоремы Сидона проходило по нескольким направлениям. Как было показано в 1931 г. Зигмундом [9], вместо отрезка $[-\pi, \pi]$ можно рассматривать некоторый интервал I. Здесь имеет место теорема:

Теорема (Зигмунд [9]). *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$. *Если частичные суммы* $S_m(x)$ *ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, S_m(x) < +\infty$$

(*или* $\underline{\lim}\, S_m(x) > -\infty$) *в каждой точке некоторого интервала* I*, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty.$$

Другое направление в усилении теоремы Сидона было по пути ее доказательства в предположениях более широких, чем требование лакунарности последовательности $\{n_k\}$. Сам Сидон [31] перенес ее на случай, когда $\{n_k\}$ можно разбить на конечное число лакунарных последовательностей. Дальнейшее продвижение в этом вопросе принадлежало С. Б. Стечкину [32]. В связи с теоремой Сидона в теории абсолютно сходящихся рядов Фурье возникло следующее определение.

Определение 0.3. Множество целых чисел Λ называется *множеством Сидона*, если существует такая постоянная $c > 0$, что для любого тригонометрического полинома

$$p(x) = \sum_{n \in \Lambda} a_n e^{inx}$$

справедливо неравенство

$$\|p\|_\infty \geq c \sum_{n \in \Lambda} |a_n|.$$

Если переформулировать теорему Сидона в новых терминах, то она утверждает следующее (см. (0.3)): множество $\Lambda = \{\pm n_k\},\ k = 1, 2, \dots,$ где последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию (0.1), является множеством Сидона. Более подробно о множествах Сидона можно прочитать в [10], [11], [19], [28]. Характеризация множеств Сидона была получена Ж. Пизье [21], [22], [23].

Теорема Сидона породила следующее определение в теории ортогональных рядов.

Определение 0.4. О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty,\ x \in (0, 1)$, называется *системой Сидона*, если ряд

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n(x)$$

сходится в пространстве $L^\infty(0, 1)$ тогда и только тогда, когда конечна сумма

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty.$$

Можно показать, что для того чтобы система $\Phi = \{\varphi_n\}$ была системой Сидона, необходимо и достаточно, чтобы для любого полинома

$$P(x) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)$$

выполнялись неравенства

$$c\sum_{n=1}^{N}|a_n|\le\|P\|_\infty\le C\sum_{n=1}^{N}|a_n|, \tag{0.4}$$

где постоянные $c>0$ и $C>0$ не зависят от полинома $P(x)$. Из неравенства (0.4), в частности, вытекает, что системами Сидона могут быть только равномерно ограниченные системы, т. е. системы, для которых

$$\|\varphi_n\|_\infty\le M,\qquad n=1,2,\ldots.$$

Системами Сидона являются, например, (см. (0.3)) системы вида $\{\sqrt{2}\cos 2\pi n_k x\}_{k=1}^{\infty}$, $x\in(0,1)$, где последовательность натуральных чисел n_k, $k=1,2,\ldots$, лакунарна, а также система Радемахера (см. ниже определение 1.1). Как показал в 1966 г. В. Ф. Гапошкин [4, с. 36], из любой равномерно ограниченной О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $n=1,2,\ldots$, можно выделить бесконечную подсистему Сидона $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема (В. Ф. Гапошкин [4])**.** *Из любой О.Н.С.* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\|\varphi_n\|_\infty\le M$, $n=1,2,\ldots$, *можно выделить бесконечную подсистему* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *для которой соотношение*

$$\frac{1}{M}\left\|\sum_{k=1}^{s}a_k\varphi_{n_k}\right\|_\infty\le\sum_{k=1}^{s}|a_k|\le C(M)\left\|\sum_{k=1}^{s}a_k\varphi_{n_k}\right\|_\infty\quad\forall\ \{a_k\}_{k=1}^{s}$$

верно при всех $s=1,2,\ldots$ *(здесь* $C(M)>0$ *— константа, зависящая лишь от* M*).*

Количественный аналог этого результата принадлежит Б. С. Кашину [14].

Теорема (Б. С. Кашин [14] (см. также [15, с. 367]))**.** *Из всякого ортонормированного набора функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$ *с* $\|\varphi_n\|_\infty\le M$ *при* $n=1,2,\ldots,N$ *можно выбрать функции* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{s}$, $1\le n_1<\ldots<$

$n_s \le N$, *с* $s \ge \max\left\{\left[\frac{1}{6}\log_2 N\right], 1\right\}$ *такие, что для любых чисел* a_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{M}\left\|\sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_{n_k}\right\|_\infty \le \sum_{k=1}^{s} |a_k| \le 4M \left\|\sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_{n_k}\right\|_\infty .$$

Пример тригонометрической системы показывает, что оценка $s \ge \left[\frac{1}{6}\log_2 N\right]$ по порядку неулучшаема (см. [15, с. 367]). О приложениях утверждений типа предыдущей теоремы к вопросам геометрии банаховых пространств см. [20]. Отметим, что при доказательстве последних двух теорем использовались произведения Рисса.

В 1998 г. Б. С. Кашин и В. Н. Темляков [17], [18] начали исследование нового направления в усилении теоремы Сидона. В связи с оценкой энтропийных чисел некоторых классов функций они исследовали вопрос о возможном обобщении неравенства Сидона (0.3) заменой $a_k \cos n_k x$ на $p_k(x)\cos n_k x$, где $p_k(x)$ являются тригонометрическими полиномами. Ими была доказана следующая теорема.

Теорема A (Б. С. Кашин, В. Н. Темляков [17], [18]). *Для любого тригонометрического полинома вида*

$$f(x) = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x)\cos 4^k x,$$

где $p_k(x)$ *— вещественные тригонометрические полиномы с* $\deg p_k \le 2^l$, $k = l+1, \ldots, 2l$, $l = 1, 2, \ldots$, *справедливо неравенство*

$$\|f\|_\infty \ge c \sum_{k=l+1}^{2l} \|p_k\|_1,$$

где $c > 0$ *— абсолютная постоянная.*

Дальнейшее исследование было продолжено автором [24], [25]. В параграфе 1 доказывается теорема, из которой, в частности, следует, что в теореме А условие $\deg p_k \le 2^l$ может быть заменено условием $\deg p_k \le \frac{1}{6}4^l$.

Теорема 1.1 (А. О. Радомский [24], [25]). *Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $n_{k+1}/n_k \ge \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Существует константа $c(\lambda) > 0$, зависящая лишь от λ, такая, что для любого тригонометрического полинома вида*

$$f(x) = \sum_{k=l}^{N} p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k — вещественные тригонометрические полиномы с $\deg(p_k) \le \gamma n_l$, $\gamma = \min(\frac{1}{6}, \frac{\lambda-1}{3})$, $k = l, \ldots, N$, $N \ge l$, $l = 1, 2, \ldots$, справедливо неравенство

$$\|f\|_\infty \ge c(\lambda) \sum_{k=l}^{N} \|p_k\|_1. \tag{0.5}$$

Неравенства типа (0.5) мы будем называть *неравенствами типа Сидона.* Это обосновано тем, что если $p_k(x)$ являются константами, т. е. тригонометрическими полиномами нулевой степени, то неравенство (0.5) превращается в неравенство Сидона (0.3). Также в параграфе 1 доказывается утверждение аналогичного характера для системы Уолша (см. теорему 1.2).

Параграф 2 посвящен вопросу о возможности усиления неравенств типа Сидона, т. е., другими словами, вопросу о точности теоремы 1.1. В нем доказывается следующий результат (см. [25]), из которого следует, что в теореме 1.1 при $n_k = 2^k$ условие $\deg p_k \le \frac{1}{6}2^l$ нельзя заменить на $\deg p_k \le \left[2^{k-k^{\varepsilon}}\right]$ ни при каком $\varepsilon \in (0, 1)$.

Теорема 2.1 (А. О. Радомский [25]). *Пусть ε, $\widetilde{\varepsilon}$ — действительные числа, причем $\frac{1}{2} \le \varepsilon < \widetilde{\varepsilon} < 1$. Для любого $W \in \mathbb{N}$ существуют веще-*

ственные тригонометрические полиномы $p_k(x)$, $k = 1, \ldots, W$, *такие, что* $\deg p_k \le \left[2^{k-k^\varepsilon}\right]$, $\|p_k\|_1 \ge \frac{2\pi}{3}$, $\|p_k\|_\infty \le 70$, $k = 1, \ldots, W$, *и*

$$\max_{1\le n\le W}\left\|\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\cos 2^k x\right\|_\infty \le CW^{\widetilde{\varepsilon}},$$

где $C = C(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) > 0$ — *константа, зависящая лишь от* ε *и* $\widetilde{\varepsilon}$.

Доказательство теоремы 2.1 опиралось на идеи из работы П. Г. Григорьева [5], где была доказана следующая теорема.

Теорема B (П. Г. Григорьев [5]). *Существуют абсолютная постоянная* $A > 0$ *и последовательность тригонометрических полиномов*

$$\sigma_k(x) = \sum_{2^k\le|j|<2^{k+1}} c_j e^{ijx}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

такие, что $\|\sigma_k\|_1 \ge \frac{\pi}{4}$, $\|\sigma_k\|_\infty \le 6$, $k = 1, 2, \ldots,$ *и*

$$\left\|\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\right\|_\infty \le A\sqrt{k},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Как пишет П. Г. Григорьев в своей кандидатской диссертации (см. [6]), метод построения полиномов $\sigma_k(x)$ может быть назван *методом псевдо моментов остановки*, так как идея в каком-то смысле была позаимствована из стохастического анализа.

Позднее совместно с П. Г. Григорьевым была доказана следующая теорема, усиливающая теорему 2.1.

Теорема 2.2 (П. Г. Григорьев, А. О. Радомский [7]). *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $n_{k+1}/n_k \ge \lambda > 1$ *для любого* k, *и последовательность вещественных чисел* $\{g(k)\}_{k=1}^{\infty}$ *неубывает и* $1 \le g(k) \le n_k$, $k = 1, 2, \ldots.$ *Существу-*

ет последовательность вещественных тригонометрических полиномов $p_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *таких, что*

$$\deg p_k \le \left[\frac{n_k}{g(k)}\right], \quad \|p_k\|_1 \ge \frac{2\pi}{5}, \quad \|p_k\|_\infty \le 12, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} p_k(x) \cos n_k x\right\|_\infty \le \alpha(\lambda) + \beta\sqrt{N} + 24 \log_\lambda g(N), \quad N = 1, 2, \ldots,$$

где $\beta > 0$ *— абсолютная постоянная и* $\alpha(\lambda) > 0$ *— величина, зависящая лишь от* λ.

В частности, взяв в теореме 2.2 в качестве $n_k = 2^k$ и $g(k) = 2^{k^\varepsilon}$, получаем следующее следствие.

Следствие 2.1. *Пусть* $0 \le \varepsilon < 1$. *Существует последовательность вещественных тригонометрических полиномов* $p_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *таких, что* $\deg p_k \le \left[2^{k-k^\varepsilon}\right]$, $\|p_k\|_1 \ge \frac{2\pi}{5}$, $\|p_k\|_\infty \le 12$, $k = 1, 2, \ldots$, *и*

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} p_k(x) \cos 2^k x\right\|_\infty \le C N^{\max(\varepsilon, \frac{1}{2})}, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

где $C > 0$ *— некоторая абсолютная постоянная.*

Параграф 3 посвящен изучению QC нормы. Эта норма была введена в работах [17], [18] Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым. Она определяется следующим образом: для функции $f \in L^1(0, 2\pi)$ с рядом Фурье

$$f \sim \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(f, x),$$

$$\delta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \qquad \delta_s(f, x) = \sum_{2^{s-1} \le |k| < 2^s} c_k(f) e^{ikx}, \ s = 1, 2, \ldots,$$

положим

$$\|f\|_{QC} \equiv \int_0^1 \left\| \sum_{s=0}^{\infty} r_s(t)\delta_s(f,x) \right\|_{\infty} dt, \tag{0.6}$$

где $\{r_s(t)\}_{s=0}^{\infty}$ — система Радемахера (см. опр. 1.1). *Пространством квазинепрерывных функций* называется замыкание множества тригонометрических полиномов по норме (0.6).

В многомерном случае QC норма вводится следующим образом: для функции f на $[0,2\pi]^d$ $(d \geq 2)$ положим

$$\|f\|_{QC} \equiv \big\| \|f(\cdot, x^1)\|_{QC} \big\|_{\infty}, \tag{0.7}$$

где по определению для $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ полагаем $x^1 = (x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$. Другими словами, в (0.7) берется QC норма по переменной x_1 и sup-норма по остальным переменным.

Для функций одной переменной Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым была доказана следующая теорема.

Теорема C (Б. С. Кашин, В. Н. Темляков [17], [18]). *Для любой действительной функции $f \in L^1(0,2\pi)$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_{QC} \geq \frac{1}{32\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_s(f,\cdot)\|_1. \tag{0.8}$$

В параграфе 3 этот результат обобщается на произвольный лакунарный случай (см. теорему 3.1).

Обозначим через $\mathrm{T}(m)$ пространство вещественных тригонометрических полиномов степени $\leq m$. Из теоремы C и теоремы B вытекает, что

$$\sup_{t \in \mathrm{T}(2^k)} \frac{\|t\|_{QC}}{\|t\|_{\infty}} \geq c\sqrt{k}, \quad c > 0.$$

С другой стороны, как показал К. И. Осколков (см. [18]; с. 96),

$$\sup_{t \in \mathrm{T}(2^k)} \frac{\|t\|_{\infty}}{\|t\|_{QC}} \geq c\sqrt{k}, \qquad c > 0. \tag{0.9}$$

А именно, он показал, что для тригонометрических полиномов

$$t_k(x) = \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-s} \sum_{j=2^s}^{2^{s+1}-1} \cos jx$$

справедлива оценка $\|t_k\|_{QC} \le \gamma\sqrt{k}$, где $\gamma > 0$ – абсолютная постоянная. Поскольку $\|t_k\|_\infty = t_k(0) = k$, то отсюда следует (0.9). В теореме 3.2 пример К. И. Осколкова обобщается.

Теорема 3.2 (А. О. Радомский [26]). *Пусть последовательность вещественных чисел* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |a_n - a_{n+1}| + |a_{2^j-1}| \le \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

(*мы полагаем* $\sum_1^0 := 0$). *Тогда*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{2^k-1} a_n \cos nx \Big\|_{QC} \le C\sqrt{k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

В качестве следствия мы выводим, что

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n} \Big\|_{QC} \asymp \sqrt{\ln N},$$

в то время как

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n} \Big\|_{\infty} \asymp \ln N.$$

Интерес к изучению QC нормы связан прежде всего с возможным ее приложением для исследования аппроксимационных характеристик классов функций многих переменных с ограничением на смешанную производную или с условием липшицева типа на смешанную разность. Известно, что многие задачи теории приближения данных классов по норме

L^∞ остаются нерешенными до сих пор. В то же время в решении этих вопросов удалось продвинуться, если заменить норму L^∞ на близкую норму — QC норму. Поэтому, в частности, задача о выявлении связи между QC и равномерной нормами является очень важной. Введем необходимые определения.

Для $r > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ определим одномерное ядро Бернулли

$$F_r(x, \alpha) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kx - \frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad x \in [0, 2\pi],$$

и многомерное для $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

$$F_r(x, \alpha) = \prod_{j=1}^{d} F_r(x_j, \alpha_j).$$

Определим класс периодических функций с ограниченной смешанной производной:

$$W^r_{q,\alpha} \equiv \{f : \ f = F_r(\cdot, \alpha) * \varphi(\cdot), \ \|\varphi\|_q \le 1\},$$

где $*$ — операция свертки.

Для $r > 0$ положим $l = [r] + 1$ и рассмотрим операторы $\Delta_h^{l,j}$ взятия l-й разности с шагом h по переменной x_j. Для набора натуральных чисел $e \subset \{1, \dots, d\}$ определим оператор смешанной разности

$$\Delta_t^l(e) = \prod_{j\in e} \Delta_{t_j}^{l,j}, \quad t = (t_1, \dots, t_d), \ \ \Delta_t^l(\varnothing) = \mathrm{Id}.$$

Определим класс функций с ограниченной смешанной разностью:

$$H^r_q \equiv \left\{f \in L^q\left([0, 2\pi]^d\right) : \forall e \subset \{1, \dots, d\} \ \|\Delta_t^l(e) f\|_q \le \prod_{j\in e} |t_j|^r\right\}.$$

Напомним определения ε-энтропии и поперечников по Колмогорову. Для компакта K в банаховом пространстве X с единичным шаром B_X величины

$$d_n(K,X)=\inf_{\{u_i\}_{i=1}^n\subset X}\sup_{f\in K}\inf_{c_i}\left\|f-\sum_{i=1}^n c_iu_i\right\|_X,$$

$$\varepsilon_n(K,X)=\inf\left\{\varepsilon:\exists\{f_i\}_{i=1}^q\in X,\ q\le 2^{n-1},\ K\subset\bigcup_{i=1}^q\{f_i+\varepsilon B_X\}\right\}$$

$(n=1,2,\dots)$ называются соответственно *n-м поперечником по Колмогорову* и *n-м энтропийным числом* множества K в пространстве X.

Аппроксимационные характеристики (ε-энтропия и поперечники по Колмогорову) классов W^r_q и H^r_q в L^p при $1\le p<\infty$ известны (см., например, [34], [35], [36], [16]). Наиболее трудным является случай, когда $X=L^\infty$. Здесь точные порядки поперечников по Колмогорову получены лишь для случая $d=1$ Б. С. Кашиным [13] и $d=2$ В. Н. Темляковым [37], [38]. В случае $d\ge 2$ наилучшие верхние оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов H^r_q и W^r_q были получены Э. С. Белинским [2], [3] (отметим, что при $d=2$ эти оценки были получены ранее В. Н. Темляковым (см. [34] доказательство теоремы 1.1 гл. 3)). Приведем эти оценки:

Теорема (Э. С. Белинский [2]). 1) *Для $r>\max(\frac{1}{q},\frac{1}{2})$, $d\ge 2$ и $1<q\le\infty$ существует константа $C=C(r,d,q)>0$ такая, что справедливы неравенства*

$$\varepsilon_n(H^r_q,L^\infty)\le Cn^{-r}(\log n)^{r(d-1)+\frac{d}{2}};\tag{0.10}$$

$$\varepsilon_n(W^r_q,L^\infty)\le Cn^{-r}(\log n)^{r(d-1)+\frac{1}{2}}.\tag{0.11}$$

2) *Для $r>1/2$, $d\ge 2$ и $2\le q\le\infty$ существует константа $C'=C'(r,d)>0$ такая, что справедливы неравенства*

$$d_n(H^r_q,L^\infty)\le C'n^{-r}(\log n)^{r(d-1)+\frac{d}{2}};\tag{0.12}$$

$$d_n(W^r_q,L^\infty)\le C'n^{-r}(\log n)^{r(d-1)+\frac{1}{2}}.\tag{0.13}$$

В. Н. Темляков в [37], [38] показал, что эти оценки точны по порядку при $d = 2$. Случай $d > 2$ до сих пор остается открытым. Доказательство при $d = 2$ соответствующих нижних оценок в [37], [38] было основано на одном неравенстве. Чтобы его сформулировать введем несколько определений.

Для $s \in \mathbb{Z}_+^d$ положим

$$\rho(s) \equiv \{n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d : \; [2^{s_j - 1}] \le |n_j| < 2^{s_j}, \; j = 1, \dots, d\}.$$

Для четных k и $d \ge 2$ обозначим

$$Y_k^d = \left\{ s = (2l_1, \dots, 2l_d), \; l_1 + \ldots + l_d = k/2, \; l \in \mathbb{Z}_+^d \right\}.$$

В двумерном случае В. Н. Темляковым было доказано следующее неравенство (см. [37]):

$$\Big\| \sum_{s \in Y_k^2} \delta_s \Big\|_\infty \ge c \sum_{s \in Y_k^2} \|\delta_s\|_1, \quad c > 0, \tag{0.14}$$

$$\text{где } \delta_s(x) = \sum_{n \in \rho(s)} a_n e^{i(n,x)}, \quad x \in [0, 2\pi]^2.$$

В [38] В. Н. Темляков высказал предположение, что для случая $d \ge 3$ справедливо неравенство:

$$\Big\| \sum_{s \in Y_k^d} \delta_s \Big\|_\infty \ge c(d) k^{-(d-2)/2} \sum_{s \in Y_k^d} \|\delta_s\|_1, \quad c(d) > 0, \tag{0.15}$$

$$\text{где } \delta_s(x) = \sum_{n \in \rho(s)} a_n e^{i(n,x)}, \quad x \in [0, 2\pi]^d.$$

Это предположение является открытым вопросом. Отметим, что похожее на (0.14) неравенство для полиномов по системе Хаара в случае $d = 2$ было доказано ранее в [33] в связи с приложениями к теории гауссовских процессов. Случай $d \ge 3$ для полиномов по системе Хаара также является открытым.

Используя неравенство (0.14), В. Н. Темляков в [37], [38] доказал точность оценок (0.10)–(0.13) при $d = 2$, т. е. получил такие же по порядку нижние оценки аппроксимационных характеристик классов W^r_q и H^r_q. Отметим, что если бы при каком-то $d \geq 3$ удалось доказать неравенство (0.15), то, повторяя рассуждения из [37], [38], для этого d была бы установлена точность оценок (0.10)–(0.13).

В [17], [18] Б. С. Кашин и В. Н. Темляков доказали неравенство, аналогичное неравенству (0.15), где норма L^∞ была заменена на QC норму.

Теорема D (Б. С. Кашин, В. Н. Темляков [17], [18])**.** *Для любого вещественного тригонометрического полинома d переменных* ($d = 2, 3, \dots$) *вида*

$$f(x) = \sum_{s:\ \|s\|_1 = n} \delta_s(x), \quad \text{где } \delta_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k,x)},$$

обладающего свойствами

1) $\|\delta_s\|_4 \leq 1 \ \ \forall s: \ \|s\|_1 = n$;
2) $\|f\|_2 \geq b n^{(d-1)/2}$, *где $b > 0$ — абсолютная постоянная;*

справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC} \geq c n^{d/2}, \quad c = c(d, b) > 0.$$

Используя теорему D, Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым [17], [18] были получены точные порядки энтропийных чисел и поперечников по Колмогорову классов W^r_q и H^r_q по QC норме. Доказательство теоремы D было основано на одномерном неравенстве для QC нормы (0.8). Из результата П. Г. Григорьева (теорема B) вытекает, что неравенство (0.8) перестает быть верным, если в нем QC норму заменить на норму L^∞, поэтому доказательство неравенств (0.15) при $d \geq 3$ должно идти другим путем. В параграфе 3 доказывается, что утверждение теоремы D сохраняет силу при более слабых условиях: $\|\delta_s\|_p \leq 1,\ p > 2$ (см. теорему 3.3 и следствие 3.1).

Я хочу выразить глубокую благодарность своему научному руководителю академику РАН Борису Сергеевичу Кашину за постановки задач и постоянное внимание к моей работе.

§1 О неравенствах типа Сидона для тригонометрической системы и системы Уолша

Из классической теоремы Сидона (см. Введение) следует, если последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то для любого тригонометрического полинома вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos n_k x \tag{1.1}$$

справедливо неравенство,

$$\|f\|_\infty \geq c(\lambda) \sum_{k=1}^{N} |a_k|, \tag{1.2}$$

где $c(\lambda) > 0$ — величина, зависящая лишь от λ. Неравенство (1.2) мы будем называть *неравенством Сидона.*

В связи с оценкой энтропийных чисел некоторых классов функций Б. С. Кашин и В. Н. Темляков (см. [17], [18]) исследовали вопрос о возможном обобщении неравенства Сидона, заменив в (1.1) $a_k \cos n_k x$ на $p_k(x) \cos n_k x$, где $p_k(x)$ являются тригонометрическими полиномами (см. теорему А во Введении). Дальнейшее исследование было продолжено автором [24], [25]. В данном параграфе доказывается теорема 1.1, из которой, в частности, следует, что в теореме А условие $\deg p_k \leq 2^l$ может быть заменено условием $\deg p_k \leq \frac{1}{6} 4^l$.

Введем несколько обозначений. Через $< \cdot, \cdot >$ будем обозначать скалярное произведение функций в пространстве $L^2(0, 2\pi)$:

$$< f, g > \equiv \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

Через $c_n(f)$ обозначим n-й коэффициент Фурье функции $f(x)$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Определим *свертку* двух 2π-периодических функций, суммируемых на $[0, 2\pi]$:

$$(f * g)(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt. \tag{1.3}$$

Нами часто будет использоваться следующее хорошо известное свойство свертки (см., например, [8, т. 1, с. 64]):

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g). \tag{1.4}$$

Мы доказываем следующее

Теорема 1.1 ([24], [25]). *Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Существует константа $c(\lambda) > 0$, зависящая лишь от λ, такая, что для любого тригонометрического полинома вида*

$$f(x) = \sum_{k=l}^{N} p_k(x)\cos n_k x,$$

где p_k — вещественные тригонометрические полиномы с $\deg(p_k) \leq \gamma n_l$, $\gamma = \min(\frac{1}{6}, \frac{\lambda-1}{3})$, $k = l, \ldots, N$, $N \geq l$, $l = 1, 2, \ldots$, справедливо неравенство

$$\|f\|_\infty \geq c(\lambda)\sum_{k=l}^{N}\|p_k\|_1. \tag{1.5}$$

Неравенства типа (1.5) мы будем называть *неравенствами типа Сидона.* Это обосновано тем, что если $p_k(x)$ являются константами, т. е. тригонометрическими полиномами нулевой степени, то неравенство (1.5) превращается в неравенство Сидона (1.2).

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим тригонометрический полином

$$f(x) = \sum_{k=l}^{N} p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k — вещественные тригонометрические полиномы с $\deg(p_k) =: \alpha_k \le \gamma n_l$, $\gamma = \min(\frac{1}{6}, \frac{\lambda-1}{3})$, $k = l, \dots, N$. Определим функции $g_k(x)$, $k = l, \dots, N$. Возьмем произвольное $k \in \{l, \dots, N\}$. Если $\alpha_k = 0$, то полином $p_k(x)$ суть вещественная константа a_k. В этом случае положим

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_k \ge 0, \\ -1, & \text{если } a_k < 0. \end{cases}$$

Если $\alpha_k > 0$, то определим функцию $g_k(x)$ следующим образом. Введем функцию (ядро Валле Пуссена)

$$V_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{|\nu| \le j} e^{i\nu x}, \quad n \ge 1.$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

а) $V_n(x)$ — вещественный тригонометрический полином с $\deg(V_n) < 2n$;

б) $c_l(V_n) = 1$, при $|l| \le n$;

в) $\|V_n\|_1 \le 6\pi$.

Первые два свойства очевидны. Третье следует из известных свойств ядер Фейера $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x)$, где $D_j(x) = \sum_{\nu=-j}^{j} e^{i\nu x}$:

$$K_n(x) \ge 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} K_n(x)\, dx = 2\pi,$$

и того факта, что

$$V_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} D_j(x) = 2K_{2n-1}(x) - K_{n-1}(x).$$

Откуда имеем

$$\int_0^{2\pi} |V_n(x)|\, dx \le 2 \int_0^{2\pi} K_{2n-1}(x)\, dx + \int_0^{2\pi} K_{n-1}(x)\, dx = 6\pi,$$

и свойство в) доказано.

Положим (см. (1.3))

$$g_k = \mathrm{sign}(p_k) * V_{\alpha_k}.$$

Ясно, что g_k — вещественная функция и, учитывая (1.4), получаем, что g_k — вещественный тригонометрический полином с $\deg(g_k) < 2\alpha_k$. Покажем, что $\|g_k\|_\infty \le 3$. Действительно, в каждой точке $x \in [0, 2\pi]$

$$|g_k(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{sign}\,(p_k(x-t)) \cdot V_{\alpha_k}(t)\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |V_{\alpha_k}(t)|\,dt \le 3.$$

Покажем, что

$$< p_k, g_k >= \|p_k\|_1.$$

Используя то, что $\deg(p_k) = \alpha_k$ и $c_l(V_{\alpha_k}) = 1$ при $|l| \le \alpha_k$, находим (см. также (1.4)):

$$< p_k, g_k >= 2\pi \sum_{l=-\alpha_k}^{\alpha_k} c_l(p_k)c_{-l}(g_k) = 2\pi \sum_{l=-\alpha_k}^{\alpha_k} c_l(p_k)c_{-l}(\mathrm{sign}(p_k))c_{-l}(V_{\alpha_k}) =$$

$$= 2\pi \sum_{l=-\alpha_k}^{\alpha_k} c_l(p_k)c_{-l}(\mathrm{sign}(p_k)) =< p_k, \mathrm{sign}(p_k) >= \|p_k\|_1.$$

Объединяя два случая, имеем

$$\deg(g_k) < 2\gamma n_l,\ \|g_k\|_\infty \le 3,\ < p_k, g_k >= \|p_k\|_1,\ k = l, \dots, N. \tag{1.6}$$

Выберем $\mu = \mu(\lambda) \ge 11$, такое, что

$$\mu^{x-1}\Big(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu - 1}\Big) - \frac{2x+1}{6} > 0, \quad x \ge 2. \tag{1.7}$$

Нетрудно видеть, что это возможно сделать, если взять μ достаточно большим. Отметим следующие неравенства

$$1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu - 1} < \lambda - \frac{\mu}{\mu - 1}, \tag{1.8}$$

$$0,9\mu^{x-2} - \frac{2x+1}{6} > 0, \quad x \geq 2. \tag{1.9}$$

Действительно, первое неравенство равносильно неравенству $2 < \lambda + \frac{1}{\lambda}$, которое, очевидно, выполнено, поскольку $\lambda > 1$. Для доказательства второго рассмотрим функцию $\psi(x) = 0,9\mu^{x-2} - \frac{2x+1}{6}$. Имеем $\psi(2) = \frac{1}{15} > 0$ и

$$\psi'(x) = 0,9\mu^{x-2}\ln\mu - \frac{1}{3} > 0, \quad x \geq 2,$$

поскольку

$$\psi'(2) = 0,9\ln\mu - \frac{1}{3} \geq 0,9\ln 11 - \frac{1}{3} > 0,$$

и тем самым неравенство (1.9) доказано.

Разобьем последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ на конечное число $M = M(\lambda,\mu)$ подпоследовательностей $\{m_j^{(q)}\}_{j=1}^{\infty}$, $q = 1,\ldots,M$, удовлетворяющих условию $m_{j+1}^{(q)}/m_j^{(q)} \geq \mu$, $j = 1,2,\ldots$. Поскольку $\mu = \mu(\lambda)$, то $M = M(\lambda)$.

Выберем одну из этих подпоследовательностей и обозначим ее через $\{m\}$. Рассмотрим следующее произведение Рисса

$$R(x) = \prod_{l\leq k\leq N:\, n_k\in\{m\}} \Big(1 + \frac{1}{3}\, g_k(x)\cos n_k x\Big). \tag{1.10}$$

Поскольку $\|g_k\|_\infty \leq 3$, то $R(x) \geq 0$. Покажем, что

$$\|R\|_1 = 2\pi. \tag{1.11}$$

Раскрывая скобки в (1.10), получаем:

$$R(x) = 1 + \frac{1}{3}\sum_{l\leq k\leq N:\, n_k\in\{m\}} g_k(x)\cos n_k x + w(x), \tag{1.12}$$

где $w(x) = \sum_e a_e(x)$ и слагаемые $a_e(x)$ имеют вид

$$a_e(x) = g_{k_1}(x)\cos n_{k_1}x \cdot \ldots \cdot g_{k_p}(x)\cos n_{k_p}x \cdot \frac{1}{3^p}, \tag{1.13}$$

где $k_1 > k_2 > \ldots > k_p$, $p \geq 2$. Имеем

$$\int_0^{2\pi} g_k(x) \cos n_k x \, dx = 0, \quad k = l, \ldots, N,$$

поскольку $\deg(g_k) < 2\gamma n_l < n_k$. Покажем, что

$$\int_0^{2\pi} w(x) \, dx = 0.$$

Минимальная частота тригонометрического полинома $a_e(x)$ по модулю будет (см. (1.6))

$$|\nu| > n_{k_1} - 2\gamma n_l - (n_{k_2} + 2\gamma n_l + \ldots + n_{k_p} + 2\gamma n_l) =$$
$$= n_{k_1} - (n_{k_2} + \ldots + n_{k_p}) - p2\gamma n_l.$$

Поскольку $n_k \in \{m\}$, имеем

$$n_{k_2} + \ldots + n_{k_p} = n_{k_1}\Big(\frac{n_{k_2}}{n_{k_1}} + \ldots + \frac{n_{k_p}}{n_{k_1}}\Big) \leq n_{k_1}\Big(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \ldots\Big) = \frac{1}{\mu - 1} n_{k_1}.$$

Отсюда, пользуясь также тем, что $n_{k_1} \geq \mu^{p-1} n_l$, $\mu \geq 11$, $\gamma \leq 1/6$ и (1.9), получаем

$$|\nu| > \Big(1 - \frac{1}{\mu - 1}\Big) n_{k_1} - 2p\gamma n_l \geq \Big(1 - \frac{1}{\mu - 1}\Big)\mu^{p-1} n_l - 2p\gamma n_l \geq$$
$$\geq \Big(0,9\mu^{p-1} - 2p\gamma\Big) n_l \geq \Big(0,9\mu^{p-1} - \frac{2p}{6}\Big) n_l > \Big(0,9\mu^{p-2} - \frac{2p+1}{6}\Big) n_l > 0.$$

Отсюда получаем, что $\int_0^{2\pi} a_e(x)\, dx = 0$, и т. к. $a_e(x)$ произвольное слагаемое, входящее в сумму $w(x)$, то $\int_0^{2\pi} w(x)\, dx = 0$. Поскольку $R(x) \geq 0$, то из (1.12) имеем

$$\|R\|_1 = \int_0^{2\pi} R(x)\, dx = \int_0^{2\pi} 1 \, dx = 2\pi,$$

и (1.11) доказано.

Рассмотрим следующую величину

$$I = < f, R > = \int_0^{2\pi} f(x) R(x)\, dx.$$

Оценим I сверху. Имеем

$$I \le \int_0^{2\pi} |f(x)||R(x)|\,dx \le \|f\|_\infty \|R\|_1 = 2\pi \|f\|_\infty. \tag{1.14}$$

Оценим теперь I снизу.

$$I = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=l}^{N} p_k(x) \cos n_k x\Big)\Big(1 + \frac{1}{3} \sum_{l\le k\le N:\, n_k\in\{m\}} g_k(x) \cos n_k x + w(x)\Big)\,dx. \tag{1.15}$$

Имеем

$$\int_0^{2\pi} p_k(x) \cos n_k x\,dx = 0,\ \ k = l, \ldots, N, \tag{1.16}$$

поскольку $\deg(p_k) \le \gamma n_l < n_k$. Покажем, что

$$\int_0^{2\pi} p_k(x) \cos n_k x\, w(x)\,dx = 0,\ \ k = l, \ldots, N. \tag{1.17}$$

Для этого достаточно показать, что $\int_0^{2\pi} p_k(x)\cos n_k x\, a_e(x)\,dx = 0$, где $a_e(x)$ — произвольное слагаемое, входящее в сумму w. Рассмотрим (см. (1.13))

$$p_k(x) \cos n_k x\, g_{k_1}(x) \cos n_{k_1} x \cdot \ldots \cdot g_{k_p}(x) \cos n_{k_p} x. \tag{1.18}$$

Рассмотрим три случая:

1) $n_k < n_{k_1}$. Тогда минимальная частота (1.18) по модулю будет

$$|\nu| > n_{k_1} - (n_{k_2} + \ldots + n_{k_p}) - p2\gamma n_l - n_k - \gamma n_l \ge$$
$$\ge \Big(1 - \frac{1}{\mu - 1}\Big) n_{k_1} - n_k - (2p+1)\gamma n_l.$$

Поскольку $n_k \le n_{k_1-1} \le \frac{1}{\lambda} n_{k_1}$, и пользуясь также тем, что $n_{k_1} \ge \mu^{p-1} n_l$, получаем (см. (1.7))

$$
\begin{aligned}
|\nu| &> \Big(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu-1}\Big) n_{k_1} - (2p+1)\gamma n_l \geq \\
&\geq \left(\mu^{p-1}\Big(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu-1}\Big) - (2p+1)\gamma\right) n_l \geq \\
&\geq \left(\mu^{p-1}\Big(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu-1}\Big) - \frac{2p+1}{6}\right) n_l > 0.
\end{aligned}
$$

2) $n_k > n_{k_1}$. Тогда минимальная частота (1.18) по модулю будет

$$
|\nu| > n_k - \gamma n_l - (n_{k_1} + \ldots + n_{k_p}) - p2\gamma n_l.
$$

Поскольку

$$
n_{k_1} + \ldots + n_{k_p} \leq n_{k_1}\Big(1 + \frac{1}{\mu} + \ldots\Big) = \frac{\mu}{\mu-1} n_{k_1},
$$

$n_k \geq \lambda n_{k_1}$, $n_{k_1} \geq \mu^{p-1} n_l$, получаем (см. также (1.7), (1.8))

$$
\begin{aligned}
&|\nu| > n_k - \frac{\mu}{\mu-1} n_{k_1} - (2p+1)\gamma n_l \geq \Big(\lambda - \frac{\mu}{\mu-1}\Big) n_{k_1} - (2p+1)\gamma n_l \geq \\
&\geq \Big(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu-1}\Big) n_{k_1} - (2p+1)\gamma n_l \geq \left(\mu^{p-1}\Big(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu-1}\Big) - \right. \\
&\left. -(2p+1)\gamma\right) n_l \geq \left(\mu^{p-1}\Big(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu-1}\Big) - \frac{2p+1}{6}\right) n_l > 0.
\end{aligned}
$$

3) $n_k = n_{k_1}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&p_{k_1}(x) g_{k_1}(x) \cos^2 n_{k_1} x \, g_{k_2}(x) \cos n_{k_2} x \cdot \ldots \cdot g_{k_p}(x) \cos n_{k_p} x = \\
&= \frac{1}{2} \, p_{k_1}(x) g_{k_1}(x) \cos 2n_{k_1} x \, g_{k_2}(x) \cos n_{k_2} x \cdot \ldots \cdot g_{k_p}(x) \cos n_{k_p} x + \\
&+ \frac{1}{2} \, p_{k_1}(x) g_{k_1}(x) g_{k_2}(x) \cos n_{k_2} x \cdot \ldots \cdot g_{k_p}(x) \cos n_{k_p} x.
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

Минимальная частота по модулю в первом слагаемом (1.19) будет (см.

(1.9))

$$\begin{aligned}
&|\nu| > 2n_{k_1} - (n_{k_2} + \ldots + n_{k_p}) - (2p+1)\gamma n_l \geq \\
&\geq \Big(2 - \frac{1}{\mu - 1}\Big) n_{k_1} - (2p+1)\gamma n_l \geq 1,9 n_{k_1} - (2p+1)\gamma n_l \geq \\
&\geq \Big(1,9\mu^{p-1} - (2p+1)\gamma\Big) n_l \geq \left(1,9\mu^{p-1} - \frac{2p+1}{6}\right) n_l > \\
&> \left(0,9\mu^{p-2} - \frac{2p+1}{6}\right) n_l > 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (1.19). Минимальная частота по модулю будет

$$\begin{aligned}
&|\nu| > n_{k_2} - (n_{k_3} + \ldots + n_{k_p}) - (2p+1)\gamma n_l \geq \left(1 - \frac{1}{\mu - 1}\right) n_{k_2} - \\
&- (2p+1)\gamma n_l \geq 0,9 n_{k_2} - (2p+1)\gamma n_l.
\end{aligned}$$

Поскольку $n_{k_2} \geq \mu^{p-2} n_l$, имеем (см. также (1.9))

$$|\nu| > \Big(0,9\mu^{p-2} - (2p+1)\gamma\Big) n_l \geq \left(0,9\mu^{p-2} - \frac{2p+1}{6}\right) n_l > 0.$$

Таким образом, получаем, что $\int_0^{2\pi} p_k(x) \cos n_k x \, a_e(x)\, dx = 0$, где $a_e(x)$ — произвольное слагаемое, входящее в сумму w, и, следовательно, (1.17) доказано.

Рассмотрим теперь

$$\int_0^{2\pi} p_k(x) \cos n_k x \, g_s(x) \cos n_s x \, dx. \tag{1.20}$$

Рассмотрим три случая:

1) $n_k < n_s$. Тогда минимальная частота $p_k(x) \cos n_k x \, g_s(x) \cos n_s x$ по модулю будет

$$|\nu| > n_s - n_k - 3\gamma n_l \geq (\lambda - 1) n_k - 3\gamma n_l \geq (\lambda - 1 - 3\gamma) n_l \geq 0.$$

2) $n_k > n_s$. Тогда минимальная частота $p_k(x)\cos n_k x\, g_s(x)\cos n_s x$ по модулю будет

$$|\nu| > n_k - n_s - 3\gamma n_l \geq (\lambda-1)n_s - 3\gamma n_l \geq (\lambda - 1 - 3\gamma)n_l \geq 0.$$

Таким образом, в случаях 1) и 2) интеграл (1.20) равен нулю.

3) $n_k = n_s$. Имеем (см. (1.6))

$$\int_0^{2\pi} p_k(x)g_k(x)\cos^2 n_k x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_k(x)g_k(x)\, dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_k(x)g_k(x)\cos 2n_k x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_k(x)g_k(x)\, dx = \frac{1}{2}\,\|p_k\|_1.$$

Мы здесь использовали также то, что $\deg(p_k g_k) < 3\gamma n_l < 2n_k$.

Таким образом, учитывая также (1.15), (1.16) и (1.17), получаем

$$I = \frac{1}{6}\sum_{l\leq k\leq N:\, n_k\in\{m\}} \|p_k\|_1. \tag{1.21}$$

Из (1.14) и (1.21) получаем

$$\sum_{l\leq k\leq N:\, n_k\in\{m\}} \|p_k\|_1 \leq 12\pi\|f\|_\infty. \tag{1.22}$$

Складывая неравенства (1.22) по всем подпоследовательностям $\{m_j^{(q)}\}_{j=1}^\infty,\ q = 1,\ldots,M$, получаем

$$\sum_{k=l}^{N} \|p_k\|_1 \leq 12\pi M(\lambda)\|f\|_\infty,$$

т. е. $\|f\|_\infty \geq c(\lambda)\sum_{k=l}^N \|p_k\|_1$, где $c(\lambda) = \frac{1}{12\pi M(\lambda)}$. Теорема 1.1 доказана.

Напомним определения двух известных систем.

Определение 1.1. Для $n = 1, 2, \ldots$ *n-я функция Радемахера* задается равенством

$$r_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right),\ i - \text{нечетное}, \\ -1 & \text{при } x \in \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right),\ i - \text{четное}, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, 2^n$.

Кроме того, в дальнейшем удобно считать, что $r_0(x) = 1$ при $x \in (0,1)$ и что $r_n(i/2^n) = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, 2^n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Для целого числа $n > 0$ рассмотрим его двоичное разложение

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k(n) 2^k = \sum_{k=0}^{s(n)} \theta_k(n) 2^k, \quad \text{где } \theta_k = 0 \text{ или } 1,$$
$$\theta_{s(n)}(n) = 1, \qquad s(n) = [\log_2 n].$$

Определение 1.2. *Система Уолша* – это система функций

$$W = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad x \in [0,1],$$

в которой $w_0(x) \equiv 1$, а при $n \geq 1$

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(x)]^{\theta_k(n)} = r_{s(n)+1} \prod_{k=0}^{s(n)-1} [r_{k+1}(x)]^{\theta_k(n)}, \tag{1.23}$$

где $r_k(x),\ k = 1, 2, \ldots,$ — функции Радемахера.

О разных свойствах этих систем можно ознакомиться в книгах [12], [15].

Для $m \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{W}(m)$ будем обозначать множество полиномов $p(x)$ по системе Уолша вида

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n w_n(x), \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Следующая теорема является аналогом неравенства типа Сидона (1.5) для полиномов по системе Уолша. Ниже под $\|f\|_p$ мы понимаем

$$\|f\|_\infty \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{[0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_p \equiv \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty.$$

Теорема 1.2. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $2^{k-1} \le n_k < 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда для любой функции* $f(x)$ *вида*

$$f(x) = \sum_{k=l+1}^{m} p_k(x) w_{n_k}(x),$$

где $p_k \in \mathcal{W}(2^l - 1)$, $k = l+1, \ldots, m$, $m \ge l+1$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, *справедливо неравенство*

$$\|f\|_\infty \ge \sum_{k=l+1}^{m} \|p_k\|_1.$$

Доказательство теоремы 1.2. Рассмотрим функции $\widetilde{g_k}(x) = \operatorname{sign}(p_k(x))$. Функции $p_k(x)$, как нетрудно видеть, постоянны на интервалах $\left(\frac{i-1}{2^l}, \frac{i}{2^l}\right)$, $1 \le i \le 2^l$. Поэтому функции $\widetilde{g_k}(x)$ также постоянны на этих интервалах, и, следовательно (см. [15, с. 151]), найдутся полиномы $g_k \in \mathcal{W}(2^l - 1)$, такие, что $\widetilde{g_k}(x) = g_k(x)$, $x \in [0, 1]$, за исключением конечного числа точек. Имеем

$$\int_0^1 g_k(x) p_k(x)\, dx = \int_0^1 \widetilde{g_k}(x) p_k(x)\, dx = \int_0^1 |p_k(x)|\, dx = \|p_k\|_1. \quad (1.24)$$

Введем функцию

$$J(x) = \prod_{k=l+1}^{m} (1 + g_k(x) w_{n_k}(x)). \quad (1.25)$$

Ясно, что $J(x) \ge 0$, $x \in [0, 1]$, за исключением конечного числа точек. Раскрывая скобки в (1.25), получаем

$$J(x) = 1 + \sum_{k=l+1}^{m} g_k(x) w_{n_k}(x) + t(x), \quad (1.26)$$

где $t(x) = \sum_e a_e(x)$ и слагаемые $a_e(x)$ имеют вид

$$a_e(x) = \prod_{s=1}^{p} g_{k_s}(x) w_{n_{k_s}}(x), \quad (1.27)$$

где $k_1 > k_2 > \ldots > k_p \geq l+1,\ p \geq 2$.

Рассмотрим $< f, J > = \int_0^1 f(x)J(x)\,dx$. Из (1.26) находим

$$
\begin{aligned}
< f, J > = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)t(x)\,dx + \\
+ \int_0^1 f(x)\left(\sum_{k=l+1}^{m} g_k(x)w_{n_k}(x)\right) dx.
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Покажем, что

$$
\int_0^1 f(x)t(x)\,dx = 0. \tag{1.29}
$$

Для этого достаточно показать, что $\int_0^1 f(x)a_e(x)\,dx = 0$, где $a_e(x)$ — произвольное слагаемое, входящее в сумму $t(x)$. Рассмотрим произведение (см. (1.27))

$$
p_i(x)w_{n_i}(x)g_{k_1}(x)w_{n_{k_1}} \cdot \ldots \cdot g_{k_p}(x)w_{n_{k_p}}(x), \quad l+1 \leq i \leq m.
$$

Это произведение раскладывается в сумму слагаемых, каждое из которых, учитывая (1.23) и то, что $r_n^2(x) \equiv 1$, имеет вид $r_\alpha(x) \cdot \prod\limits_{j<\alpha} r_j^{\varepsilon_j}(x)$ ($\varepsilon_j = 0, 1$), где $\alpha = k_1$, k_2 или i, если $i < k_1$, $i = k_1$ или $i > k_1$ соответственно. Функции Радемахера образуют систему независимых функций и для них справедливо равенство (см. [15, с. 28])

$$
\int_0^1 r_\alpha(x) \prod_{j<\alpha} r_j^{\varepsilon_j}(x)\,dx = \int_0^1 r_\alpha(x)\,dx \cdot \prod_{j<\alpha:\,\varepsilon_j=1} \int_0^1 r_j(x)\,dx = 0.
$$

Поэтому $\int_0^1 p_i(x)w_{n_i}(x)a_e(x)\,dx = 0$, $l+1 \leq i \leq m$. Отсюда $\int_0^1 f(x)a_e(x)\,dx = 0$, и следовательно, (1.29) доказано. Аналогичными рассуждениями показывается, что $\int_0^1 t(x)\,dx = 0$. Нетрудно видеть, что $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. В итоге (1.28) имеет вид

$$
< f, J > = \sum_{i=l+1}^{m} \sum_{k=l+1}^{m} \int_0^1 p_i(x)g_k(x)w_{n_i}(x)w_{n_k}(x)\,dx.
$$

Рассуждая также, как и при доказательстве равенства $\int_0^1 f(x)t(x)\,dx = 0$, убеждаемся, что интегралы $\int_0^1 p_i(x)g_k(x)w_{n_i}(x)w_{n_k}(x)\,dx = 0$ при $i \neq k$. Поэтому (см. (1.24))

$$< f, J > = \sum_{k=l+1}^{m} \int_0^1 p_k(x)g_k(x)\,dx = \sum_{k=l+1}^{m} \|p_k\|_1. \tag{1.30}$$

Поскольку $g_k \in \mathcal{W}(2^l - 1)$, то $\int_0^1 g_k(x)w_{n_k}(x)\,dx = 0$, $k = l+1, \ldots, m$. Учитывая также, что $J(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$, за исключением конечного числа точек, из (1.26) находим

$$\|J\|_1 = \int_0^1 J(x)\,dx = 1.$$

Следовательно,

$$< f, J > = \int_0^1 f(x)J(x)\,dx \leq \|f\|_\infty \|J\|_1 = \|f\|_\infty. \tag{1.31}$$

Из (1.30) и (1.31) получаем неравенство

$$\|f\|_\infty \geq \sum_{k=l+1}^{m} \|p_k\|_1.$$

Теорема 1.2 доказана.

Следствие 1.1. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* $2^{k-1} \leq n_k < 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} a_k w_{n_k}(x) \Big\|_\infty = \sum_{k=1}^{N} |a_k|, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство следствия 1.1. Ясно, что $\| \sum_{k=1}^N a_k w_{n_k}(x) \|_\infty \leq \sum_{k=1}^N |a_k|$. Обратное неравенство следует из теоремы 1.2 при $l = 0$.

Следствие 1.1 доказано.

§2 О возможности усиления неравенств типа Сидона

Данный параграф посвящен вопросу о возможности усиления неравенств типа Сидона для тригонометрической системы, т. е., другими словами, вопросу о точности теоремы 1.1. В нем доказывается следующий результат, из которого следует, что в теореме 1.1 при $n_k = 2^k$ условие $\deg p_k \le \frac{1}{6}2^l$ нельзя заменить на $\deg p_k \le \left[2^{k-k^\varepsilon}\right]$ ни при каком $\varepsilon \in (0,1)$.

Теорема 2.1 ([25]). *Пусть ε, $\widetilde{\varepsilon}$ — действительные числа, причем $\frac{1}{2} \le \varepsilon < \widetilde{\varepsilon} < 1$. Для любого $W \in \mathbb{N}$ существуют вещественные тригонометрические полиномы $p_k(x)$, $k = 1, \dots, W$, такие, что $\deg p_k \le \left[2^{k-k^\varepsilon}\right]$, $\|p_k\|_1 \ge \frac{2\pi}{3}$, $\|p_k\|_\infty \le 70$, $k = 1, \dots, W$, и*

$$\max_{1 \le n \le W} \left\| \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \cos 2^k x \right\|_\infty \le C W^{\widetilde{\varepsilon}}, \tag{2.1}$$

где $C = C(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) > 0$ — константа, зависящая лишь от ε и $\widetilde{\varepsilon}$.

Доказательство теоремы 2.1. Возьмем $k_0 = k_0(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \in \mathbb{N}$, такое, что 1) $k_0 \ge 5$, и при $k \ge k_0$ выполнено:

2) $2^{k-k^\varepsilon} \ge 6$;

3) $2^{k^\varepsilon - k^{\widetilde{\varepsilon}}} k^3 < 1/4$;

4) $2^{(k-1)^\varepsilon - k^\varepsilon} > 1/2$;

5) $k^{\widetilde{\varepsilon}} < (1/8)k$.

Обозначим $m_k := [2^{k-k^\varepsilon}]$. Из условия 2) на k_0 следует, что $m_k \ge 6,\ k \ge k_0$. Отметим следующие неравенства, которые вытекают из условий 1)–4) на k_0 :

$$\frac{3}{4} - 16\,\frac{2^{(k+1)^\varepsilon}}{2^{k^{\widetilde{\varepsilon}}}} \ge \frac{1}{2}, \quad k \ge k_0, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{k+1}}{2^{(k+1)^\varepsilon}}-1\ge\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{k+1}}{2^{(k+1)^\varepsilon}},\quad k\ge k_0. \tag{2.3}$$

Действительно, из условий 1), 3) и 4) на k_0 получаем

$$\frac{2^{(k+1)^\varepsilon}}{2^{k^{\widetilde{\varepsilon}}}}=\frac{2^{(k+1)^\varepsilon}}{2^{k^\varepsilon}}\,\frac{2^{k^\varepsilon}}{2^{k^{\widetilde{\varepsilon}}}}<2\,\frac{1}{4k^3}\le\frac{1}{2{k_0}^3}\le\frac{1}{2\cdot 5^3}<\frac{1}{64},$$

и неравенство (2.2) доказано. Неравенство (2.3) равносильно неравенству

$$\frac{2^{k+1}}{2^{(k+1)^\varepsilon}}\ge 6,\quad k\ge k_0,$$

и следует из условия 2) на k_0.

Пусть функция $f\in L^2(0,\,2\pi)$ и последовательность $\{l_k\}_{k=1}^\infty$, $l_k\in\mathbb{N}$, удовлетворяет условию

$$\frac{l_{k+1}}{l_k}\ge q>1,\ \ k=1,2,\ldots.$$

Тогда для $S^*(x)=\sup_{k\ge1}|S_{l_k}(f,\,x)|$ справедливо неравенство (см. [8, т. 2, с. 246])

$$\|S^*\|_2\le c_0(q)\|f\|_2, \tag{2.4}$$

где константа $c_0=c_0(q)>0$ зависит только от q. Возьмем константу c_0 из неравенства (2.4), соответствующую $q=23/16$. Положим $\alpha=\max(70\sqrt{8}\,c_0,1)$. Возьмем произвольное $W\ge 8k_0$, $W\in\mathbb{N}$. Положим $a=[W^{\widetilde{\varepsilon}}]$. Имеем (см. условия 5) и 1) на k_0)

$$a\le W^{\widetilde{\varepsilon}}\le\frac{1}{8}W, \tag{2.5}$$

$$a\ge W^{\widetilde{\varepsilon}}-1\ge\sqrt{W}-1\ge\sqrt{8k_0}-1\ge\sqrt{40}-1>5. \tag{2.6}$$

Полиномы $p_k(x)$, $k=1,\ldots,W$, удовлетворяющие условиям теоремы, будем строить по индукции с константой

$$C=8k_0+\alpha+150. \tag{2.7}$$

Положим

$$p_k(x) \equiv 1, \quad k = 1, \dots, k_0 + a.$$

Пусть полиномы $p_1(x), \dots, p_N(x)$ $(N \geq k_0 + a)$ уже построены. Построим $p_{N+1}(x)$. Положим

$$F_k(x) := \sum_{j=k_0}^{k} p_j(x) \cos 2^j x, \quad \delta_j(x) := p_j(x) \cos 2^j x. \tag{2.8}$$

$$E_N^k := \left\{ x \in [0, 2\pi) : \ |F_k(x)| > \alpha\sqrt{N} \right\}, \ k = k_0, \dots, N. \tag{2.9}$$

$$B_N := \bigcup_{k=k_0}^{N} E_N^k. \tag{2.10}$$

$$\widetilde{B}_N := \bigcup_{k=k_0}^{N-a} O_{\frac{2\pi(N-k)^2}{m_N}} \left(E_N^k \right), \tag{2.11}$$

где $O_\varepsilon(G)$ обозначает ε-окрестность множества G на $[0, 2\pi)$ с метрикой окружности. Через $\operatorname{dist}(x, y)$ будем обозначать расстояние на окружности $[0, 2\pi)$ между точками x и y. Положим

$$\Lambda_{N+1} := \left\{ j \in \{1, \dots, m_{N+1}\} : \ \widetilde{B}_N \cap O_{\pi/m_{N+1}} \left(\frac{2\pi j}{m_{N+1}} \right) = \varnothing \right\}, \tag{2.12}$$

$$p_{N+1}(x) := \frac{1}{m_{N+1}} \sum_{j \in \Lambda_{N+1}} K_{m_{N+1}-1} \left(x - \frac{2\pi j}{m_{N+1}} \right), \tag{2.13}$$

где

$$K_{m-1}(x) = \frac{\sin^2 \frac{mx}{2}}{m \sin^2 \frac{x}{2}}$$

— ядра Фейера.

Оценим $|\Lambda_{N+1}|$. Имеем (см. условие 1) на k_0)

$$\frac{1}{2^{(k-1)^\varepsilon}} \leq \frac{1}{2^{\sqrt{k-1}}} \leq \frac{1}{2^{\sqrt{4}}} = \frac{1}{4}, \quad k \geq k_0. \tag{2.14}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} &\Big(1 - \frac{1}{2^{k^\varepsilon}}\Big) 2^k - \Big(1 + \frac{1}{2^{(k-1)^\varepsilon}}\Big) 2^{k-1} \geq \frac{3}{4}\, 2^k - \frac{5}{4}\, 2^{k-1} = \\ &= \Big(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\Big) 2^{k-1} = 2^{k-3} \geq 2^2 = 4, \quad k \geq k_0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Отсюда, в частности, следует, что при $k \ge k_0$ спектры полиномов $\delta_k(x)$ не пересекаются. Положим $b_k := [(1 - 2^{-k^\varepsilon})2^k] - 1$. Учитывая (2.15), получаем

$$b_k > \Big(1 + \frac{1}{2^{(k-1)^\varepsilon}}\Big)2^{k-1}, \quad k \ge k_0. \tag{2.16}$$

Кроме того, ясно, что

$$b_k < \Big(1 - \frac{1}{2^{k^\varepsilon}}\Big)2^k, \quad k \ge k_0. \tag{2.17}$$

Имеем (см. (2.14))

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\Big[\Big(1 - 2^{-(k+1)^\varepsilon}\Big)2^{k+1}\Big] - 1}{\Big[\Big(1 - 2^{-k^\varepsilon}\Big)2^k\Big] - 1} \ge \frac{\Big(1 - 2^{-(k+1)^\varepsilon}\Big)2^{k+1} - 2}{\Big(1 - 2^{-k^\varepsilon}\Big)2^k} \ge$$
$$\ge \frac{\frac{3}{4}2^{k+1} - 2}{2^k} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{k-1}} \ge \frac{3}{2} - \frac{1}{16} = \frac{23}{16}, \quad k \ge k_0, \tag{2.18}$$

поскольку (см. условие 1) на k_0)

$$\frac{1}{2^{k-1}} \le \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}, \quad k \ge k_0.$$

Положим $l_1 = b_{k_0},\ l_2 = b_{k_0+1}, \ldots$. Применяя неравенство (2.4) к последовательности $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ (см. (2.18)) и функции $f(x) = F_N(x) = \sum_{k=k_0}^N \delta_k(x)$, и учитывая (2.16), (2.17) и то, что спектры δ_k не пересекаются при $k \ge k_0$, получаем

$$\mu(B_N) \le \frac{c_0^2\|F_N\|_2^2}{\alpha^2 N} = \frac{c_0^2\sum_{k=k_0}^N \|\delta_k\|_2^2}{\alpha^2 N} \le \frac{c_0^2 2\pi\sum_{k=k_0}^N \|\delta_k\|_\infty^2}{\alpha^2 N} \le$$
$$\le \frac{c_0^2 2\pi 70^2 N}{\alpha^2 N} = \frac{c_0^2 2\pi 70^2}{\alpha^2} \le \frac{\pi}{4}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим $F_k(x) = \sum\limits_{j=k_0}^{k} p_j(x)\cos 2^j x = \sum\limits_{j=k_0}^{k} \delta_j(x)$. Имеем

$$|F_k(x)|^2 = \sum_{s,\,\nu=k_0}^{k} \delta_s(x)\delta_\nu(x),$$

$$\delta_s(x)\delta_\nu(x) = \cos 2^s x \cos 2^\nu x p_s(x)p_\nu(x).$$

И, следовательно, получаем (см. (2.14))

$$\deg(\delta_s\delta_\nu) \le 2^s + 2^\nu + m_s + m_\nu \le \Big(1+\frac{1}{2^{s^\varepsilon}}\Big)2^s + \Big(1+\frac{1}{2^{\nu^\varepsilon}}\Big)2^\nu \le$$
$$\le \frac{5}{4}2^s + \frac{5}{4}2^\nu \le 4\cdot 2^k.$$

Отсюда получаем

$$\deg|F_k(x)|^2 \le 4\cdot 2^k. \tag{2.20}$$

Обозначим через $\operatorname{Conn} G$ число компонент связности множества G на окружности $[0,2\pi)$. Число корней (с учетом кратности) на $[0,2\pi)$ тригонометрического полинома $T(x)\ne 0$ с $\deg T = l$ не превосходит $2l$ (см., например, [8, т. 2, с. 7]). Отсюда, учитывая (2.20), получаем

$$2\operatorname{Conn} E_N^k \le \text{число корней (с учетом кратности) на } [0,2\pi)$$
$$\text{тригонометрического полинома } T(x) = |F_k(x)|^2 - \alpha^2 N \le 8\cdot 2^k.$$

В итоге имеем

$$\operatorname{Conn} E_N^k \le 4\cdot 2^k. \tag{2.21}$$

Следовательно (см. (2.11), (2.21)),

$$\operatorname{Conn}\widetilde{B}_N \le \sum_{k=k_0}^{N-a}\operatorname{Conn} E_N^k \le \sum_{k=k_0}^{N-a} 4\cdot 2^k \le 4\sum_{k=0}^{N-a} 2^k =$$
$$= 4\Big(2^{N-a+1}-1\Big) \le 4\,\frac{2^{N+1}}{2^a} \le 4\,\frac{2^{N+1}}{2^{W^{\widetilde{\varepsilon}}-1}} \le 8\,\frac{2^{N+1}}{2^{N^{\widetilde{\varepsilon}}}}. \tag{2.22}$$

Учитывая (2.19), (2.21) и условие 2) на k_0, получаем (см. (2.10), (2.11))

$$\mu(\widetilde{B}_N) \le \mu(B_N) + \sum_{k=k_0}^{N-a} \frac{4\pi(N-k)^2}{m_N} \operatorname{Conn} E_N^k \le$$

$$\le \frac{\pi}{4} + \sum_{k=k_0}^{N-a} \frac{4\pi(N-k)^2}{m_N} 4 \cdot 2^k \le \frac{\pi}{4} + 16\pi \sum_{k=k_0}^{N-a} \frac{(N-k)^2}{2^N/2^{N^\varepsilon} - 1} 2^k \le$$

$$\le \frac{\pi}{4} + 16\pi \sum_{k=k_0}^{N-a} \frac{(N-k)^2}{2^N/2^{N^\varepsilon} - 2^{N-1}/2^{N^\varepsilon}} 2^k = \frac{\pi}{4} + 16\pi 2^{N^\varepsilon} \sum_{k=k_0}^{N-a} \frac{(N-k)^2}{2^N - 2^{N-1}} 2^k =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 32\pi 2^{N^\varepsilon} \sum_{k=k_0}^{N-a} \frac{(N-k)^2}{2^{N-k}} = \frac{\pi}{4} + 32\pi 2^{N^\varepsilon} \sum_{s=a}^{N-k_0} \frac{s^2}{2^s}.$$

Поскольку функция $f(x) = x^2/2^x$ монотонно убывает при $x \ge 3$ и $a > 5$ (см. (2.6)), получаем (см. (2.5) и условие 3) на k_0)

$$\begin{aligned} \mu(\widetilde{B}_N) &\le \frac{\pi}{4} + 32\pi 2^{N^\varepsilon} \frac{a^2}{2^a} N \le \frac{\pi}{4} + 32\pi 2^{W^\varepsilon} W \frac{a^2}{2^a} \le \\ &\le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} 2^{W^\varepsilon} \frac{W^3}{2^a} \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \frac{2^{W^\varepsilon} W^3}{2^{W^{\widetilde{\varepsilon}}-1}} = \frac{\pi}{4} + \\ &+ \pi \frac{2^{W^\varepsilon} W^3}{2^{W^{\widetilde{\varepsilon}}}} \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Оценим число интервалов

$$I_j := O_{\pi/m_{N+1}} \left(\frac{2\pi j}{m_{N+1}} \right),$$

которые пересекаются с $\widetilde{B}_N$. Для каждого такого интервала возможен один из случаев: либо он содержит граничную точку $\widetilde{B}_N$, либо он целиком содержится в $\widetilde{B}_N$. Число интервалов первого типа (см. (2.22))

$$\le 2 \operatorname{Conn} \widetilde{B}_N \le 16 \frac{2^{N+1}}{2^{N^{\widetilde{\varepsilon}}}}.$$

Пусть число интервалов второго типа равно S. Тогда, поскольку интервалы I_j не пересекаются при разных j, то (см. (2.23)) имеем

$$S \frac{2\pi}{m_{N+1}} \le \mu(\widetilde{B}_N) \le \frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,
$$S \le \frac{m_{N+1}}{4} \le \frac{1}{4}\,\frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^{\varepsilon}}}.$$
Отсюда находим (см. (2.2), (2.3))
$$\begin{aligned} |\Lambda_{N+1}| &\ge m_{N+1} - \frac{1}{4}\,\frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^{\varepsilon}}} - 16\,\frac{2^{N+1}}{2^{N^{\tilde{\varepsilon}}}} \ge \frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^{\varepsilon}}} - 1 - \\ &- \frac{1}{4}\,\frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^{\varepsilon}}} - 16\,\frac{2^{N+1}}{2^{N^{\tilde{\varepsilon}}}} = \frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^{\varepsilon}}}\left(\frac{3}{4} - 16\,\frac{2^{(N+1)^{\varepsilon}}}{2^{N^{\tilde{\varepsilon}}}}\right) - 1 \ge \\ &\ge \frac{1}{2}\,\frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^{\varepsilon}}} - 1 \ge \frac{1}{3}\,\frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^{\varepsilon}}}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Учитывая, что $K_m(x) \ge 0$ и $\|K_m\|_1 = 2\pi$, имеем (см. (2.13), (2.24))
$$\|p_{N+1}\|_1 = \frac{1}{m_{N+1}} \sum_{j\in\Lambda_{N+1}} \|K_{m_{N+1}-1}\|_1 \ge \frac{1}{m_{N+1}}\,\frac{2\pi}{3}\,\frac{2^{N+1}}{2^{(N+1)^{\varepsilon}}} \ge \frac{2\pi}{3}. \tag{2.25}$$
Нетрудно показать, что для любого $c \in \mathbb{R}$ справедливо
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{(c-2\pi j)^2}\right) \le \frac{7}{3} \tag{2.26}$$
(эта оценка довольно грубая, но для наших целей ее будет достаточно).

Хорошо известна оценка
$$K_{m-1}(x) \le \begin{cases} 10\,m\cdot\min\Bigl(1,\ \frac{1}{m^2x^2}\Bigr), & |x| \le \pi; \\ 10\,m\cdot\min\Bigl(1,\ \frac{1}{m^2(2\pi-|x|)^2}\Bigr), & \pi < |x| \le 2\pi. \end{cases} \tag{2.27}$$
Отсюда для произвольного $x \in [0,\,2\pi)$ имеем
$$\begin{aligned} |p_{N+1}(x)| &= \frac{1}{m_{N+1}} \sum_{j\in\Lambda_{N+1}} K_{m_{N+1}-1}\left(x - \frac{2\pi j}{m_{N+1}}\right) = \\ &= \frac{1}{m_{N+1}}\Bigl(\sum_{j\in\Lambda'_{N+1}} + \sum_{j\in\Lambda''_{N+1}} + \sum_{j\in\Lambda'''_{N+1}}\Bigr), \end{aligned} \tag{2.28}$$

где

$$\Lambda'_{N+1}=\Big\{j\in\Lambda_{N+1}:\ \Big|x-\frac{2\pi j}{m_{N+1}}\Big|\le\pi\Big\},\tag{2.29}$$

$$\Lambda''_{N+1}=\Big\{j\in\Lambda_{N+1}:\ \Big|x-\frac{2\pi j}{m_{N+1}}\Big|>\pi \text{ и } x-\frac{2\pi j}{m_{N+1}}>0\Big\},\tag{2.30}$$

$$\Lambda'''_{N+1}=\Big\{j\in\Lambda_{N+1}:\ \Big|x-\frac{2\pi j}{m_{N+1}}\Big|>\pi \text{ и } x-\frac{2\pi j}{m_{N+1}}<0\Big\}.\tag{2.31}$$

(множества Λ'_{N+1}, Λ''_{N+1} и Λ'''_{N+1}, конечно, зависят от точки x).

Продолжаем (2.28) (см. (2.27) и (2.26))

$$\begin{aligned}
&\le\frac{1}{m_{N+1}}\left(\sum_{j\in\Lambda'_{N+1}}10\,m_{N+1}\cdot\min\Big(1,\ \frac{1}{m_{N+1}^2(x-\frac{2\pi j}{m_{N+1}})^2}\Big)+\right.\\
&+\sum_{j\in\Lambda''_{N+1}}10\,m_{N+1}\cdot\min\Big(1,\ \frac{1}{m_{N+1}^2(2\pi-x+\frac{2\pi j}{m_{N+1}})^2}\Big)+\\
&\left.+\sum_{j\in\Lambda'''_{N+1}}10\,m_{N+1}\cdot\min\Big(1,\ \frac{1}{m_{N+1}^2(2\pi+x-\frac{2\pi j}{m_{N+1}})^2}\Big)\right)\le\\
&\le 10\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\min\Big(1,\ \frac{1}{(m_{N+1}x-2\pi j)^2}\Big)+\right.\\
&+\sum_{j=-\infty}^{\infty}\min\Big(1,\ \frac{1}{(m_{N+1}(2\pi-x)+2\pi j)^2}\Big)+\\
&\left.+\sum_{j=-\infty}^{\infty}\min\Big(1,\ \frac{1}{(m_{N+1}(2\pi+x)-2\pi j)^2}\Big)\right)\le\\
&\le 10\left(\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+\frac{7}{3}\right)=70.
\end{aligned}$$

Поскольку x было произвольным, то получаем

$$\|p_{N+1}\|_\infty\le 70.\tag{2.32}$$

Оценим $\|F_{N+1}\|_\infty$. Положим

$$k(x):=\max\left\{k_0\le j\le N:\ |F_j(x)|\le\alpha\sqrt{N}\right\}.$$

Поскольку (см. (2.8))

$$|F_{k_0}(x)| = |p_{k_0}(x)\cos 2^{k_0}x| = |\cos 2^{k_0}x| \le 1 \le \alpha \le \alpha\sqrt{N},$$

то функция $k(x)$ корректно определена. Возьмем произвольное $x \in [0, 2\pi)$. Рассмотрим два случая:

1) $k(x) \ge N - a$. Тогда (см. (2.32))

$$\begin{aligned}|F_{N+1}(x)| &\le |F_{k(x)}(x)| + \sum_{j=k(x)+1}^{N+1} |\delta_j(x)| \le \alpha\sqrt{N} + 70(a+1) \le \\ &\le \alpha\sqrt{N} + 70W^{\widetilde{\varepsilon}} + 70 \le \alpha\sqrt{W} + 70W^{\widetilde{\varepsilon}} + 70 \le (\alpha+140)W^{\widetilde{\varepsilon}}. \qquad (2.33)\end{aligned}$$

2) $k(x) < N - a$. Тогда

$$\begin{aligned}|F_{N+1}(x)| &\le |F_{k(x)}(x)| + \sum_{j=k(x)+1}^{k(x)+a+1} |\delta_j(x)| + \sum_{j=k(x)+a+2}^{N+1} |\delta_j(x)| \le \\ &\le \alpha\sqrt{N} + 70(a+1) + \sum_{j=k(x)+a+2}^{N+1} |\delta_j(x)|. \qquad (2.34)\end{aligned}$$

Оценим последнее слагаемое. Покажем, что (см. (2.9), (2.11))

$$x \in E_{j-1}^{k(x)+1} \subset \widetilde{B}_{j-1}, \quad j = k(x) + a + 2, \ldots, N+1. \qquad (2.35)$$

Действительно, по определению функции $k(x)$

$$|F_{k(x)+1}(x)| > \alpha\sqrt{N} \ge \alpha\sqrt{j-1},$$

и так как $k(x) \ge k_0$ и $j - 1 \ge k(x) + 1 + a \ge k_0 + 1 + a$, то (2.35) выполняется. Следовательно (см. (2.11)), для любого $y \in [0, 2\pi) \setminus \widetilde{B}_{j-1}$

$$\operatorname{dist}(x, y) \ge \frac{2\pi|j - 1 - (k(x)+1)|^2}{m_{j-1}} = \frac{2\pi|j - k(x) - 2|^2}{m_{j-1}}.$$

В частности (см. (2.12)), для любого $l \in \Lambda_j$

$$\operatorname{dist}\Big(x, \frac{2\pi l}{m_j}\Big) \geq \frac{2\pi |j-k(x)-2|^2}{m_{j-1}}.$$

Следовательно,

$$\left|x - \frac{2\pi l}{m_j}\right| \geq \frac{2\pi |j-k(x)-2|^2}{m_{j-1}}, \quad l \in \Lambda_j', \tag{2.36}$$

$$\left|2\pi - x + \frac{2\pi l}{m_j}\right| \geq \frac{2\pi |j-k(x)-2|^2}{m_{j-1}}, \quad l \in \Lambda_j'', \tag{2.37}$$

$$\left|2\pi + x - \frac{2\pi l}{m_j}\right| \geq \frac{2\pi |j-k(x)-2|^2}{m_{j-1}}, \quad l \in \Lambda_j''', \tag{2.38}$$

где множества Λ_j', Λ_j'', Λ_j''' определяются аналогичным образом, как в (2.29), (2.30), (2.31).

Нетрудно показать следующую (довольно грубую) оценку: пусть $A > 1$. Для любого $c \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\sum_{l=-\infty,\, |c-2\pi l| \geq A}^{\infty} \frac{1}{(c-2\pi l)^2} \leq \frac{4}{A}. \tag{2.39}$$

Имеем (см. (2.13), (2.27))

$$|\delta_j(x)| \leq |p_j(x)| = \frac{1}{m_j} \sum_{l \in \Lambda_j} K_{m_j - 1}\left(x - \frac{2\pi l}{m_j}\right) = \frac{1}{m_j}\left(\sum_{l \in \Lambda_j'} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l \in \Lambda_j''} + \sum_{l \in \Lambda_j'''}\right) \leq \frac{1}{m_j}\left(\sum_{l \in \Lambda_j'} 10\, m_j \, \min\Big(1, \frac{1}{m_j^2 (x - \frac{2\pi l}{m_j})^2}\Big) + \right.$$

$$+ \sum_{l \in \Lambda_j''} 10\, m_j \, \min\Big(1, \frac{1}{m_j^2 (2\pi - x + \frac{2\pi l}{m_j})^2}\Big) +$$

$$\left. + \sum_{l \in \Lambda_j'''} 10\, m_j \, \min\Big(1, \frac{1}{m_j^2 (2\pi + x - \frac{2\pi l}{m_j})^2}\Big)\right). \tag{2.40}$$

Оценим снизу величину (см. условия 2) и 4) на k_0, а также (2.6))

$$\frac{2\pi m_j|j-k(x)-2|^2}{m_{j-1}} \geq \frac{2\pi(2^{j-j^\varepsilon}-1)|j-k(x)-2|^2}{2^{j-1-(j-1)^\varepsilon}} =$$
$$= 2\pi\cdot 2\,\frac{2^{(j-1)^\varepsilon}}{2^{j^\varepsilon}}|j-k(x)-2|^2 - 2\pi\frac{2^{(j-1)^\varepsilon}}{2^{j-1}}|j-k(x)-2|^2 \geq$$
$$\geq 2\pi|j-k(x)-2|^2 - \frac{\pi}{3}|j-k(x)-2|^2 \geq \pi|j-k(x)-2|^2$$
$$(\geq \pi a^2 \geq 25\pi > 1).$$

Следовательно, получаем (см. (2.36), (2.37), (2.38))

$$\forall\, l\in\Lambda'_j\ \min\Big(1,\ \frac{1}{m_j^2(x-\frac{2\pi l}{m_j})^2}\Big) = \frac{1}{(m_jx-2\pi l)^2} \text{ и}$$
$$|m_jx-2\pi l| \geq \pi|j-k(x)-2|^2;$$
$$\forall\, l\in\Lambda''_j\ \min\Big(1,\ \frac{1}{m_j^2(2\pi-x+\frac{2\pi l}{m_j})^2}\Big) = \frac{1}{(m_j(2\pi-x)+2\pi l)^2} \text{ и}$$
$$|m_j(2\pi-x)+2\pi l| \geq \pi|j-k(x)-2|^2;$$
$$\forall\, l\in\Lambda'''_j\ \min\Big(1,\ \frac{1}{m_j^2(2\pi+x-\frac{2\pi l}{m_j})^2}\Big) = \frac{1}{(m_j(2\pi+x)-2\pi l)^2} \text{ и}$$
$$|m_j(2\pi+x)-2\pi l| \geq \pi|j-k(x)-2|^2.$$

Отсюда из (2.40), применяя (2.39) с $A=\pi|j-k(x)-2|^2$, получаем

$$|\delta_j(x)| \leq \frac{120}{\pi|j-k(x)-2|^2} < \frac{40}{|j-k(x)-2|^2}.$$

Следовательно (см. также (2.6))

$$\sum_{j=k(x)+a+2}^{N+1}|\delta_j(x)| \leq \sum_{j=k(x)+a+2}^{N+1}\frac{40}{|j-k(x)-2|^2} \leq 40\sum_{s=a}^{\infty}\frac{1}{s^2} \leq$$
$$\leq 40\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right) \leq 40\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{5}\right) < 10.$$

Отсюда (см. (2.34)) получаем

$$|F_{N+1}(x)| \leq \alpha\sqrt{N}+70a+80 \leq \alpha\sqrt{W}+70W^{\widetilde{\varepsilon}}+80 \leq$$
$$\leq (\alpha+150)W^{\widetilde{\varepsilon}}. \tag{2.41}$$

Таким образом, в обоих случаях (см. (2.33), (2.41)) выполнено $|F_{N+1}(x)| \leq (\alpha+150)W^{\widetilde{\varepsilon}}$. Поскольку $x \in [0, 2\pi)$ было произвольным, получаем

$$\|F_{N+1}\|_\infty \leq (\alpha+150)W^{\widetilde{\varepsilon}}.$$

Следовательно (см. также (2.25), (2.32)),

$$\|p_n\|_1 \geq \frac{2\pi}{3}, \ \|p_n\|_\infty \leq 70, \ \|F_n\|_\infty \leq (\alpha+150)W^{\widetilde{\varepsilon}}, \quad n = k_0+a+1, \dots, W. \tag{2.42}$$

Возьмем произвольный $1 \leq n \leq W$. Рассмотрим два случая:

а) $n \leq k_0 + a$. Учитывая, что $p_k(x) \equiv 1, \ k \leq k_0 + a$, имеем (см. (2.7))

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \cos 2^k x \right\|_\infty \leq n \leq k_0 + a \leq k_0 + W^{\widetilde{\varepsilon}} \leq CW^{\widetilde{\varepsilon}}.$$

б) $k_0 + a + 1 \leq n \leq W$. Имеем (см. (2.8), (2.42), (2.7))

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \cos 2^k x \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{k=1}^{k_0-1} p_k(x) \cos 2^k x \right\|_\infty + \|F_n\|_\infty \leq$$
$$\leq k_0 + (\alpha+150)W^{\widetilde{\varepsilon}} \leq CW^{\widetilde{\varepsilon}}.$$

Отсюда получаем неравенство (2.1) и утверждение теоремы доказано для произвольного $W \geq 8k_0$. Для любого $W < 8k_0$ в качестве полиномов $p_k(x)$ положим $p_k(x) \equiv 1, \ k = 1, \dots, W$. Для любого $1 \leq n \leq W$ имеем (см. (2.7))

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \cos 2^j x \right\|_\infty \leq n \leq 8k_0 \leq CW^{\widetilde{\varepsilon}}.$$

Теорема 2.1 доказана.

Позднее совместно с П. Г. Григорьевым был доказан следующий результат, усиливающий теорему 2.1 (см. следствие 2.1).

Теорема 2.2 ([7]). *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условию* $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$ *для любого*

k, и последовательность вещественных чисел $\{g(k)\}_{k=1}^{\infty}$ неубывает и $1 \leq g(k) \leq n_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Существует последовательность вещественных тригонометрических полиномов $p_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что

$$\deg p_k \leq \left[\frac{n_k}{g(k)}\right], \quad \|p_k\|_1 \geq \frac{2\pi}{5}, \quad \|p_k\|_\infty \leq 12, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.43}$$

и

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} p_k(x) \cos n_k x\right\|_\infty \leq \alpha(\lambda) + \beta\sqrt{N} + 24 \log_\lambda g(N), \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{2.44}$$

где $\beta > 0$ — абсолютная постоянная и $\alpha(\lambda) > 0$ — величина, зависящая лишь от λ.

Взяв в теореме 2.2 в качестве $n_k = 2^k$ и $g(k) = 2^{k^\varepsilon}$, получаем

Следствие 2.1. *Пусть $0 \leq \varepsilon < 1$. Существует последовательность вещественных тригонометрических полиномов $p_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что $\deg p_k \leq \left[2^{k-k^\varepsilon}\right]$, $\|p_k\|_1 \geq \frac{2\pi}{5}$, $\|p_k\|_\infty \leq 12$, $k = 1, 2, \ldots$, и*

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} p_k(x) \cos 2^k x\right\|_\infty \leq C N^{\max(\varepsilon, \frac{1}{2})}, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{2.45}$$

где $C > 0$ — некоторая абсолютная постоянная.

Замечание. Для любой ортогональной системы $\{\delta_j\}_{j=1}^{N}$ имеет место

$$\Big\|\sum_{j=1}^{N} \delta_j\Big\|_\infty \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big\|\sum_{j=1}^{N} \delta_j\Big\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\sum_{j=1}^{N} \|\delta_j\|_2^2\Big)^{1/2}.$$

Следовательно, теорема 2.2 и следствие 2.1 в случае, когда правая часть (2.44) или (2.45) имеет порядок $\sqrt{N}$ (т. е. при $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ в следствии 2.1), дают неулучшаемые по порядку оценки наименьшей равномерной нормы тригонометрических полиномов из соответствующих классов. В общем случае вопрос о существовании подобных полиномов с меньшей равномерной нормой остается открыт.

В случае, когда последовательность $g(k)$ не является неубывающей, справедлив следующий результат.

Следствие 2.2. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$ *для любого* k, *и последовательность вещественных чисел* $\{g(k)\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $1 \leq g(k) \leq n_k$, $k = 1, 2, \ldots$. *Существует последовательность вещественных тригонометрических полиномов* $p_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *таких, что* $\deg p_k \leq \left[\frac{n_k}{g(k)}\right]$, $\|p_k\|_1 \geq \frac{2\pi}{5}$, $\|p_k\|_\infty \leq 12$, $k = 1, 2, \ldots$, *и*

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} p_k(x)\cos n_k x\right\|_\infty \leq \alpha(\lambda) + \beta\sqrt{N} + 24\log_\lambda \max_{1\leq j\leq N} g(j), \quad N = 1, 2, \ldots,$$

где $\beta > 0$ *— абсолютная постоянная и* $\alpha(\lambda) > 0$ *— величина, зависящая лишь от* λ.

Доказательство следствия 2.2. Действительно, рассмотрим последовательность

$$g_1(k) = \max_{1\leq j\leq k} g(j).$$

Ясно, что последовательность $g_1(k)$ неубывает и $1 \leq g(k) \leq g_1(k) \leq n_k$ для любого k. Применяя утверждение теоремы 2.2 для последовательности $g_1(k)$, получаем последовательность вещественных тригонометрических полиномов $p_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что $\deg p_k \leq \left[\frac{n_k}{g_1(k)}\right] \leq \left[\frac{n_k}{g(k)}\right]$, $\|p_k\|_1 \geq \frac{2\pi}{5}$, $\|p_k\|_\infty \leq 12$, и

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} p_k(x)\cos n_k x\right\|_\infty \leq \alpha(\lambda) + \beta\sqrt{N} + 24\log_\lambda g_1(N) =$$

$$= \alpha(\lambda) + \beta\sqrt{N} + 24\log_\lambda \max_{1\leq j\leq N} g(j).$$

Следствие 2.2 доказано.

Теорема 2.2 дает ограничения на возможность расширения теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 2.2. Возьмем $k_0 = k_0(\lambda) \in \mathbb{N}$, такое, что $k^4 \le \lambda^{k-1}$ при $k \ge k_0$, и положим

$$g_1(k) = \begin{cases} g(k), & \text{при } k < k_0; \\ \max(k^4, g(k)), & \text{при } k \ge k_0. \end{cases} \tag{2.46}$$

Ясно, что последовательность $g_1(k)$ неубывает и $g(k) \le g_1(k) \le n_k$ для любого k. Возьмем число $A = A(\lambda) > 2$, такое, что

$$\lambda\left(1 - \frac{1}{A}\right) - \left(1 + \frac{1}{A}\right) > \frac{1}{2}(\lambda - 1), \tag{2.47}$$

и число $x_0 = x_0(\lambda) > 1$, такое, что

$$\log_\lambda x < \sqrt[4]{x}, \text{ при } x \ge x_0. \tag{2.48}$$

Возьмем натуральное число $k_1 = k_1(\lambda) \ge k_0$, такое, что для любого $k \ge k_1$ выполнены следующие неравенства:

$$k > \max(\sqrt[4]{A},\, x_0,\, 384\lambda), \tag{2.49}$$

$$(\lambda - 1)\lambda^{k-1} > 8, \tag{2.50}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{6\lambda^2}{\lambda - 1}\frac{1}{k^4} > \frac{1}{5}. \tag{2.51}$$

Обозначим $d_k := [n_k/g_1(k)]$. Через $O_\varepsilon(G)$ будем обозначать ε-окрестность множества G на $[0, 2\pi)$ с метрикой окружности, а через $\mathrm{dist}(x, y)$ расстояние на окружности $[0, 2\pi)$ между точками x и y. Согласно знаменитому результату Карлесона и Ханта (см. [39]) для мажоранты частных сумм ряда Фурье функции $f \in L^2(0,\, 2\pi)$ справедливо неравенство

$$\|S^*(f)\|_2 \le c_H \|f\|_2, \tag{2.52}$$

где $S^*(f,x) = \sup_{n\ge 0} |S_n(f,x)|$ и $c_H > 0$ — абсолютная постоянная. Положим $\gamma = \max(12\sqrt{8}c_H, 1)$. Построим полиномы $p_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$, удовлетворяющие условиям теоремы с константами

$$\alpha := k_1, \quad \beta := \gamma + 96. \tag{2.53}$$

Положим

$$p_k(x) \equiv 1, \quad k = 1,\ldots,k_1.$$

Дальше полиномы будем строить по индукции. Пусть полиномы $p_1(x),\ldots,p_{m-1}(x)$ $(m \ge k_1+1)$ уже построены. Построим $p_m(x)$. Положим

$$a_m = [2\log_\lambda g_1(m)],$$

$$F_k(x) := \sum_{j=k_1}^{k} p_j(x)\cos n_j x, \tag{2.54}$$

$\delta_j(x) := p_j(x)\cos n_j x$ и

$$E_m^k := \left\{x \in [0,2\pi): \ |F_k(x)| > \gamma\sqrt{m}\right\}, \ k = k_1,\ldots,m-1. \tag{2.55}$$

$$B_m := \bigcup_{k=k_1}^{m-1} E_m^k. \tag{2.56}$$

Если $m - a_m \ge k_1$, то положим

$$\widetilde{B}_m := \bigcup_{k=k_1}^{m-a_m} O_{\frac{2\pi(m-k)^2}{d_m}}\left(E_m^k\right), \tag{2.57}$$

$$\Lambda_m := \left\{ j \in \{1,\ldots,d_m\}: \ \frac{2\pi j}{d_m} \notin \widetilde{B}_m \right\}, \tag{2.58}$$

$$p_m(x) := \frac{1}{d_m}\sum_{j\in\Lambda_m} K_{d_m-1}\left(x - \frac{2\pi j}{d_m}\right), \tag{2.59}$$

где

$$K_{m-1}(x) = \frac{\sin^2\frac{mx}{2}}{m\sin^2\frac{x}{2}}$$

— ядра Фейера (полагаем, $K_0(x) \equiv 1$).

Если $m - a_m < k_1$, то положим

$$p_m(x) = \frac{1}{d_m} \sum_{j=1}^{d_m} K_{d_m - 1}\Big(x - \frac{2\pi j}{d_m}\Big). \tag{2.60}$$

Ясно, что

$$\deg p_m \leq d_m - 1 \leq \Big[\frac{n_m}{g(m)}\Big].$$

Рассмотрим случай, когда $m - a_m \geq k_1$. Оценим $|\Lambda_m|$. Поскольку при $k \geq k_1$ (см. (2.46), (2.49)) $g_1(k) \geq k^4 > A$, имеем (см. также (2.47), (2.50))

$$\Big(1 - \frac{1}{g_1(k+1)}\Big) n_{k+1} - \Big(1 + \frac{1}{g_1(k)}\Big) n_k \geq \bigg(\lambda\Big(1 - \frac{1}{A}\Big) - \Big(1 + \frac{1}{A}\Big)\bigg) n_k \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}(\lambda - 1)\lambda^{k-1} > 4, \quad k \geq k_1.$$

Отсюда следует, что при $k \geq k_1$ спектры полиномов $\delta_k(x)$ не пересекаются. Применяя неравенство Чебышева для функции $F^*_{m-1} := \max_{k_1 \leq j \leq m-1} |\sum_{k=k_1}^{j} \delta_k(x)|$ (см. (2.55), (2.56)), затем используя (2.52) (примененное к функции $f(x) = F_{m-1}(x) = \sum_{k=k_1}^{m-1} \delta_k(x)$), учитывая то, что спектры δ_k не пересекаются при $k \geq k_1$ и то, что по предположению индукции полиномы $p_1(x), \ldots, p_{m-1}(x)$ удовлетворяют (2.43), получаем

$$\mu(B_m) \leq \frac{\|F^*_{m-1}\|_2^2}{\gamma^2 m} \leq \frac{c_H^2 \|F_{m-1}\|_2^2}{\gamma^2 m} = \frac{c_H^2 \sum_{k=k_1}^{m-1} \|\delta_k\|_2^2}{\gamma^2 m} \leq$$
$$\leq \frac{c_H^2 2\pi \sum_{k=k_1}^{m-1} \|\delta_k\|_\infty^2}{\gamma^2 m} \leq \frac{c_H^2 2\pi 12^2 m}{\gamma^2 m} = \frac{c_H^2 2\pi 12^2}{\gamma^2} \leq \frac{\pi}{4}. \tag{2.61}$$

Рассмотрим $F_k(x) = \sum\limits_{j=k_1}^{k} p_j(x) \cos n_j x = \sum\limits_{j=k_1}^{k} \delta_j(x)$. Имеем

$$|F_k(x)|^2 = \sum_{i,\, j=k_1}^{k} \delta_i(x)\delta_j(x),$$

$$\delta_i(x)\delta_j(x) = \cos n_i x \cos n_j x p_i(x) p_j(x).$$

И, следовательно, получаем

$$\deg(\delta_i\delta_j) \le n_i + n_j + d_i + d_j \le \Big(1+\frac{1}{A}\Big)n_i + \Big(1+\frac{1}{A}\Big)n_j \le$$
$$\le \frac{3}{2}n_i + \frac{3}{2}n_j \le 3n_k.$$

Отсюда получаем

$$\deg|F_k(x)|^2 \le 3n_k. \tag{2.62}$$

Снова, как и в теореме 2.1, обозначим через $\operatorname{Conn} G$ число компонент связности множества G на окружности $[0, 2\pi)$. Число корней (с учетом кратности) на $[0, 2\pi)$ тригонометрического полинома $T(x) \ne 0$ с $\deg T = l$ не превосходит $2l$ (см., например, [8, т. 2, с. 7]). Отсюда, учитывая (2.62), получаем

$$2\operatorname{Conn} E_m^k \le \text{число корней (с учетом кратности) на окружности } [0,2\pi)$$
$$\text{тригонометрического полинома } T(x) = |F_k(x)|^2 - \gamma^2 m \le 6n_k.$$

В итоге имеем

$$\operatorname{Conn} E_m^k \le 3n_k. \tag{2.63}$$

Следовательно (см. (2.57), (2.63)),

$$\operatorname{Conn} \widetilde{B}_m \le \sum_{k=k_1}^{m-a_m} \operatorname{Conn} E_m^k \le \sum_{k=k_1}^{m-a_m} 3n_k \le 3n_{m-a_m}\left(1+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\dots\right) =$$
$$= 3\,\frac{\lambda}{\lambda-1}\,n_{m-a_m} \le 3\,\frac{\lambda}{\lambda-1}\,\frac{1}{\lambda^{a_m}}\,n_m = \frac{3\lambda}{\lambda-1}\,\frac{1}{\lambda^{[2\log_\lambda g_1(m)]}}\,n_m \le$$
$$\le \frac{3\lambda}{\lambda-1}\,\frac{1}{\lambda^{2\log_\lambda g_1(m)-1}}\,n_m = \frac{3\lambda^2}{\lambda-1}\,\frac{n_m}{g_1(m)^2}. \tag{2.64}$$

Учитывая (2.56), (2.57), (2.61), (2.63) и то, что $[x] \ge \frac{1}{2}x$ при $x \ge 1$, получаем

$$\mu(\widetilde{B}_m) \le \mu(B_m) + \sum_{k=k_1}^{m-a_m} \frac{4\pi(m-k)^2}{d_m} \operatorname{Conn} E_m^k \le \frac{\pi}{4} +$$

$$+ \sum_{k=k_1}^{m-a_m} \frac{4\pi(m-k)^2}{\frac{1}{2}\frac{n_m}{g_1(m)}} 3n_k = \frac{\pi}{4} + 24\pi g_1(m) \sum_{k=k_1}^{m-a_m} (m-k)^2 \frac{n_k}{n_m} \le$$

$$\le \frac{\pi}{4} + 24\pi g_1(m) \sum_{k=k_1}^{m-a_m} \frac{(m-k)^2}{\lambda^{m-k}} = \frac{\pi}{4} + 24\pi g_1(m) \sum_{j=a_m}^{m-k_1} \frac{j^2}{\lambda^j}.$$

Поскольку функция $f(x) = x^2/\lambda^x$ монотонно убывает при $x \ge \frac{2}{\ln\lambda}$ и, как нетрудно видеть, $a_m > \frac{2}{\ln\lambda}$, получаем

$$\mu(\widetilde{B}_m) \le \frac{\pi}{4} + 24\pi g_1(m) \frac{a_m^2}{\lambda^{a_m}} m = \frac{\pi}{4} + 24\pi g_1(m) \frac{[2\log_\lambda g_1(m)]^2}{\lambda^{[2\log_\lambda g_1(m)]}} m \le$$

$$\le \frac{\pi}{4} + 96\pi g_1(m) \frac{{\log_\lambda}^2 g_1(m)}{\lambda^{2\log_\lambda g_1(m)-1}} m = \frac{\pi}{4} + 96\pi\lambda g_1(m) \frac{\log_\lambda^2 g_1(m)}{g_1^2(m)} m =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 96\pi\lambda \frac{\log_\lambda^2 g_1(m)}{g_1(m)} m = \frac{\pi}{4} + 96\pi\lambda \frac{\log_\lambda^2 g_1(m)}{\sqrt{g_1(m)}} \frac{m}{\sqrt{g_1(m)}}.$$

Поскольку $g_1(m) \ge m^4 > x_0$, то $\log_\lambda^2 g_1(m) < \sqrt{g_1(m)}$ (см. (2.48), (2.49)). Кроме того,

$$\frac{m}{\sqrt{g_1(m)}} \le \frac{m}{\sqrt{m^4}} = \frac{1}{m}.$$

В результате имеем (см. (2.49))

$$\mu(\widetilde{B}_m) \le \frac{\pi}{4} + 96\pi\lambda \frac{1}{m} < \frac{\pi}{2}. \tag{2.65}$$

Оценим $|\Lambda_m^c|$ сверху. Ясно, что $|\Lambda_m^c|$ не превосходит

$$|\{j \in \{1, \dots, d_m\} : \ I_j \cap \widetilde{B}_m \ne \varnothing\}|,$$

где

$$I_j := O_{\pi/d_m}\left(\frac{2\pi j}{d_m}\right).$$

Оценим число интервалов I_j, которые пересекаются с $\widetilde{B}_m$. Для каждого такого интервала возможен один из случаев: либо он содержит граничную точку $\widetilde{B}_m$, либо он целиком содержится в $\widetilde{B}_m$. Число интервалов первого типа (см. (2.64))

$$\leq 2\,\mathrm{Conn}\,\widetilde{B}_m \leq \frac{6\lambda^2}{\lambda-1}\,\frac{n_m}{g_1(m)^2}.$$

Пусть число интервалов второго типа равно L. Тогда, поскольку интервалы I_j не пересекаются при разных j, то (см. (2.65)) имеем

$$L\,\frac{2\pi}{d_m} \leq \mu(\widetilde{B}_m) \leq \frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

$$L \leq \frac{d_m}{4} \leq \frac{1}{4}\,\frac{n_m}{g_1(m)}.$$

Отсюда, пользуясь тем, что $[x] \geq \frac{1}{2}x$ при $x \geq 1$, находим (см. также (2.46), (2.51))

$$\begin{aligned} |\Lambda_m| &\geq d_m - \frac{1}{4}\,\frac{n_m}{g_1(m)} - \frac{6\lambda^2}{\lambda-1}\,\frac{n_m}{g_1(m)^2} \geq \frac{1}{2}\frac{n_m}{g_1(m)} - \\ &- \frac{1}{4}\,\frac{n_m}{g_1(m)} - \frac{6\lambda^2}{\lambda-1}\,\frac{n_m}{g_1(m)^2} = \frac{n_m}{g_1(m)}\left(\frac{1}{4} - \frac{6\lambda^2}{\lambda-1}\,\frac{1}{g_1(m)}\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{5}\,\frac{n_m}{g_1(m)}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Учитывая, что $K_m(x) \geq 0$ и $\|K_m\|_1 = 2\pi$, имеем (см. (2.59), (2.66))

$$\|p_m\|_1 = \frac{1}{d_m}\sum_{j\in\Lambda_m}\|K_{d_m-1}\|_1 \geq \frac{1}{d_m}\,\frac{2\pi}{5}\,\frac{n_m}{g_1(m)} \geq \frac{2\pi}{5}. \tag{2.67}$$

Снова, как и в теореме 2.1, используем оценку

$$K_{m-1}(x) \leq \begin{cases} 10\,m\cdot\min\Bigl(1,\ \frac{1}{m^2x^2}\Bigr), & |x| \leq \pi; \\ 10\,m\cdot\min\Bigl(1,\ \frac{1}{m^2(2\pi-|x|)^2}\Bigr), & \pi < |x| \leq 2\pi. \end{cases} \tag{2.68}$$

Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
\|p_m\|_\infty &= \frac{1}{d_m}\Big\|\sum_{j\in\Lambda_m} K_{d_m-1}\Big(x-\frac{2\pi j}{d_m}\Big)\Big\|_\infty \le \\
&\le \frac{1}{d_m}\Big\|\sum_{j=1}^{d_m} 10\, d_m \min\Big(1,\ \frac{1}{d_m^2 \mathrm{dist}^2(x, \frac{2\pi j}{d_m})}\Big)\Big\|_\infty \le \\
&\le 10\Big(1+\frac{1}{(2\pi-1)^2}+2\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{d_m^2(\frac{2\pi l}{d_m})^2}\Big) \le \\
&\le 10\Big(1+\frac{1}{(2\pi-1)^2}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^2}\Big) = \\
&= 10\Big(1+\frac{1}{(2\pi-1)^2}+\frac{1}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{6}\Big) < 12.
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

Оценим $\|F_m\|_\infty$. Положим

$$
k(x) := \max\left\{k_1 \le j \le m-1 :\ |F_j(x)| \le \gamma\sqrt{m}\right\}.
$$

Поскольку (см. (2.54))

$$
|F_{k_1}(x)| = |p_{k_1}(x)\cos n_{k_1}x| = |\cos n_{k_1}x| \le 1 \le \gamma \le \gamma\sqrt{m},
$$

то функция $k(x)$ корректно определена. Возьмем произвольное $x \in [0, 2\pi)$. Рассмотрим два случая:

1) $k(x) \ge m - a_m$. Тогда

$$
|F_m(x)| \le |F_{k(x)}(x)| + \sum_{j=k(x)+1}^{m} |\delta_j(x)| \le \gamma\sqrt{m} + 12a_m. \tag{2.70}
$$

2) $k(x) < m - a_m$. Тогда

$$
\begin{aligned}
|F_m(x)| &\le |F_{k(x)}(x)| + \sum_{j=k(x)+1}^{k(x)+a_m} |\delta_j(x)| + \sum_{j=k(x)+a_m+1}^{m} |\delta_j(x)| \le \\
&\le \gamma\sqrt{m} + 12a_m + \sum_{j=k(x)+a_m+1}^{m} |\delta_j(x)|.
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

Оценим последнее слагаемое. Покажем, что (см. (2.55), (2.56), (2.57))

$$x \in E_j^{k(x)+1} \subset \widetilde{B}_j, \quad j = k(x) + a_m + 1, \dots, m. \tag{2.72}$$

Действительно, по определению функции $k(x)$

$$|F_{k(x)+1}(x)| > \gamma\sqrt{m} \geq \gamma\sqrt{j},$$

и так как $k(x) \geq k_1$ и $j \geq k(x)+1+a_m \geq k(x)+1+a_j$, то (2.72) доказано. Следовательно (см. (2.57)), для любого $y \in [0, 2\pi) \setminus \widetilde{B}_j$

$$\operatorname{dist}(x, y) \geq \frac{2\pi|j - (k(x)+1)|^2}{d_j} = \frac{2\pi|j - k(x) - 1|^2}{d_j}.$$

В частности (см. (2.58)), для любого $l \in \Lambda_j$

$$\operatorname{dist}\Big(x, \frac{2\pi l}{d_j}\Big) \geq \frac{2\pi|j - k(x) - 1|^2}{d_j}.$$

Используя (2.68) и то, что $\sum_{s=K}^{\infty} \frac{1}{s^2} < \frac{1}{K^2} + \frac{1}{K} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{K}$, при $K \geq 2$, получаем (см. (2.59))

$$\begin{aligned}
|\delta_j(x)| &\leq |p_j(x)| = \frac{1}{d_j}\sum_{l\in\Lambda_j} K_{d_j-1}\Big(x - \frac{2\pi l}{d_j}\Big) \leq \\
&\leq 10\sum_{l\in\Lambda_j}\min\Big(1, \frac{1}{d_j^2\operatorname{dist}^2(x, \frac{2\pi l}{d_j})}\Big) \leq 10\sum_{l\in\Lambda_j}\frac{1}{d_j^2\operatorname{dist}^2(x, \frac{2\pi l}{d_j})} \leq \\
&\leq 20\sum_{s=|j-k(x)-1|^2}^{\infty}\frac{1}{d_j^2(\frac{2\pi s}{d_j})^2} = \frac{5}{\pi^2}\sum_{s=|j-k(x)-1|^2}^{\infty}\frac{1}{s^2} < \\
&< \frac{5}{\pi^2}\frac{3}{2}\frac{1}{|j-k(x)-1|^2} < \frac{1}{|j-k(x)-1|^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k(x)+a_m+1}^{m}|\delta_j(x)| &\leq \sum_{j=k(x)+a_m+1}^{m}\frac{1}{|j-k(x)-1|^2} \leq \sum_{s=a_m}^{\infty}\frac{1}{s^2} \leq \\
&\leq \frac{3}{2}\frac{1}{a_m} < 1.
\end{aligned}$$

Отсюда (см. (2.71)) получаем

$$|F_m(x)| \le \gamma\sqrt{m} + 12a_m + 1. \tag{2.73}$$

Таким образом, имеем (см. (2.70), (2.73))

$$\|F_m\|_\infty \le \gamma\sqrt{m} + 12a_m + 1.$$

В случае, когда $m - a_m < k_1$, $p_m(x)$ имеет вид (2.60). Аналогично показывается, что

$$\|p_m\|_1 = 2\pi > \frac{2\pi}{5}, \quad \|p_m\|_\infty < 12.$$

Для оценки $\|F_m\|_\infty$ снова введем функцию

$$k(x) := \max\left\{k_1 \le j \le m-1 :\ |F_j(x)| \le \gamma\sqrt{m}\right\}.$$

Возьмем произвольное $x \in [0, 2\pi)$. Если $k(x) \ge m - a_m$, имеем

$$|F_m(x)| \le |F_{k(x)}(x)| + \sum_{j=k(x)+1}^{m} |\delta_j(x)| \le \gamma\sqrt{m} + 12a_m.$$

Случай $k(x) < m - a_m$ невозможен, поскольку $k(x) \ge k_1$ и $m - a_m < k_1$.

Таким образом (см. также (2.67), (2.69)),

$$\|p_m\|_1 \ge \frac{2\pi}{5},\ \|p_m\|_\infty \le 12,\ \|F_m\|_\infty \le \gamma\sqrt{m}+12a_m+1,\ m \ge k_1+1. \tag{2.74}$$

Обозначим

$$S_N(x) := \sum_{k=1}^{N} p_k(x)\cos n_k x.$$

Если $1 \le N \le k_1$, имеем (см. (2.53))

$$\|S_N\|_\infty = \left\|\sum_{k=1}^{N} \cos n_k x\right\|_\infty \le N \le k_1 \le \alpha + \beta\sqrt{N} + 24\log_\lambda g(N).$$

Если $N > k_1$, тогда (см. (2.54), (2.74))

$$\|S_N\|_\infty \le \Big\|\sum_{j=1}^{k_1-1} \cos n_j\Big\|_\infty + \|F_N\|_\infty \le k_1 - 1 + \gamma\sqrt{N} + 12a_N + 1 =$$
$$= k_1 + \gamma\sqrt{N} + 12a_N. \tag{2.75}$$

Имеем

$$a_N = [2\log_\lambda g_1(N)] \le 2\log_\lambda g_1(N) = 2\max(\log_\lambda N^4, \log_\lambda g(N)) \le$$
$$\le 2(\log_\lambda N^4 + \log_\lambda g(N)) = 8\log_\lambda N + 2\log_\lambda g(N).$$

Поскольку $N > k_1 > x_0$, то, следовательно, (см. (2.48)) $\log_\lambda N < \sqrt[4]{N} \le \sqrt{N}$. Отсюда

$$a_N \le 8\sqrt{N} + 2\log_\lambda g(N).$$

Следовательно (см. (2.75), (2.53))

$$\|S_N\|_\infty \le k_1 + \gamma\sqrt{N} + 12(8\sqrt{N} + 2\log_\lambda g(N)) =$$
$$= \alpha + \beta\sqrt{N} + 24\log_\lambda g(N).$$

Теорема 2.2 доказана.

§3 О некоторых свойствах QC нормы

Параграф 3 посвящен изучению QC нормы. Эта норма была введена в работах [17], [18] Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым. Она определяется следующим образом: для функции $f \in L^1(0, 2\pi)$ с рядом Фурье

$$f \sim \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(f, x),$$

$$\delta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \qquad \delta_s(f, x) = \sum_{2^{s-1} \le |k| < 2^s} c_k(f) e^{ikx}, \ s = 1, 2, \ldots,$$

положим

$$\|f\|_{QC} \equiv \int_0^1 \left\| \sum_{s=0}^{\infty} r_s(t) \delta_s(f, x) \right\|_{\infty} dt, \tag{3.1}$$

где $\{r_s(t)\}_{s=0}^{\infty}$ — система Радемахера (см. опр. 1.1). *Пространством квазинепрерывных функций* называется замыкание множества тригонометрических полиномов по норме (3.1). Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым была доказана следующая теорема.

Теорема C (Б. С. Кашин, В. Н. Темляков [17], [18]). *Для любой действительной функции $f \in L^1(0, 2\pi)$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_{QC} \ge \frac{1}{32\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_s(f, \cdot)\|_1.$$

Следующая теорема является обобщением предыдущего результата.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $n_{k+1}/n_k \ge \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Существует константа $c(\lambda) > 0$, зависящая лишь от λ, такая, что для любого тригонометрического полинома вида*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k — *вещественные тригонометрические полиномы с* $\deg(p_k) \leq n_k/3$, $k = 1, \ldots, N$, $N = 1, 2, \ldots$, *справедливо неравенство*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^N r_k(t) p_k(x) \cos n_k x \right\|_\infty dt \geq c(\lambda) \sum_{k=1}^N \|p_k\|_1.$$

Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим тригонометрический полином

$$f(x) = \sum_{k=1}^N p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k — вещественные тригонометрические полиномы с $\deg(p_k) =: \alpha_k \leq n_k/3$, $k = 1, \ldots, N$. Определим функции $g_k(x)$, $k = 1, \ldots, N$. Возьмем произвольное $k \in \{1, \ldots, N\}$. Если $\alpha_k = 0$, то полином $p_k(x)$ суть вещественная константа a_k. В этом случае положим

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_k \geq 0, \\ -1, & \text{если } a_k < 0. \end{cases}$$

Если $\alpha_k > 0$, то определим функцию $g_k(x)$ следующим образом. Введем ядро Валле Пуссена

$$V_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \sum_{|\nu| \leq j} e^{i\nu x}, \quad n \geq 1.$$

Положим (см. (1.3))

$$g_k = \operatorname{sign}(p_k) * V_{\alpha_k}.$$

Также, как в доказательстве теоремы 1.1, показывается, что построенные функции $g_k(x)$ — вещественные тригонометрические полиномы, обладающие свойствами:

$$\deg(g_k) < \frac{2}{3} n_k, \ \|g_k\|_\infty \leq 3, \ < p_k, g_k > = \|p_k\|_1, \ k = 1, \ldots, N, \qquad (3.2)$$

где $< \cdot, \cdot >$ означает скалярное произведение в пространстве $L^2(0, 2\pi)$:

$$< f_1, f_2 >= \int_0^{2\pi} f_1(x) f_2(x)\, dx.$$

Положим $\mu = \max(\lambda + 1; 7)$. Разобьем последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ на конечное число $M = M(\lambda, \mu)$ подпоследовательностей $\{m_j^{(q)}\}_{j=1}^{\infty}$, $q = 1, \ldots, M$, удовлетворяющих условию $m_{j+1}^{(q)} / m_j^{(q)} \geq \mu$, $j = 1, 2, \ldots$. Поскольку $\mu = \mu(\lambda)$, то $M = M(\lambda)$. Выберем одну из этих подпоследовательностей и обозначим ее через $\{m\}$.

Введем следующие функции

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{N} r_k(t) p_k(x) \cos n_k x,$$

и произведение Рисса

$$R(x, t) = \prod_{1 \leq k \leq N \colon n_k \in \{m\}} \Big(1 + \frac{1}{3} r_k(t) g_k(x) \cos n_k x\Big). \tag{3.3}$$

Ясно, что $R(x, t) \geq 0$ для всех x и t. Раскрывая скобки в (3.3), получаем

$$R(x, t) = 1 + \frac{1}{3} \sum_{1 \leq k \leq N \colon n_k \in \{m\}} r_k(t) g_k(x) \cos n_k x + \omega(x, t), \tag{3.4}$$

где $w(x, t) = \sum_e a_e(x, t)$ и слагаемые $a_e(x, t)$ имеют вид

$$a_e(x, t) = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{3} r_{k_i}(t) g_{k_i}(x) \cos n_{k_i} x, \tag{3.5}$$

где $k_1 > k_2 > \ldots > k_p$, $p \geq 2$. Покажем, что для любого t

$$\|R(\cdot\,, t)\|_1 = 2\pi. \tag{3.6}$$

Действительно, поскольку $\deg(g_k) < \frac{2}{3} n_k$, то все интегралы $\int_0^{2\pi} g_k(x) \cos n_k x\, dx = 0$, $k = 1, \ldots, N$. Покажем, что для любого t

$$\int_0^{2\pi} \omega(x, t)\, dx = 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим произведение (3.5)

$$a_e(x,t) = g_{k_1}(x)\cos n_{k_1}x \cdot \ldots \cdot g_{k_p}(x)\cos n_{k_p}x \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{3} r_{k_i}(t),$$

где $k_1 > k_2 > \ldots > k_p$, $p \geq 2$. Любая частота ν полинома $a_e(x,t)$ по модулю будет

$$> \Big(n_{k_1} - \frac{2}{3} n_{k_1}\Big) - \Big(n_{k_2} + \frac{2}{3} n_{k_2} + \ldots + n_{k_p} + \frac{2}{3} n_{k_p}\Big) = \frac{1}{3} n_{k_1} -$$
$$- \frac{5}{3}(n_{k_2} + \ldots + n_{k_p}) = n_{k_1}\Big(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}\Big(\frac{n_{k_2}}{n_{k_1}} + \ldots + \frac{n_{k_p}}{n_{k_1}}\Big)\Big) > 0,$$

поскольку

$$\frac{n_{k_2}}{n_{k_1}} + \ldots + \frac{n_{k_p}}{n_{k_1}} \leq \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \ldots = \frac{1}{\mu - 1} \leq \frac{1}{6}.$$

Отсюда следует, что $\int_0^{2\pi} a_e(x,t)\,dx = 0$, и поскольку $a_e(x,t)$ произвольное слагаемое, входящее в сумму w, то (3.7) доказано. В итоге, учитывая неотрицательность функции $R(x,t)$ и (3.4), получаем

$$\|R(\cdot\,,t)\|_1 = \int_0^{2\pi} R(x,t)\,dx = 2\pi,$$

и (3.6) доказано.

Рассмотрим величину

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} F(x,t)R(x,t)\,dx\,dt.$$

Оценим I сверху. Учитывая (3.6), имеем для любого t

$$\int_0^{2\pi} |F(x,t)||R(x,t)|\,dx \leq \|F(\cdot\,,t)\|_\infty \|R(\cdot\,,t)\|_1 = 2\pi \|F(\cdot\,,t)\|_\infty.$$

Отсюда

$$I \leq 2\pi \int_0^1 \|F(\cdot\,,t)\|_\infty\,dt = 2\pi \int_0^1 \Big\|\sum_{k=1}^{N} r_k(t)p_k(x)\cos n_k x\Big\|_\infty\,dt. \qquad (3.8)$$

Оценим теперь I снизу.

$$I = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 F(x,t) R(x,t)\, dt \Big)\, dx = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^N r_k(t) p_k(x) \cos n_k x \Big)$$

$$\Big(1 + \frac{1}{3} \sum_{1 \le j \le N:\, n_j \in \{m\}} r_j(t) g_j(x) \cos n_j x + \sum_e a_e(x,t) \Big)\, dt \Big)\, dx.$$

Из свойств независимости функций системы Радемахера имеем (см. [15, с. 28]): функции r_k и r_j ортогональны при различных k и j, и функции r_k ортогональны функциям a_e и 1. Используя это, (3.2), и то, что $\deg(p_j g_j) < n_j$, получаем

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \sum_{1 \le j \le N:\, n_j \in \{m\}} p_j(x) g_j(x) \cos^2 n_j x\, dx = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{6} \sum_{1 \le j \le N:\, n_j \in \{m\}}$$

$$p_j(x) g_j(x) + \frac{1}{6} \sum_{1 \le j \le N:\, n_j \in \{m\}} p_j(x) g_j(x) \cos 2n_j x \Big)\, dx =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{1 \le j \le N:\, n_j \in \{m\}} < p_j, g_j > = \frac{1}{6} \sum_{1 \le j \le N:\, n_j \in \{m\}} \|p_j\|_1.$$

В итоге, объединяя с (3.8), получаем

$$\sum_{1 \le k \le N:\, n_k \in \{m\}} \|p_k\|_1 \le 12\pi \int_0^1 \Big\| \sum_{k=1}^N r_k(t) p_k(x) \cos n_k x \Big\|_\infty dt. \tag{3.9}$$

Складывая неравенства (3.9) по всем подпоследовательностям $\{m^{(q)}\}$, $q = 1, \ldots, M$, получаем

$$\sum_{k=1}^N \|p_k\|_1 \le 12\pi M(\lambda) \int_0^1 \Big\| \sum_{k=1}^N r_k(t) p_k(x) \cos n_k x \Big\|_\infty dt =$$

$$= C(\lambda) \int_0^1 \Big\| \sum_{k=1}^N r_k(t) p_k(x) \cos n_k x \Big\|_\infty dt.$$

Теорема 3.1 доказана.

Обозначим через $\mathrm{T}(m)$ пространство вещественных тригонометрических полиномов степени $\le m$. Из теорем B и C (см. Введение) вытекает, что

$$\sup_{t\in \mathrm{T}(2^k)} \frac{\|t\|_{QC}}{\|t\|_\infty} \geq c\sqrt{k}, \quad c>0.$$

С другой стороны, как показал К. И. Осколков (см. [18]; с. 96),

$$\sup_{t\in \mathrm{T}(2^k)} \frac{\|t\|_\infty}{\|t\|_{QC}} \geq c\sqrt{k}, \qquad c>0. \tag{3.10}$$

А именно, он показал, что для тригонометрических полиномов

$$t_k(x) = \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-s} \sum_{j=2^s}^{2^{s+1}-1} \cos jx$$

справедлива оценка $\|t_k\|_{QC} \leq \gamma\sqrt{k}$, где $\gamma>0$ – абсолютная постоянная. Поскольку $\|t_k\|_\infty = t_k(0) = k$, то отсюда следует (3.10). Следующая теорема является обобщением примера К. И. Осколкова.

Теорема 3.2 ([26]). *Пусть последовательность вещественных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |a_n - a_{n+1}| + |a_{2^j-1}| \leq \frac{1}{2^j}, \quad j=1,2,\dots, \tag{3.11}$$

(мы полагаем $\sum_1^0 := 0$). Тогда

$$\Bigl\|\sum_{n=1}^{2^k-1} a_n \cos nx\Bigr\|_{QC} \leq C\sqrt{k}, \quad k=1,2,\dots,$$

где $C>0$ — абсолютная постоянная.

Доказательство теоремы 3.2. Рассмотрим тригонометрический полином

$$f(x) = \sum_{n=1}^{2^k-1} a_n \cos nx = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-1} a_n \cos nx = \sum_{j=1}^{k} \delta_j(x).$$

Без ограничения общности считаем, что $k\geq 10$. Положим $b_n := a_n - a_{n+1}$,

$$d_j := \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-1} a_n, \quad j\geq 1, \quad \text{и}$$

$$S_n^{(j)}(x) = \sum_{p=2^{j-1}}^{n} \cos px, \quad 2^{j-1} \le n \le 2^j - 1, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Применяя преобразование Абеля, имеем

$$\delta_j(x) = \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} b_n S_n^{(j)}(x) + a_{2^j-1} S_{2^j-1}^{(j)}(x), \quad j \ge 2, \tag{3.12}$$

$$d_j = \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} b_n(n - 2^{j-1} + 1) + 2^{j-1} a_{2^j-1}, \quad j \ge 2. \tag{3.13}$$

Рассмотрим функции

$$h_j(x) = d_j \chi_{[-\pi 2^{-j}, \pi 2^{-j}]}(x), \ x \in [-\pi, \pi], \quad j = 1, \ldots, k, \tag{3.14}$$

(где $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E) и продолжим их с периодом 2π на всю вещественную прямую. Положим

$$f_t(x) = \sum_{j=1}^{k} r_j(t) \delta_j(x), \quad g_t(x) = \sum_{j=1}^{k} r_j(t) h_j(x). \tag{3.15}$$

Покажем, что для любого $t \in [0, 1]$

$$\|f_t(x) - g_t(x)\|_\infty \le 11. \tag{3.16}$$

Действительно, пусть $\pi 2^{-(l+1)} < |x| \le \pi 2^{-l}$, $2 \le l \le k - 1$. Тогда

$$|f_t(x) - g_t(x)| = \Big| \sum_{j=1}^{k} r_j(t) \delta_j(x) - \sum_{j=1}^{l} r_j(t) d_j \Big| \le \sum_{j=1}^{l} |\delta_j(x) - d_j| +$$

$$+ \sum_{j=l+1}^{k} |\delta_j(x)| = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 .$$

Оценим сумму $\sum_1$. Имеем $|\delta_1(x) - d_1| \le 2|a_1| \le 1$. Для $2 \le j \le l$ имеем (см. (3.12), (3.13))

$$|\delta_j(x) - d_j| = \Big| \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} b_n \sum_{p=2^{j-1}}^{n} (\cos px - 1) + a_{2^j-1} \sum_{p=2^{j-1}}^{2^j-1} (\cos px - 1) \Big| \le$$

$$\le \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n| \sum_{p=2^{j-1}}^{n} |1 - \cos px| + |a_{2^j-1}| \sum_{p=2^{j-1}}^{2^j-1} |1 - \cos px| = \sum\nolimits_{1,1} + \sum\nolimits_{1,2} .$$

Покажем, что

$$|1-\cos x| \le |x| \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Действительно, применяя теорему Лагранжа, получаем

$$|1-\cos x| = |\cos 0 - \cos x| = |(-\sin\xi)(-x)| \le |x|,$$

и (3.17) доказано.

Учитывая (3.17) и то, что

$$\sum_{p=2^{j-1}}^{n} p \le \frac{3}{8}2^{2j}, \quad 2^{j-1} \le n \le 2^j - 1, \quad j \ge 1, \tag{3.18}$$

имеем (см. также (3.11))

$$\sum\nolimits_{1,1} \le \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n| \sum_{p=2^{j-1}}^{n} |px| \le |x|\frac{3}{8}2^{2j} \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n| \le \frac{\pi}{2^l}\frac{3}{8}2^{2j}\frac{1}{2^j} < \frac{2}{2^{l-j}},$$

$$\sum\nolimits_{1,2} \le |a_{2^j-1}| \sum_{p=2^{j-1}}^{2^j-1} |px| \le \frac{1}{2^j}|x|\frac{3}{8}2^{2j} \le \frac{3\pi}{82^{l-j}} < \frac{2}{2^{l-j}}.$$

Следовательно,

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{j=1}^{l} |\delta_j(x) - d_j| \le 1 + \sum_{j=2}^{l} \frac{4}{2^{l-j}} \le 1 + 4\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2^p} = 9.$$

Оценим теперь $\sum_2$. Покажем вначале, что

$$|S_n^{(j)}(x)| \le \frac{\pi}{|x|},\ |x| \le \pi,\ \text{где } 2^{j-1} \le n \le 2^j - 1,\ j = 1, 2, \ldots. \tag{3.19}$$

Действительно, для $j = 1$

$$|S_1^{(1)}(x)| = |\cos x| \le 1 \le \frac{\pi}{|x|},\ |x| \le \pi.$$

Пусть $j \geq 2$, $2^{j-1} \leq n \leq 2^j - 1$. Имеем

$$S_n^{(j)}(x) = \cos 2^{j-1}x + \ldots + \cos nx = \left(\frac{1}{2} + \ldots + \cos nx\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \ldots + \cos(2^{j-1}-1)x\right) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin(2^{j-1}-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(2^{j-1}-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Следовательно,

$$|S_n^{(j)}(x)| \leq \frac{2}{2|\sin\frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\frac{|x|}{\pi}} = \frac{\pi}{|x|}, \quad |x| \leq \pi,$$

и (3.19) доказано.

Учитывая (3.19) для $l+1 \leq j \leq k$ имеем (см. также (3.12) и (3.11))

$$|\delta_j(x)| \leq \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n||S_n^{(j)}(x)| + |a_{2^j-1}||S_{2^j-1}^{(j)}(x)| \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{|x|}\left(\sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n| + |a_{2^j-1}|\right) \leq 2^{l+1}\frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^{j-l}}.$$

Получаем

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{j=l+1}^{k} |\delta_j(x)| \leq \sum_{j=l+1}^{k} \frac{2}{2^{j-l}} \leq 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^p} = 2.$$

Следовательно, для $\pi 2^{-k} < |x| \leq \pi/4$

$$|f_t(x) - g_t(x)| \leq 11.$$

Для $\pi/4 < |x| \leq \pi$ имеем

$$|f_t(x) - g_t(x)| = \left|\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\delta_j(x) - r_1(t)h_1(x)\right| \leq |\delta_1(x) - h_1(x)| + \sum_{j=2}^{k} |\delta_j(x)|,$$

$|\delta_1(x) - h_1(x)| \leq 2|a_1| \leq 1.$

Для $2 \le j \le k$ имеем (см. (3.12), (3.19) и (3.11))

$$|\delta_j(x)| \le \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n||S_n^{(j)}(x)| + |a_{2^j-1}||S_{2^j-1}^{(j)}(x)| \le$$

$$\le \frac{\pi}{|x|}\left(\sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n| + |a_{2^j-1}|\right) \le 4\frac{1}{2^j} = \frac{4}{2^j}.$$

Откуда получаем для $\pi/4 < |x| \le \pi$

$$|f_t(x) - g_t(x)| \le 1 + \sum_{j=2}^{k} \frac{4}{2^j} \le 1 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} = 3.$$

Наконец, для $|x| \le \pi 2^{-k}$

$$|f_t(x) - g_t(x)| = \Big|\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\delta_j(x) - \sum_{j=1}^{k} r_j(t)d_j\Big| \le \sum_{j=1}^{k} |\delta_j(x) - d_j|.$$

Для $j = 1$ имеем (см. (3.11))

$$|\delta_1(x) - d_1| \le 2|a_1| \le 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Для $2 \le j \le k$ имеем (см. (3.12), (3.13))

$$|\delta_j(x) - d_j| = \Big|\sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} b_n \sum_{p=2^{j-1}}^{n} (\cos px - 1) + a_{2^j-1} \sum_{p=2^{j-1}}^{2^j-1} (\cos px - 1)\Big| \le$$

$$\le \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n| \sum_{p=2^{j-1}}^{n} |1 - \cos px| + |a_{2^j-1}| \sum_{p=2^{j-1}}^{2^j-1} |1 - \cos px| = \sum\nolimits_{1,1} + \sum\nolimits_{1,2}.$$

Учитывая (3.17) и (3.18), имеем (см. также (3.11))

$$\sum\nolimits_{1,1} \le \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n| \sum_{p=2^{j-1}}^{n} |px| \le |x|\frac{3}{8}2^{2j} \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n| \le \frac{\pi}{2^k}\frac{3}{8}2^{2j}\frac{1}{2^j} < \frac{2}{2^{k-j}},$$

$$\sum\nolimits_{1,2} \le |a_{2^j-1}| \sum_{p=2^{j-1}}^{2^j-1} |px| \le \frac{1}{2^j}|x|\frac{3}{8}2^{2j} \le \frac{3\pi}{82^{k-j}} < \frac{2}{2^{k-j}}.$$

Следовательно, для $|x| \le \pi 2^{-k}$
$$|f_t(x) - g_t(x)| \le 1 + \sum_{j=2}^{k} \frac{4}{2^{k-j}} \le 1 + 4\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} = 9.$$
Тем самым неравенство (3.16) доказано. В итоге имеем (см. также (3.1), (3.15))
$$\|f\|_{QC} = \int_0^1 \|f_t(x)\|_\infty \, dt \le \int_0^1 \|f_t(x) - g_t(x)\|_\infty \, dt + \int_0^1 \|g_t(x)\|_\infty \, dt \le$$
$$\le 11 + \int_0^1 \|g_t(x)\|_\infty \, dt.$$
Оценим последний интеграл. Ясно, что (см. (3.14), (3.15))
$$\int_0^1 \|g_t(x)\|_\infty \, dt = \int_0^1 S^*(P)(t) \, dt,$$
где
$$P(t) = \sum_{j=1}^{k} d_j r_j(t) \quad \text{и} \quad S^*(P)(t) = \max_{1 \le n \le k} \Big| \sum_{j=1}^{n} d_j r_j(t) \Big|.$$
Используя известные свойства системы Радемахера (см. [15, с. 48]), имеем
$$\int_0^1 S^*(P)(t) \, dt \le \beta \left(\sum_{j=1}^{k} d_j^2 \right)^{1/2},$$
где $\beta > 0$ — абсолютная постоянная. Покажем, что
$$|d_j| \le \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{3.20}$$
Действительно (см. (3.11)),
$$|d_1| = |a_1| \le \frac{1}{2}.$$
Для $j \ge 2$ имеем (см. (3.11), (3.13))
$$|d_j| \le \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n|(n - 2^{j-1} + 1) + 2^{j-1}|a_{2^j-1}| \le \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n|(2^{j-1} - 1) +$$
$$+ 2^{j-1}|a_{2^j-1}| < 2^{j-1} \left(\sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-2} |b_n| + |a_{2^j-1}| \right) \le 2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2},$$

и (3.20) доказано.

Следовательно,

$$\int_0^1 \|g_t(x)\|_\infty \, dt \le \frac{\beta}{2}\sqrt{k}.$$

Теорема 3.2 доказана.

В качестве следствия получаем

$$c_1\sqrt{\ln N} \le \Big\|\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n}\Big\|_{QC} \le c_2\sqrt{\ln N}, \quad N = 2, 3, \dots, \tag{3.21}$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — абсолютные постоянные. Действительно, правое неравенство непосредственно получается из теоремы. Левое неравенство следует из неравенства для QC нормы (см. [18, с. 74])

$$\|f\|_{QC} \ge c_0 \Big\|\Big(\sum_{s=0}^{\infty} |\delta_s(f,x)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_\infty \ge c_0 \Big(\sum_{s=0}^{\infty} |\delta_s(f,0)|^2\Big)^{1/2},$$

где $c_0 > 0$ — абсолютная постоянная. Поскольку

$$|\delta_j(0)| = \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{n} > \frac{1}{2^j}\, 2^{j-1} = \frac{1}{2}, \quad j \ge 1,$$

то (3.21) доказано. Заметим, что

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n}\Big\|_\infty \asymp \ln N.$$

Отметим также (см. [15, с. 141, неравенство (72)]), что

$$\int_0^1 \Big\|\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(t)}{n} \cos nx\Big\|_\infty dt \le c_3, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где $c_3 > 0$ — абсолютная постоянная.

Для функции f d переменных через $\|f\|_p$ обозначим норму в

$L^p([0,2\pi]^d)$:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(x_1,\dots,x_d)|^p\, dx_1 \dots\, dx_d\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_1,\dots,x_d), \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{T}^d} |f(x)|, \quad x = (x_1,\dots,x_d).$$

В многомерном случае QC норма вводится следующим образом: для функции f на $[0,2\pi]^d$ $(d \ge 2)$ положим

$$\|f\|_{QC} \equiv \big\| \|f(\cdot, x^1)\|_{QC} \big\|_\infty, \tag{3.22}$$

где по определению для $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{T}^d$ полагаем $x^1 = (x_2,\dots,x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$. Другими словами, в (3.22) берется QC норма по переменной x_1 и sup-норма по остальным переменным.

Для $s \in \mathbb{Z}_+^d$ положим

$$\rho(s) \equiv \{k = (k_1,\dots,k_d) \in \mathbb{Z}^d : \ [2^{s_j-1}] \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1,\dots,d\}.$$

Б. С. Кашин и В. Н. Темляков [17], [18] доказали следующую теорему.

Теорема D (Б. С. Кашин, В. Н. Темляков [17], [18])**.** *Для любого вещественного тригонометрического полинома d переменных ($d = 2,3,\dots$) вида*

$$f(x) = \sum_{s:\ \|s\|_1 = n} \delta_s(x), \quad \text{где } \delta_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k,x)},$$

обладающего свойствами

1) $\|\delta_s\|_4 \le 1 \ \ \forall s : \ \|s\|_1 = n$;
2) $\|f\|_2 \ge b n^{(d-1)/2}$, *где $b > 0$ — абсолютная постоянная;*

справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC} \geq cn^{d/2}, \quad c = c(d,b) > 0.$$

Теорема 3.3 и следствие 3.1 показывают, что утверждение теоремы D справедливо при более слабых условиях: $\|\delta_s\|_p \leq 1,\ p > 2$.

Теорема 3.3. *Для любого вещественного тригонометрического полинома d переменных $(d = 2, 3, \ldots)$ вида*

$$f(x) = \sum_{s\colon\ \|s\|_1 = n} \delta_s(x), \quad \textit{где } \delta_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k,x)},$$

обладающего свойством

$$\|\delta_s\|_p \leq 1 \ \ \forall s:\ \|s\|_1 = n,\ \textit{где } p > 2,$$

справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC} \geq C(d,\, p) n^{\left(1 - \frac{p}{2(p-1)} d\right)\frac{p-1}{p-2}} \|f\|_2^{\frac{2(p-1)}{p-2}}, \quad C(d,p) > 0.$$

Доказательство теоремы 3.3. Ясно, что

$$\|f\|_2^2 = \sum_{s_1=0}^{n} \left\| \sum_{\|s^1\|_1 = n - s_1} \delta_s(f) \right\|_2^2, \quad s^1 = (s_2, \ldots, s_d).$$

Используя неравенство, $\|g\|_2 \leq \|g\|_1^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \|g\|_p^{\frac{p}{2(p-1)}}$, $p > 2$, оцениваем правую часть сверху через

$$\sum_{s_1=0}^{n} \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \left\| \sum_{\|s^1\|_1 = n - s_1} \delta_s(f, \cdot\,, x^1) \right\|_1^{\frac{p-2}{p-1}} \cdot \left\| \sum_{\|s^1\|_1 = n - s_1} \delta_s(f, \cdot\,, x^1) \right\|_p^{\frac{p}{p-1}} dx^1.$$

Поменяв местами суммирование с интегрированием и используя неравенство Гельдера $\sum a_i b_i \le (\sum a_i^{p'})^{1/p'}(\sum b_i^{q'})^{1/q'}$ с показателями $p' = \frac{p-1}{p-2}$, $q' = p-1$, продолжаем

$$\le \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \left(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\cdot\,,x^1)\|_1\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\cdot\,,x^1)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}} dx^1, \tag{3.23}$$

где $f_{s_1} := \sum_{\|s^1\|_1=n-s_1} \delta_s(f)$. Используя теорему C, $\forall x^1$ получаем (см. также (3.22))

$$\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\cdot\,,x^1)\|_1 \le 32\pi \|f(\cdot\,,x^1)\|_{QC} \le 32\pi \|f\|_{QC}.$$

Следовательно (см. (3.23)), получаем

$$\|f\|_2^2 \le (32\pi\|f\|_{QC})^{\frac{p-2}{p-1}}\ A, \tag{3.24}$$

где

$$A = \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \left(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\cdot\,,x^1)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}} dx^1.$$

Оценим A сверху. Из неравенства

$$\|g\|_1 \le (2\pi)^{d\frac{p-2}{p-1}} \|g\|_{p-1}$$

получаем

$$A \le (2\pi)^{d\frac{p-2}{p-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\cdot\,,x^1)\|_p^p\, dx^1\right)^{\frac{1}{p-1}} =$$

$$= (2\pi)^{d\frac{p-2}{p-1}} \left(\sum_{s_1=0}^{n} \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \|f_{s_1}(\cdot\,,x^1)\|_p^p\, dx^1\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.25}$$

Используя неравенство (являющееся следствием неравенства Литтлвуда-Пэли), справедливое и для функций многих переменных (см. например, [36]),

$$\|f\|_p \le C(d,\,p)\Big(\sum_s \|\delta_s(f)\|_p^2\Big)^{1/2}, \quad 2<p<\infty, \quad C(d,p)>0,$$

имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \|f_{s_1}(\cdot\,,x^1)\|_p^p\,dx^1 = \int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} |f_{s_1}(x_1,x^1)|^p\,dx^1\Big)\,dx_1 \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{T}}\left(C_1(d,\,p)\sum_{\|s^1\|_1=n-s_1}\|\delta_s(f,x_1,\cdot)\|_p^2\right)^{\frac{p}{2}} dx_1 =$$

$$= C_2(d,\,p)\Big\|\sum_{\|s^1\|_1=n-s_1}\|\delta_s(f,x_1,\cdot\,)\|_p^2\Big\|_{\frac{p}{2}\,(\text{по } x_1)}^{\frac{p}{2}}.$$

Поскольку $\|\sum\|\le\sum\|\ \|$, продолжаем

$$\le C_2(d,\,p)\left(\sum_{\|s^1\|_1=n-s_1}\Big\|\|\delta_s(f,x_1,\cdot)\|_p^2\Big\|_{\frac{p}{2}\,(\text{ по } x_1)}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Big\|\|\delta_s(f,x_1,\cdot\,)\|_p^2\Big\|_{\frac{p}{2}(\text{по } x_1)} = \|\delta_s(f)\|_p^2.$$

Отсюда (см. (3.25)) находим

$$A\le C_3(d,\,p)\left(\sum_{s_1=0}^{n}\Big(\sum_{\|s^1\|_1=n-s_1}\|\delta_s(f)\|_p^2\Big)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Поскольку из условия теоремы $\|\delta_s(f)\|_p\le 1$, то получаем

$$A\le C_4(d,p)\Big(n^{(d-2)\frac{p}{2}+1}\Big)^{\frac{1}{p-1}} = C_4(d,\,p)n^{\frac{p}{2(p-1)}d-1}.$$

Учитывая (3.24), получаем

$$\|f\|_2^2\le C_5(d,\,p)\|f\|_{QC}^{\frac{p-2}{p-1}}\,n^{d\frac{p}{2(p-1)}-1}.$$

Откуда, выражая $\|f\|_{QC}$, получаем требуемое неравенство.

Теорема 3.3 доказана.

Следствие 3.1. *Для любого вещественного тригонометрического полинома d переменных $(d = 2, 3, \dots)$ вида*

$$f(x) = \sum_{s:\ \|s\|_1 = n} \delta_s(x), \quad \text{где } \delta_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k,x)},$$

обладающего свойствами

1) $\|\delta_s\|_p \le 1 \ \ \forall s : \ \|s\|_1 = n,$ *где* $p > 2$,
2) $\|f\|_2 \ge bn^{(d-1)/2},$ *где* $b > 0$ *— абсолютная постоянная,*

справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC} \ge cn^{d/2}, \quad c = c(d, b, p) > 0.$$

Список литературы

[1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

[2] Белинский Э. С. Асимптотические характеристики классов функций с условием на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Сб. статей. Ярославль. ЯГУ, 1990, с. 22–37.

[3] Белинский (Belinskiy E. S.) Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative // J. Approx. Theory, 1998, v. 93, №1, p. 114–127.

[4] Гапошкин В. Ф. Лакунарные ряды и независимые функции // Успехи матем. наук, 1966, т. 21, №6, с. 3–82.

[5] Григорьев П. Г. Об одной последовательности тригонометрических полиномов // Матем. заметки, 1997, т. 61, №6, с. 935–938.

[6] Григорьев П. Г. Случайные и специальные полиномы по общим функциональным системам. Дисс. канд. физ.-матем. наук. МИРАН им. В. А. Стеклова, М., 2002.

[7] Григорьев П. Г., Радомский А. О. Некоторые тригонометрические полиномы с экстремально малой равномерной нормой // Матем. заметки (принято к печати). Предварительный вариант на английском языке доступен по ссылке: http://arxiv.org/pdf/1406.3042v1.pdf

[8] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.

[9] Зигмунд (Zygmund A.) Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances // Studia Mathematica, **3** (1931), p. 77–91.

[10] Кахан Ж. П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976.

[11] Кахан Ж. П. Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.

[12] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

[13] Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР, 1977, т. 41, №2, с. 334–351.

[14] Кашин Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Труды МИАН, 1980, т. 145, с. 111–116.

[15] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. М.: Изд-во АФЦ, 1999.

[16] Кашин Б. С., Темляков В. Н. Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Матем. заметки, 1995, т. 58, №6, с. 922–925.

[17] Кашин Б. С., Темляков В. Н. Об одной норме и связанных с ней приложениях // Матем. заметки, 1998, т. 64, №4, с. 637–640.

[18] Кашин Б. С., Темляков В. Н. Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. Сборник статей. Посвящается Петру Лаврентьевичу Ульянову к его семидесятилетию, М.: АФЦ, 1999, с. 69–99.

[19] Лопез, Росс (Lopez J., Ross K.) Sidon sets. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., no. 13, Dekker, New York, 1975.

[20] Мильман, Вольфсон (Milman V. D., Wolfson H.) Minkowski spaces with extremal distance from the Euclidean space // Israel J. Math., 1978, v. 29, №2-3, p. 113–131.

[21] Пизье (Pisier G.) De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon // Mathematical Analysis and its Applications, Part B, Advances in Mathematics Supplementary Studies, 1981, v. 7, p. 685–726.

[22] Пизье (Pisier G.) Conditions d'entropie et caractérisations arithmétiques des ensembles de Sidon // in: Topics in Modern Harmonic Analysis, vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. F. Severi, Roma, 1983, p. 911–944.

[23] Пизье (Pisier G.) Arithmetic characterizations of Sidon sets // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1983, v. 8, №1, p. 87–89.

[24] Радомский А. О. Об одном неравенстве типа Сидона для тригонометрических полиномов // Матем. заметки, 2011, т. 89, №4, с. 589–595.

[25] Радомский А. О. О возможности усиления неравенств типа Сидона // Матем. заметки, 2013, т. 94, №5, с. 792–795.

[26] Радомский А. О. О QC норме тригонометрических полиномов специального вида // Депонировано в ВИНИТИ 2014, №275-В2014, 6 с.

[27] Рисс (Riesz F.) Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung // Mathematische Zeitschrift, **2** (1918), p. 312–315.

[28] Рудин (Rudin W.) Fourier analysis on groups. New York, Interscience Publishers, Inc., 1962.

[29] Сидон (Sidon S.) Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourierreihen, in denen sehr viele Glieder fehlen // Mathematische Annalen, **96** (1926), p. 418–419.

[30] Сидон (Sidon S.) Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken // Mathematische Annalen, **97** (1927), p. 675–676.

[31] Сидон (Sidon S.) Ueber orthogonale Entwicklungen // Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae, **10** (1943), p. 206–253.

[32] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Известия Академии наук СССР, серия математическая, 1953, т. 17, с. 87–98; 1955, т. 19, с. 221–246; 1956, т. 20, с. 385–412.

[33] Талагран (Talagrand M.) The small ball problem for the Brownian sheet // Ann. Probability, 1994, v. 22, №3, p. 1331–1354.

[34] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН, 1986, т. 178.

[35] Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Труды МИАН, 1989, т. 189, с. 138–168.

[36] Темляков (Temlyakov V. N.) Approximation of Periodic Functions. Commack, NY: Nova Sci. Publ., 1993.

[37] Темляков (Temlyakov V. N.) An inequality for trigonometric

polynomials and its application for estimating the entropy numbers // J. Complexity, 1995, v. 11, p. 293–307.

[38] Темляков (Temlyakov V. N.) An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approx., 1996, v. 2, №2, p. 253–262.

[39] Хант (Hunt R. A.) On the convergence of Fourier series // Orthogonal Expansions continuous Analog., Proc. Conf. Southern Illinois Univ. Edwardsville, 1967, 1968, p. 235–255.

Работы автора по теме диссертации:

[24] Радомский А. О. Об одном неравенстве типа Сидона для тригонометрических полиномов // Матем. заметки, 2011, т. 89, №4, с. 589–595.

[25] Радомский А. О. О возможности усиления неравенств типа Сидона // Матем. заметки, 2013, т. 94, №5, с. 792–795.

[26] Радомский А. О. О QC норме тригонометрических полиномов специального вида // Депонировано в ВИНИТИ 2014, №275-B2014, 6 с.