

## УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор – проректор по научной работе Московского физико-технического института (государственного университета), доктор технических наук, профессор



Горшков  
Олег Анатольевич

«28» ноября 2014 г.

## ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Радомского Артема Олеговича, «Неравенства типа Сидона и некоторые свойства пространства квазинепрерывных функций», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Данная диссертация посвящена исследованию неравенств, обобщающих неравенство С. Сидона. В 1927 г. С. Сидон доказал следующую теорему: если лакунарный тригонометрический ряд, т.е. ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x, \quad n_{k+1} / n_k \geq \lambda > 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

является рядом Фурье ограниченной функции, то он абсолютно сходится. Более того, из доказательства этой теоремы вытекало неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leq C(\lambda) \|f\|_{\infty}, \quad (1)$$

где константа  $C(\lambda) > 0$  зависит только от  $\lambda$ . Это неравенство обычно называют неравенством Сидона. В дальнейшем сам С. Сидон и многие другие авторы занимались обобщением и уточнением сформулированной теоремы (А. Зигмунд, С.Б. Стечкин, Ж. Пизье, Б.С. Кашин, В.Н. Темляков и др.). Например, С. Сидон доказал, что его теорема остается справедливой и для

последовательностей  $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ , которые являются объединением конечного числа лакунарных последовательностей. В связи с указанной теоремой было введено следующее определение.

Множество целых чисел  $\Lambda$  называется множеством Сидона, если существует такая постоянная  $C > 0$ , что для любого тригонометрического полинома  $p(x) = \sum_{n \in \Lambda} a_n e^{inx}$ , где сумма конечна, справедливо неравенство  $\sum_{n \in \Lambda} |a_n| \leq C \|p\|_{\infty}$ . Характеристика множеств Сидона была получена Ж. Пизье (1981 – 1983 г.г.). Множества Сидона подробно изучаются в гл. 10 книги Ж.-П. Кахана «Абсолютно сходящиеся ряды Фурье». М.: «Мир», 1976. Имеется монография Дж. Лопеза и К. Росса «Множества Сидона», опубликованная в серии «Лекции по чистой и прикладной математике», № 13, Нью Йорк, 1975.

Б.С. Кашин и В.Н. Темляков начали новое направление в обобщении неравенства Сидона (1). В частности, они рассматривали тригонометрические полиномы вида  $f(x) = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x) \cos n_k x$ , где  $p_k(x)$  – вещественные тригонометрические полиномы степени  $\deg p_k \leq 2^l$ . В случае  $n_k = 4^k, k = l+1, \dots, 2l$  ими было доказано неравенство  $\|f\|_{\infty} \geq c \sum_{k=l+1}^{2l} \|p_k\|_{L(0,2\pi)}$  с некоторой константой  $c > 0$ .

Поскольку данная диссертация посвящена обобщениям и уточнениям неравенства Сидона, то актуальность ее тематики не вызывает сомнений.

Данная диссертация содержит 79 с. и состоит из введения и трех параграфов.

В первом параграфе получено следующее обобщение сформулированного выше результата Б.С. Кашина и В.Н. Темлякова.

Теорема 1.1. Если  $\{n_k\}$  – любая лакунарная последовательность, т.е.  $n_{k+1} / n_k \geq \lambda > 1$ , то для тригонометрических полиномов вида  $f(x) = \sum_{k=l}^N p_k(x) \cos n_k x$  справедливо неравенство  $\|f\|_{\infty} \geq c \sum_{k=l}^N \|p_k\|_{L(0,2\pi)}$  при условии  $\deg p_k \leq \gamma n_l$ , где  $k = l, \dots, N, l \in \mathbb{N}$ , а  $\gamma \leq \min\left(\frac{1}{6}, \frac{\lambda-1}{3}\right), c > 0$ .

В частности, при  $\lambda = 4$  на степень тригонометрического полинома  $p_k(x)$  вместо  $\deg p_k \leq 2^l$  налагается более широкое условие  $\deg p_k \leq \frac{1}{6} 4^l$ . В этом же параграфе доказан аналог теоремы 1.1 для полиномов по системе Уолша (Теорема 1.2).

Во втором параграфе исследуется возможность усиления теоремы 1.1. Доказана теорема 2.1, из которой, в частности, следует, что в случае последовательности  $n_k = 2^k$  в теореме 1.1 условие  $\deg p_k \leq \frac{1}{6} 2^l$  нельзя заменить на  $\deg p_k \leq [2^{k-k^\varepsilon}]$  ни при каком  $\varepsilon \in (0,1)$ . Доказательство теоремы 2.1 занимает 12 страниц и опирается на неравенство Карлесона-Ханта, которое используется для доказательства гипотезы Лузина о том, что тригонометрический ряд класса  $L^2$  сходится почти всюду.

В третьем параграфе доказывается аналог теоремы 1.1, в котором равномерная норма заменяется на так называемую квазиравномерную норму  $\|\cdot\|_{QC}$  (Теорема 3.1). Эта норма введена Б.С. Кашиным и В.Н. Темляковым в 1998 г. Кроме того, в этом параграфе дано достаточное условие на коэффициенты тригонометрического полинома  $\sum_{n=1}^{2^k-1} a_n \cos nx$ , при котором имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{n=1}^{2^k-1} a_n \cos nx \right\|_{QC} \leq C\sqrt{k}, \quad k \in \mathbf{N},$$

где  $C > 0$  - абсолютная постоянная (Теорема 3.2). Наконец, последняя теорема 3.3 дает оценку снизу QS-нормы некоторых вещественных тригонометрических полиномов многих переменных, обобщающую оценку Б.С. Кашина и В.Н. Темлякова.

**Замечание.** На с. 58 диссертации перед формулировкой теоремы 3.1 утверждается, что эта теорема является обобщением теоремы С. Это утверждение некорректно, так как в теореме 3.1 рассматриваются лишь тригонометрические полиномы специального вида, а в теореме С речь идет о произвольных вещественных квазинепрерывных  $2\pi$ -периодических функциях.

### **Оценка результатов диссертации.**

В диссертации решены несколько трудных и актуальных проблем теории функций. Автор развил тонкие методы метрической теории функций. Полученные им результаты представляют несомненный научный интерес. Они подробно обоснованы и прошли апробацию на Международной конференции “Probability, Analysis and Geometry”, September 1-7, 2013, Ulm, Germany. Автореферат диссертации полно и точно отражает ее содержание и методику исследования.

Результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, из которых две — в журналах из перечня ВАК.

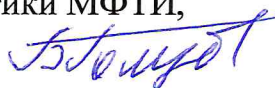
Результаты диссертации могут быть использованы в научной работе в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН и в Московском государственном университете.

### **Вывод.**

Все вышеизложенное позволяет сделать вывод, что диссертация «Неравенства типа Сидона и некоторые свойства пространства квазинепрерывных функций», отвечает требованиям Положения о присуждении ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор — Радомский Артем Олегович безусловно достоин присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

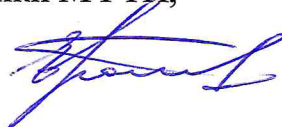
Отзыв на диссертацию составлен доктором физико-математических наук Голубовым Борисом Ивановичем и обсужден на заседании кафедры высшей математики МФТИ «28» ноября 2014 г., протокол № 9.

Профессор кафедры высшей математики МФТИ,  
доктор физ.-мат. наук, профессор



Голубов  
Борис Иванович

Заведующий кафедрой высшей математики МФТИ,  
доктор физ.-мат. наук, профессор



Половинкин  
Евгений Сергеевич

Почтовый адрес: 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер.,9  
Телефон: 8 (495) 576-5155

Адрес электронной почты: polovinkin.es@mipt.ru

Организация – место работы: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»