УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор – проректор по научной работе Московского физико-технического института (государственного университета), доктор технических наук, профессор

_____________ Горшков Олег Анатольевич

«28» ноября 2014 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Радомского Артема Олеговича, «Неравенства типа Сидона и некоторые свойства пространства квазинепрерывных функций», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Данная диссертация посвящена исследованию неравенств, обобщающих неравенство С. Сидона. В 1927 г. С. Сидон доказал следующую теорему: если лакунарный тригонометрический ряд, т.е. ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x, \quad n_{k+1} / n_k \geq \lambda > 1, \; k \in \mathbb{N},$$

является рядом Фурье ограниченной функции, то он абсолютно сходится. Более того, из доказательства этой теоремы вытекало неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leq C(\lambda) \|f\|_\infty, \tag{1}$$

где константа $C(\lambda) > 0$ зависит только от λ. Это неравенство обычно называют неравенством Сидона. В дальнейшем сам С.Сидон и многие другие авторы занимались обобщением и уточнением сформулированной теоремы (А. Зигмунд, С.Б. Стечкин, Ж. Пизье, Б.С. Кашин, В.Н. Темляков и др.). Например, С. Сидон доказал, что его теорема остается справедливой и для последовательностей $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, которые являются объединением конечного числа лакунарных последовательностей. В связи с указанной теоремой было введено следующее определение.

Множество целых чисел Λ называется множеством Сидона, если существует такая постоянная $C>0$, что для любого тригонометрического полинома $p(x)=\sum_{n\in\Lambda}a_n e^{inx}$, где сумма конечна, справедливо неравенство $\sum_{n\in\Lambda}|a_n|\le C\|p\|_{\infty}$. Характеристика множеств Сидона была получена Ж. Пизье (1981 – 1983 г.г.). Множества Сидона подробно изучаются в гл. 10 книги Ж.-П. Кахана «Абсолютно сходящиеся ряды Фурье». М.: «Мир», 1976. Имеется монография Дж. Лопеза и К. Росса «Множества Сидона», опубликованная в серии «Лекции по чистой и прикладной математике», № 13, Нью Йорк, 1975.

Б.С. Кашин и В.Н. Темляков начали новое направление в обобщении неравенства Сидона (1). В частности, они рассматривали тригонометрические полиномы вида $f(x)=\sum_{k=l+1}^{2l}p_k(x)\cos n_k x$, где $p_k(x)$ - вещественные тригонометрические полиномы степени $\deg p_k\le 2^l$. В случае $n_k=4^k, k=l+1,\dots,2l$ ими было доказано неравенство $\|f\|_{\infty}\ge c\sum_{k=l+1}^{2l}\|p_k\|_{L(0,2\pi)}$ с некоторой константой $c>0$.

Поскольку данная диссертация посвящена обобщениям и уточнениям неравенства Сидона, то актуальность ее тематики не вызывает сомнений.

Данная диссертация содержит 79 с. и состоит из введения и трех параграфов.

В первом параграфе получено следующее обобщение сформулирован - ного выше результата Б.С. Кашина и В.Н. Темлякова.

Теорема 1.1. Если $\{n_k\}$ - любая лакунарная последовательность, т.е. $n_{k+1}/n_k\ge\lambda>1$, то для тригонометрических полиномов вида $f(x)=\sum_{k=l}^{N}p_k(x)\cos n_k x$ справедливо неравенство $\|f\|_{\infty}\ge c\sum_{k=l}^{N}\|p_k\|_{L(0,2\pi)}$ при условии $\deg p_k\le\gamma n_l$, где $k=l,\dots,N, l\in\mathbb{N}$, а $\gamma\le\min\left(\frac{1}{6},\frac{\lambda-1}{3}\right), c>0$.

В частности, при $\lambda = 4$ на степень тригонометрического полинома $p_k(x)$ вместо $\deg p_k \le 2^l$ налагается более широкое условие $\deg p_k \le \frac{1}{6}4^l$. В этом же параграфе доказан аналог теоремы 1.1 для полиномов по системе Уолша (Теорема 1.2).

Во втором параграфе исследуется возможность усиления теоремы 1.1. Доказана теорема 2.1, из которой, в частности, следует, что в случае последовательности $n_k = 2^k$ в теореме 1.1 условие $\deg p_k \le \frac{1}{6}2^l$ нельзя заменить на $\deg p_k \le \left[2^{k-k^\varepsilon}\right]$ ни при каком $\varepsilon \in (0.1)$. Доказательство теоремы 2.1 занимает 12 страниц и опирается на неравенство Карлесона-Ханта, которое используется для доказательства гипотезы Лузина о том, что тригонометрический ряд класса L^2 сходится почти всюду.

В третьем параграфе доказывается аналог теоремы 1.1, в котором равномерная норма заменяется на так называемую квазиравномерную норму $\|\cdot\|_{QC}$ (Теорема 3.1). Эта норма введена Б.С. Кашиным и В.Н. Темляков- ым в 1998 г. Кроме того, в этом параграфе дано достаточное условие на коэффициенты тригонометрического полинома $\sum_{n=1}^{2^k-1} a_n \cos nx$, при котором имеет место неравенство

$$\left\|\sum_{n=1}^{2^k-1} a_n \cos nx\right\|_{QC} \le C\sqrt{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $C > 0$ - абсолютная постоянная (Теорема 3.2). Наконец, последняя теорема 3.3 дает оценку снизу QS –нормы некоторых вещественных тригонометрических полиномов многих переменных, обобщающую оценку Б.С. Кашина и В.Н. Темлякова.

Замечание. На с. 58 диссертации перед формулировкой теоремы 3.1 утверждается, что эта теорема является обобщением теоремы С. Это утверждение некорректно, так как в теореме 3.1 рассматриваются лишь тригонометрические полиномы специального вида, а в теореме С речь идет о произвольных вещественных квазинепрерывных 2π -периодических функциях.

Оценка результатов диссертации.

В диссертации решены несколько трудных и актуальных проблем теории функций. Автор развил тонкие методы метрической теории функций. Полученные им результаты представляют несомненный научный интерес. Они подробно обоснованы и прошли апробацию на Международной конференции “Probability, Analysis and Geometry”, September 1-7, 2013, Ulm, Germany. Автореферат диссертации полно и точно отражает ее содержание и методику исследования.

Результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, из которых две — в журналах из перечня ВАК.

Результаты диссертации могут быть использованы в научной работе в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН и в Московском государственном университете.

Вывод.

Все вышеизложенное позволяет сделать вывод, что диссертация «Неравенства типа Сидона и некоторые свойства пространства квазинепрерывных функций», отвечает требованиям Положения о присуждении ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор – Радомский Артем Олегович безусловно достоин присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Отзыв на диссертацию составлен доктором физико-математических наук Голубовым Борисом Ивановичем и обсужден на заседании кафедры высшей математики МФТИ «28» ноября 2014 г., протокол № 9.

Профессор кафедры высшей математики МФТИ,
доктор физ.-мат. наук, профессор Голубов Борис Иванович

Заведующий кафедрой высшей математики МФТИ,
доктор физ.-мат. наук, профессор Половинкин Евгений Сергеевич

Почтовый адрес: 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер.,9
Телефон: 8 (495) 576-5155
Адрес электронной почты: polovinkin.es@mipt.ru
Организация – место работы: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»