Отзыв научного руководителя
о диссертации А. О. Радомского "Неравенства типа Сидона
и некоторые свойства пространства квазинепрерывных функций",
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.01

Диссертация Радомского состоит из введения и трех параграфов и посвящена некоторым вопросам теории тригонометрических рядов. В параграфах 1 и 2 исследуются обобщения классического результата Сидона о лакунарных тригонометрических многочленах: если

$$P(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x,$$

где $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1,\ k = 1, \dots, N-1$, то

$$\|P\|_{C(-\pi,\pi)} \geqslant c(\lambda) \sum_{k=1}^{N} (|a_k| + |b_k|), \quad c(\lambda) > 0.$$

В 1998 г. в работе Кашина и Темлякова был получен результат более общего характера: для тригонометрического многочлена вида

$$P(x) = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x) \cos 4^k x,$$

где $p_k(x)$ вещественные тригонометрические многочлены степени $\deg p_k \leqslant 2^l,\ k = l+1, \dots, 2l$, справедливо неравенство

$$\|P\|_{C(-\pi,\pi)} \geqslant c \sum_{k=l+1}^{2l} \|p_k\|_{L^1(-\pi,\pi)}, \tag{1}$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

Исследованию неравенств обобщающих (1) посвящены первые два параграфа диссертации. В теореме 1.1 работы установлено обобщение неравенства (1), при этом существенно ослаблены ограничения на степени многочленов $p_k$. В теореме 2.1 установлен результат противоположного характера: построены многочлены $p_k$ степени $\leqslant 2^{k-k^\varepsilon}$ такие, что для $P(x) = \sum_{k=1}^{l} p_k(x) \cos 2^k x$ неравенство (1) теряет силу.

В третьем параграфе диссертации изучаются свойства так называемой $QC$ нормы, введенной Кашиным и Темляковым. Эта тема непосредственно связана с задачами о неравенствах типа Сидона, рассмотренными в первых двух параграфах. Для функции $f \in L^1(0, 2\pi)$ с рядом Фурье $f \sim \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(f, x)$,

$$\delta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \quad \delta_s(f, x) = \sum_{2^{s-1} \leqslant |k| < 2^s} \hat{f}(k) e^{ikx}, \ s = 1, 2, \ldots,$$

$$\|f\|_{QC} \equiv \int_0^1 \Big\| \sum_{s=0}^{\infty} r_s(t) \delta_s(f, x) \Big\|_{\infty} dt, \tag{2}$$

где $\{r_s(t)\}_{s=0}^{\infty}$ – система Радемахера. Пространством квазинепрерывных функций называется замыкание семейства тригонометрических многочленов по норме (2). Свойства пространства квазинепрерывных функций и $QC$ нормы представляют интерес не только для гармонического анализа, но и для теории вероятностей и, возможно, теории чисел. На пространстве $T(N)$ тригонометрических многочленов степени $\leqslant N$ $C$ и $QC$ нормы отличаются на величины логарифмического порядка. При этом

$$\sup_{t \in T(N)} \frac{\|t\|_{QC}}{\|t\|_C} \geqslant c\, (\log N)^{1/2},$$

$$\sup_{t \in T(N)} \frac{\|t\|_{C}}{\|t\|_{QC}} \geqslant c\, (\log N)^{1/2}.$$

Последнее соотношение (установленное К. И. Осколковым) обобщается в диссертации Радомского. Точнее, в теореме 3.2 диссертации установлены оценки сверху $QC$ нормы тригонометрического многочлена в терминах вариации последовательности его коэффициентов.

Оценивая диссертацию А. О. Радомского в целом отмечу, что она представляет собой цельное исследование по актуальной тематике. Результаты, полученные в работе, представляют значительный интерес, прошли апробацию и известны специалистам. Считаю, что диссертация "Неравенства типа Сидона и некоторые свойства пространства квазинепрерывных функций" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор А. О. Радомский заслуживает присуждения ему искомой степени.

Научный руководитель,
академик РАН ______________ Б.С. Кашин



26

Подпись академика Б.С. Кашина удостоверяю!