Отзыв официального оппонента на диссертацию Радомского Артема Олеговича "Неравенства типа Сидона и некоторые свойства пространства квазинепрерывных функций" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ"

На протяжение всего 20 века в теории функций уделялось большое внимание исследованию лакунарных тригонометрических рядов. В этой области работало много известных математиков, в частности, это направление интенсивно исследовалась и в Московском университете. Важнейший результат относящийся к лакунарным рядам был получен в 1927 году С. Сидоном, из работы которого вытекает следующая теорема.

Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда, если тригонометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

есть ряд Фурье ограниченной функции $f(x)$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \leq C(\lambda) \|f\|_{\infty}, \tag{1}$$

где $C(\lambda) > 0$ — *величина, зависящая лишь от* λ.

Неравенство (1) называют *неравенством Сидона*. В дальнейшем этот результат усиливался в нескольких направлениях, одним из которых было ослабление требований к лакунарности. В конце 90-х годов Б.С Кашин и В.Н. Темляков опубликовали цикл работ, в которых заменили коэффициенты a_k и b_k на тригонометрические полиномы меньшей степени, определили и исследовали QC-норму. Полученные результаты применялись для оценки поперечников классов функций многих переменных с ограничением на смешанную разность. Можно утверждать, что в этих работах было намечено новое направление в теории тригонометрических рядов. Диссертант продолжает исследования в этой области и во многих аспектах заметно усиливает результаты Кашина-Темлякова. Таким образом, тематика диссертации является актуальной.

Диссертация состоит из введения, трчх параграфов и списка литературы из 39 наименований. Общий объем диссертации — 79 страниц.

Во введении дается подробный исторический обзор исследуемой проблемы и кратко описываются основные результаты диссертационной работы.

Центральным результатом первого параграфа диссертации является следующее неравенство типа Сидона, значительно усиливающее соответствующий результат Кашина-Темлякова.

Теорема 1.1. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$. *Существует константа* $c(\lambda) > 0$, *зависящая лишь от* λ, *такая, что для любого тригонометрического полинома вида*

$$f(x) = \sum_{k=l}^{N} p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k — *вещественные тригонометрические полиномы с* $\deg(p_k) \leq \gamma n_l$, $\gamma = \min(\frac{1}{6}, \frac{\lambda-1}{3})$, $k = l, \ldots, N$, $N \geq l$, $l = 1, 2, \ldots$, *справедливо неравенство*

$$\|f\|_{\infty} \geq c(\lambda) \sum_{k=l}^{N} \|p_k\|_1.$$

Из результатов следующего параграфа вытекает, что утверждение теоремы не может быть существенно улучшено, что, безусловно, увеличивает ее ценность. Также в первом параграфе получено аналогичное утверждение для системы Уолша.

Теорема 1.2. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* $2^{k-1} \leq n_k < 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда для любой функции* $f(x)$ *вида*

$$f(x) = \sum_{k=l+1}^{m} p_k(x) w_{n_k}(x),$$

где $p_k \in \mathcal{W}(2^l - 1)$, $k = l+1, \ldots, m$, $m \geq l+1$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, *справедливо неравенство*

$$\|f\|_{\infty} \geq \sum_{k=l+1}^{m} \|p_k\|_1.$$

Во втором параграфе диссертации исследуется точность теоремы 1.1. Автором предложен метод построения тригонометрических полиномов, на которых реализуются "оценки снизу".

Теорема 2.1. *Пусть* ε, $\widetilde{\varepsilon}$ — *действительные числа, причем* $\frac{1}{2} \leq \varepsilon < \widetilde{\varepsilon} < 1$. *Для любого* $W \in \mathbb{N}$ *существуют вещественные тригонометрические полиномы* $p_k(x)$, $k = 1, \ldots, W$, *такие, что* $\deg p_k \leq \left[2^{k-k^{\varepsilon}}\right]$, $\|p_k\|_1 \geq \frac{2\pi}{3}$, $\|p_k\|_{\infty} \leq 70$, $k = 1, \ldots, W$, *и*

$$\max_{1 \leq n \leq W} \left\| \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \cos 2^k x \right\|_{\infty} \leq C W^{\widetilde{\varepsilon}},$$

где $C = C(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) > 0$ — константа, зависящая лишь от ε и $\widetilde{\varepsilon}$.

Мне кажется весьма интересным вопрос о том, на сколько близки к друг другу результаты теорем 1.1 и 2.1, например, при $n_k = 2^k$. Теорема 1.1 дает положительный результат (для любых тригонометрических полиномов p_k), если

$$\deg p_k \leq A_{k,l} := \frac{1}{6} 2^l, \quad l \leq k \leq N.$$

Теорема 2.1 позволяет построить последовательность тригонометрических полиномов p_k, для которых не выполняется неравенство Сидона, таких что

$$\deg p_k \leq B_{k,\epsilon} := 2^{[k-k^\epsilon]}, \quad l \leq k \leq N, \quad \epsilon \in (0,1). \tag{2}$$

С одной стороны, при $\epsilon = 1$, не выполняется неравенство $A_{k,l} < B_{k,\epsilon}$. Таким образом, в некотором смысле можно говорить о принципиальной неулучшаемости теорем 1.1 и 2.1. Но, с другой стороны, при $\epsilon < 1$ люфт между $A_{k,l}$ и $B_{k,\epsilon}$ является достаточно большим. Он был существенно уменьшен в теореме 2.2, полученной диссертантом совместно с П.Г. Григорьевым. Из которой следует, что в интересующем нас случае $n_k = 2^k$ условие (2) может быть заменено на более сильное

$$\deg p_k \leq 2^{[k-k/\psi_k]}, \quad l \leq k \leq N,$$

где ψ_k произвольная положительная, возрастающая, стремящаяся к бесконечности последовательность. Необходимо отметить, что доказательство теоремы 2.2 в значительной степени базируется на идеях теоремы 2.1.

Явное построение тригонометрических полиномов, реализующих оценки снизу, всегда сопряжено с серьезными техническими трудностями, и получение теорем 2.1 и 2.2 является безусловным успехом диссертанта.

Третий параграф диссертации посвящена изучению QC нормы, введенной Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым. Полученная ими оценка QC-нормы снизу была перенесена на случай произвольной лакунарной последовательности.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Существует константа $c(\lambda) > 0$, зависящая лишь от λ, такая, что для любого тригонометрического полинома вида*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k(x) \cos n_k x,$$

где p_k — вещественные тригонометрические полиномы с $\deg(p_k) \leq n_k/3$, $k = 1, \ldots, N$, $N = 1, 2, \ldots$, справедливо неравенство

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{N} r_k(t) p_k(x) \cos n_k x \right\|_\infty dt \geq c(\lambda) \sum_{k=1}^{N} \|p_k\|_1.$$

Также параграф 3 содержит обобщение примера К.И. Осколкова и один многомерный результат.

Интерес к этой области, вероятно, в значительной степени был вызван тем, что найденные оценки QC-нормы позволили получить точные порядки энтропийных чисел и поперечников по Колмогорову некоторых классов функций. Может возникнуть естественный вопрос о том, позволило ли улучшение исходных оценок Кашина-Темлякова получить какие-либо новые результаты о поперечниках и энтропийных числах.

Тем не менее, мне представляется абсолютно оправданным невключение этих результатов (если они есть) в настоящую диссертацию, в виду того, что она и так имеет достаточно большой объем и содержит много интересных теорем.

Диссертант продемонстрировал очень хорошее владение аппаратом теории тригонометрических и ортогональных рядов. Все доказательства проведены очень аккуратно, число неточностей и опечаток минимально. В качестве основного недостатка работы можно указать полное отсутствие разбиения доказательства теорем на более мелкие логические единицы. Диссертация содержит семь полновесных теорем, суммарный размер доказательств которых превышает 50 страниц. При этом в работе нет ни одной леммы или предложения. Отмеченный недостаток ни в коей мере не влияют на достоверность результатов и не умаляет очевидных достоинств диссертационной работы. Диссертация является научно квалифицированной работой, результаты которой представляют несомненный интерес для специалистов по теории приближения и теории функций. Автором опубликованы три научные работы по теме диссертации, в том числе две статьи в изданиях, рекомендованных ВАК. Результаты докладывались и обсуждались на международной конференции и различных научных семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация соответствует требованиям положения ВАК о присуждении ученых степеней, и ее автор, Радомский Артем Олегович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – “вещественный, комплексный и функциональный анализ”.

07.12.2014
Руководитель исследовательской группы отдела новых технологий ООО “Эверноут”
доктор физико-математических наук /Е.Д. Лившиц/

Подпись Е.Д. Лившица заверяю.
Генеральный директор ООО “Эверноут”

ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ • ОГРН 1127746098849 • МОСКВА • "Эверноут" Evernote LLC

/И.В. Сошинская/

Лившиц Евгений Давидович,
доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01.
E-mail: evgliv at gmail.com, тел.: (499)951-30-20.