ФГБОУ ВПО Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Захаров Александр Олегович

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДГРУПП В СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова“.

Научный руководитель:	**Клячко Антон Александрович,** кандидат физико-математических наук, доцент.
Официальные оппоненты:	**Бардаков Валерий Георгиевич,** доктор физико-математических наук, доцент (ФГБУН “Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН“, ведущий научный сотрудник лаборатории обратных задач математической физики). **Куликова Ольга Викторовна,** кандидат физико-математических наук, доцент (ФГБОУ ВПО “Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана“, кафедра ФН-12 “Математическое моделирование“).
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО “Ивановский государственный университет“

Защита диссертации состоится 26 декабря 2014 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова“ по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова“, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова“ по адресу: РФ, 119991, Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж, http://mech.math.msu.su

Автореферат разослан 26 ноября 2014 года

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84, созданного на базе
ФГБОУ ВПО МГУ им. М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор

Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертации изучается строение пересечения подгрупп в свободных конструкциях. Свободные группы и обобщающие их свободные конструкции являются одними из центральных объектов изучения в комбинаторной и геометрической теории групп. Классические результаты, касающиеся этих классов групп, можно найти в книгах[1,2,3,4].

Свободные группы изучались в ряде работ Нильсена[5,6,7] и Шрайера[8], и остаются в центре внимания и по сей день. Геометрический подход к изучению подгрупп свободных групп, использующий методы теории графов, был предложен Столлингсом[9], и с тех пор активно и успешно используется.

Согласно теореме Нильсена-Шрайера[8], любая подгруппа свободной группы сама является свободной. Однако подгруппа конечно порожденной свободной группы не всегда является конечно порожденной. Именно, в свободной группе ранга k для $k > 1$ содержатся в качестве подгрупп свободная группа ранга n для любого натурального n и свободная группа счетного ранга.

Тем не менее, пересечение конечно порожденных подгрупп в свободной группе является конечно порожденной подгруппой. Этот результат был доказан Хаусоном[10] в 1954 году. Если в группе пересечение любых двух конечно порожденных подгрупп конечно порождено, то говорят, что эта группа обладает свойством Хаусона. Таким образом, свободные группы обладают свойством Хаусона, однако далеко не все группы обладают этим свойством (см., например, работу[11]).

Естественным является вопрос о ранге пересечения двух конечно порожденных

---

[1] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory*, revised ed., Dover Publications Inc., New York, 1976, Presentations of groups in terms of generators and relations.

[2] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.

[3] J.-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, 1980.

[4] O. Bogopolski, *Introduction to Group Theory*, EMS Publishing House, 2008.

[5] J. Nielsen, *Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden*, Mathematische Annalen 78 (1918), 385–397.

[6] J. Nielsen, *Om regning med ikke-kommutative faktorer og dens anvendelse i gruppeteorien*, Math. Tidsskrift B 78 (1921), 77–94.

[7] J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*, Mathematische Annalen 91 (1924), 169–209.

[8] O.Schreier, *Die Untergruppen der freien Gruppen*, Hamburg. Abh.5 (1927), 161-183.

[9] J.R. Stallings, *Topology of finite graphs*, Invent. Math. 71 (1983), 551-565.

[10] A.G. Howson, *On the intersection of finitely generated free groups*, J. London Math. Soc. 29 (1954), 428-434.

[11] A. Karrass, D. Solitar, *On the failure of the Howson property for a group with a single defining relation*, Mathematische Zeitschrift, 108 (1969), 235-236.

подгрупп свободной группы. В 1957 году Ханна Нейман в работе[12] доказала следующую оценку для ранга пересечения подгрупп свободной группы:

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 2\,\overline{r}(H)\overline{r}(K).$$

Здесь $\overline{r}(H) = max\,(r(H)-1, 0)$ есть редуцированный ранг свободной группы H, $r(H)$ есть ранг свободной группы H. Кроме того, Ханна Нейман сформулировала гипотезу о том, что при тех же условиях выполняется оценка

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant \overline{r}(H)\overline{r}(K).$$

Гипотеза Ханны Нейман оставалась открытой на протяжении десятилетий и была доказана в 2011 году независимо Игорем Минеевым[13] и Дж. Фридманом[14]. Легко видеть, что эта оценка уже является неулучшаемой.

Большое количество работ в комбинаторной теории групп посвящено переносу некоторых свойств свободных групп на более широкие классы групп, обобщающие свободные группы. Одним из естественных обобщений свободных групп является свободное произведение групп. Структура подгрупп свободных произведений описывается теоремой Куроша[15]. Следствием этой теоремы является тот факт, что подгруппы свободных произведений, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям, являются свободными. В 1999 году С.В. Иванов[16] доказал следующий результат, аналогичный неравенству Ханны Нейман в свободной группе, для таких подгрупп свободных произведений. Пусть $G = G_1 * G_2$, H и K — конечно порожденные подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к G_1 и G_2. Тогда

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6\overline{r}(H)\overline{r}(K).$$

В 2008 году У. Дикс и С.В. Иванов[17] доказали более точную оценку для ранга пересечения подгрупп свободных произведений, тривиально пересекающихся с сопряженными к сомножителям. Также С.В. Иванов[18] доказал более общую оценку для ранга Куроша пересечения подгрупп свободных произведений.

[12]H. Neumann, *On the intersection of finitely generated free groups*, Publ.Math. 4 (1956), 186-189; Addendum, Publ.Math. 5 (1957), 128.

[13]I. Mineyev, *Groups, graphs and the Hanna Neumann Conjecture*, J. Topol. Anal. 4 (2012), no. 1, 1-12.

[14]J. Friedman, *Sheaves on graphs, their homological invariants, and a proof of the Hanna Neumann conjecture: with an appendix by Warren Dicks*, Memoirs of the AMS 233 (1100) (2014).

[15] A.G. Kurosh, *Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen*, Ann.Math. 109 (1934), 647-660.

[16] S.V. Ivanov, *On the intersection of finitely generated subgroups in free products of groups.* Internat. J. Algebra and Comp. 9 (1999), no. 5, 521-528.

[17] W. Dicks and S.V. Ivanov, *On the intersection of free subgroups in free products of groups*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 144 (2008), 511-534.

[18]S.V. Ivanov, *On the Kurosh rank of the intersection of subgroups in free products of groups*, Adv. Math. 218 (2008), 465-484.

Более широким классом групп, обобщающим свободные группы и свободные произведения групп, являются так называемые свободные конструкции — свободные произведения с объединенной подгруппой, HNN-расширения, почти свободные группы и фундаментальные группы графов групп.

Свободные произведения групп с объединенной подгруппой были впервые рассмотрены Шрайером[8], а HNN-расширения групп — Г. Хигманом, Б. Нейманом и Х. Нейман[19]. Обе эти конструкции играют важную роль в комбинаторной теории групп, а топологическая интерпретация этих конструкций обеспечивается теоремой Зейферта-ван Кампена[20].

Понятие почти свободной группы, то есть группы со свободной подгруппой конечного индекса, является естественным обобщением понятия свободной группы. Почти свободные группы допускают множество различных характеризаций, см., например, работы[21,22].

Графы групп и фундаментальные группы графов групп были впервые введены Бассом и Серром[3]. Это понятие обобщает свободные группы, свободные произведения групп, свободные произведения с объединенной подгруппой, HNN-расширения, а также, согласно теореме Карраса-Петровского-Солитэра[23], почти свободные группы. Важнейшим результатом о фундаментальных группах графов групп, играющим большую роль в геометрической теории групп, является теорема Басса-Серра[3]. Эта теорема характеризует фундаментальные группы графов групп геометрически — как группы, действующие на деревьях.

Таким образом, интересным представляется вопрос об оценке для ранга пересечения подгрупп в свободных конструкциях, аналогичной неравенству Ханны Нейман[12] в свободной группе и оценкам С.В. Иванова и У. Дикса[16,17] в свободном произведении групп. В данной диссертации мы доказываем такого типа оценки при определенных условиях на свободные конструкции. Основным условием является конечность реберных подгрупп графа групп, так как в противном случае группа может не обладать даже свойством Хаусона[11].

Цель работы. Получить аналог неравенства Х. Нейман для свободных произве-

[19] G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, *Embedding Theorems for Groups*, Journal of the London Mathematical Society 24 (1949), 247–254.

[20] E. R. van Kampen, *On the connection between the fundamental groups of some related spaces*, American Journal of Mathematics, 55 (1933), 261–267.

[21] Y. Antolin, *On Cayley graphs of virtually free groups*, Groups - Complexity - Cryptology 3 (2011), 301-327.

[22] V. Diekert and A. Weiß, *Context-Free groups and Their Structure Trees.* International Journal of Algebra and Computation 23 (2013), 611-642.

[23] A. Karrass, A. Pietrowski and D. Solitar, *Finitely generated groups with a free subgroup of finite index*, J. Austral. Math. Soc. 16 (1973), 458-466.

дений с объединенной нормальной конечной подгруппой и доказать неулучшаемость полученной оценки при определенных условиях. Исследовать строение пересечения свободных подгрупп в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными группами, а также в почти свободных группах. Получить более общую оценку для ранга Куроша пересечения подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к реберным группам, в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными группами.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Получена оценка для ранга пересечения подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к сомножителям, в свободном произведении групп с объединенной нормальной конечной подгруппой.

2. Доказана неулучшаемость полученной оценки при определенных условиях.

3. Решена задача об ограничении сверху ранга пересечения свободных подгрупп в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными группами, в частности, в свободных произведениях с объединенной конечной подгруппой, в HNN-расширениях с конечными ассоциированными подгруппами и в почти свободных группах.

4. Получено неравенство, ограничивающее сверху ранг Куроша пересечения подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к реберным группам, в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными группами.

Методы исследования. В работе используются методы комбинаторной и геометрической теории групп и теории графов. Также автором разработана новая техника представления подгрупп свободных конструкций с помощью графов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории групп.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на

- научно-исследовательском семинаре по алгебре под руководством профессора А.В.Михалева, профессора В.Н. Латышева, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014 г.

- семинаре «Теория групп» под руководством профессора А.Л.Шмелькина, профессора А.Ю. Ольшанского и доцента А.А.Клячко, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, неоднократно в 2009-2014 гг.

- семинаре «Алгоритмические вопросы алгебры и логики» под руководством академика РАН С.И. Адяна, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2013 г.
- школе-конференции по математическим вопросам информатики, Омск, 2013 г.
- научно-исследовательском семинаре по теории групп, Иллинойский университет в Урбане-Шампейн, США, 20 февраля 2014 г.
- международной конференции «Группы Сент-Андрус 2013», Сент-Андрус, Великобритания, с 3 по 11 августа 2013 г.
- международной конференции «Геометрическая и комбинаторная теория групп с приложениями», Дюссельдорф, Германия, с 25 июля по 3 августа 2012 г.
- международной конференции «Геометрическая и асимптотическая теория групп с приложениями», Манреса, Испания, с 11 по 15 июля 2011 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, 2 из которых — в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК [1-2].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 41 наименования. Общий объем диссертации составляет 71 страницу.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** изложена краткая история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач. Сформулированы цель работы и основные результаты.

В **главе 1** доказывается оценка для ранга пересечения свободных подгрупп в свободном произведении групп с объединенной нормальной конечной подгруппой, а также ее неулучшаемость при определенных условиях.

Обозначим через $r(H)$ ранг свободной группы H, и пусть $\overline{r}(H) = max(r(H)-1, 0)$ есть редуцированный ранг свободной группы H.

С.В.Иванов и У.Дикс[17] доказали следующую оценку для ранга пересечения подгрупп в свободном произведении групп.

Теорема (С.В. Иванов, У. Дикс). *Пусть $G = G_1 * G_2$ — свободное произведение групп, а H_1 и H_2 — подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, по теореме Куроша[15], свободные) и конечного ранга. Тогда ранг $H_1 \cap H_2$ также конечен, причём выполняется оценка*

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\frac{q^*}{q^*-2}\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \leqslant 6\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2),$$

где q^* — минимальный из порядков подгрупп групп G_1, G_2, больших 2; $\frac{q^*}{q^*-2} = 1$, *если* $q^* = \infty$. *Кроме того, первая из этих оценок неулучшаема, если в G есть элемент порядка 2, G_1 и G_2 нетривиальны и $G \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.*

Свободное произведение групп с объединенной подгруппой является естественным обобщением свободного произведения групп. Основной результат первой главы заключается в следующей теореме, обобщающей теорему С.В. Иванова и У. Дикса на случай подгрупп в свободном произведении с объединенной нормальной конечной подгруппой. Результаты данной главы опубликованы в работе [1].

Теорема 1. *Пусть $G = G_1 *_T G_2$ — свободное произведение групп с объединенной нормальной конечной подгруппой T, а H_1 и H_2 — подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, согласно работе[24], свободные) и конечного ранга. Тогда ранг $H_1 \cap H_2$ также конечен, причем выполняется оценка*

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\frac{q_f^*}{q_f^*-2}|T|\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \leqslant 6|T|\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2),$$

где q_f^* — минимальный из порядков подгрупп групп G_1/T, G_2/T, больших 2; $\frac{q_f^*}{q_f^*-2} = 1$, *если* $q_f^* = \infty$, *а $|T|$ — порядок группы T. При этом первая из этих оценок неулучшаема, если в G_1/T или G_2/T есть элемент порядка 2, $G_1 \neq T$, $G_2 \neq T$ и $G_1/T * G_2/T \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.*

Основная сложность заключается в доказательстве неулучшаемости полученной оценки при указанных в теореме условиях. Доказательство основано на применении конструкции графа подгруппы в свободном произведении групп, предложенной С.В. Ивановым в работах[16,25,26] и обобщающей технику Столлингса для подгрупп свободных групп[9]. Важную роль в доказательстве также играет финитная аппроксимируемость треугольных групп[27].

В **главе 2** изучается вопрос об ограничении сверху ранга пересечения свободных подгрупп фундаментальных групп графов групп с конечными реберными группами. Доказываемая оценка аналогична неравенству Ханны Нейман в свободной группе[12] и обобщает оценку С.В. Иванова для свободных произведений[16].

Фундаментальные группы графов групп были введены Бассом и Серром[3] и являются одной из важнейших конструкций в геометрической теории групп.

---

[24] A. Karrass, D. Solitar, *The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup*, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), 227-255.

[25] S.V. Ivanov, *Intersecting free subgroups in free products of groups*, Int. J. Algebra Comp. 11 (2001), 281–290.

[26] S.V. Ivanov, *On the Kurosh rank of the intersection of subgroups in free products of groups*, Adv. Math. 218 (2008), 465-484.

[27] G.A. Jones and D. Singerman, *Theory of maps on orientable surfaces,* Proc. London Math. Soc. (3) 37 (1978), 273-307.

Для графа Y обозначим через $V(Y)$ множество вершин Y, через $E(Y)$ — множество ребер Y, через $\alpha(e)$ и $\omega(e)$ — начало и конец ребра e соответственно, через e^{-1} — ребро, обратное ребру e.

Граф групп (Γ, Y) состоит из связного графа Y, наборов групп $\{G_v,\ v \in V(Y)\}$ (вершинные группы), $\{G_e,\ e \in E(Y)\}$ (реберные группы), с условием $G_e = G_{e^{-1}}$ для всех $e \in E(Y)$, и вложений групп $\alpha_e : G_e \to G_{\alpha(e)},\ e \in E(Y)$. Также удобно использовать вложения групп $\omega_e : G_e \to G_{\omega(e)}$, $\omega_e = \alpha_{e^{-1}}$.

Пусть S — некоторое максимальное поддерево графа Y. *Фундаментальной группой графа групп* (Γ, Y) относительно максимального поддерева S называется фактор-группа свободного произведения всех вершинных групп G_v, $v \in V(Y)$, и свободной группы с базисом $\{t_e,\ e \in E(Y)\}$ по нормальному замыканию следующих элементов:

$$t_e^{-1}\alpha_e(g)t_e \cdot (\alpha_{e^{-1}}(g))^{-1} \quad (e \in E(Y),\ g \in G_e), \qquad t_e t_{e^{-1}}\ (e \in E(Y)), \qquad t_e\ (e \in E(S)).$$

Фундаментальная группа графа групп не зависит от выбора максимального поддерева S в Y с точностью до изоморфизма.

В случае, когда граф Y состоит из одной пары взаимно обратных ребер e, e^{-1} и двух вершин u, v (степени 1), фундаментальная группа графа групп (Γ, Y) изоморфна свободному произведению групп G_u и G_v с объединением по $\alpha_e(G_e) = \omega_e(G_e)$.

В случае, когда граф Y состоит из одной пары взаимно обратных ребер e, e^{-1} и одной вершины u (степени 2), фундаментальная группа графа групп (Γ, Y) изоморфна HNN-расширению с базой G_u и ассоциированными подгруппами $\alpha_e(G_e)$ и $\omega_e(G_e)$.

Действие группы на графе называется *свободным*, если никакой нетривиальный элемент группы не оставляет никакую вершину или ребро графа на месте.

Теорема Басса-Серра[3] устанавливает взаимосвязь между фундаментальными группами графов групп и группами, действующими на деревьях (без инверсий ребер). В силу теоремы Басса-Серра, подгруппы фундаментальной группы графа групп, тривиально пересекающиеся с сопряженными к вершинным группам, являются свободными.

Сформулируем основные результаты второй главы, опубликованные в работе [2].

Теорема 2. *Пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y) с конечными реберными группами, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными ко всем вершинным группам графа групп (Γ, Y) (следовательно, свободные). Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{e \in E(Y),\, g \in G} |g^{-1} G_e g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m' \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где m' *— максимум порядков реберных групп графа групп* (Γ, Y).

Здесь $\overline{r}(H) = max\,(r(H) - 1, 0)$ — редуцированный ранг подгруппы H.

С помощью теоремы Басса-Серра мы можем переформулировать теорему 2 в терминах групп, действующих на деревьях, следующим образом.

Теорема 3. *Пусть группа* G *действует без инверсий ребер на дереве* T *так, что число орбит вершин и ребер конечно и все стабилизаторы ребер конечны. Пусть подгруппы* $H, K \subseteq G$ *конечно порождены и их действия на* T*, индуцированные действием всей группы* G*, свободны. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{x \in E(T)} |Stab_G(x) \cap HK|.$$

Из теоремы 2 мы получаем следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть* G *— свободное произведение двух групп с объединенной конечной подгруппой* A*,* $H, K \subseteq G$ *— конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям* G *(следовательно, свободные). Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1}Ag \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6|A| \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K).$$

Следствие 2. *Пусть* G *— HNN-расширение с конечными ассоциированными подгруппами* A_1, A_2*,* $H, K \subseteq G$ *— конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к базе* G *(следовательно, свободные). Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1}A_1g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6|A_1| \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K).$$

Группа называется почти свободной, если она содержит свободную подгруппу конечного индекса.

Теорема (Каррас-Петровский-Солитэр[23]). *Пусть группа G конечно порождена. Тогда G почти свободна тогда и только тогда, когда G является фундаментальной группой конечного графа конечных групп.*

Мы показываем, что из теоремы 2 и теоремы Карраса-Петровского-Солитэра вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть G — почти свободная группа, подгруппы $H, K \subseteq G$ свободны и конечно порождены. Тогда имеет место неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6n \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где n есть максимум порядков множеств $|P \cap HK|$ по всем конечным подгруппам P в G.

В частности, выполняется неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6n' \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где n' есть минимальный из индексов свободных подгрупп группы G.

Доказательство теорем 2 и 3 основано на обобщении метода С.В. Иванова[16], вместо графов подгрупп в свободном произведении групп мы рассматриваем фактор-графы при действии подгруппы на дереве Басса-Серра, соответствующем рассматриваемой фундаментальной группе графа групп.

Глава 3 посвящена обобщению результатов второй главы на случай подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к реберным группам, в фундаментальных группах графов групп. Такие подгруппы не обязательно являются свободными, но они обладают естественной структурой свободного произведения, и поэтому для них определено понятие ранга Куроша[18,28], обобщающее понятие ранга свободной группы. В третьей главе мы доказываем оценку для ранга Куроша пересечения таких подгрупп.

Пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y), $H \subseteq G$ — подгруппа, тривиально пересекающаяся с сопряженными к реберным группам графа групп (Γ, Y). Тогда из теоремы Басса-Серра вытекает, что подгруппа H раскладывается в свободное произведение свободной группы $F(H)$, тривиально пересекающейся

---

[28]Y. Antolin, A. Martino and I. Schwabrow, *Kurosh rank of intersections of subgroups of free products of right-orderable groups*, to appear in Math. Res. Lett.

с сопряженными к вершинным группам графа групп (Γ, Y), и нетривиальных групп $H_i, i \in I$, каждая из которых сопряжена подгруппе вершинной группы графа групп (Γ, Y):

$$H = F(H) * \prod\nolimits_{i \in I}^{*} H_i.$$

Рангом Куроша подгруппы H называют сумму ранга свободной группы $F(H)$ и количества (нетривиальных) групп H_i:

$$r_K(H) = r(F(H)) + |I|.$$

Ранг Куроша подгруппы $H \subseteq G$, вообще говоря, зависит от конкретного разложения группы G в фундаментальную группу графа групп. В случае, когда подгруппа H тривиально пересекается с сопряженными к вершинным группам, она является свободной и ее ранг Куроша совпадает с ее обычным рангом.

Определим также *редуцированный ранг Куроша* $\overline{r}_K(H) = max(0, r_K(H) - 1)$.

Сформулируем основную теорему третьей главы, обобщающую теорему 2.

Теорема 5. *Пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y) с конечными реберными группами, $H, K \subseteq G$ — подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными ко всем реберным группам графа групп (Γ, Y) и имеющие конечный ранг Куроша. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где

$$m = \max_{e \in E(Y),\, g \in G} |g^{-1} G_e g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m' \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где m' — максимум порядков реберных групп графа групп (Γ, Y).

Из теоремы 5 мы получаем следующие следствия, обобщающие следствия 1 и 2.

Следствие 3. *Пусть G — свободное произведение двух групп с объединенной конечной подгруппой A, $H, K \subseteq G$ — подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к объединенной подгруппе и имеющие конечный ранг Куроша. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1} A g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6|A| \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K).$$

Следствие 4. *Пусть G — HNN-расширение с конечными ассоциированными подгруппами A_1, A_2, $H, K \subseteq G$ — подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к ассоциированным подгруппам и имеющие конечный ранг Куроша. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1} A_1 g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6|A_1| \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K).$$

Доказательство теоремы 5 основано на сочетании методов второй главы и работы С.В. Иванова[18].

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук доценту А.А. Клячко за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Автор выражает глубокую благодарность всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] А.О. Захаров, Оценка ранга пересечения подгрупп в свободном произведении двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой, Математический сборник 204:2 (2013), 73-86.

[2] A. Zakharov, On the rank of the intersection of free subgroups in virtually free groups, Journal of Algebra 418 (2014), 29-43.

[3] A. Zakharov, Intersecting free subgroups in free amalgamated products of groups. Geometric and asymptotic group theory with applications (конференция «Геометрическая и асимптотическая теория групп с приложениями»), Тезисы докладов, с. 31 (Испания, Манреса, 11 июля - 15 июля 2011).

[4] A. Zakharov, Rank of intersection of free subgroups in free amalgamated products of groups. Geometric and combinatorial group theory with applica- tions (конференция «Геометрическая и комбинаторная теория групп с приложениями»), Тезисы докладов, с. 27 (Германия, Дюссельдорф, 25 июля - 3 августа 2012).