ФГБОУ ВПО Московский государственный университет

им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Захаров Александр Олегович

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДГРУПП В СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент А.А. Клячко.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2014

Оглавление

Введение 3

Глава 1. Пересечение подгрупп в свободных произведениях с объединенной нормальной конечной подгруппой 16

1.1. Введение 16

1.2. Основная теорема 18

1.3. Доказательство оценки основной теоремы 19

1.4. Граф подгруппы в свободном произведении групп 20

1.5. Доказательство неулучшаемости оценки основной теоремы 25

Глава 2. Пересечение свободных подгрупп в фундаментальных группах графов групп 38

2.1. Введение 38

2.2. Теория Басса-Серра 39

2.3. Основные результаты 43

2.4. Доказательство теоремы 2.3.4 47

2.5. Доказательство теоремы 2.3.1 49

Глава 3. Ранг Куроша пересечения подгрупп в фундаментальных группах графов групп 56

3.1. Введение 56

3.2. Основные результаты 58

3.3 Доказательство основной теоремы 60

Литература 68

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертации изучается строение пересечения подгрупп в свободных конструкциях. Свободные группы и обобщающие их свободные конструкции являются одними из центральных объектов изучения в комбинаторной и геометрической теории групп. Классические результаты, касающиеся этих классов групп, можно найти в книгах [23], [25], [32], [4].

Свободные группы изучались в ряде работ Нильсена [28], [29], [30] и Шрайера [31], и остаются в центре внимания и по сей день. Геометрический подход к изучению подгрупп свободных групп, использующий методы теории графов, был предложен Столлингсом [33], и с тех пор активно и успешно используется.

Согласно теореме Нильсена-Шрайера [31], любая подгруппа свободной группы сама является свободной. Однако подгруппа конечно порожденной свободной группы не всегда является конечно порожденной. Именно, в свободной группе ранга k для $k > 1$ содержатся в качестве подгрупп свободная группа ранга n для любого натурального n и свободная группа счетного ранга.

Тем не менее, пересечение конечно порожденных подгрупп в свободной группе является конечно порожденной подгруппой. Этот результат был доказан Хаусоном [12] в 1954 году. Если в группе пересечение любых двух конечно порожденных подгрупп конечно порождено, то говорят, что эта группа обладает свойством Хаусона. Таким образом, свободные группы обладают свойством Хаусона, однако далеко не все группы обладают этим свойством (см., например, [19]).

Естественным является вопрос о ранге пересечения двух конечно порожденных подгрупп свободной группы. В 1957 году Ханна Нейман [27] доказала следующую оценку для ранга пересечения подгрупп свободной группы:

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 2\,\overline{r}(H)\overline{r}(K).$$

Здесь $\overline{r}(H) = max\ (r(H) - 1, 0)$ — редуцированный ранг свободной группы H, $r(H)$ — ранг свободной группы H. Кроме того, Ханна Нейман сформулировала гипотезу о том, что при тех же условиях выполняется оценка

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant \overline{r}(H)\overline{r}(K).$$

Гипотеза Ханны Нейман оставалась открытой на протяжении десятилетий и была доказана в 2011 году независимо Игорем Минеевым [26] и Дж. Фридманом [10]. Легко видеть, что эта оценка уже является неулучшаемой.

Большое количество работ в комбинаторной теории групп посвящено переносу некоторых свойств свободных групп на более широкие классы групп, обобщающие свободные группы. Одним из естественных обобщений свободных групп является свободное произведение групп. Структура подгрупп свободных произведений описывается теоремой Куроша [21]. Следствием этой теоремы является тот факт, что подгруппы свободных произведений, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям, являются свободными. В 1999 году С.В. Иванов [13] доказал следующий результат, аналогичный неравенству Ханны Нейман в свободной группе, для таких подгрупп свободных произведений. Пусть $G = G_1 * G_2$, H и K — конечно порожденные подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к G_1 и G_2. Тогда

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6\overline{r}(H)\overline{r}(K).$$

В 2008 году У. Дикс и С.В. Иванов [7] доказали более точную оценку для ранга пересечения подгрупп свободных произведений, тривиально пересекающихся с сопряженными к сомножителям. Также С.В. Иванов [15] доказал более общую оценку для ранга Куроша пересечения подгрупп свободных произведений.

Более широким классом групп, обобщающим свободные группы и свободные произведения групп, являются так называемые свободные конструкции — свободные произведения с объединенной подгруппой, HNN-расширения, почти свободные группы и фундаментальные группы графов групп.

Свободные произведения групп с объединенной подгруппой были впервые рассмотрены Шрайером [31], а HNN-расширения групп — Г. Хигманом, Б. Нейманом и Х. Нейман [11]. Обе эти конструкции играют важную роль в комбинаторной теории групп, а топологическая интерпретация этих конструкций обеспечивается теоремой Зейферта-ван Кампена [37].

Понятие почти свободной группы, то есть группы со свободной подгруппой конечного индекса, является естественным обобщением понятия свободной группы. Почти свободные группы допускают множество различных характеризаций, см. например [1], [9].

Графы групп и фундаментальные группы графов групп были впервые введены Бассом и Серром, см. [32]. Это понятие обобщает свободные группы, свободные произведения групп, свободные произведения с объединенной подгруппой, HNN-расширения, а также, согласно теореме Карраса-Петровского-Солитэра [18], почти свободные группы. Важнейшим результатом о фундаментальных группах графов групп, играющим большую роль в геометрической теории групп, является теорема Басса-Серра [32]. Эта теорема характеризует фундаментальные группы графов групп геометрически — как группы, действующие на деревьях.

Таким образом, интересным представляется вопрос об оценке для ранга пересечения подгрупп в свободных конструкциях, аналогичной неравенству Ханны Нейман в свободной группе и оценке С.В. Иванова и У. Дикса в свободном произведении групп. В данной диссертации мы доказываем такого типа оценки при определенных условиях на свободные конструкции. Основным условием является конечность реберных подгрупп графа групп, так как в противном случае группа может не обладать даже свойством Хаусона, см. [19].

Цель работы. Получить аналог неравенства Х. Нейман для свободных произведений с объединенной нормальной конечной подгруппой и доказать неулучшаемость полученной оценки при определенных условиях. Исследовать строение пересечения свободных подгрупп в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными группами, а также в почти свободных группах. Получить более общую оценку для ранга Куроша пересечения подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к реберным группам, в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными группами.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Получена оценка для ранга пересечения подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к сомножителям, в свободном произведении групп с объединенной нормальной конечной подгруппой.

2. Доказана неулучшаемость полученной оценки при определенных условиях.

3. Решена задача об ограничении сверху ранга пересечения свободных подгрупп в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными группами, в частности, в свободных произведениях с объединенной конечной подгруппой, в HNN-расширениях с конечными ассоциированными подгруппами и в почти свободных группах.

4. Получено неравенство, ограничивающее сверху ранг Куроша пересечения подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к реберным группам, в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными группами.

Методы исследования. В работе используются методы комбинаторной и геометрической теории групп и теории графов. Также автором разработана новая техника представления подгрупп свободных конструкций с помощью графов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в теории групп.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на

- научно-исследовательском семинаре по алгебре под руководством профессора А.В.Михалева, профессора В.Н. Латышева, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014 г.
- семинаре «Теория групп» под руководством профессора А.Л.Шмелькина, профессора А.Ю. Ольшанского и доцента А.А.Клячко, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, неоднократно в 2009-2014 гг.
- семинаре «Алгоритмические вопросы алгебры и логики» под руководством академика РАН С.И. Адяна, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2013 г.
- школе-конференции по математическим вопросам информатики, Омск, 2013 г.
- научно-исследовательском семинаре по теории групп, Иллинойский университет в Урбане-Шампейн, США, 20 февраля 2014 г.
- международной конференции «Группы Сент-Андрус 2013», Сент-Андрус, Великобритания, с 3 по 11 августа 2013 г.
- международной конференции «Геометрическая и комбинаторная теория групп с приложениями», Дюссельдорф, Германия, с 25 июля по 3 августа 2012 г.
- международной конференции «Геометрическая и асимптотическая теория групп с приложениями», Манреса, Испания, с 11 по 15 июля 2011 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, 2 из которых — в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 41 наименования. Общий объем диссертации составляет 71 страницу.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** изложена краткая история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач. Сформулированы цель работы и основные результаты.

В **главе 1** доказывается оценка для ранга пересечения свободных подгрупп в свободном произведении групп с объединенной нормальной конечной подгруппой, а также ее неулучшаемость при определенных условиях.

Обозначим через $r(H)$ ранг свободной группы H, и пусть $\overline{r}(H) = max\,(r(H)-1, 0)$ есть редуцированный ранг свободной группы H.

С.В.Иванов и У.Дикс в статье [7] доказали следующую оценку для ранга пересечения подгрупп в свободном произведении групп.

Теорема (С.В. Иванов, У. Дикс). *Пусть $G = G_1 * G_2$ — свободное произведение групп, а H_1 и H_2 — подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, по теореме Куроша [21], свободные) и конечного ранга. Тогда ранг $H_1 \cap H_2$ также конечен, причём выполняется оценка*

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\frac{q^*}{q^*-2}\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \leqslant 6\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2),$$

где q^* — минимальный из порядков подгрупп групп G_1, G_2, больших 2; $\frac{q^*}{q^*-2} = 1$, если $q^* = \infty$. Кроме того, первая из этих оценок неулучшаема, если в G есть элемент порядка 2, G_1 и G_2 нетривиальны и $G \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Свободное произведение групп с объединенной подгруппой является естественным обобщением свободного произведения групп. Основной результат первой главы заключается в следующей теореме, обобщающей теорему С.В. Иванова и У. Дикса на случай подгрупп в свободном произведении с объединенной нормальной конечной подгруппой. Результаты данной главы опубликованы в работе [38].

Теорема 1. *Пусть* $G = G_1 *_T G_2$ *— свободное произведение групп с объединенной нормальной конечной подгруппой* T*, а* H_1 *и* H_2 *— подгруппы в* G*, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям* G_1 *и* G_2 *(следовательно, согласно [20], свободные) и конечного ранга. Тогда ранг* $H_1 \cap H_2$ *также конечен, причем выполняется оценка*

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\frac{q_f^*}{q_f^* - 2}|T|\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \leqslant 6|T|\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2),$$

где q_f^* *— минимальный из порядков подгрупп групп* G_1/T*,* G_2/T*, больших 2;* $\frac{q_f^*}{q_f^*-2} = 1$*, если* $q_f^* = \infty$*, а* $|T|$ *— порядок группы* T*. При этом первая из этих оценок неулучшаема, если в* G_1/T *или* G_2/T *есть элемент порядка 2,* $G_1 \neq T$*,* $G_2 \neq T$ *и* $G_1/T * G_2/T \ncong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$*.*

Основная сложность заключается в доказательстве неулучшаемости полученной оценки при указанных в теореме условиях. Доказательство основано на применении конструкции графа подгруппы в свободном произведении групп, предложенной С.В. Ивановым в работах [13], [14], [15] и обобщающей технику Столлингса для подгрупп свободных групп [33]. Важную роль в доказательстве также играет финитная аппроксимируемость треугольных групп [16].

В **главе 2** изучается вопрос об ограничении сверху ранга пересечения свободных подгрупп фундаментальных групп графов групп с конечными реберными группами. Доказываемая оценка аналогична неравенству Ханны Нейман в свободной группе [27] и обобщает оценку С.В. Иванова для свободных произведений [13].

Фундаментальные группы графов групп были введены Бассом и Серром [32] и являются одной из важнейших конструкций в геометрической теории групп.

Для графа Y обозначим через $V(Y)$ множество вершин Y, через $E(Y)$ — множество ребер Y, через $\alpha(e)$ и $\omega(e)$ — начало и конец ребра e соответственно, через e^{-1} — ребро, обратное ребру e.

Граф групп (Γ, Y) состоит из связного графа Y, наборов групп $\{G_v,\ v \in V(Y)\}$ (вершинные группы), $\{G_e,\ e \in E(Y)\}$ (реберные группы), с условием $G_e = G_{e^{-1}}$ для всех $e \in E(Y)$, и вложений групп $\alpha_e : G_e \to G_{\alpha(e)},\ e \in E(Y)$. Также удобно использовать вложения групп $\omega_e : G_e \to G_{\omega(e)}$, $\omega_e = \alpha_{e^{-1}}$.

Пусть S — некоторое максимальное поддерево графа Y. *Фундаментальной группой графа групп* (Γ, Y) относительно максимального поддерева S называется фактор-группа свободного произведения всех вершинных групп G_v, $v \in V(Y)$, и свободной группы с базисом $\{t_e,\, e \in E(Y)\}$ по нормальному замыканию следующих элементов:

$$t_e^{-1}\alpha_e(g)t_e \cdot (\alpha_{e^{-1}}(g))^{-1} \quad (e \in E(Y),\, g \in G_e), \qquad t_e t_{e^{-1}}\,(e \in E(Y)), \qquad t_e\,(e \in E(S)).$$

Фундаментальная группа графа групп не зависит от выбора максимального поддерева S в Y с точностью до изоморфизма.

В случае, когда граф Y состоит из одной пары взаимно обратных ребер e, e^{-1} и двух вершин u, v (степени 1), фундаментальная группа графа групп (Γ, Y) изоморфна свободному произведению групп G_u и G_v с объединением по $\alpha_e(G_e) = \omega_e(G_e)$.

В случае, когда граф Y состоит из одной пары взаимно обратных ребер e, e^{-1} и одной вершины u (степени 2), фундаментальная группа графа групп (Γ, Y) изоморфна HNN-расширению с базой G_u и ассоциированными подгруппами $\alpha_e(G_e)$ и $\omega_e(G_e)$.

Действие группы на графе называется *свободным*, если никакой нетривиальный элемент группы не оставляет никакую вершину или ребро графа на месте.

Теорема Басса-Серра (см. [32]) устанавливает взаимосвязь между фундаментальными группами графов групп и группами, действующими на деревьях (без инверсий ребер). В силу теоремы Басса-Серра, подгруппы фундаментальной группы графа групп, тривиально пересекающиеся с сопряженными к вершинным группам, являются свободными.

Сформулируем основные результаты второй главы, опубликованные в работе [39].

Теорема 2. *Пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y) с конечными реберными группами, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными ко всем вершинным группам графа групп (Γ, Y) (следовательно, свободные). Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{e \in E(Y),\, g \in G} |g^{-1} G_e g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m' \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K),$$

где m' — максимум порядков реберных групп графа групп (Γ, Y).

Здесь $\overline{r}(H) = max\,(r(H) - 1, 0)$ — редуцированный ранг подгруппы H.

С помощью теоремы Басса-Серра мы можем переформулировать теорему 2 в терминах групп, действующих на деревьях, следующим образом.

Теорема 3. *Пусть группа G действует без инверсий ребер на дереве T так, что число орбит вершин и ребер конечно и все стабилизаторы ребер конечны. Пусть подгруппы $H, K \subseteq G$ конечно порождены и их действия на T, индуцированные действием всей группы G, свободны. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{x \in E(T)} |Stab_G(x) \cap HK|.$$

Из теоремы 2 мы получаем следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть G — свободное произведение двух групп с объединенной конечной подгруппой A, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G (следовательно, свободные). Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1} A g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6|A| \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K).$$

Следствие 2. *Пусть G — HNN-расширение с конечными ассоциированными подгруппами A_1, A_2, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к базе G (следовательно, свободные). Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1} A_1 g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6|A_1| \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K).$$

Группа называется почти свободной, если она содержит свободную подгруппу конечного индекса.

Теорема (Каррас-Петровский-Солитэр, [18]). *Пусть группа G конечно порождена. Тогда G почти свободна тогда и только тогда, когда G является фундаментальной группой конечного графа конечных групп.*

Мы показываем, что из теоремы 2 и теоремы Карраса-Петровского-Солитэра вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть G — почти свободная группа, подгруппы $H, K \subseteq G$ свободны и конечно порождены. Тогда имеет место неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6n \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где n есть максимум порядков множеств $|P \cap HK|$ по всем конечным подгруппам P в G.

В частности, выполняется неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6n' \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где n' есть минимальный из индексов свободных подгрупп группы G.

Доказательство теорем 2 и 3 основано на обобщении метода С.В. Иванова [13], вместо графов подгрупп в свободном произведении групп мы рассматриваем факторграфы при действии подгруппы на дереве Басса-Серра, соответствующем рассматриваемой фундаментальной группе графа групп.

Глава 3 посвящена обобщению результатов второй главы на случай подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к реберным группам, в фундаментальных группах графов групп. Такие подгруппы не обязательно являются свободными, но они обладают естественной структурой свободного произведения, и поэтому для них определено понятие ранга Куроша (см. [2], [15]), обобщающее понятие ранга свободной группы. В третьей главе мы доказываем оценку для ранга Куроша пересечения таких подгрупп.

Пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y), $H \subseteq G$ — подгруппа, тривиально пересекающаяся с сопряженными к реберным группам графа групп (Γ, Y). Тогда из теоремы Басса-Серра вытекает, что подгруппа H раскладывается в свободное произведение свободной группы $F(H)$, тривиально пересекающейся с сопряженными к вершинным группам графа групп (Γ, Y), и нетривиальных групп $H_i, i \in I$, каждая из которых сопряжена подгруппе вершинной группы графа групп (Γ, Y):

$$H = F(H) * \prod\nolimits^{*}_{i \in I} H_i.$$

Рангом Куроша подгруппы H называют сумму ранга свободной группы $F(H)$ и количества (нетривиальных) групп H_i:

$$r_K(H) = r(F(H)) + |I|.$$

Ранг Куроша подгруппы $H \subseteq G$, вообще говоря, зависит от конкретного разложения группы G в фундаментальную группу графа групп. В случае, когда подгруппа H тривиально пересекается с сопряженными к вершинным группам, она является свободной и ее ранг Куроша совпадает с ее обычным рангом.

Определим также *редуцированный ранг Куроша* $\overline{r}_K(H) = max(0, r_K(H) - 1)$.

Сформулируем основную теорему третьей главы, обобщающую теорему 2.

Теорема 5. *Пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y) с конечными реберными группами, $H, K \subseteq G$ — подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными ко всем реберным группам графа групп (Γ, Y) и имеющие конечный ранг Куроша. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где

$$m = \max_{e \in E(Y),\, g \in G} |g^{-1} G_e g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m' \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где m' — максимум порядков реберных групп графа групп (Γ, Y).

Из теоремы 5 мы получаем следующие следствия, обобщающие следствия 1 и 2.

Следствие 3. *Пусть G — свободное произведение двух групп с объединенной конечной подгруппой A, $H, K \subseteq G$ — подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к объединенной подгруппе и имеющие конечный ранг Куроша. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1} A g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6|A| \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K).$$

Следствие 4. *Пусть G — HNN-расширение с конечными ассоциированными подгруппами A_1, A_2, $H, K \subseteq G$ — подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к ассоциированным подгруппам и имеющие конечный ранг Куроша. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1} A_1 g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6|A_1| \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K).$$

Доказательство теоремы 5 основано на сочетании методов второй главы и работы С.В. Иванова [15].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю кандидату физико-математических наук доценту А.А. Клячко за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Автор выражает глубокую благодарность всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за внимание к работе.

Глава 1

Пересечение подгрупп в свободных произведениях с объединенной нормальной конечной подгруппой

1.1 Введение

Пусть сначала G — свободная группа, а H_1 и H_2 — конечно порождённые подгруппы в G. В 1954 году Хаусон [12] доказал, что в этом случае подгруппа $H_1 \cap H_2$ также конечно порождена. Далее, в 1957 году Х. Нейман [27] доказала следующую оценку для ранга пересечения подгрупп в свободной группе (неравенство Х. Нейман):

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2), \tag{1.1}$$

где $\overline{r}(H) = max(0, r(H) - 1)$ — редуцированный ранг подгруппы H.

В 2011 году Игорь Минеев [26] и Дж. Фридман [10] независимо доказали знаменитую гипотезу Х. Нейман, утверждающую, что коэффициент 2 в неравенстве (1.1) можно убрать, то есть выполняется неравенство

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant \overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2).$$

С.В.Иванов и У.Дикс в статье [7] обобщили неравенство Х. Нейман на случай, когда G — это свободное произведение групп. В статье [7] доказана, в частности, следующая теорема.

Теорема 1.1.1 (С.В. Иванов, У. Дикс)**.** *Пусть $G = G_1 * G_2$ — свободное произведение групп, а H_1 и H_2 — подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, по теореме Куроша [21], свободные) и конечного ранга. Тогда ранг $H_1 \cap H_2$ также конечен, причём выполняется оценка*

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\frac{q^*}{q^*-2}\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \leqslant 6\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2), \tag{1.2}$$

где q^* — минимальный из порядков подгрупп групп G_1, G_2, больших 2; $\frac{q^*}{q^*-2} = 1$, если $q^* = \infty$. Кроме того, первая оценка в (1.2) неулучшаема, если в G есть элемент порядка 2, G_1 и G_2 нетривиальны и $G \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

В данной главе мы получаем дальнейшее обобщение неравенства (1.2) на случай свободного произведения двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой, а также рассматриваем вопрос о неулучшаемости полученной оценки.

Отметим, что в работе [15] С.В. Иванов доказал обобщение теоремы 1.1.1 на случай произвольных подгрупп в свободном произведении групп, в этом случае вместо ранга свободной подгруппы используется понятие ранга Куроша.

Вопрос о неулучшаемой оценке для ранга пересечения подгрупп в свободном произведении групп без элементов порядка 2 остается открытым. С.В. Иванов и У. Дикс [7] выдвинули гипотезу, что если (в условиях теоремы 1.1.1) G_1 и G_2 нетривиальны и не содержат элементов порядка 2, то выполняется оценка

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant \frac{q^*}{q^*-2}\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2). \tag{1.3}$$

Из работы [7] следует, что такая оценка уже была бы неулучшаемой.

С.В. Иванов [15] выдвинул аналогичную гипотезу для ранга Куроша произвольных подгрупп в свободном произведении групп без элементов порядка 2.

В работе [8] С.В. Иванов и У. Дикс улучшили оценку (1.2) для некоторых свободных произведений групп без элементов порядка 2, а также доказали оценку (1.3) для случая группы $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_3$. В работе [2] доказывается оценка (1.3) для ранга Куроша правоупорядоченных групп (такие группы не имеют кручения, поэтому в этом случае коэффициент в оценке равен 1), этот результат обобщает гипотезу Х. Нейман. Однако уже для группы $\mathbb{Z}_5 * \mathbb{Z}_5$ неизвестно, выполняется ли оценка (1.3).

1.2 Основная теорема

Основной результат данной главы заключается в следующей теореме, опубликованной в работе [38].

Теорема 1.2.1. *Пусть $G = G_1 *_T G_2$ — свободное произведение групп с объединенной нормальной конечной подгруппой T, а H_1 и H_2 — подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, согласно [20], свободные) и конечного ранга. Тогда ранг $H_1 \cap H_2$ также конечен, причем выполняется оценка*

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\frac{q_f^*}{q_f^* - 2}|T|\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \leqslant 6|T|\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2), \qquad (1.4)$$

где q_f^* — минимальный из порядков подгрупп групп G_1/T, G_2/T, больших 2; $\frac{q_f^*}{q_f^*-2} = 1$, если $q_f^* = \infty$, а $|T|$ — порядок группы T. При этом первая оценка в (1.4) неулучшаема, если в G_1/T или G_2/T есть элемент порядка 2, $G_1 \neq T$, $G_2 \neq T$ и $G_1/T * G_2/T \ncong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Достаточно, чтобы T была нормальной в G_1 и G_2, тогда T будет нормальной и в $G = G_1 *_T G_2$. В частности, это условие теоремы выполняется, если оба сомножителя G_1 и G_2 абелевы.

Отметим, что вопрос о неулучшаемой оценке в случае, когда в G_1/T и G_2/T нет элементов порядка 2, остается открытым и обобщает аналогичный вопрос для свободных произведений. По аналогии с (1.3), мы можем предположить, что если (в условиях теоремы 1.2.1) в G_1/T и G_2/T нет элементов порядка 2, то выполняется оценка

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant \frac{q^*}{q^* - 2}|T|\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2).$$

1.3 Доказательство оценки основной теоремы

Докажем, что выполняется оценка (1.4).

Поскольку T — нормальная подгруппа в $G_1 *_T G_2$, мы можем рассмотреть факторизацию по ней

$$\varphi : G_1 *_T G_2 \to G_1/T * G_2/T.$$

Идея заключается в том, чтобы «поднять» уже известное из теоремы 1.1.1 неравенство для подгрупп в $G_1/T * G_2/T$ до искомого неравенства (1.4) для подгрупп в $G_1 *_T G_2$.

Пусть

$$\varphi(H_1) = H_1', \quad \varphi(H_2) = H_2', \quad \varphi(H_1 \cap H_2) = L \subseteq H_1' \cap H_2'.$$

Здесь последнее включение выполняется, поскольку

$$L = \varphi(H_1 \cap H_2) \subseteq \varphi(H_1) \cap \varphi(H_2) = H_1' \cap H_2'.$$

Лемма 1.3.1. *Имеет место неравенство*

$$|H_1' \cap H_2' : L| \leqslant |T|. \tag{1.5}$$

А именно, все левые смежные классы $H_1' \cap H_2'$ по L имеют вид

$$\varphi(H_1 \cap H_2 t), \quad t \in T, \quad H_1 \cap H_2 t \neq \varnothing. \tag{1.6}$$

□ **а)** $\bigcup_{t\in T} \quad \varphi(H_1 \cap H_2 t) = H_1' \cap H_2'$

Включение $\subseteq$ верно, так как $\varphi(H_1) = H_1'$, $\varphi(H_2 t) = \varphi(H_2) = H_2'$; включение $\supseteq$ выполняется, так как

$$g' \in H_1' \cap H_2' \quad \Rightarrow \quad g' = \varphi(h_1) = \varphi(h_2), \quad h_1 = h_2 t, \quad h_1 \in H_1, \quad h_2 \in H_2, \quad t \in T$$

$$\Rightarrow \quad g' \in \varphi(H_1 \cap H_2 t)$$

б) Для каждого $t \in T$ $\varphi(H_1 \cap H_2 t)$ лежит в одном левом смежном классе по L, так как

$$a', b' \in \varphi(H_1 \cap H_2 t) \quad \Rightarrow \quad a' = \varphi(a), \quad b' = \varphi(b), \quad a, b \in H_1 \cap H_2 t, \quad ab^{-1} \in H_1 \cap H_2$$

$$\Rightarrow \quad a'b'^{-1} = \varphi(ab^{-1}) \in \varphi(H_1 \cap H_2) = L$$

в) Наконец, $L\varphi(H_1 \cap H_2 t) = \varphi(H_1 \cap H_2)\varphi(H_1 \cap H_2 t) = \varphi(H_1 \cap H_2 t)$. ■

Лемма 1.3.2. *Имеет место неравенство*

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leq 2\frac{q_f^*}{q_f^* - 2}|H_1' \cap H_2' : L|\,\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2). \tag{1.7}$$

□ Так как H_1' и H_2' — подгруппы в свободном произведении $G_1/T * G_2/T$ (уже без объединенной подгруппы), мы можем воспользоваться теоремой 1.1.1. Из (1.2) имеем:

$$\overline{r}(H_1' \cap H_2') \leq 2\frac{q_f^*}{q_f^* - 2}\overline{r}(H_1')\overline{r}(H_2'). \tag{1.8}$$

Поскольку H_1 и H_2 тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителями, они, в частности, тривиально пересекаются с объединенной подгруппой, поэтому

$$H_1 \simeq H_1', \quad H_2 \simeq H_2', \quad H_1 \cap H_2 \simeq L,$$

а, значит,

$$\overline{r}(H_1) = \overline{r}(H_1'), \quad \overline{r}(H_2) = \overline{r}(H_2'), \quad \overline{r}(H_1 \cap H_2) = \overline{r}(L).$$

Далее, согласно лемме 1.3.1, L — подгруппа конечного индекса в свободной группе $H_1' \cap H_2'$, значит, по формуле Шрайера [31], имеем

$$\overline{r}(L) = |H_1' \cap H_2' : L|\,\overline{r}(H_1' \cap H_2').$$

Подставляя в (1.8), получаем требуемое неравенство (1.7). ■

Подставляя (1.5) в (1.7), мы получаем, что $r(H_1 \cap H_2)$ конечен и оценка (1.4) выполняется.

1.4 Граф подгруппы в свободном произведении групп

Для доказательства неулучшаемости оценки основной теоремы нам понадобится конструкция графа подгруппы в свободном произведении групп, предложенная и использованная С.В. Ивановым в работах [13], [14], [15], по аналогии с известной техникой графов подгрупп в свободных группах ([33]). Аналогичная техника для подгрупп фундаментальных групп графов групп разработана в статье [17].

Сначала напомним некоторые определения теории графов и фиксируем обозначения.

Граф X состоит из непустого множества вершин $V(X)$, множества ребер $E(X)$ и трех отображений: $\alpha : E(X) \to V(X)$ (взятие начала ребра), $\omega : E(X) \to V(X)$ (взятие конца ребра) и $^{-1} : E(X) \to E(X)$ (взятие обратного ребра), причем для любого $e \in E(X)$ должно выполняться $(e^{-1})^{-1} = e$, $e^{-1} \neq e$, $\alpha(e) = \omega(e^{-1})$. Граф конечен, если его множества вершин и ребер конечны. Естественным образом определяется понятие подграфа. Морфизмом из графа X в граф Y называется отображение p из множества вершин и ребер графа X в множество вершин и ребер графа Y, переводящее вершины в вершины, ребра в ребра, причем $\alpha(p(e)) = p(\alpha(e))$, $\omega(p(e)) = p(\omega(e))$, $p(e^{-1}) = (p(e))^{-1}$. Биективный морфизм графов называется изоморфизмом. Степенью вершины $v \in V(X)$ называется количество ребер графа X с началом в v (обозначение: $deg\, v$). Морфизм графов называется локально инъективным, если он переводит любые два различные ребра с общим началом в различные ребра.

Граф называется ориентированным, если в каждой паре e, e^{-1} его взаимно обратных ребер выбрано одно из них и названо положительно ориентированным, а другое названо отрицательно ориентированным. Множество всех положительно ориентированных ребер графа X будем обозначать через $E(X)^+$, а множество всех отрицательно ориентированных ребер — через $E(X)^-$. Если графы X и Y ориентированы, а p — морфизм из графа X в граф Y, переводящий положительно ориентированные ребра X в положительно ориентированные ребра Y, то мы говорим, что p сохраняет ориентацию. Ниже, при построении некоторых графов, мы будем определять только их положительно ориентированные ребра, в таком случае отрицательно ориентированные ребра определяются естественным образом как обратные к положительно ориентированным.

Последовательность $l = e_1 e_2 ... e_n$ ребер графа X называется путем с началом в

$\alpha(e_1)$ и концом в $\omega(e_n)$, если $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$, $i = 1, ..., n-1$. (Любую вершину v графа X мы также считаем путем с началом и концом в v, называемым тривиальным путем в v.) Путь называется несократимым, если он не содержит подпутей вида dd^{-1}, где $d \in E(X)$. Путь называется циклически несократимым, если он несократим и его первое ребро не совпадает с обратным к последнему; тривиальный путь мы также считаем циклически несократимым. Путь замкнут, если его начало и конец совпадают. Граф связен, если для любых двух его вершин u и v существует путь с началом в u и концом в v. Деревом называется связный граф, в котором нет нетривиальных несократимых замкнутых путей. Максимальным поддеревом в связном графе X мы называем поддерево, максимальное по включению; легко видеть, что такое поддерево содержит все вершины графа X. Образ пути при морфизме графов определяется естественным образом: $p(e_1e_2...e_n) = p(e_1)p(e_2)...p(e_n)$.

Пусть X — связный граф с выделенной вершиной x. Два замкнутых пути p_1 и p_2 в графе X с началом в x называются гомотопными, если от p_1 к p_2 можно перейти с помощью конечного числа вставок и вычеркивания подпутей вида ee^{-1}, $e \in E(X)$. Легко видеть, что множество замкнутых несократимых путей в графе X с началом в x образует группу относительно следующего умножения: произведением несократимых путей $e_1e_2...e_n$ и $f_1f_2...f_m$ ($e_i, f_j \in E(X)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$) является единственный несократимый путь с началом в x, гомотопный пути $e_1e_2...e_nf_1f_2...f_m$; единицей является тривиальный путь в вершине x; обратным к пути $l = e_1...e_n$ является путь $l^{-1} = e_n^{-1}...e_1^{-1}$. Эта группа называется фундаментальной группой графа X относительно вершины x и обозначается $\pi_1(X, x)$. Легко видеть, что фундаментальная группа связного графа не зависит от выбора выделенной вершины с точностью до изоморфизма. Класс изоморфности фундаментальных групп данного графа X обозначается через $\pi_1(X)$.

Фундаментальная группа любого связного графа X свободна (см., например, [4]). Более того, пусть S — максимальное поддерево в ориентированном графе X, C — множество положительно ориентированных ребер X, не вошедших в S, r_v (для каждой $v \in V(X)$) — единственный несократимый путь с началом в x и концом в v, лежащий в дереве S. Для каждого ребра $e \in C$ рассмотрим пути

$$q_e = r_{\alpha(e)} e r_{\omega(e)}^{-1}. \tag{1.9}$$

Тогда можно доказать, что пути $q_e,\ e \in C$, являются свободными порождающими группы $\pi_1(X, x)$ (см., например, [4]).

Пусть граф X конечен. Тогда мы имеем

$$r(\pi_1(X,x)) = |C| = |E(X)^+| - |E(S)^+| = |E(X)^+| - |V(X)| + 1, \tag{1.10}$$

где последнее равенство выполнено, поскольку S — дерево, содержащее все вершины графа X.

Пусть $H \subseteq G = \prod^* G_\alpha$ — подгруппа в G, тривиально пересекающаяся с сопряженными к сомножителям G_α. Согласно работам С.В. Иванова [13], [14], [15], поставим H в соответствие граф $\Psi^*(H)$, устроенный следующим образом.

Вершины графа $\Psi^*(H)$ бывают 2 типов:

1) Вершины 1 рода отвечают правым смежным классам G по H.

2) Вершины 2 рода, соответствующие сомножителю G_α, отвечают классам эквивалентности правых смежных классов G по H относительно следующего отношения: $Hg_1 \sim Hg_2$, если $\exists c \in G_\alpha : Hg_1c = Hg_2$ (класс эквивалентности будем обозначать $[Hg_1]_\alpha$).

Далее, ребра графа $\Psi^*(H)$ устроены следующим образом: вершина 1 рода Hg_1 соединена ребром с вершиной 2 рода $[Hg_1]_\alpha$ для всех α.

Ориентируем произвольным образом граф $\Psi^*(H)$ и расставим на его рёбрах *метки* так, чтобы выполнялись следующие условия.

Пусть e_1 — ребро с концом в вершине 2 рода $[Hg_1]_\alpha$, тогда метка ребра e_1 (обозначим ее $\varphi(e_1)$) — это элемент из G_α и $\varphi(e_1^{-1}) = \varphi(e_1)^{-1}$.

Выберем метки так, что, если Hg_1, Hg_2 — вершины 1 рода, соединённые с вершиной 2 рода $[Hg_1]_\alpha$ рёбрами e_1, e_2 с метками $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$, то

$$Hg_1\varphi(e_1)\varphi(e_2)^{-1} = Hg_2 \tag{1.11}$$

(здесь мы считаем, что оба ребра ориентированы от вершин 1 рода к вершине 2 рода).

Легко видеть, что такой выбор меток возможен.

Отмеченной точкой назовём вершину 1 рода, отвечающую подгруппе H.

Меткой пути $p = e_1 \dots e_m$ в графе $\Psi^*(H)$ назовём $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_m)$.

Пусть $\Psi(H)$ — подграф в графе $\Psi^*(H)$, состоящий из объединения несократимых замкнутых путей графа $\Psi^*(H)$ с началом в отмеченной точке.

Следующая лемма, доказанная в статье [13], показывает, что метки замкнутых путей графа $\Psi(H)$ с началом в отмеченной точке есть в точности элементы подгруппы H:

Лемма 1.4.1. *Пусть $H \subseteq G = \prod^* G_\alpha$ — подгруппа в G, тривиально пересекающаяся с сопряженными к сомножителям G_α, w — непустое несократимое слово в алфавите $\bigcup G_\alpha$. Тогда $w \in H$ тогда и только тогда, когда в $\Psi(H)$ есть замкнутый несократимый путь с меткой w с началом в отмеченной точке.*

$\square$ Пусть w — метка пути с началом и концом в вершине 1 рода H, значит (по построению графа, из формулы (1.11)) $Hw = H$, то есть $w \in H$.

Обратно, пусть $w \in H$ и $w = s_1 \dots s_k, \quad s_i \in G_{\alpha_i}$. По построению графа $\Psi^*(H)$, в нём есть вершины 1 рода $H, Hs_1, Hs_1s_2, \dots, Hs_1s_2 \dots s_k = H$, и есть путь, соединяющий $Hs_1s_2 \dots s_{j-1}$ и $Hs_1s_2 \dots s_{j-1}s_j$ с меткой s_j (это путь из 2 ребер, проходящий через вершину 2 рода $[Hs_1s_2 \dots s_{j-1}]_{\alpha_j} = [Hs_1s_2 \dots s_{j-1}s_j]_{\alpha_j}$, легко понять, что он имеет метку s_j, так как иначе нарушалось бы условие, что подгруппа H тривиально пересекается с сопряженными к сомножителю G_{α_i}). Ясно также, что этот путь лежит в объединении несократимых циклов графа $\Psi^*(H)$ с началом в отмеченной точке (в силу несократимости слова w), то есть лежит в $\Psi(H)$. $\blacksquare$

Рассмотрим пути q_e из (1.9) для графа $X = \Psi(H)$.

Следующая лемма доказана в статье [13].

Лемма 1.4.2. *Пусть $H \subseteq G = \prod^* G_\alpha$ — подгруппа, тривиально пересекающаяся с сопряженными к сомножителям. Тогда $H \cong \pi_1(\Psi(H))$ и H свободно порождается* *элементами*

$$\varphi(q_e),\ e \in C. \tag{1.12}$$

Кроме того, H имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда граф $\Psi(H)$ конечен, и в этом случае

$$\overline{r}(H) = -\chi(\Psi(H)), \tag{1.13}$$

где $\chi(P)$ — эйлерова характеристика графа P, равная разности количества вершин и количества рёбер графа P.

$\square$ Полное доказательство приведено в [13] и опирается на тот факт, что фундаментальная группа графа $\Psi(H)$ свободно порождается путями вида (1.9). Формула (1.13) следует из (1.10). $\blacksquare$

Заметим, что в случае, когда подгруппа H имеет конечный индекс в G, $\Psi(H) = \Psi^*(H)$. Это легко видеть, поскольку, если бы в графе $\Psi^*(H)$ нашелся путь, не входящий в объединение несократимых циклов этого графа, то по построению нашелся бы такой бесконечный путь, что противоречит конечности индекса H (вершин 1 рода в $\Psi^*(H)$ конечное число).

Несложно видеть также, что если подгруппа H нормальна в G, то графу $\Psi^*(H)$ можно поставить в соответствие граф Кэли группы G/H (относительно порождающих, являющихся образами при факторизации порождающих из G_α), при этом вершинам графа Кэли соответствуют вершины 1 рода графа $\Psi^*(H)$.

1.5 Доказательство неулучшаемости оценки основной теоремы

Снова рассмотрим факторизацию

$$\varphi : G = G_1 *_T G_2 \to G_1/T * G_2/T = G_1' * G_2' = G'.$$

По условию теоремы, в G' есть элемент порядка 2 и $G' \ncong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Следующая лемма доказана в работе [7]:

Лемма 1.5.1. *Пусть* $G' = G'_1 * G'_2$, q^*_f *— минимальный из порядков подгрупп групп* G'_1, G'_2, *больших 2. Пусть также в* G' *есть элемент порядка 2 и* $G' \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. *Тогда либо* $q^*_f = \infty$, *либо* q^*_f *— простое, либо* $q^*_f = 4$, *причем* G' *содержит одну из следующих подгрупп:*

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2, \quad \textit{если} \quad q^*_f = \infty \tag{1.14}$$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_p, \quad \textit{если} \quad q^*_f = p, \quad p - \textit{простое}, p > 2 \tag{1.15}$$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 \quad \textit{или} \quad \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2), \quad \textit{если} \quad q^*_f = 4. \tag{1.16}$$

$\square$ То, что q^*_f равно ∞, 4 или простое, следует из определения q^*_f (из его минимальности).

Пусть a – элемент порядка 2 в G', тогда можно считать, что он лежит в одном из сомножителей, пусть для определенности $a \in G'_1$. Если $q^*_f < \infty$, то пусть Q — подгруппа в G'_1 или G'_2, состоящая из q^*_f элементов. Тогда подгруппа $\langle bab^{-1} \rangle * Q$, где $b \in G'_2, b \neq 1$, имеет искомый вид (1.15) или (1.16).

Если же $q^*_f = \infty$, то подгруппа $\langle a \rangle * \langle bab^{-1} \rangle * \langle cac^{-1} \rangle$, где $b, c \in G'_2, b, c \neq 1, b \neq c$, имеет искомый вид (1.14) (можно считать, что в G'_2 есть по крайней мере 3 различных элемента, так как $G' \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$). $\blacksquare$

Мы хотим доказать, что в рассматриваемом нами случае первая оценка в (1.4) неулучшаема. Ясно, что мы можем перейти к подгруппе вида (1.14), (1.15) или (1.16) в G' и к ее полному прообразу при гомоморфизме φ в G и ограничить факторизацию φ на этот прообраз. Поэтому достаточно доказать неулучшаемость первой оценки в (1.4) (т.е. привести примеры соответствующих подгрупп H_1 и H_2) в том случае, когда G' есть одна из групп вида (1.14), (1.15) или (1.16).

Из доказательства предыдущего пункта видно, что первое неравенство в (1.4) обращается в равенство тогда и только тогда, когда в равенство обращаются неравенства (1.8) и (1.5). Будем действовать следующим образом: для каждого $n = |T|$ сначала для каждой из групп вида (1.14), (1.15) и (1.16) построим в ней некоторые (свободные) подгруппы конечного индекса H'_1 и H'_2, такие, что для них достигается равенство в (1.8), а затем выберем некоторым образом прообразы свободных порождающих этих подгрупп при факторизации φ так, чтобы достигалось равенство в (1.5) для полученных прообразов H_1 и H_2. Более строго этот процесс будет описан далее.

Нам понадобится следующая лемма, доказанная в статье [7].

Лемма 1.5.2. *Пусть H_1' и H_2' - подгруппы конечного индекса в G', тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям, G' есть одна из групп вида (1.14), (1.15) или (1.16). Тогда равенство в (1.8) достигается тогда и только тогда, когда*

$$|G' : H_1' \cap H_2'| = |G' : H_1'| \cdot |G' : H_2'| \tag{1.17}$$

□ Заметим сперва, что, в силу (1.13),

$$\overline{r}(H') = -\chi(\Psi(H')) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(\Psi(H'))} (\deg v - 2), \tag{1.18}$$

где $H' \subseteq G'$, $V(\Psi(H'))$ - множество вершин графа $\Psi(H')$. Обозначим также через $U(\Psi(H'))$ множество вершин 1 рода графа $\Psi(H')$, а через $V_p(\Psi(H'))$ — множество вершин степени p графа $\Psi(H')$. Ясно, что $|U(\Psi(H'))| = |G' : H'|$.

Здесь и далее под подгруппой H' мы будем понимать одну из подгрупп H_1', H_2' или $H_1' \cap H_2'$ в G' (все они имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G').

Рассмотрим сначала случай, когда G' имеет вид (1.15) или (1.16). Тогда вершины 1 рода графа $\Psi(H')$ имеют степень 2, вершины 2 рода этого графа, относящиеся к сомножителю $\mathbb{Z}_2$, также имеют степень 2, а вершины 2 рода, относящиеся к другому сомножителю, имеют степень p, где p — простое или 4. Заметим, что вершины степени 2 не дадут вклада в сумму в правой части (1.18), поэтому получим

$$\overline{r}(H') = \frac{p-2}{2} |V_p(\Psi(H'))|.$$

Далее, каждая вершина 1 рода соединена ровно с одной вершиной (2 рода) степени p, следовательно,

$$|G' : H'| = |U(\Psi(H'))| = p|V_p(\Psi(H'))| = \frac{2p}{p-2} \overline{r}(H').$$

Подставляя это выражение в (1.17) (для каждого из 3 индексов) и учитывая, что $q^* = p$, получаем, что в данном случае (1.17) эквивалентно равенству в (1.8).

Остается рассмотреть случай, когда $G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, $q^* = \infty$. В этом случае все вершины 2 рода в графе $\Psi(H')$ имеют степень 2 и потому не дают вклада в сумму в правой части (1.18), а все вершины 1 рода имеют степень 3, поэтому получаем:

$$\overline{r}(H') = \frac{|V_3(\Psi(H'))|}{2} = \frac{|U(\Psi(H'))|}{2} = \frac{|G' : H'|}{2},$$

то есть $|G' : H'| = 2\overline{r}(H')$. Подставляя это выражение в (1.17) (для каждого из 3 индексов) и учитывая, что $\frac{q^*}{q^*-2} = 1$, получаем, что в этом случае также (1.17) эквивалентно равенству в (1.8). ■

Далее, общеизвестна следующая лемма.

Лемма 1.5.3. *Пусть*

$$H_1' \triangleleft G', \quad H_1' H_2' = G' \tag{1.19}$$

Тогда $|G' : H_1' \cap H_2'| = |G' : H_1'| \cdot |G' : H_2'|$.

□

$$G'/H_1' = (H_1' H_2')/H_1' \cong H_2'/(H_1' \cap H_2'),$$

то есть $|G' : H_1'| = |H_2' : H_1' \cap H_2'|$, а значит

$$|G' : H_1' \cap H_2'| = |G' : H_2'| \cdot |H_2' : H_1' \cap H_2'| = |G' : H_2'| \cdot |G' : H_1'|. \quad ■$$

Таким образом, из лемм 1.5.2 и 1.5.3 мы получаем, что в рассматриваемом случае условие (1.19) является достаточным для достижения равенства в (1.8).

Рассмотрим теперь неравенство (1.5). Как видно из предыдущего пункта, оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$H_1 \cap H_2 t \neq \varnothing \quad \forall t \in T \tag{1.20}$$

(это ясно из (1.6)). Последнее же верно, если

$$T \subseteq H_1 H_2. \tag{1.21}$$

Таким образом, в примерах, которые будут построены далее, достаточно проверять выполнение равенств (1.19) и (1.21), а также тот факт, что обе подгруппы H_1' и H_2' имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G', тогда будет достигаться равенство и в первой оценке (1.4).

Перейдем теперь к построению примеров. Пусть $|T| = n$.

1 случай. Пусть сначала

$$G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_p \cong \langle a, b \mid a^p = b^2 = 1 \rangle,$$

где p — простое, $p > 2$.

Построим сначала подгруппу H_1'.

Рассмотрим следующую группу R:

$$G_0' = \langle\langle (ab)^6 \rangle\rangle \subseteq G', \quad R = G'/G_0' \cong \langle a, b \mid a^p = b^2 = (ab)^6 = 1 \rangle = T(p, 2, 6).$$

Это *треугольная группа*; как известно (см. [24]), она бесконечна, поскольку

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \leq 1 \quad \text{при}\, p \geq 3.$$

Известно также, что треугольные группы финитно аппроксимируемы ([16]). Следовательно, для любого конечного подмножества M группы R существует гомоморфизм из R на конечную группу, инъективный на множестве M.

Далее, рассмотрим в группе G_0' слова вида

$$w_1' = (ab)^6, w_2' = ((ab)^6)^{ba^{-1}ba^{-2}}, w_3' = ((ab)^6)^{(ba^{-1}ba^{-2})^2}, ..., w_n' = ((ab)^6)^{(ba^{-1}ba^{-2})^{n-1}}. \tag{1.22}$$

Рассмотрим часть графа $\Psi(G_0')$, которая состоит из всех вершин 2 рода этого графа, лежащих на несократимых замкнутых путях с началом в отмеченной точке и с метками вида (1.22), вместе с выходящими из них ребрами и их концами — вершинами 1 рода. Множество смежных классов, отвечающих этим вершинам 1 рода, возьмем в качестве M, тогда очевидно M есть подмножество факторгруппы $R = G'/G_0'$, причем $1, a, b \in M$.

Указанная часть графа $\Psi(G_0')$ для случая $p = 3$ изображена на рисунке 1.

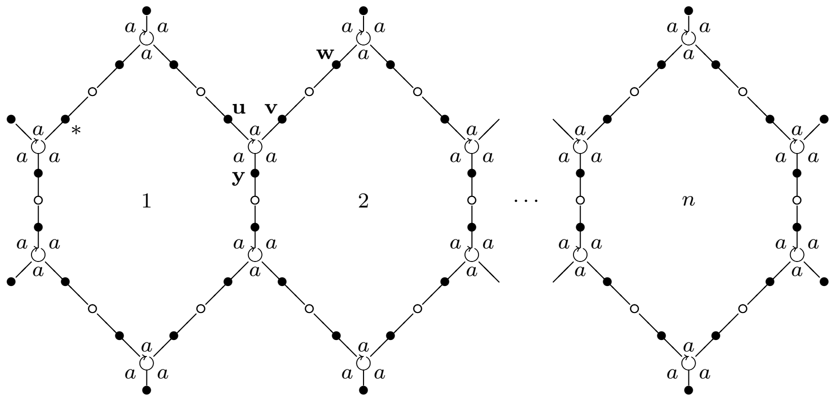

Рис.1

(Здесь вершины 1 рода обозначены символом •, вершины 2 рода, соответствующие сомножителю $\langle b\rangle_2$ — символом ∘, а вершины 2 рода, соответствующие сомножителю $\langle a\rangle_3$ — символом ↻. При этом метка нетривиального пути из 2 ребер, инцидентных вершине 2 рода, которая отвечает сомножителю $\langle b\rangle_2$, равна b (и не отмечена на рисунке). Метка же нетривиального пути из 2 ребер, инцидентных вершине 2 рода, которая отвечает сомножителю $\langle a\rangle_3$, равна a или a^2 в соответствии с метками на рисунке рядом с этой вершиной 2 рода и направлением обхода этой вершины 2 рода (у нас здесь и далее все такие обходы совершаются по часовой стрелке). Так, например, метка пути (из 2 ребер) из $\mathbf{v}$ в $\mathbf{w}$ равна b; метка пути из $\mathbf{u}$ в $\mathbf{v}$ равна a, а метка пути из $\mathbf{u}$ в $\mathbf{y}$ равна a^2. Отмеченная точка здесь и далее выделена символом $*$.)

Вследствие сказанного выше, существует факторизация $\pi : R \to S = R/R_0$, инъективная на множестве M, где S – конечная группа. Тогда $S \cong G'/H_1'$, $H_1' \lhd G'$, $G_0' \subseteq H_1'$. Полученная таким образом подгруппа H_1' имеет конечный индекс в G' (так как S конечна). Кроме того, H_1' тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' (в частности, H_1' свободна), так как иначе, в силу нормальности H_1', в ней лежал бы элемент a или b, но это невозможно, поскольку $1, a, b \in M$ и, следовательно, инъективно отображаются на S.

Легко видеть, что свободные порождающие в G_0' можно выбрать так, чтобы n элементов (1.22) входили в их число (для этого нужно соответствующим образом выбрать максимальное поддерево в части графа $\Psi(G_0')$, отвечающей элементам (1.22)).

Более того, свободные порождающие в H_1' также можно выбрать так, чтобы элементы (1.22) входили в их число. Это следует из инъективности факторизации π на M: часть графа $\Psi(H_1')$, отвечающая элементам (1.22), будет такой же, как соответствующая часть графа $\Psi(G_0')$ (см. рис. 1), и, выбрав тем же образом максимальное поддерево в $\Psi(H_1')$, мы получим требуемое. Итак, можно считать, что *элементы вида (1.22) входят в число свободных порождающих* H_1'. Заметим также, что $(ba)^6 = ((ab)^6)^b \in H_1'$.

Построим теперь подгруппу H_2'. Пусть

$$s_1 = baba^{-2}b,\ s_2 = ba^3ba^{-4}b,\ ...,\ s_{(p-1)/2} = ba^{p-2}ba^{-(p-1)}b \tag{1.23}$$

Рассмотрим подгруппу $K \subseteq G'$, (свободно) порождаемую следующими элементами:

$$w_1', ..., w_n' \quad \text{из (1.22)}, \quad (ba)^5, \quad (ba)^2(ba^{-1})^5(ba)^2. \tag{1.24}$$

Граф $\Psi(K)$ для случая $p = 3$ изображен на рисунке 2.

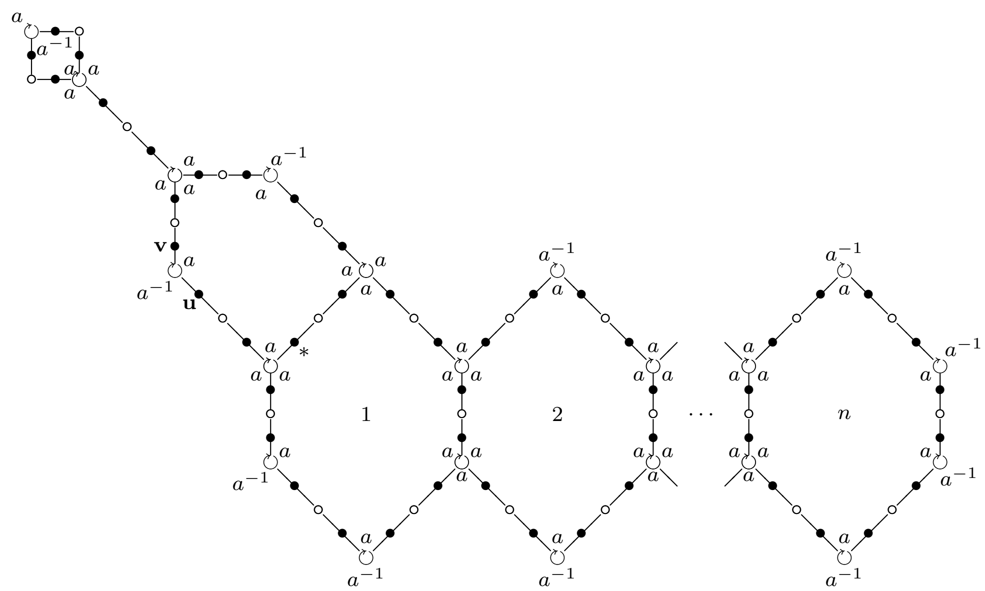

Рис.2

(Здесь обозначения те же, что и на рис.1; например, метка пути (из 2 ребер) из **u** в **v** равна a^{-1}.)

Подгруппа K тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G', однако K имеет бесконечный индекс в G'. Можно построить подгруппу $H_2' \subseteq G'$, такую, что $K \subseteq H_2'$, H_2' также тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' и H_2' имеет конечный индекс в G'. Для этого рассмотрим те из вершин 1 рода графа $\Psi^*(K)$, которые сами не лежат в графе $\Psi(K)$, но соединены ребром с вершиной 2 рода графа $\Psi(K)$. Пусть $Z = \{z_j, j = 1...J\}$ – множество путей до этих вершин (1 рода) из отмеченной точки графа $\Psi^*(K)$, лежащих в (фиксированном) максимальном поддереве графа $\Psi^*(K)$ (по одному пути до каждой из вершин). Тогда в качестве порождающих подгруппы H_2' возьмем объединение порождающих (1.24) подгруппы K с множеством слов

$$s_i^{z_j}, \quad i = 1...(p-1)/2, j = 1...J.$$

Нетрудно видеть, что $\Psi^*(H_2') = \Psi(H_2')$ и в этом графе конечное число вершин 1 рода, следовательно, подгруппа H_2' имеет конечный индекс в G'; остальные условия также выполнены.

Покажем, что $H_1'H_2' = G'$. Действительно,

$$(ba)^6 \in H_1', (ba)^5 \in H_2' \Rightarrow (ba)^6, (ba)^5 \in H_1'H_2' \Rightarrow ba \in H_1'H_2'.$$

Далее,

$$(ba)^2(ba^{-1})^5(ba)^2 \in H_2' \Rightarrow (ba)^2(ba^{-1})^5(ba)^2, ba \in H_1'H_2' \Rightarrow (ba^{-1})^5 \in H_1'H_2'.$$

Кроме того,

$$(ba^{-1})^6 = ((ab)^6)^{-1} \in H_1' \Rightarrow (ba^{-1})^5, (ba^{-1})^6 \in H_1'H_2' \Rightarrow ba^{-1} \in H_1'H_2'.$$

Таким образом, $a^2 \in H_1'H_2'$, но $a^p = 1$, p - нечетное, следовательно, $a, b \in H_1'H_2'$, то есть $H_1'H_2' = G'$.

Выберем теперь прообразы свободных порождающих подгрупп H_1' и H_2' при факторизации φ следующим образом. У элементов $w_1', ..., w_n'$ (из (1.22)) как порождающих подгруппы H_1' выберем произвольные прообразы $w_1, ..., w_n$ в G, а у тех же элементов $w_1', ..., w_n'$ как порождающих подгруппы H_2' выберем прообразы $w_1t_1, ..., w_nt_n$, где $T = \{t_1, ..., t_n\}$. Остальные прообразы порождающих подгрупп H_1' и H_2' выберем произвольным образом. Полученные прообразы групп H_1' и H_2' назовем H_1 и H_2 соответственно. Тогда ясно, что будет выполнено условие (1.21). Кроме того, как было показано ранее, выполняется также условие (1.19), а обе подгруппы H_1' и H_2' имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G'. Следовательно, для этого случая всё доказано.

2 случай. Пусть

$$G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 \cong \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1 \rangle$$

Построение подгруппы H_1' проводится аналогично предыдущему случаю (треугольная группа $T(4,2,6)$ также бесконечна и финитно аппроксимируема).

Построим подгруппу H_2'.

Рассмотрим подгруппу $K \subseteq G'$, (свободно) порождаемую следующими элементами:

$$w_1', ..., w_n' \quad \text{из (1.22)}, \quad (ba)^5, \quad (ba)^2(ba^2)^5(ba)^2, \quad (ba^2)^2 \tag{1.25}$$

Граф $\Psi(K)$ изображен на рисунке 3.

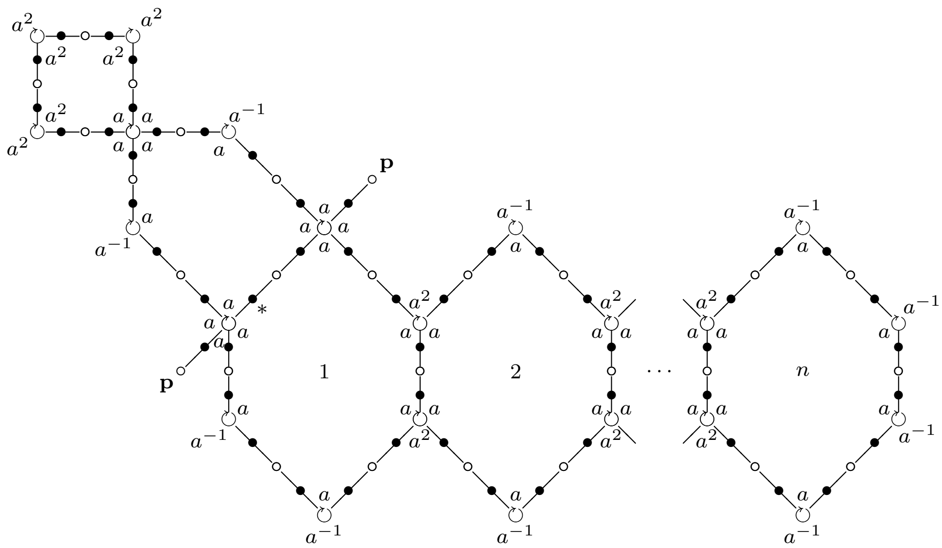

Рис.3

(Здесь обозначения те же, что и на рис.1,2; вершины 2 рода, отмеченные одинаковой буквой (**p**), совпадают.)

Как и в предыдущем случае, подгруппа K тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G', однако K имеет бесконечный индекс в G'. Снова можно построить подгруппу $H_2' \subseteq G'$, такую, что $K \subseteq H_2'$, H_2' также тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' и H_2' имеет конечный индекс в G'. Для этого рассмотрим те из вершин 1 рода графа $\Psi^*(K)$, которые сами не лежат в графе $\Psi(K)$, но соединены ребром с вершиной 2 рода графа $\Psi(K)$. Легко видеть, что таких вершин четное число. Пусть $Z = \{z_j, j = 1...2J\}$ – множество путей до этих вершин (1 рода) из отмеченной точки графа $\Psi^*(K)$, лежащих в (фиксированном) максимальном поддереве графа $\Psi^*(K)$ (по одному пути до каждой из вершин). Тогда в качестве порождающих подгруппы H_2' возьмем объединение порождающих (1.25) подгруппы K с множеством слов

$$z_{2j-1} b z_{2j}^{-1}, j = 1...J.$$

Нетрудно видеть, что $\Psi^*(H_2') = \Psi(H_2')$ и в этом графе конечное число вершин 1 рода, следовательно, подгруппа H_2' имеет конечный индекс в G'; остальные условия также выполнены.

Покажем, что $H_1'H_2' = G'$. Действительно,

$$(ba)^6 \in H_1', (ba)^5 \in H_2' \Rightarrow (ba)^6, (ba)^5 \in H_1'H_2' \Rightarrow ba \in H_1'H_2'.$$

Далее,

$$(ba)^2(ba^2)^5(ba)^2 \in H_2' \Rightarrow (ba)^2(ba^2)^5(ba)^2, ba \in H_1'H_2' \Rightarrow (ba^2)^5 \in H_1'H_2'.$$

Кроме того,

$$(ba^2)^2 \in H_1' \Rightarrow (ba^2)^5, (ba^2)^2 \in H_1'H_2' \Rightarrow ba^2 \in H_1'H_2'.$$

Следовательно, $a, b \in H_1'H_2'$, то есть $H_1'H_2' = G'$.

Выбирая прообразы свободных порождающих подгрупп H_1' и H_2' тем же способом, как и в предыдущем случае, мы получаем, что для этого случая также все доказано.

3 случай. Пусть теперь

$$G' = \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = bcbc = 1 \rangle$$

В качестве $H_1' \lhd G'$ возьмем следующую подгруппу:

$$H_1' = \langle\langle acac, \quad (ab)^{n+1} \rangle\rangle, \quad \text{тогда} \quad G'/H_1' \cong D_{n+1} \times \mathbb{Z}_2,$$

где D_n – диэдральная группа порядка $2n$. Граф $\Psi(H_1')$ изображен на рисунке 4.

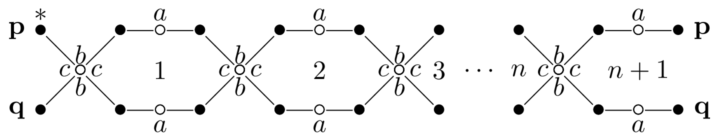

Рис.4

(Здесь вершины 1 рода обозначены символом $\bullet$, а вершины 2 рода — символом $\circ$; остальные обозначения аналогичны обозначениям предыдущих рисунков. Вершины 2 рода, отмеченные одинаковыми буквами ($\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$), совпадают.)

Легко видеть, что H_1' имеет конечный индекс в G' и тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G'. Далее, рассмотрим в подгруппе H_1' слова

$$w_1' = (acac)^b, w_2' = (acac)^{bab}, ..., w_n' = (acac)^{(ba)^{n-1}b} \tag{1.26}$$

Заметим, что свободные порождающие в H_1' можно выбрать так, чтобы n элементов (1.26) входили в их число (для этого нужно соответствующим образом выбрать максимальное поддерево в части графа $\Psi(H_1')$, отвечающей элементам (1.26)).

Пусть теперь подгруппа $H_2' \subseteq G'$ порождается следующими элементами:

$$w_1', ..., w_n' \quad \text{из} \quad (1.26), \quad (ab)^{acac}, acababa, abcac, (ac)^{(ba)^n b} \tag{1.27}$$

Граф $\Psi(H_2')$ изображен на рисунке 5.

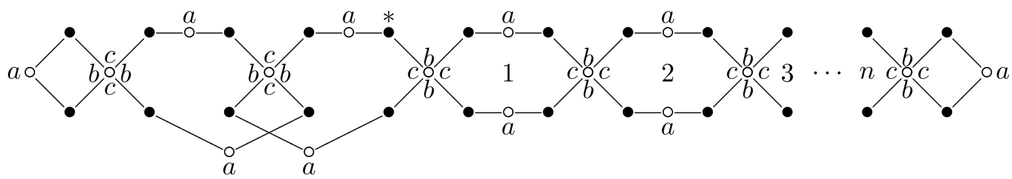

Рис.5

Легко видеть, что H_2' имеет конечный индекс в G' и тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G'.

Покажем, что $H_1'H_2' = G'$. Действительно,

$$acac \in H_1', (ab)^{acac} \in H_2' \Rightarrow acac, (ab)^{acac} \in H_1'H_2' \Rightarrow ab \in H_1'H_2'.$$

Далее,

$$abcac, ab \in H_1'H_2' \Rightarrow cac, acac \in H_1'H_2' \Rightarrow a, b \in H_1'H_2'.$$

Наконец,

$$acababa, a, b \in H_1'H_2' \Rightarrow c \in H_1'H_2',$$

то есть $H_1'H_2' = G'$.

Выбирая прообразы свободных порождающих подгрупп H_1' и H_2' тем же способом, что и в первом случае (только на этот раз нужно брать $w_1', ..., w_n'$ из (1.26)), получаем, что в этом случае также всё доказано.

4 случай. Рассмотрим последний оставшийся случай. Пусть

$$G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1\rangle$$

Пусть G'_*, H'_{1*}, H'_{2*} обозначают соответственно группы G', H_1', H_2' из предыдущего случая. Тогда

$$G'_* = \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong G'/\langle\langle bcbc\rangle\rangle$$

Рассмотрим подгруппу

$$H_1' \lhd G', H_1' = \langle\langle bcbc, acac, (ab)^{n+1}\rangle\rangle,$$

В качестве порождающих H_2' рассмотрим объединение элементов из (1.27) и следующих элементов:

$$(bcbc)^{r_j}, \quad r_j = 1, ba, (ba)^2, ..., (ba)^n, a, aca. \tag{1.28}$$

Тогда

$$G'/H_1' \cong D_{n+1} \times \mathbb{Z}_2 \cong G'_*/H'_{1*},$$

и легко видеть естественное соответствие между графами $\Psi(H'_{1*}), \Psi(H'_{2*})$ (графы подгрупп G'_*) и графами $\Psi(H_1'), \Psi(H_2')$ (графы подгрупп G') соответственно.

Несложно заметить также, что подгруппы H_1' и H_2' имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G'. Далее, те же рассуждения, что и в предыдущем пункте, показывают, что $H_1'H_2' = G'$.

Выбирая прообразы свободных порождающих подгрупп H_1' и H_2' так же, как и в предыдущих случаях, получаем, что и в этом случае всё доказано, а значит неулучшаемость первой оценки в (1.4) при указанных в теореме 1.2.1 условиях доказана.

Таким образом, теорема 1.2.1 доказана.

Глава 2

Пересечение свободных подгрупп в фундаментальных группах графов групп

2.1 Введение

В 1999 году С.В. Иванов [13] доказал оценку для ранга пересечения подгрупп в свободном произведении групп, аналогичную неравенству Х. Нейман в свободной группе [27]. А именно, в работе [13] доказано, что, если $G = G_1 * G_2$ — свободное произведение групп, а H и K — конечно порожденные подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, по теореме Куроша [21], свободные), то их пересечение $H \cap K$ также конечно порождено и выполняется оценка:

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6\, \overline{r}(H)\overline{r}(K), \tag{2.1}$$

где $\overline{r}(H) = max(r(H)-1, 0)$ — редуцированный ранг свободной группы H. Эта оценка является следствием доказанной позднее С.В. Ивановым и У. Диксом теоремы 1.1.1.

В данной главе мы доказываем оценку, которая обобщает неравенство (2.1) на случай свободных подгрупп фундаментальной группы конечного графа групп с конечными реберными группами. В качестве следствий мы получаем оценки для ранга пересечения свободных подгрупп свободных произведений с объединенной конечной подгруппой, а также HNN-расширений с конечными ассоциированными подгруппами. Кроме того, с помощью теоремы Карраса-Петровского-Солитэра [18] мы получаем оценку для ранга пересечения свободных подгрупп почти свободных групп.

В данной главе мы будем использовать теорию Басса-Серра действия групп на деревьях, необходимые нам сведения из этой теории приведены ниже. Более подробное изложение теории Басса-Серра можно найти в работах [4], [32], [3], [6].

2.2 Теория Басса-Серра

Действия групп на графах

Необходимые нам определения и обозначения теории графов введены в разделе 1.4 первой главы.

Говорят, что группа G действует слева на графе X, если определены левые действия группы G на множествах $V(X)$ и $E(X)$, такие что $g\alpha(e) = \alpha(ge)$, $g\omega(e) = \omega(ge)$ и $ge^{-1} = (ge)^{-1}$ для всех $g \in G$, $e \in E(X)$. Действие называется действием без инверсий ребер, если $ge \neq e^{-1}$ для всех $e \in E(X)$, $g \in G$.

Пусть группа G действует на графе X без инверсий ребер. Для $x \in V(X) \cup E(X)$ обозначим через $Orb(x)$ орбиту x относительно действия группы G, то есть $Orb(x) = \{gx,\ g \in G\}$. Определим *факторграф* $G \setminus X$ (или $X \,/\, G$) как граф с вершинами $Orb\,(v),\quad v \in V(X)$ и ребрами $Orb\,(e)$, $e \in E(X)$, причем вершина $Orb\,(v)$ — начало ребра $Orb(e)$ (в графе $G \setminus X$), если существует $g \in G$, такое что вершина gv — начало ребра e (в графе X); обратным к ребру $Orb\,(e)$ является ребро $Orb\,(e^{-1})$.

Заметим, что ребра $Orb\,(e)$ и $Orb\,(e^{-1})$ не совпадают, так как G действует на X без инверсий ребер. Легко видеть, что отображение $p:\ X \to G \setminus X,\quad p(x) = Orb\,(x)$, $x \in V(X) \cup E(X)$, является сюръективным морфизмом графов; мы будем называть его проекцией на факторграф.

Действие группы на графе называется *свободным*, если никакой нетривиальный элемент группы не оставляет никакую вершину или ребро графа на месте. Действие группы на графе называется *свободным на ребрах*, если никакой нетривиальный элемент группы не оставляет никакое ребро графа на месте.

Фундаментальная группа графа групп

Граф групп (Γ, Y) состоит из связного графа Y, наборов групп $\{G_v,\ v \in V(Y)\}$ (вершинные группы), $\{G_e,\ e \in E(Y)\}$ (реберные группы), с условием $G_e = G_{e^{-1}}$ для всех $e \in E(Y)$, и вложений групп $\alpha_e : G_e \to G_{\alpha(e)},\ e \in E(Y)$. Также удобно использовать вложение групп $\omega_e : G_e \to G_{\omega(e)},\ \omega_e = \alpha_{e^{-1}}$. Граф групп (Γ, Y) называется конечным, если граф Y конечен. Граф групп (Γ, Y) называется графом конечных групп, если все вершинные (а, следовательно, и все реберные) группы графа групп (Γ, Y) конечны.

Пусть S — некоторое максимальное поддерево графа Y. *Фундаментальной группой графа групп* (Γ, Y) относительно максимального поддерева S (обозначение $\pi_1(\Gamma, Y, S)$) называется факторгруппа свободного произведения всех вершинных групп $G_v,\ v \in V(Y)$, и свободной группы с базисом $\{t_e,\ e \in E(Y)\}$ по нормальному замыканию следующих элементов:

$$t_e^{-1}\alpha_e(g)t_e \cdot (\alpha_{e^{-1}}(g))^{-1} \quad (e \in E(Y),\ g \in G), \qquad t_e t_{e^{-1}}\ (e \in E(Y)), \qquad t_e\ (e \in E(S)).$$

Можно доказать (см., например, [4]), что фундаментальная группа графа групп $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ не зависит от выбора максимального поддерева S в Y с точностью до изоморфизма. Вследствие этого мы будем иногда говорить о фундаментальной группе графа групп, не упоминая максимальное поддерево.

Приведем несколько важных примеров. В случае, когда граф Y состоит из одной пары взаимно обратных ребер e, e^{-1} и двух вершин u, v (степени 1), легко понять, что фундаментальная группа графа групп (Γ, Y) изоморфна свободному произведению групп G_u и G_v с объединением по $\alpha_e(G_e) = \omega_e(G_e)$.

В случае, когда граф Y состоит из одной пары взаимно обратных ребер e, e^{-1} и одной вершины u (степени 2), легко понять, что фундаментальная группа графа групп (Γ, Y) изоморфна HNN-расширению с базой G_u и ассоциированными подгруппами $\alpha_e(G_e)$ и $\omega_e(G_e)$.

Фиксируем произвольную ориентацию графа Y. Несложно заметить, что, если (Γ, Y) — произвольный конечный граф групп, S — максимальное поддерево в Y, то фундаментальная группа графа групп $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ получается последовательным применением конструкции свободного произведения с объединенной подгруппой (для положительно ориентированных ребер дерева S), а затем конструкции HNN-расширения (для положительно ориентированных ребер графа Y, не вошедших в дерево S).

Также нетрудно понять, что, если все вершинные (а, следовательно, и все реберные) группы графа групп (Γ, Y) тривиальны, то фундаментальная группа графа групп (Γ, Y) изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(Y)$ графа Y (в обычном смысле), то есть, в частности, является свободной. Действительно, тот факт, что группа $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ в данном случае является свободной, сразу следует из определения фундаментальной группы графа групп; кроме того, ее ранг, как видно из определения, равен количеству положительно ориентированных ребер графа Y, не вошедших в максимальное поддерево S графа Y, а ранг фундаментальной группы графа Y, как отмечено выше, тоже равен этому числу.

Заметим также, что если все реберные группы графа групп (Γ, Y) тривиальны, то фундаментальная группа графа групп (Γ, Y) изоморфна свободному произведению его вершинных групп и фундаментальной группы $\pi_1(Y)$ графа Y.

Можно доказать (см., например, [4]), что вершинные группы G_v, $v \in V(Y)$, канонически вкладываются в группу $\pi_1(\Gamma, Y, S)$.

Основная теорема теории Басса-Серра

Следующая теорема показывает взаимосвязь между фундаментальными группами графов групп и группами, действующими на деревьях (без инверсий ребер). Более подробную формулировку и доказательство теоремы можно найти в работах [4] и [32].

Теорема 2.2.1 (Басс-Серр, [32])**.** (1) *Пусть* $G = \pi_1(\Gamma, Y, S)$ *— фундаментальная группа графа групп* (Γ, Y) *относительно максимального поддерева* S*. Тогда группа*

G действует без инверсий ребер на некотором дереве T (называемом деревом Басса-Серра для G) так, что

1. *Факторграф $G \setminus T$ изоморфен графу Y.*

2. *Для любой вершины $v \in V(T)$ стабилизатор вершины v при действии G сопряжен с вершинной группой $G_{p(v)}$ графа групп (Γ, Y).*

3. *Для любого ребра $e \in E(T)$ стабилизатор ребра e при действии G сопряжен с реберной группой $G_{p(e)}$ графа групп (Γ, Y).*

(Здесь $p : T \to G \setminus T$ — проекция на факторграф; в силу первого пункта мы можем отождествить графы Y и $G \setminus T$ и считать, что $p : T \to Y$.)

(2) *Обратно, пусть группа G действует без инверсий ребер на дереве T. Тогда группа G изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ некоторого графа групп (Γ, Y), причем для этого графа групп выполняются условия 1, 2, 3 из первой части теоремы. В частности (в силу сюръективности p), каждая вершинная группа графа групп (Γ, Y) равна стабилизатору некоторой вершины T, а каждая реберная группа графа групп (Γ, Y) равна стабилизатору некоторого ребра T.*

Подгруппы фундаментальной группы графа групп, тривиально пересекающиеся с сопряженными к вершинным группам

Пусть $G = \pi_1(\Gamma, Y, S)$ и $H \subseteq G$ — подгруппа, тривиально пересекающаяся с сопряженными ко всем вершинным (а, следовательно, и ко всем реберным) группам графа групп (Γ, Y). В силу первой части теоремы Басса-Серра, группа G действует на дереве T (без инверсий ребер), причем выполняются условия 1, 2, 3 из теоремы.

Следовательно, группа H также действует на дереве T естественным образом (ограничим действие группы G на ее подгруппу H). Пусть $v \in V(T)$. Обозначим через $Stab_G(v)$ стабилизатор вершины v при действии G на T, а через $Stab_H(v)$ — стабилизатор вершины v при действии H на T, тогда имеем: $Stab_H(v) = Stab_G(v) \cap H = \{1\}$. Здесь последнее равенство выполняется, поскольку, в силу условия 2 из теоремы

Басса-Серра, подгруппа $Stab_G(v)$ сопряжена с некоторой вершинной группой графа групп (Γ, Y), а подгруппа H по условию тривиально пересекается с сопряженными ко всем вершинным группам.

Итак, группа H действует на дереве T (без инверсий ребер), причем стабилизаторы всех вершин (а, следовательно, и ребер) T при этом действии тривиальны. Согласно второй части теоремы Басса-Серра, мы получаем, что $H \cong \pi_1(\Gamma', Y', S')$, где (Γ', Y') — некоторый граф групп, S' — максимальное поддерево в Y', причем граф Y' изоморфен факторграфу $H \setminus T$ (в силу условия 1 теоремы), а все вершинные группы графа групп (Γ', Y') равны стабилизаторам некоторых вершин T при действии H, то есть тривиальны. Следовательно, как было отмечено выше,

$$H \cong \pi_1(\Gamma', Y', S') \cong \pi_1(Y') \cong \pi_1(H \setminus T),$$

в частности, группа H свободна.

Итак, если подгруппа $H \subseteq \pi_1(\Gamma, Y, S)$ тривиально пересекается с сопряженными ко всем вершинным группам (Γ, Y), то H свободна и, более того,

$$H \cong \pi_1(H \setminus T), \tag{2.2}$$

где T — дерево Басса-Серра для G.

2.3 Основные результаты

Сформулируем основные результаты данной главы, опубликованные в работе [39].

Теорема 2.3.1. *Пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y) с конечными реберными группами, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными ко всем вершинным группам графа групп (Γ, Y) (следовательно, свободные). Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K), \tag{2.3}$$

где

$$m = \max_{e \in E(Y),\, g \in G} |g^{-1} G_e g \cap HK|. \tag{2.4}$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m' \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K), \tag{2.5}$$

где m' — максимум порядков реберных групп графа групп (Γ, Y).

(Напомним, что $\overline{r}(H) = max\,(r(H) - 1, 0)$ — редуцированный ранг подгруппы H.)

Заметим, что $m \leqslant m'$, поэтому неравенство (2.5) сразу вытекает из неравенства (2.3).

Применяя теорему 2.2.1 (теорему Басса-Серра), мы можем переформулировать теорему 2.3.1 в терминах групп, действующих на деревьях, следующим образом.

Теорема 2.3.2. *Пусть группа G действует без инверсий ребер на дереве T так, что факторграф T/G конечен и все стабилизаторы ребер конечны. Пусть подгруппы $H, K \subseteq G$ конечно порождены и их действия на T, индуцированные действием всей группы G, свободны. Тогда*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K), \tag{2.6}$$

где

$$m = \max_{x \in E(T)} |Stab_G(x) \cap HK|.$$

Применяя теорему 2.3.1 в случае, когда граф Y содержит только одну пару взаимно обратных ребер и две вершины, мы получаем следующее следствие.

Следствие 2.3.1. *Пусть G — свободное произведение двух групп с объединенной конечной подгруппой A, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G (следовательно, свободные). Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1}Ag \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6|A| \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K).$$

Применяя теорему 2.3.1 в случае, когда граф Y содержит только одну пару взаимно обратных ребер и одну вершину, мы получаем следующее следствие.

Следствие 2.3.2. *Пусть G — HNN-расширение с конечными ассоциированными подгруппами A_1, A_2, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к базе G (следовательно, свободные). Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1} A_1 g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6|A_1| \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K).$$

Группа называется почти свободной, если она содержит свободную подгруппу конечного индекса. Почти свободные группы допускают много различных характеризаций (см. [1], [9]), одна из которых приведена ниже.

Напомним, что графом конечных групп мы называем граф групп, в котором все вершинные и реберные группы конечны.

Следующая теорема доказана в работе [18], в доказательстве используются результаты Столлингса [34].

Теорема 2.3.3 (Каррас-Петровский-Солитэр, [18])**.** *Пусть группа G конечно порождена. Тогда G почти свободна тогда и только тогда, когда G является фундаментальной группой конечного графа конечных групп.*

Ниже будет показано, что из теоремы 2.3.1 и теоремы Карраса-Петровского-Солитэра вытекает следующая теорема.

Теорема 2.3.4. *Пусть G — почти свободная группа, подгруппы $H, K \subseteq G$ свободны и конечно порождены. Тогда имеет место неравенство*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6n \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K), \tag{2.7}$$

где n есть максимум порядков множеств $|P \cap HK|$ по всем конечным подгруппам P в G.

В частности, выполняется неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6n' \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K), \tag{2.8}$$

где n' есть минимальный из индексов свободных подгрупп группы G.

Примерами почти свободных групп служат свободные произведения конечных групп, полупрямые произведения конечной и свободной группы, а также графовые произведения конечных групп относительно хордального графа (см. [22]). Приведем еще один класс примеров почти свободных групп (см. [5]). Пусть F_n — свободная группа ранга n, $Aut(F_n)$ — ее группа автоморфизмов, $Inn(F_n)$ — ее группа внутренних автоморфизмов, а $Out(F_n) = Aut(F_n)/Inn(F_n)$ — ее группа внешних автоморфизмов. Тогда $Inn(F_n) \cong F_n$ (поскольку центр F_n тривиален), следовательно, $Out(F_n) \cong Aut(F_n)/F_n$. Пусть теперь L — произвольная конечная подгруппа в $Out(F_n)$, а M — полный прообраз L в $Aut(F_n)$. Тогда группа M почти свободна, поскольку $F_n \lhd M$ и группа $M/F_n \cong L$ конечна. Заметим, что в случае когда L является изоморфным образом конечной подгруппы $N \subseteq Aut(F_n)$ мы имеем $M \cong F_n \leftthreetimes N$.

Пусть G — почти свободная группа, а H — произвольная подгруппа в G. Тогда H также почти свободна и минимальный индекс свободной подгруппы в H не превосходит минимального индекса свободной подгруппы в G. Действительно, пусть $F \subseteq G$ — свободная подгруппа минимального индекса, тогда $H \cap F \subseteq H$ – свободная подгруппа конечного индекса, причем $|H : H \cap F| \leqslant |G : F|$.

Назовем *почти-рангом* почти свободной группы G ранг свободной подгруппы минимального индекса в G. В случае свободной группы ее почти-ранг совпадает с рангом. Обозначим почти-ранг группы G через $r_a(G)$, и пусть

$$\overline{r}_a(G) = max\,(r_a(G) - 1, 0)$$

есть редуцированный почти-ранг группы G. В следующем разделе мы покажем, что из теоремы 2.3.4 вытекает следующее следствие.

Следствие 2.3.3. *Пусть G — почти свободная группа, а подгруппы $H, K \subseteq G$ конечно порождены. Тогда имеет место неравенство*

$$\overline{r}_a(H \cap K) \leqslant 6n \cdot \overline{r}_a(H)\, \overline{r}_a(K), \tag{2.9}$$

где n есть максимум порядков множеств $|P \cap HK|$ по всем конечным подгруппам P в G.

В частности, выполняется неравенство

$$\overline{r}_a(H \cap K) \leqslant 6n' \cdot \overline{r}_a(H)\, \overline{r}_a(K), \tag{2.10}$$

где n' есть минимальный из индексов свободных подгрупп группы G.

2.4 Доказательство теоремы 2.3.4

В этом разделе мы выведем теорему 2.3.4 из теоремы 2.3.1 и теоремы Карраса-Петровского-Солитэра, а затем выведем следствие 2.3.3 из теоремы 2.3.4.

Сначала заметим, что достаточно доказать теорему 2.3.4 для конечно порожденной группы G. Действительно, мы можем перейти от группы G к группе $G_0 \subseteq G$, порожденной подгруппами H и K; группа G_0 будет конечно порождена, поскольку H и K конечно порождены. Кроме того, как отмечено выше, G_0 также почти свободна как подгруппа почти свободной группы, и минимальный индекс свободной подгруппы в G_0 не превосходит минимального индекса свободной подгруппы в G. Таким образом, достаточно доказать оценку (2.7) для подгрупп G_0.

Итак, мы можем считать, что группа G конечно порождена. Воспользуемся теоремой Карраса-Петровского-Солитэра. Мы получим, что группа G является фундаментальной группой конечного графа конечных групп (Γ, Y), причем подгруппы H и K конечно порождены и тривиально пересекаются с сопряженными к вершинным группам графа групп (Γ, Y) (поскольку H и K свободны, а вершинные группы графа групп (Γ, Y) конечны). Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.3.1. Воспользовавшись этой теоремой, мы получим, что выполняется оценка (2.3). Очевидно, что число m из (2.4) не превосходит числа n из теоремы 2.3.4. Таким образом, неравенство (2.7) выполняется.

Для того, чтобы доказать оценку (2.8) теоремы 2.3.4, достаточно показать, что $n \leqslant n'$. Покажем, что, более того, максимум порядков конечных подгрупп G не превосходит n'. Предположим противное: пусть существует конечная подгруппа $Q \subseteq G$, такая, что $|Q| > n' = |G : F|$, где подгруппа $F \subseteq G$ свободна. Тогда существуют $g_1 \neq g_2 \in Q : g_1F = g_2F$, то есть $1 \neq g_2^{-1}g_1 \in Q \cap F$, что невозможно, поскольку группа Q конечна, а F свободна. Таким образом, неравенство (2.8) выполняется, и мы показали, что теорема 2.3.4 справедлива.

Выведем теперь следствие 2.3.3 из теоремы 2.3.4. Достаточно доказать неравенство (2.9), поскольку мы уже доказали, что $n \leqslant n'$, и тогда (2.10) также выполняется.

Покажем, что почти-ранг почти свободной группы G равен минимальному из рангов свободных подгрупп конечного индекса в G. Действительно, пусть F_1 — свободная подгруппа минимального индекса в G, то есть $r_a(G) = r(F_1)$ по определению почти-ранга, и пусть F_2 — другая свободная подгруппа конечного индекса в G, тогда $|G : F_2| \geqslant |G : F_1|$. Рассмотрим свободную подгруппу $F_1 \cap F_2$. Это подгруппа конечного индекса в F_1, поскольку F_2 конечного индекса в G, а также конечного индекса в F_2, поскольку F_1 конечного индекса в G. Заметим, что

$$|G : F_1 \cap F_2| = |G : F_1| \cdot |F_1 : F_1 \cap F_2| = |G : F_2| \cdot |F_2 : F_1 \cap F_2|,$$

следовательно, $|F_1 : F_1 \cap F_2| \geqslant |F_2 : F_1 \cap F_2|$. Далее, по формуле Шрайера [31] мы имеем

$$\overline{r}(F_1 \cap F_2) = \overline{r}(F_1) \cdot |F_1 : F_1 \cap F_2| = \overline{r}(F_2) \cdot |F_2 : F_1 \cap F_2|,$$

значит, $\overline{r}(F_1) \leqslant \overline{r}(F_2)$, то есть F_1 имеет минимальный ранг среди свободных подгрупп конечного индекса в G.

Пусть теперь мы находимся в условиях следствия 2.3.3. Пусть L_1 — свободная подгруппа минимального индекса в H, а L_2 — свободная подгруппа минимального индекса в K. Тогда подгруппа $L_1 \cap L_2$ имеет конечный индекс в $H \cap K$. Действительно, подгруппа $L_1 \cap L_2$ имеет конечный индекс в $L_1 \cap K$, поскольку L_2 имеет конечный индекс в K, а подгруппа $L_1 \cap K$ имеет конечный индекс в $H \cap K$, поскольку L_1 имеет конечный индекс в H. Таким образом, свободная подгруппа $L_1 \cap L_2$ имеет конечный индекс в $H \cap K$, а значит $r(L_1 \cap L_2) \geqslant r_a(H \cap K)$, так как почти-ранг $H \cap K$ равен минимальному из рангов свободных подгрупп конечного индекса в $H \cap K$ в силу доказанного выше.

В силу теоремы 2.3.4 мы имеем $\overline{r}(L_1 \cap L_2) \leqslant 6n \cdot \overline{r}(L_1)\,\overline{r}(L_2)$, но $\overline{r}(L_1) = \overline{r}_a(H)$ и $\overline{r}(L_2) = \overline{r}_a(K)$ в силу определения почти-ранга, следовательно,

$$\overline{r}_a(H \cap K) \leqslant \overline{r}(L_1 \cap L_2) \leqslant 6n \cdot \overline{r}_a(H)\overline{r}_a(K),$$

то есть неравенство (2.9) выполняется, что и требовалось доказать.

2.5 Доказательство теоремы 2.3.2

Определим следующие отображения проекции

$$\pi_H : T/(H \cap K) \to T/H, \quad \pi_K : T/(H \cap K) \to T/K :$$

$$\pi_H(Orb_{H\cap K}x) = Orb_H x, \qquad \pi_K(Orb_{H\cap K}x) = Orb_K x, \qquad x \in V(T) \cup E(T). \tag{2.11}$$

Легко видеть, что π_H и π_K — корректно определенные морфизмы графов.

Докажем теперь несколько лемм.

Лемма 2.5.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2. Тогда морфизмы графов π_H и π_K являются локально инъективными.*

□ Пусть $x_1 = Orb_{H\cap K}(z_1)$ и $x_2 = Orb_{H\cap K}(z_2)$ — два различных ребра графа $T/(H \cap K)$ с началом в общей вершине $w = Orb_{H\cap K}(u)$, где $u \in V(T)$, $z_1, z_2 \in E(T)$. Мы можем считать, что оба ребра z_1 и z_2 начинаются в u. Действительно, предположим что $\alpha(z_1) = u_1$ и $\alpha(z_2) = u_2$. Тогда $u_1 = g_1 u$ и $u_2 = g_2 u$, где $g_1, g_2 \in H \cap K$, согласно определению факторграфа. Следовательно, вместо ребер z_1 и z_2 мы можем рассмотреть ребра $g_1^{-1}z_1$ и $g_2^{-1}z_2$ с началом в вершине u, не меняя x_1 и x_2.

Предположим, что $\pi_H(x_1) = \pi_H(x_2)$. Тогда $Orb_H(z_1) = Orb_H(z_2)$, то есть $z_1 = hz_2$, где $h \in H$. Следовательно, $u = hu$, но H действует свободно на T, то есть $h = 1$. Таким образом, $z_1 = z_2$ и $x_1 = x_2$, и мы пришли к противоречию. Следовательно, морфизм графов π_H является локально инъективным. Аналогично π_K локально инъективный.

■

Лемма 2.5.2. *Пусть группа* G_0 *действует на множестве* M, H_0, K_0 *— подгруппы* G_0, *и* $z \in M$. *Тогда пересечение орбит* $Orb_{H_0}(z) \cap Orb_{K_0}(z)$ *состоит не более чем из* $|Stab_{G_0}(z) \cap H_0K_0|$ *орбит при действии* $H_0 \cap K_0$.

□ Предположим, что

$$u_1 = h_1 z = k_1 z, \quad u_2 = h_2 z = k_2 z, ..., \quad u_n = h_n z = k_n z$$

есть n попарно различных элементов множества $Orb_{H_0}(z) \cap Orb_{K_0}(z)$, где $n > |Stab_{G_0}(z) \cap H_0K_0|$ и $h_i \in H_0$, $k_i \in K_0$, $i = 1, 2, ..., n$. Достаточно показать, что по крайней мере два элемента множества $u_1, u_2, ..., u_n$ лежат в одной и той же орбите при действии $H_0 \cap K_0$.

Действительно, $h_1^{-1}k_1$, $h_2^{-1}k_2, ..., h_n^{-1}k_n \in Stab_{G_0}(z) \cap H_0K_0$, следовательно, существуют элементы $p, q \in \{1, 2, ..., n\}$, такие что $h_p^{-1}k_p = h_q^{-1}k_q$. Тогда мы имеем

$$h_q h_p^{-1} = k_q k_p^{-1} = c \in H_0 \cap K_0, \qquad u_q = h_q z = c h_p z = c u_p.$$

Таким образом, элементы u_p и u_q лежат в одной и той же орбите при действии $H_0 \cap K_0$, и лемма 2.5.2 доказана.

■

Лемма 2.5.3. *Пусть группа* G *действует без инверсий ребер на дереве* T *так, что факторграф* T/G *конечен и все стабилизаторы ребер конечны. Пусть* $H, K \subseteq G$, *а* e, f *— ребра графов* T/H, T/K *соответственно. Пусть также* N *— число ребер графа* $T/(H \cap K)$, *переходящих под действием* π_H *в* e *и под действием* π_K *в* f. *Тогда* $N \leqslant m$, *где* $m = max\ (|Stab_G(x) \cap HK|,\ x \in E(T))$.

□ Пусть $e = Orb_H(r)$, $f = Orb_K(s)$, $r, s \in E(T)$.

Заметим, что N равно числу орбит вида $Orb_{H \cap K}(t)$, $t \in E(T)$, таких что $\pi_H(Orb_{H \cap K}(t)) = Orb_H(r)$ и $\pi_K(Orb_{H \cap K}(t)) = Orb_K(s)$, или, иначе говоря, $t \in Orb_H(r) \cap Orb_K(s)$. Если $Orb_H(r) \cap Orb_K(s) = \varnothing$, то утверждение леммы 2.5.3 верно. В противном случае, пусть $d \in Orb_H(r) \cap Orb_K(s)$, $d \in E(T)$. Тогда $Orb_H(r) = Orb_H(d)$ и $Orb_K(s) = Orb_K(d)$. Остается применить лемму 2.5.2 с $G_0 = G$, $H_0 = H$, $K_0 = K$, $M = E(T)$, $z = d$. Это доказывает лемму 2.5.3.

■

Заметим, что, если (в условиях теоремы 2.3.2) граф T/H является деревом, то, поскольку $H \cong \pi_1(T/H)$, подгруппа H (а, следовательно, и $H \cap K$) тривиальна, и в этом случае оценка (2.3), а значит и утверждение теоремы 2.3.1, выполняется; то же верно и в случае, когда графы T/K или $T/(H \cap K)$ являются деревьями. Таким образом, везде далее мы будем считать, что графы T/H, T/K и $T/(H \cap K)$ не являются деревьями.

Пусть граф X не является деревом. *Ядром графа* X будем называть подграф графа X, состоящий из тех вершин и ребер графа X, которые лежат на каком-либо нетривиальном замкнутом циклически несократимом пути в графе X. Несложно заметить, что, если вершина $v \in V(X)$ лежит в ядре графа X, то ядро графа X содержит те и только те вершины и ребра графа X, которые лежат на каком-либо несократимом замкнутом пути в графе X с началом в вершине v.

Для нетривиальной подгруппы H группы G (где G — фундаментальная группа графа групп (Γ, Y)) обозначим через $\Psi(H)$ ядро графа T/H. Заметим, что, поскольку исходный граф T/H является связным, то и его ядро $\Psi(H)$ — связный граф. Заметим также, что граф $\Psi(H)$ не содержит вершин степени меньше 2.

Лемма 2.5.4. *Пусть группа G действует на дереве T без инверсий ребер, а подгруппа $H \subseteq G$ действует свободно на T и нетривиальна. Тогда $H \cong \pi_1(\Psi(H))$, H конечно порождена тогда и только тогда, когда граф $\Psi(H)$ конечен, и в этом случае*

$$\overline{r}(H) = |E(\Psi(H))^+| - |V(\Psi(H))| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(\Psi(H))} (deg\, v - 2). \tag{2.12}$$

□ Как было показано выше, $H \cong \pi_1(T/H)$. Фиксируем вершину $v \in V(T/H)$, лежащую в подграфе $\Psi(H)$. Поскольку любой несократимый замкнутый путь в графе T/H с началом в вершине v содержится в подграфе $\Psi(H)$, мы имеем $\pi_1(T/H, v) \cong \pi_1(\Psi(H), v)$, следовательно, $H \cong \pi_1(\Psi(H))$.

Далее, пусть H конечно порождена и несократимые пути $p_1, ..., p_n$ являются свободными порождающими группы $\pi_1(\Psi(H), v)$; их конечное число, поскольку $H \cong \pi_1(\Psi(H))$. Любой замкнутый несократимый путь в графе $\Psi(H)$ с началом в вершине v представляется как произведение некоторых путей из $p_1, ..., p_n$ и обратных к ним. По определению ядра графа, любое ребро e графа $\Psi(H)$ лежит на некотором замкнутом циклически несократимом пути в этом графе, а значит e лежит на некотором замкнутом несократимом пути в графе $\Psi(H)$ с началом в вершине v, то есть e содержится хотя бы в одном из путей $p_1, ..., p_n$ и обратных к ним. Следовательно, граф $\Psi(H)$ конечен.

Обратно, если граф $\Psi(H)$ конечен, то, очевидно, его фундаментальная группа $H \cong \pi_1(\Psi(H))$ конечно порождена.

Далее, согласно (1.10), мы имеем

$$r(H) = |E(\Psi(H))^+| - |V(\Psi(H))| + 1.$$

Таким образом, первое равенство в (2.12) выполняется.

Наконец, для любого (ориентированного) графа сумма степеней его вершин равна удвоенному количеству его положительно ориентированных ребер, поэтому второе равенство в (2.12) также выполняется.

■

Лемма 2.5.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2 и подгруппа $H \cap K$ нетривиальна. Тогда образ графа $\Psi(H \cap K)$ при проекциях π_H, π_K лежит в графах $\Psi(H)$, $\Psi(K)$ соответственно. Таким образом, мы можем рассматривать ограничение проекций*

$$\pi_H : \Psi(H \cap K) \to \Psi(H), \quad \pi_K : \Psi(H \cap K) \to \Psi(K).$$

□ Это утверждение следует из леммы 2.5.1. Действительно, пусть v — вершина графа $\Psi(H \cap K)$. Тогда v лежит на некотором замкнутом циклически несократимом пути p в графе $T/(H \cap K)$. В силу локальной инъективности π_H (лемма 2.5.1) замкнутый путь $\pi_H(p)$ в графе T/H также будет циклически несократимым, причем $\pi_H(v)$ лежит на этом пути, следовательно, $\pi_H(v)$ лежит в графе $\Psi(H)$. Аналогичное рассуждение показывает, что $\pi_K(v)$ лежит в графе $\Psi(K)$. Аналогично доказывается, что образ любого ребра графа $\Psi(H \cap K)$ при проекциях π_H, π_K лежит в графах $\Psi(H)$, $\Psi(K)$ соответственно. ■

Лемма 2.5.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2. Тогда подгруппа $H \cap K$ конечно порождена и, если она нетривиальна, то граф $\Psi(H \cap K)$ конечен.*

□ По условию подгруппы H и K конечно порождены. Согласно лемме 2.5.4, графы $\Psi(H)$ и $\Psi(K)$ конечны. Тогда из лемм 2.5.3 и 2.5.5 следует, что граф $\Psi(H \cap K)$ также конечен. Следовательно, по лемме 2.5.4 подгруппа $H \cap K$ конечно порождена.

■

Лемма 2.5.7. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.2 и подгруппа $H \cap K$ нетривиальна. Пусть a, b — вершины графов $\Psi(H)$, $\Psi(K)$ соответственно, отвечающие одной и той же вершине графа Y. Пусть $w_1, ..., w_s$ — все вершины графа $\Psi(H \cap K)$, проецирующиеся под действием π_H в a и под действием π_K в b. Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$deg\, w_i \leqslant deg\, a, \quad deg\, w_i \leqslant deg\, b, \quad i = 1, ..., s \tag{2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{s} deg\, w_i \leqslant m \cdot deg\, a \cdot deg\, b, \tag{2.14}$$

где $m = max\,(|Stab_G(x) \cap HK|,\ x \in E(T))$.

(Если таких вершин w_i нет, то будем считать s и сумму в левой части (2.14) равными нулю. Вершин w_i конечное число в силу леммы 2.5.6.)

□ Согласно лемме 2.5.5, любое ребро графа $\Psi(H \cap K)$ с началом в одной из вершин w_i ($i = 1, ..., s$) при проекции π_H перейдет в ребро графа $\Psi(H)$ с началом в вершине a, а при проекции π_K перейдет в ребро графа $\Psi(K)$ с началом в вершине b.

Теперь неравенство (2.13) сразу следует из леммы 2.5.1.

Применяя лемму 2.5.3 для каждого ребра x графа $\Psi(H)$ с началом в вершине a и каждого ребра y графа $\Psi(K)$ с началом в вершине b, мы получаем, что неравенство (2.14) также выполняется. ■

Завершим теперь доказательство теоремы 2.3.2. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям Сергея Иванова [13].

Воспользовавшись формулами (2.12) из леммы 2.5.4, перепишем неравенство (2.6) теоремы 2.3.2 в терминах степеней вершин графов Ψ:

$$\sum_{w\in V(\Psi(H\cap K))}(deg\, w-2)\leqslant 3m\cdot\sum_{a\in V(\Psi(H))}(deg\, a-2)\cdot\sum_{b\in V(\Psi(K))}(deg\, b-2) \tag{2.15}$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2.3.2 достаточно доказать неравенство (2.15).

Заметим, что для доказательства неравенства (2.15), в свою очередь, достаточно доказать, что выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}}(deg\, w_i^{a,b}-2)\leqslant 3m\cdot(deg\, a-2)\cdot(deg\, b-2), \tag{2.16}$$

для всех вершин $a\in V(\Psi(H))$, $b\in V(\Psi(K))$, таких что a отвечает той же вершине графа Y, что и b. Здесь $w_1^{a,b},\ldots,w_{s_{a,b}}^{a,b}$ — все вершины графа $\Psi(H\cap K)$, проецирующиеся под действием π_H в a и под действием π_K в b. (Если таких вершин $w_i^{a,b}$ нет, то мы считаем $s_{a,b}$ и сумму в левой части (2.16) равными нулю. Вершин $w_i^{a,b}$ конечное число в силу леммы 2.5.6.)

Действительно, пусть выполняется неравенство (2.16). Тогда, согласно лемме 2.5.5, мы имеем:

$$\sum_{w\in V(\Psi(H\cap K))}(deg\, w-2)=\sum_{(a,b)}\sum_{i=1}^{s_{a,b}}(deg\, w_i^{a,b}-2)\leqslant\sum_{(a,b)}3m\cdot(deg\, a-2)\cdot(deg\, b-2)\leqslant$$

$$\leqslant 3m\cdot\sum_{a\in V(\Psi(H))}(deg\, a-2)\cdot\sum_{b\in V(\Psi(K))}(deg\, b-2),$$

где в сумме вида $\sum_{(a,b)}$ суммирование ведется по всем $a\in V(\Psi(H))$, $b\in V(\Psi(K))$, таким что a отвечает той же вершине графа Y, что и b. (Здесь первое равенство выполняется вследствие того, что, если $w\in V(\Psi(H\cap K))$ отвечает вершине $v\in V(Y)$, то проекции $\pi_H(w)\in V(\Psi(H))$ и $\pi_K(w)\in V(\Psi(K))$ также отвечают вершине $v\in V(Y)$.) Таким образом, если выполнено (2.16), то выполнено и (2.15).

Остается доказать неравенство (2.16). Без ограничения общности можно считать, что

$$deg\, a\leqslant deg\, b. \tag{2.17}$$

Мы видим, что выполняются условия леммы 2.5.7, согласно которой имеют место неравенства

$$deg\, w_i^{a,b} \leqslant deg\, a, \quad i = 1, ..., s_{a,b}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} deg\, w_i^{a,b} \leqslant m \cdot deg\, a \cdot deg\, b. \tag{2.19}$$

Рассмотрим два случая. Если $s_{a,b} \leqslant m \cdot deg\, b$, то, воспользовавшись неравенством (2.18), мы получим

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) \leqslant s_{a,b}(deg\, a - 2) \leqslant m \cdot deg\, b \cdot (deg\, a - 2).$$

Если же $s_{a,b} \geqslant m \cdot deg\, b$, то, воспользовавшись неравенством (2.19), мы получим

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) = \sum_{i=1}^{s_{a,b}} deg\, w_i^{a,b} - 2s_{a,b} \leqslant m \cdot deg\, a \cdot deg\, b - 2m \cdot deg\, b = m \cdot deg\, b \cdot (deg\, a - 2).$$

Таким образом, в любом случае выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) \leqslant m \cdot deg\, b \cdot (deg\, a - 2). \tag{2.20}$$

Далее, в графе $\Psi(H)$ нет вершин степени меньше 2. Значит, в соответствии с (2.17), $deg\, b \geqslant deg\, a \geqslant 2$. Если $deg\, b = 2$, то и $deg\, a = 2$, а значит (2.20) влечет (2.16). Если же $deg\, b \geqslant 3$, то $deg\, b \leqslant 3(deg\, b - 2)$, следовательно,

$$m \cdot deg\, b \cdot (deg\, a - 2) \leqslant 3m \cdot (deg\, a - 2) \cdot (deg\, b - 2),$$

то есть (2.20) опять влечет (2.16). Таким образом, неравенство (2.16) всегда выполняется, что и требовалось доказать.

Итак, теорема 2.3.2 доказана.

Следовательно, теорема 2.3.1 также доказана.

Глава 3

Ранг Куроша пересечения подгрупп в фундаментальных группах графов групп

3.1 Введение

В данной главе мы обобщаем результаты предыдущей главы о пересечении подгрупп фундаментальных групп конечных графов групп с конечными реберными группами. Мы рассматриваем подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к реберным группам. Такие подгруппы не обязательно являются свободными, но они обладают естественной структурой свободного произведения, и поэтому для них определено понятие ранга Куроша (см. [2], [15], [35]), обобщающее понятие ранга свободной группы. В данной главе мы доказываем оценку для ранга Куроша пересечения таких подгрупп.

Необходимые нам определения и обозначения теории графов введены в разделе 1.4 первой главы.

Основные сведения из теории Басса-Серра, в том числе определение фундаментальной группы графа групп и теорема Басса-Серра, приведены в разделе 2.2 второй главы.

Пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y), $H \subseteq G$ — подгруппа, тривиально пересекающаяся с сопряженными к реберным группам графа групп (Γ, Y). Тогда из теоремы Басса-Серра вытекает (см. ниже), что подгруппа H раскладывается в свободное произведение свободной группы $F(H)$, тривиально пересекающейся с сопряженными к вершинным группам графа групп (Γ, Y), и нетривиальных групп $H_i, i \in I$, каждая из которых сопряжена подгруппе вершинной группы графа групп (Γ, Y):

$$H = F(H) * \prod\nolimits_{i \in I}^{*} H_i.$$

Рангом Куроша подгруппы H называют сумму ранга свободной группы $F(H)$ и количества (нетривиальных) групп H_i:

$$r_K(H) = r(F(H)) + |I|. \tag{3.1}$$

Несложно видеть, что ранг Куроша корректно определен. При этом ранг Куроша подгруппы $H \subseteq G$, вообще говоря, зависит от конкретного разложения группы G в фундаментальную группу графа групп. В случае, когда подгруппа H тривиально пересекается с сопряженными к вершинным группам, она является свободной и ее ранг Куроша совпадает с ее обычным рангом.

В силу первой части теоремы Басса-Серра, группа G действует на дереве Басса-Серра T (без инверсий ребер). Следовательно, группа H также действует на дереве T естественным образом (ограничим действие группы G на ее подгруппу H). Пусть $e \in E(T)$. Обозначим через $Stab_G\,(e)$ стабилизатор ребра e при действии G на T, а через $Stab_H\,(e)$ — стабилизатор ребра e при действии H на T, тогда имеем: $Stab_H\,(e) = Stab_G\,(e) \cap H = \{1\}$. Здесь последнее равенство выполняется, поскольку, в силу теоремы Басса-Серра, подгруппа $Stab_G\,(e)$ сопряжена с некоторой реберной группой графа групп (Γ, Y), а подгруппа H по условию тривиально пересекается с сопряженными ко всем реберным группам.

Итак, группа H действует на дереве T (без инверсий ребер), причем стабилизаторы всех ребер T при этом действии тривиальны. Согласно второй части теоремы Басса-Серра, мы получаем, что $H \cong \pi_1(\Gamma', Y', S')$, где (Γ', Y') — некоторый граф групп, S' — максимальное поддерево в Y', причем граф Y' изоморфен факторграфу T/H, а все реберные группы графа групп (Γ', Y') равны стабилизаторам некоторых ребер T при действии H, то есть тривиальны. Следовательно, подгруппа H изоморфна свободному произведению вершинных групп графа групп (Γ', Y') и фундаментальной группы графа $Y' \cong T/H$ (которая является свободной).

Таким образом, определение ранга Куроша (3.1) эквивалентно следующему определению:

$$r_K(H) = r(\pi_1(T/H)) + c(H), \tag{3.2}$$

где $c(H)$ — число нетривиальных вершинных групп в графе групп (Γ', Y').

Заметим, что в случае, когда группа G является свободным произведением групп, G можно рассматривать как фундаментальную группу графа групп с тривиальными реберными группами. В этом случае любая подгруппа группы G тривиально пересекается с сопряженными к реберным группам, следовательно, любая подгруппа группы G обладает рангом Куроша. Легко видеть, что в этом случае определенное нами выше понятие ранга Куроша согласуется с определением С.В. Иванова [15].

Определим также *редуцированный ранг Куроша* $\overline{r}_K(H) = max(0, r_K(H) - 1)$.

Ранг Куроша является естественным обобщением ранга свободной подгруппы на случай свободных произведений. Дальнейшее обобщение на случай произвольных подгрупп фундаментальных групп графов групп предложено в работах [35], [36].

3.2 Основные результаты

Следующая теорема обобщает теорему 2.3.1 и аналогична оценке из [15].

Теорема 3.2.1. *Пусть G — фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y) с конечными реберными группами, $H, K \subseteq G$ — подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными ко всем реберным группам графа групп (Γ, Y) и имеющие конечный ранг Куроша. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K), \tag{3.3}$$

где

$$m = \max_{e \in E(Y),\, g \in G} |g^{-1} G_e g \cap HK|. \tag{3.4}$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m' \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K), \tag{3.5}$$

где m' *— максимум порядков реберных групп графа групп* (Γ, Y).

Заметим, что $m \leqslant m'$, поэтому неравенство (3.5) сразу вытекает из неравенства (3.3).

Напомним, что действие группы на дереве называется свободным на ребрах, если никакой нетривиальный элемент группы не оставляет никакое ребро дерева на месте.

Применяя теорему 2.2.1 (теорему Басса-Серра), мы можем переформулировать теорему 3.2.1 в терминах групп, действующих на деревьях, следующим образом.

Теорема 3.2.2. *Пусть группа* G *действует без инверсий ребер на дереве* T *так, что факторграф* T/G *конечен и все стабилизаторы ребер конечны. Пусть подгруппы* $H, K \subseteq G$ *таковы, что их действия на* T*, индуцированные действием всей группы* G*, свободны на ребрах, а также* H *и* K *имеют конечный ранг Куроша. Тогда*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K), \tag{3.6}$$

где

$$m = \max_{x \in E(T)} |Stab_G(x) \cap HK|.$$

Применяя теорему 3.2.1 в случае, когда граф Y содержит только одну пару взаимно обратных ребер и две вершины, мы получаем следующее следствие.

Следствие 3.2.1. *Пусть* G *— свободное произведение двух групп с объединенной конечной подгруппой* A, $H, K \subseteq G$ *— подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к объединенной подгруппе и имеющие конечный ранг Куроша. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1} A g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6|A| \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K).$$

Применяя теорему 3.2.1 в случае, когда граф Y содержит только одну пару взаимно обратных ребер и одну вершину, мы получаем следующее следствие.

Следствие 3.2.2. *Пусть G — HNN-расширение с конечными ассоциированными подгруппами A_1, A_2, $H, K \subseteq G$ — подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к ассоциированным подгруппам и имеющие конечный ранг Куроша. Тогда выполняется неравенство*

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K),$$

где

$$m = \max_{g \in G} |g^{-1} A_1 g \cap HK|.$$

В частности, имеет место неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leqslant 6|A_1| \cdot \overline{r}_K(H)\, \overline{r}_K(K).$$

3.3 Доказательство основной теоремы

В этом разделе мы докажем теорему 3.2.2, а значит, и теорему 3.2.1. Доказательство основано на сочетании методов предыдущей главы и работы [15].

Пусть группа G действует на дереве T без инверсий ребер, а $H, K \subseteq G$ — подгруппы, действующие свободно на ребрах дерева T. Пусть $H \cong \pi_1(\Gamma_H, Y_H)$ — соответствующее разложение H в фундаментальную группу графа групп. Петлей в графе мы называем ребро, у которого начало совпадает с концом. Заметим, что в графе $Y_H \cong T/H$, возможно, есть петли, будем называть их петлями 1 рода. Рассмотрим граф $A(H)$, полученный из графа Y_H добавлением петли в каждой вершине с нетривиальной вершинной группой; добавленные петли будем называть петлями 2 рода.

Как и в предыдущей главе, рассмотрим проекции, являющиеся морфизмами графов:

$$\pi_H : T/(H \cap K) \to T/H, \quad \pi_K : T/(H \cap K) \to T/K :$$

$$\pi_H(Orb_{H\cap K}x) = Orb_H x, \qquad \pi_K(Orb_{H\cap K}x) = Orb_K x, \qquad x \in V(T) \cup E(T).$$

Лемма 3.3.1. *Морфизмы π_H и π_K продолжаются до морфизмов графов*

$$\pi_H : A(H \cap K) \to A(H), \quad \pi_K : A(H \cap K) \to A(K),$$

при которых петли 2 рода переходят в петли 2 рода.

□ Достаточно показать, что, если вершинная группа в вершине u графа $(\Gamma_{H\cap K}, Y_{H\cap K})$ нетривиальна, то и вершинные группы в вершинах $\pi_H(u)$, $\pi_K(u)$ графов групп (Γ_H, Y_H), (Γ_K, Y_K) соответственно нетривиальны. Действительно, пусть $u = Orb_{H\cap K}x$, где $x \in V(T)$. Тогда $Stab_{H\cap K}\, x = Stab_G\, x \cap (H \cap K) \neq \{1\}$, следовательно, $Stab_H\, x = Stab_G\, x \cap H \neq \{1\}$ и $Stab_K\, x = Stab_G\, x \cap K \neq \{1\}$. Таким образом, вершинные группы в вершинах $\pi_H(u) = Orb_H x$ и $\pi_K(u) = Orb_K x$ нетривиальны, что и требовалось доказать.

■

Лемма 3.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.2. Пусть вершина w графа $A(H \cap K)$ такова, что в вершине $\pi_H(w)$ графа $A(H)$ нет петли 2 рода. Тогда морфизм π_H инъективен на ребрах, выходящих из вершины w (то есть переводит различные ребра, выходящие из вершины w, в различные ребра). Аналогичное утверждение справедливо для π_K.*

□ Пусть $w = Orb_{H\cap K}(u)$, а $x_1 = Orb_{H\cap K}(z_1)$ и $x_2 = Orb_{H\cap K}(z_2)$ — два различных ребра графа $A(H\cap K)$ (не являющиеся петлями 2 рода и рассматриваемые как ребра графа $T/(H \cap K)$) с началом в вершине w, где $u \in V(T)$, $z_1, z_2 \in E(T)$. Мы можем считать, что оба ребра z_1 и z_2 начинаются в u. Действительно, предположим что

$\alpha(z_1) = u_1$ и $\alpha(z_2) = u_2$. Тогда $u_1 = g_1 u$ и $u_2 = g_2 u$, где $g_1, g_2 \in H \cap K$, согласно определению факторграфа. Следовательно, вместо ребер z_1 и z_2 мы можем рассмотреть ребра $g_1^{-1} z_1$ и $g_2^{-1} z_2$ с началом в вершине u, не меняя x_1 и x_2.

Предположим, что $\pi_H(x_1) = \pi_H(x_2)$. Тогда $Orb_H(z_1) = Orb_H(z_2)$, то есть $z_1 = hz_2$, где $h \in H$. Следовательно, $u = hu$, но $Stab_H\, u$ тривиален, поскольку вершинная группа в вершине $\pi_H(w) = Orb_H\, u$ тривиальна (так как в $\pi_H(w)$ нет петли 2 рода по условию). Следовательно, $h = 1$. Таким образом, $z_1 = z_2$ и $x_1 = x_2$, и мы пришли к противоречию. Таким образом, π_H локально инъективен на ребрах, выходящих из вершины w. Доказательство для π_K аналогично.

■

Если подгруппа H, K или $H \cap K$ тривиальна, то утверждение теоремы 3.2.2 очевидно выполняется. Поэтому везде далее мы будем считать, что подгруппы H, K и $H \cap K$ нетривиальны, а значит, графы $A(H)$, $A(K)$ и $A(H \cap K)$ не являются деревьями.

Напомним, что ядром графа X, не являющегося деревом, мы называем подграф графа X, состоящий из тех вершин и ребер графа X, которые лежат на каком-либо нетривиальном замкнутом циклически несократимом пути в графе X.

Пусть граф $B(H)$ — ядро графа $A(H)$, и аналогично для K и $H \cap K$.

Лемма 3.3.3. *Пусть группа G действует на дереве T без инверсий ребер, а подгруппа $H \subseteq G$ действует свободно на ребрах T и нетривиальна. Тогда H имеет конечный ранг Куроша тогда и только тогда, когда граф $B(H)$ конечен и в этом случае*

$$\overline{r}_K(H) = |E(B(H))^+| - |V(B(H))| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(B(H))} (deg\, v - 2). \tag{3.7}$$

□

Если ранг Куроша подгруппы H конечен, то, согласно определению ранга Куроша (3.2), число нетривиальных вершинных групп в графе групп для H, а также ранг фундаментальной группы графа T/H, конечны. Первое условие показывает, что в графе $A(H)$ лишь конечное число петель 2 рода, а второе условие, как в доказательстве леммы 2.5.4, показывает, что ядро графа T/H конечно. Следовательно, граф $B(H)$ также конечен.

Обратно, если граф $B(H)$ конечен, то числа $c(H)$ и $r(\pi_1(T/H))$ из (3.2) также конечны, а значит и ранг Куроша H конечен.

Далее, $c(H)$ равно числу петель 2 рода в графе $B(H)$. Обозначим через $B_0(H)$ подграф графа $B(H)$, содержащий все ребра, не являющиеся петлями 2 рода, и все вершины. Тогда легко видеть, что $\pi_1(T/H) \cong \pi_1(B_0(H))$, следовательно, согласно (1.10), мы имеем

$$r(\pi_1(T/H)) = |E(B_0(H))^+| - |V(B_0(H))| + 1.$$

Тогда, согласно (3.2), мы имеем $r_K(H) = |E(B(H))^+| - |V(B(H))| + 1$. Таким образом, первое равенство в (3.7) выполняется.

Наконец, для любого (ориентированного) графа сумма степеней его вершин равна удвоенному количеству его положительно ориентированных ребер, поэтому второе равенство в (3.7) также выполняется.

■

Лемма 3.3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.2 и подгруппа $H \cap K$ нетривиальна. Тогда образ графа $B(H \cap K)$ при проекциях π_H, π_K лежит в графах $B(H)$, $B(K)$ соответственно. Таким образом, мы можем рассматривать ограничение проекций $\pi_H : B(H \cap K) \to B(H)$, $\pi_K : B(H \cap K) \to B(K)$.*

□ По условию, w лежит на некотором замкнутом циклически несократимом пути p в графе $A(H)$. Если ни одна из вершин пути $\pi_H(p)$ не имеет петли 2 рода, то, согласно лемме 3.3.2, путь $\pi_H(p)$ также циклически несократим, причем $\pi_H(w)$ лежит на этом пути, следовательно, $\pi_H(w)$ лежит в графе $B(H)$.

В противном случае, найдется подпуть q пути p, содержащий вершину w, такой что в вершинах $\pi_H(\alpha(q))$ и $\pi_H(\omega(q))$ есть петли 2 рода, а все другие вершины пути $\pi_H(q)$, кроме его концов, не имеют петель 2 рода. Тогда путь $\pi_H(q)$ является несократимым путем (по лемме 3.3.2), соединяющим вершины $\pi_H(\alpha(q))$ и $\pi_H(\omega(q))$

(в которых имеются петли 2 рода) и содержащим вершину $\pi_H(w)$. Таким образом, $\pi_H(w)$ лежит в графе $B(H)$ по определению ядра графа.

Аналогично $\pi_K(v)$ лежит в графе $B(K)$. Легко видеть, что аналогичное утверждение верно и для ребер графа $B(H \cap K)$.

■

Лемма 3.3.5. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.2. Тогда подгруппа $H \cap K$ имеет конечный ранг Куроша и, если она нетривиальна, то граф $B(H \cap K)$ конечен.*

□ По условию подгруппы H и K имеют конечный ранг Куроша. Согласно лемме 3.3.3, графы $B(H)$ и $B(K)$ конечны. Заметим, что в условиях теоремы 3.2.2 применима лемма 2.5.3. Тогда из лемм 2.5.3 и 3.3.4 следует, что граф $B(H \cap K)$ также конечен. Следовательно, по лемме 3.3.3 подгруппа $H \cap K$ имеет конечный ранг Куроша.

■

Пусть u — вершина графа $B(H)$. Обозначим через $|u|$ число ребер графа $B(H)$ с началом в u, не являющихся петлями 2 рода. Таким образом, $|u| = deg\, u$, если в вершине u нет петли 2 рода, и $|u| = deg\, u - 2$, если в вершине u есть петля 2 рода.

Лемма 3.3.6. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.2 и подгруппа $H \cap K$ нетривиальна. Пусть a, b — вершины графов $B(H)$, $B(K)$ соответственно, отвечающие одной и той же вершине графа Y. Пусть $w_1, ..., w_s$ — все вершины графа $B(H \cap K)$, проецирующиеся под действием π_H в a и под действием π_K в b. Тогда выполняются следующие неравенства.*

$$\sum_{i=1}^{s} |w_i| \leqslant m \cdot |a| \cdot |b|, \tag{3.8}$$

где $m = max\,(|Stab_G(x) \cap HK|,\ x \in E(T))$.

Если в вершине a нет петли 2 рода, то

$$deg\, w_i \leqslant deg\, a, \quad i = 1, ..., s. \tag{3.9}$$

Если в вершине b нет петли 2 рода, то

$$deg\, w_i \leqslant deg\, b, \quad i = 1, ..., s. \tag{3.10}$$

(Если таких вершин w_i нет, то будем считать s и сумму в левой части (3.8) равными нулю. Вершин w_i конечное число в силу леммы 3.3.5.)

□

Согласно лемме 3.3.4, любое ребро графа $B(H \cap K)$ с началом в одной из вершин w_i $(i = 1, ..., s)$ при проекции π_H перейдет в ребро графа $B(H)$ с началом в вершине a, а при проекции π_K перейдет в ребро графа $B(K)$ с началом в вершине b.

Заметим, что в условиях теоремы 3.2.2 применима лемма 2.5.3. Применяя эту лемму для каждого ребра x графа $B(H)$ с началом в вершине a, не являющегося петлей 2 рода, и каждого ребра y графа $B(K)$ с началом в вершине b, не являющегося петлей 2 рода, мы получаем, что неравенство (3.8) выполняется.

Пусть в вершине a нет петли 2 рода. Тогда, согласно лемме 3.3.2, морфизм π_H инъективен на ребрах, выходящих из вершины w_i, для любого $i = 1, ..., s$, причем петель 2 рода в вершинах w_i нет, согласно лемме 3.3.1. Следовательно, неравенство (3.9) выполняется. Аналогично, если в вершине b нет петли 2 рода, то неравенство (3.10) выполняется.

■

Завершим доказательство теоремы 3.2.2. Дальнейшие рассуждения во многом аналогичны рассуждениям Сергея Иванова [15].

Воспользовавшись формулами (3.7) из леммы 3.3.3, перепишем неравенство (3.6) теоремы 3.2.2 в терминах степеней вершин графов B:

$$\sum_{w \in V(B(H \cap K))} (deg\, w - 2) \leqslant 3m \cdot \sum_{a \in V(B(H))} (deg\, a - 2) \cdot \sum_{b \in V(B(K))} (deg\, b - 2) \tag{3.11}$$

Таким образом, для доказательства теоремы 3.2.2 достаточно доказать неравенство (3.11). Заметим, что для доказательства неравенства (3.11), в свою очередь, достаточно доказать, что выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) \leqslant 3m \cdot (deg\, a - 2) \cdot (deg\, b - 2), \tag{3.12}$$

для всех вершин $a \in V(B(H))$, $b \in V(B(K))$, таких что a отвечает той же вершине графа Y, что и b. Здесь $w_1^{a,b}, ..., w_{s_{a,b}}^{a,b}$ — все вершины графа $B(H \cap K)$, проецирующиеся под действием π_H в a и под действием π_K в b. (Если таких вершин $w_i^{a,b}$ нет, то мы считаем $s_{a,b}$ и сумму в левой части (3.12) равными нулю. Вершин $w_i^{a,b}$ конечное число в силу леммы 3.3.5.)

Действительно, пусть выполняется неравенство (3.12). Тогда, согласно лемме 3.3.4, мы имеем:

$$\sum_{w \in V(B(H \cap K))} (deg\, w - 2) = \sum_{(a,b)} \sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) \leqslant \sum_{(a,b)} 3m \cdot (deg\, a - 2) \cdot (deg\, b - 2) \leqslant$$
$$\leqslant 3m \cdot \sum_{a \in V(B(H))} (deg\, a - 2) \cdot \sum_{b \in V(B(K))} (deg\, b - 2),$$

где в сумме вида $\sum_{(a,b)}$ суммирование ведется по всем $a \in V(B(H))$, $b \in V(B(K))$, таким что a отвечает той же вершине графа Y, что и b. (Здесь первое равенство выполняется вследствие того, что, если $w \in V(B(H \cap K))$ отвечает вершине $v \in V(Y)$, то проекции $\pi_H(w) \in V(B(H))$ и $\pi_K(w) \in V(B(K))$ также отвечают вершине $v \in V(Y)$.) Таким образом, если выполнено (3.12), то выполнено и (3.11).

Остается доказать неравенство (3.12).

Рассмотрим три случая.

1 случай. Предположим, что имеются петли 2 рода как в a, так и в b. Тогда в некоторых из вершин w_i также могут быть петли 2 рода. Согласно (3.8), мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i - 2) \leqslant \sum_{i=1}^{s_{a,b}} |w_i| \leqslant m|a| \cdot |b| = m(deg\, a - 2)(deg\, b - 2).$$

Таким образом, в этом случае неравенство (3.12) выполняется.

2 случай. Предположим, что петля 2 рода имеется ровно в одной из вершин a, b (без ограничения общности, в a). Тогда ни в одной из вершин w_i нет петли 2 рода (по лемме 3.3.1).

Следовательно, $|w_i| = deg\, w_i,\ |b| = deg\, b,\ |a| = deg\, a - 2.$

Рассмотрим два подслучая. Если $s_{a,b} \geqslant m|a|$, то, в соответствии с (3.8), мы имеем

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i - 2) = \sum_{i=1}^{s_{a,b}} |w_i| - 2s_{a,b} \leqslant m|a| \cdot |b| - 2m|a| = m(deg\, a - 2)(deg\, b - 2),$$

и неравенство (3.12) выполняется.

Если же $s_{a,b} \leqslant m|a|$, то, в соответствии с (3.10), мы имеем

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}}(deg\,w_i - 2) \leqslant s_{a,b}(deg\,b - 2) \leqslant m|a| \cdot (deg\,b - 2) = m(deg\,a - 2)(deg\,b - 2),$$

и снова неравенство (3.12) выполняется.

3 случай. Предположим, что петли 2 рода нет ни в a, ни в b. Тогда ни в одной из вершин w_i также нет петли 2 рода (по лемме 3.3.1).

Без ограничения общности, будем считать, что

$$deg\,a \leqslant deg\,b. \tag{3.13}$$

Рассмотрим два подслучая. Если $s_{a,b} \leqslant m \cdot deg\,b$, то, в соответствии с (3.9), мы имеем

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}}(deg\,w_i - 2) \leqslant s_{a,b}(deg\,a - 2) \leqslant m \cdot deg\,b \cdot (deg\,a - 2).$$

Если же $s_{a,b} \geqslant m \cdot deg\,b$, то, в соответствии с (3.8), мы имеем

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}}(deg\,w_i - 2) = \sum_{i=1}^{s_{a,b}} deg\,w_i - 2s_{a,b} \leqslant m \cdot deg\,a \cdot deg\,b - 2m \cdot deg\,b = m \cdot deg\,b \cdot (deg\,a - 2).$$

Таким образом, в любом случае выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}}(deg\,w_i - 2) \leqslant m \cdot deg\,b \cdot (deg\,a - 2). \tag{3.14}$$

Далее, в графе $B(H)$ нет вершин степени меньше 2. Значит, в соответствии с (3.13), $deg\,b \geqslant deg\,a \geqslant 2$. Если $deg\,b = 2$, то и $deg\,a = 2$, а значит (3.14) влечет (3.12). Если же $deg\,b \geqslant 3$, то $deg\,b \leqslant 3(deg\,b - 2)$, следовательно,

$$m \cdot deg\,b \cdot (deg\,a - 2) \leqslant 3m \cdot (deg\,a - 2) \cdot (deg\,b - 2),$$

то есть (3.14) опять влечет (3.12).

Таким образом, неравенство (3.12) всегда выполняется, что и требовалось доказать.

Итак, теорема 3.2.2 доказана.

Следовательно, теорема 3.2.1 также доказана.

Литература

[1] Y. Antolin, *On Cayley graphs of virtually free groups*, Groups - Complexity - Cryptology 3 (2011), 301-327.

[2] Y. Antolin, A. Martino and I. Schwabrow, *Kurosh rank of intersections of subgroups of free products of right-orderable groups*, to appear in Math. Res. Lett.

[3] H. Bass, *Covering theory for graphs of groups*, J. Pure Appl. Algebra 89 (1993), 3–47.

[4] O. Bogopolski, *Introduction to Group Theory*, EMS Publishing House, 2008.

[5] M. Culler, *Finite subgroups of outer automorphisms of a free group*, Contributions to Group Theory, Contemporary Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence (1984), 197-207.

[6] W. Dicks and M.J. Dunwoody, *Groups Acting on Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[7] W. Dicks and S.V. Ivanov, *On the intersection of free subgroups in free products of groups*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 144 (2008), 511-534.

[8] W. Dicks and S.V. Ivanov, *Free subgroups in free products of groups with no 2-torsion*, Illinois J. Math., 54 (2010), 223-248.

[9] V. Diekert and A. Weiß, *Context-Free groups and Their Structure Trees.* International Journal of Algebra and Computation 23 (2013), 611-642.

[10] J. Friedman, *Sheaves on graphs, their homological invariants, and a proof of the Hanna Neumann conjecture: with an appendix by Warren Dicks*, Memoirs of the AMS 233 (1100) (2014).

[11] G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, *Embedding Theorems for Groups*, Journal of the London Mathematical Society 24 (1949), 247–254.

[12] A.G. Howson, *On the intersection of finitely generated free groups*, J. London Math. Soc. 29 (1954), 428-434.

[13] S.V. Ivanov, *On the intersection of finitely generated subgroups in free products of groups*. Internat. J. Algebra and Comp. 9 (1999), no. 5, 521-528.

[14] S.V. Ivanov, *Intersecting free subgroups in free products of groups*, Int. J. Algebra Comp. 11 (2001), 281–290.

[15] S.V. Ivanov, *On the Kurosh rank of the intersection of subgroups in free products of groups*, Adv. Math. 218 (2008), 465-484.

[16] G.A. Jones and D. Singerman, *Theory of maps on orientable surfaces,* Proc. London Math. Soc. (3) 37 (1978), 273-307.

[17] I. Kapovich, R. Weidmann, A. Miasnikov, *Foldings, graphs of groups and the membership problem,* Internat. J. Algebra Comput. 15 (2005), no. 1, 95-128.

[18] A. Karrass, A. Pietrowski and D. Solitar, *Finitely generated groups with a free subgroup of finite index*, J. Austral. Math. Soc. 16 (1973), 458-466.

[19] A. Karrass, D. Solitar, *On the failure of the Howson property for a group with a single defining relation*, Mathematische Zeitschrift, 108 (1969), 235-236.

[20] A. Karrass, D. Solitar, *The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup*, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), 227-255.

[21] A.G. Kurosh, *Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen*, Ann.Math. 109 (1934), 647-660.

[22] M. Lohrey, G. Sénizergues, *When is a graph product of groups virtually-free?*, Communications in Algebra 35:2 (2007), 617-621.

[23] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.

[24] W. Magnus, *Noneuclidean tesselations and their groups*, Academic Press, 1974.

[25] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory*, revised ed., Dover Publications Inc., New York, 1976, Presentations of groups in terms of generators and relations.

[26] I. Mineyev, *Groups, graphs and the Hanna Neumann Conjecture*, J. Topol. Anal. 4 (2012), no. 1, 1-12.

[27] H. Neumann, *On the intersection of finitely generated free groups*, Publ.Math. 4 (1956), 186-189; Addendum, Publ.Math. 5 (1957), 128.

[28] J. Nielsen, *Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden*, Mathematische Annalen 78 (1918), 385–397.

[29] J. Nielsen, *Om regning med ikke-kommutative faktorer og dens anvendelse i gruppeteorien*, Math. Tidsskrift B 78 (1921), 77–94.

[30] J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*, Mathematische Annalen 91 (1924), 169–209.

[31] O.Schreier, *Die Untergruppen der freien Gruppen*, Hamburg. Abh.5 (1927), 161-183.

[32] J.-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, 1980.

[33] J.R. Stallings, *Topology of finite graphs*, Invent. Math. 71 (1983), 551-565.

[34] J.R. Stallings, *Group theory and three dimensional manifolds*, Yale Mathematical Monographs 4, Yale University Press, New Haven 1971.

[35] M. Sykiotis, *On subgroups of finite complexity in groups acting on trees*, Journal of Pure and Applied Algebra 200 (2005), 1–23.

[36] M. Sykiotis, *Stable representatives for symmetric automorphisms of groups and the general form of the Scott conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc., 356 (6) (2004), 2405–2441.

[37] E. R. van Kampen, *On the connection between the fundamental groups of some related spaces*, American Journal of Mathematics, 55 (1933), 261–267.

Работы автора по теме диссертации:

[38] А.О. Захаров, *Оценка ранга пересечения подгрупп в свободном произведении двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой*, Математический сборник 204:2 (2013), 73-86.

[39] A. Zakharov, *On the rank of the intersection of free subgroups in virtually free groups*, Journal of Algebra 418 (2014), 29-43.

[40] A. Zakharov, *Intersecting free subgroups in free amalgamated products of groups*, Geometric and asymptotic group theory with applications (конференция «Геометрическая и асимптотическая теория групп с приложениями»), Тезисы докладов, 2011, с. 31 (Испания, Манреса).

[41] A. Zakharov, *Rank of intersection of free subgroups in free amalgamated products of groups*, Geometric and combinatorial group theory with applications (конференция «Геометрическая и комбинаторная теория групп с приложениями»), Тезисы докладов, 2012, с. 27 (Германия, Дюссельдорф).