Отзыв официального оппонента о диссертации А. О. ЗАХАРОВА «ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДГРУПП В СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ», представленной на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Знаменитая теорема Хаусона (1954) утверждает, что пересечение конечно порожденных подгрупп в свободной группе является конечно порожденной подгруппой. Х. Нейман (1957) доказала следующую оценку для ранга пересечения подгрупп свободной группы:

$$\overline{r}(H \cap K) \leq 2\overline{r}(H)\overline{r}(K),$$

где $\overline{r}(H) = max(r(H) - 1, 0)$ – редуцированный ранг свободной подгруппы H, $r(H)$ – ранг подгруппы H. Также Х. Нейман сформулировала гипотезу о том, что на самом деле справедлива более сильная оценка:

$$\overline{r}(H \cap K) \leq \overline{r}(H)\overline{r}(K).$$

Эта гипотеза была доказана в 2011 году независимо Игорем Минеевым и Дж. Фридманом. Можно показать, что эта оценка является неулучшаемой.

Одним из естественных обобщений свободных групп является свободное произведение групп. Из теоремы Куроша следует, что подгруппы свободных произведений, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям, являются свободными. В 1999 году С. В. Иванов доказал, что если $G = G_1 * G_2$ – свободное произведение, H и K – конечно порожденные подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к G_1 и G_2, то

$$\overline{r}(H \cap K) \leq 6\overline{r}(H)\overline{r}(K).$$

Более широким классом групп, обобщающим свободные группы и свободные произведения групп, являются свободные конструкции – свободные произведения с объединенной подгруппой, HNN-расширения, почти свободные группы и фундаментальные группы графов групп.

В настоящей диссертации изучается вопрос об оценке для ранга пересечения подгрупп в свободных конструкциях, аналогичной неравенству Х. Нейман в свободной группе и оценке С. В. Иванова в свободном произведении групп. Получен аналог неравенства Х. Нейман для свободных произведений с объединенной нормальной конечной подгруппой и доказана неулучшаемость полученной оценки. Исследуется строение пересечения свободных подгрупп в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными группами, а также в почти свободных группах. Получена более общая оценка для ранга Куроша пересечения подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к реберным группам, в фундаментальных группах графов групп с конечными реберными подгруппами.

В **первой главе** диссертации доказывается оценка для ранга пересечения свободных подгрупп в свободном произведении групп с объединенной нормальной конечной подгруппой, а также ее неулучшаемость при определенных условиях. Более точно, доказана следующая теорема (Теорема 1). Пусть $G = G_1 *_T G_2$ – свободное произведение групп с объединенной нормальной конечной подгруппой T, а H_1 и H_2 – подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2. Тогда ранг подгруппы $H_1 \cap H_2$ также конечен и выполняется оценка

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leq 2\frac{q}{q-2}|T|\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \leq 6|T|\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2),$$

где q – минимальный из порядков подгрупп групп G_1/T, G_2/T, больших 2; $\frac{q}{q-2} = 1$, если $q = \infty$. При этом первая из этих оценок неулучшаема, если в G_1/T или G_2/T есть элемент порядка 2, $G_1 \neq T$, $G_2 \neq T$ и $G_1/T * G_2/T \ncong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Во **второй главе** изучается вопрос об ограничении сверху ранга пересечения свободных подгрупп фундаментальных групп графов групп с конечными реберными группами. Полученная оценка аналогична неравенству Х. Нейман в свободной группе и обобщает оценку С. В. Иванова для свободных произведений. Как следствие, доказано (Теорема 4), что если G – почти свободная группа, подгруппы $H, K \subseteq G$ свободны и конечно порождены, то имеет место неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leq 6n\,\overline{r}(H)\overline{r}(K),$$

где n есть максимум порядков множеств $|P \cap HK|$ по всем конечным подгруппам P в G.

В **третьей главе** диссертации обобщаются результаты второй главы на случай подгрупп, тривиально пересекающихся с сопряженными к реберным группам, в фундаментальных группах графов групп. Такие подгруппы не обязательно являются свободными, но они обладают естественной структурой свободного произведения, и поэтому для них определено понятие ранга Куроша, обобщающее понятие ранга свободной группы. Получены оценки для ранга Куроша пересечения таких подгрупп. В теореме 5 доказано, что если G – фундаментальная группа конечного графа групп (Γ, Y) с конечными реберными группами, а $H, K \subseteq G$ – подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными ко всем реберным группам графа групп (Γ, Y) и имеющие конечный ранг Куроша, то для редуцированного ранга Куроша $\overline{r}_K$ выполняется неравенство

$$\overline{r}_K(H \cap K) \leq 6m\,\overline{r}_K(H)\overline{r}_K(K),$$

где

$$m = \max_{e \in E(Y), g \in G} |g^{-1}G_e g \cap HK|.$$

Аналогичные оценки получены для свободных произведений и HNN-расширений.

Отмечу некоторые замечания, возникшие по ходу чтения диссертации и автореферата.

Ссылки на книги, опубликованные на русском языке или переведенные лучше давать на русском языке. Имеются в виду известные монографии по комбинаторной теории групп, а также книга О. Богопольского.

Думаю, что в формулировках теорем проще использовать более простые обозначения и в теореме 1 вместо символа q_f^* писать q.

В целом диссертация написана ясно, грамотно и хорошо оформлена. Единственное предложение, которое трудно понять с первого раза, это следующее предложение (см. с. 30 диссертации): "Метка же нетривиального пути из 2 ребер, инцидентных вершине 2 рода, которая отвечает сомножителю $\langle a \rangle_3$, равна a или a^2 в соответствии с метками на рисунке рядом с этой вершиной 2 рода и направлением обхода этой вершины 2 рода (у нас здесь и далее все такие обходы совершаются по часовой стрелке)".

В списке работ автора из автореферата (см. [4]) вместо applica- tions должно быть applications.

Замечания, возникшие при чтении автореферата и диссертации, незначительны. Все основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и опубликованы в 4 работах. Автореферат точно и полно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация полностью отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и соответствует п.9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней а ее автор Александр Олегович Захаров заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
доктор физико–математических наук,
доцент, ведущий научный сотрудник
лаборатории обратных задач математической физики
ФГБУН "Институт математики им. С. Л. Соболева, СО РАН"
Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4, 383-363-46-69 В. Г. Бардаков

10 декабря 2014 г.

Подпись В.Г. Бардакова
удостоверяю
Зав. оргтделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
«10» 12 20 14 г.