ФГБОУ ВО "Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова"

На правах рукописи

Зубелевич Олег Эдуардович

Эволюционные дифференциальные уравнения с нелипшицевыми нелинейностями

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2015

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», кафедра теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета.

Научный консультант:

ТРЕЩЕВ Дмитрий Валерьевич доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН, профессор

Официальные оппоненты:

ИЛЬИН Алексей Андреевич доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 4 отдел.

КАМЫНИН Виталий Леонидович доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ"

САКБАЕВ Всеволод Жанович доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВПО Московского физико- технического института (государственного университета)

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Защита диссертации состоится 22 апреля 2016 года в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО "МГУ имени М.В. Ломоносова"по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «МГУ им.М.В.Ломоносова» по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi.

Автореферат разослан

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.85 на базе МГУ

доктор физико-математических наук,

профессор Власов В.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеются две классические теоремы существования: теорема Коши для уравнений с липшицевой правой частью и теорема Пеано для уравнений, в которых правая часть лишь непрерывна. Теорема Коши основана на принципе сжимающих отображений и дословно обобщается на бесконечномерный случай. Теорема Пеано основана на компактности шара в $\mathbb{R}^n$ и в бесконечномерных пространствах, вообще говоря, неверна[1].

Таким образом, возникает вопрос о нахождении условий, при которых имеют решения эволюционные задачи с нелипшицевой правой частью. Первые результаты в этом направлении были получены В.М. Миллионщиковым [2]. Он доказал теорему существования для задачи Коши в локально выпуклом пространстве. Правая часть этой задачи является суммой равномерно липшицева и компактного отображений.

Одним из источников уравнений в локально выпуклых пространствах является абстрактная теория задачи Коши–Ковалевской в шкалах банаховых пространств, построенная в работах Л. В. Овсянникова[3], Л. Ниренберга [4], Т. Нишиды [5], И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [6], Т. Яманаки [7], Ж. Ф. Трева [8]. В этих работах рассматриваются задачи с липшицевой правой частью специального вида и получены теоремы существования и единственности. Липшицевость в этих задачах не является равномерной, поэтому данные результаты не вытекают из работ

[1] Годунов А.Н. Теорема Пеано в банаховых пространствах.// Функц. анализ и его прилож. — 1974. — No 9, Вып.1 — С. 59-60, Dieudonné J. Deux exemples singuliers d'équations différentielles// Acta. Scien. Math. (Szeged) — 1950. — No 12 — P. 38-40, Yorke J. A. A continuous differential equation in Hilbert space without existence// Funkcjalaj Ekvacioj — 1970. — No 13 — P. 19-21.

[2] Миллионщиков В.М. К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах// Математический сборник — 1962. — No 4, т. 59(99) — С. 385-406.

[3] Овсянников Л.В. Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств.// ДАН — 1965. — 163 — С. 819-822.

[4] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.:Мир, 1977, Nirenberg L. An abstract form of the nonlinear Cauchy — Kowalewski theorem// J. Differential Geometry — 1972. — 6 — P. 561-576.

[5] Nishida T. A Note On A Theorem Of Nirenberg// J. Differential Geometry — 1977. — 12 — P. 629-633.

[6] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.:Гостехиздат, 1958.

[7] Yamanaka T. Note on Kowalevskaja's system of partial differential equations// Comment. Math. Univ. St. Paul. — 1960. — No 9 — P. 7-10.

[8] Treves J.F. Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators// Notas Mat.,Mimeographed notes — 1968. — 46,1 — 238.

Миллионщикова.

Развёрнутое исследование корректности различных линейных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в шкалах банаховых пространств аналитических функций содержится в работе Ю.А. Дубинского [9].

Результаты Ниренберга и Нишиды основаны на быстро сходящемся итерационном методе ньютоновского типа, и в идейном отношении берут свое начало от работ А.Н. Колмогорова [10] и Ю. Мозера [11].

М.В. Сафонов в своей работе [12] упростил доказательство Нишиды и показал, что абстрактная теорема Коши–Ковалевской может быть получена с помощью принципа сжимающих отображений в подходящем метрическом пространстве. Этот результат устанавливает аналогию между теорией задачи Коши–Ковалевской и теорией обыкновенных дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве. Для полной параллельности этих теорий не хватает теоремы типа Пеано для задачи Коши–Ковалевской. Решению этой давно стоящей задачи посвящена одна из глав диссертационной работы.

В диссертационной работе построены два метода получения теорем существования решения эволюционных задач с нелипшицевой нелинейностью.

Первым методом доказываются теоремы существования для эволюционных задач с нелипшицевой правой частью в шкалах банаховых пространств с компактными вложениями. Такие шкалы порождают локально выпуклые пространства со свойством Монтеля. С помощью данного метода доказана теорема, дающая ответ на давно стоящий вопрос об обобщении классической теоремы Коши–Ковалевской в части существования, а также теорема, обобщающая результаты А.Н. Карвалью [13] и Ф. Дикштейна [14].

---

[9] Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной плоскости. — Издательство МЭИ, 1996.

[10] Колмогоров А.Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона// ДАН — 1954. — No 4, B.98 — С. 527-530.

[11] Moser J. A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations/ I,II // Ann. Scuola Norm. Sup. Piza — 1966. — 20 — P. 265-315, P. 499-535.

[12] Safonov M.V. The Abstract Cauchy — Kovalevskaya Theorem in a Weighted Banah Space// Communications on Pure and Applied Mathmatics — 1995. — V. 48 — P. 629-643.

[13] Carvalho A.N., Cholewa J.W., Dlotko T. Abstract parabolic problems in ordered Banach spaces// Colloq. Math. — 2001. — No 90 — P. 1-17.

[14] Dickstein F. On semilinear parabolic problems with non-Lipschitz nonlinearities// Mat. Contemp. — 2000. — V. 18 — P. 111-121.

Второй метод представляет собой обобщение классического мажорантного метода Коши–Вейерштрасса–Ковалевской, использовавшегося при доказательстве классической теоремы Коши–Ковалевской. Данный метод позволяет не только получать теоремы существования в задачах с нелипшицевой правой частью, но и находить эффективные оценки времени существования решения для уравнений в частных производных типа Коши–Ковалевской. Основным приложением данного метода является система уравнений метода непрерывного усреднения Д.В. Трещёва, которая представляет собой счётную систему дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, данный метод позволил обобщить результаты П. Волкмана [15], Р. Уля [16], М. Мюллера [17]. С помощью данного метода решена давно стоящая задача о получении новых глобальных по времени теорем существования для уравнения Смолуховского. Также доказана общая теорема существования периодических решений и, как следствие, получен ответ на до сих пор не решенный вопрос о существовании периодических решений уравнения Смолуховского. В рамках данного метода получена теорема о равномерной непрерывности одного класса операторов на пространстве Фреше, которая обобщает результаты Линденштраусса и Цафрири [18].

Оба метода позволяют получать теоремы существования не только для дифференциальных, но и для функционально-дифференциальных уравнений; в частности, для уравнения типа Блэка–Шолза [19].

Цель и задачи исследования.

Основной целью работы является получение общих методов для доказательства теорем существования решений и эффективных оценок времени существования решений в эволюционных задачах с нелипшицевыми нелинейностями. А именно:

---

[15] P. Volkmann, Ausdehnung eines Satzes von Max Müller auf unendliche Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Funkcial. Ekvac. 21 (1978), no. 2, 81-96.

[16] R. Uhl An Extension of Max Müller's Theorem to Differential Equations in Ordered Banach Spaces. Funkcialaj Ekvacioj, 39 (1996) 203-216.

[17] M. Müller Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Math. Z., 26 (1927), 551-559.

[18] Lindenstrauss J., Lior Tzafriri. Classical Banach Spaces I. — New York, 1977.

[19] Barles Guy, Halil Mete Soner. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation // Finance Stochast. — 1998. — No 2 — P. 369–397.

- получить аналог теоремы Пеано для абстрактной задачи Коши–Ковалевской в нелипшицевой постановке;
- получить теорему существования для абстрактного квазилинейного параболического уравнения с нелипшицевой нелинейностью в шкале банаховых пространств;
- обобщить мажорантный метод Вейерштрасса–Ковалевской на системы счётного числа дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах;
- применить мажорантный метод для получения неулучшаемых оценок времени существования решения в пространствах Фреше с базисом Шаудера и построить классы систем, для которых решение существует;
- доказать теорему существования решений для системы уравнений метода непрерывного усреднения;
- получить теорему существования и эффективные оценки времени существования решения в уравнении Смолуховского.

Методы исследования.

В работе применяются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, методы действительного, комплексного и функционального анализа, теории меры, теории пространств Соболева, а также методы, разработанные автором.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- доказан аналог теоремы Пеано для абстрактной задачи Коши–Ковалевской в нелипшицевой постановке;
- доказана теорема существования для абстрактного квазилинейного параболического уравнения с нелипшицевой нелинейностью в шкале банаховых пространств; обобщены результаты А.Н. Карвальо;

- мажорантный метод Вейерштрасса–Ковалевской обобщён на системы счётного числа дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах; в частности, получено обобщение результатов Волкмана, Уля, Мюллера, а также обобщение результата Линденштраусса и Цафрири о равномерной непрерывности одного диагонального оператора в пространстве Фреше с базисом Шаудера;
- с помощью мажорантного метода получены неулучшаемые оценки времени существования решения в пространствах Фреше с базисом Шаудера и построены классы систем, для которых решение существует;
- доказана теорема существования решений для системы уравнений метода непрерывного усреднения;
- получена теорема существования и эффективные оценки времени существования решения в уравнении Смолуховского.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в теории функционально-дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах.

Результаты диссертации могут найти применение в научных исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Математическом институте им. Стеклова, Московском энергетическом институте, Воронежском Государственном Университете.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация диссертации.

Результаты диссертационной работы неоднократно излагались на следующих семинарах:

- в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН под руководством академика РАН С. М. Никольского,чл.-корр. РАН О.В. Бесова и чл.-корр. РАН

Л. Д. Кудрявцева (2005);

на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

- под руководством профессора М. И. Вишика (2004),
- под руководством профессора В. А. Кондратьева (неоднократно 2003–2004);
- под руководством академика РАН В. В. Козлова и чл.-корр. РАН Д. В. Трещева (неоднократно 1997–2015);
- под руководством профессора Е. В. Радкевича , профессора В.В. Жикова, профессора Т.А. Шапошниковой, профессора А.С. Шамаева (неоднократно 1997–2015);
- на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений под руководством профессоров И.В. Асташовой, А.В. Боровских, Н.Х. Розова, И.Н. Сергеева (2014),
- на семинаре под руководством академика РАН, профессора В. А. Садовничего (2015);
- на семинаре кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ под руководством профессора А. В. Фурсикова (2015)
- на семинаре факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством академика РАН В. А. Ильина и академика РАН Е.И. Моисеева (2005);
- на семинаре в Российском университете дружбы народов под руководством профессора А. Л. Скубачевского (неоднократно 2003–2008);
- на семинаре в Московском энергетическом институте под руководством профессора Ю. А. Дубинского (неоднократно 1997–2015) .

Результаты диссертации также докладывались на всероссийских и международных научных конференциях:

- конференции по дифференциальным уравнениям «Workshop on Differential Equations dedicated to the memory of Vladimir Lazutkin», посвящённая памяти В.Ф. Лазуткина (18-20 августа 2002, Санкт-Петербург) – полученные результаты опубликованы в сборнике трудов конференции;

- 4-й международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям «DFDE–2005» (июнь 2005, Москва) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференции;

- международной конференции «Математическая теория управления и механика» (1-5 июля 2011, Суздаль) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференции;

- международной конференции «Научное наследие Владимира Михайловича Миллионщикова» (19 декабря 2014, Москва)

Материалы диссертации были использованы в курсе "Математические методы механики сплошной среды прочитанном автором в 2006/2007 учебном году в Российском университете дружбы народов.

В осеннем семестре 2007/2008 года в Научно-образовательном центре Математического института им. В. А. Стеклова РАН по материалам диссертации автором был прочитан курс "Функциональные методы в нелинейных задачах математической физики".

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 работах автора [1–18], 16 из которых входят в список изданий, рекомендованных ВАК. В работе [8], написанной совместно с Д.В. Трещевым, автору диссертации принадлежит глава, посвященная теоретико-функциональным вопросам, а также доказательство ряда теорем существования, содержащихся в главе о методе непрерывного усреднения. В работе [9], написанной совместно с Д.В. Трещевым, автору диссертации принадлежат определение обобщенного решения системы уравнений Лагранжа и доказательство корректности соответствующей задачи Коши для системы уравнений Лагранжа с неинтегрируемыми связями.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 101 наименование. Полный объем диссертации составляет 136 страниц.

Основное содержание работы

Результаты **первой главы** носят технический и методический характер. Некоторые из них известны, другие формально являются новыми, но не выставляются на защиту ввиду их простоты. Они приводятся с доказательствами, поскольку используются в последующих главах диссертации.

Во **второй главе** рассматривается шкала банаховых пространств

$$\{(E_s, \|\cdot\|_s)\}_{0<s<1}:$$

$$E_{s+\delta} \subseteq E_s, \quad \|\cdot\|_s \leq \|\cdot\|_{s+\delta}, \quad s+\delta<1, \quad \delta>0. \quad (1)$$

Мы предполагаем, что все вложения (1) компактны. Такое предположение справедливо для пространств аналитических функций, пространств Соболева и многих других.

Пусть $B_s(r) = \{u \in E_s \mid \|u\|_s < r\}$ – открытый шар в E_s и $\overline{B}_s(r)$ – его замыкание.

Основным объектом нашего изучения будет следующая задача Коши:

$$u_t = A(t,u,u) + h(t,u), \quad u\,|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Будем считать, что для некоторых положительных констант T, R, M, K отображения

$$A : [0,T] \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \to E_s,$$
$$h : [0,T] \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \to E_s, \quad \delta > 0, \quad s+\delta < 1$$

непрерывны, и для любых $u, v \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$ выполнены следующие неравенства:

$$\|A(t,u,v)\|_s \leq \frac{M\|v\|_{s+\delta}}{\delta}, \quad \|h(t,u)\|_s \leq K, \quad \delta>0, \quad s+\delta<1. \quad (3)$$

Предположим, что A выпукло по третьему аргументу в следующем смысле. Для всех $u, v, w \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ справедливо неравенство

$$\|A(t,u,\lambda v + (1-\lambda)w)\|_s \leq \lambda \|A(t,u,v)\|_s + (1-\lambda)\|A(t,u,w)\|_s. \quad (4)$$

Через $\tilde{E}$ обозначим множество функций $f : [0, 1/a) \to \bigcup_{0<s<1} E_s$. Пространство $E^1 = \bigcap_{1-s-\tau a>0} C^1([0, \tau], E_s)$ состоит по определению из тех элементов $f \in \tilde{E}$, которые обладают следующим свойством:

$$f \mid_{[0,\tau]} \in C^1([0, \tau], E_s)$$

для всех $1 - s - \tau a > 0$. С теоретико-функциональной точки зрения пространство E^1 – это проективный предел пространств $C^1([0, \tau], E_s)$ относительно отображений

$$E^1 \ni f \mapsto f \mid_{[0,\tau]} .$$

Теорема 1 Существует константа $a > 0$ настолько большая, что задача (2) имеет решение

$$u(t) \in \bigcap_{1-s-\tau a>0} C^1([0, \tau], E_s). \quad (5)$$

Отметим, что из теорем первой главы диссертации вытекает следующее.

Предположим, что правая часть уравнения (2) непрерывно зависит от параметра p, принадлежащего некоторому польскому пространству. Тогда существует решение $u = u(t, p)$, являющееся измеримым по Борелю относительно второго аргумента.

Отметим, что неравенство (3) соответствует критическому случаю для оператора A. Докритический случай

$$\|A(t, u, v)\|_s \leq \frac{M\|v\|_{s+\delta}}{\delta^\gamma}, \quad \gamma < 1$$

с точки зрения существования решения тривиален, в закритическом случае $\gamma > 1$ решений, вообще говоря, не существует.

Отображение A зависит от трех аргументов. Первый аргумент – время, вместо второго и третьего аргумента подставляется искомая функция. По второму и третьему аргументу оператор A может быть нелипшицевым. На третий аргумент оператор A действует как дифференциальный оператор первого порядка. Это выражается неравенством (3).

Если отображение A тождественно равно нулю, то теорема (1) является прямым обобщением стандартной теоремы Пеано для шкал банаховых пространств.

В **третьей главе** рассмотрены две шкалы банаховых пространств

$$\left\{E_s, \|\cdot\|_s^E\right\}_{s>0} \quad \text{и} \quad \left\{G_s, \|\cdot\|_s^G\right\}_{s>0}$$

такие, что $E_s \subseteq G_s$ для всех $s > 0$. Все вложения $E_{s+\delta} \subseteq E_s$, $\delta > 0$, вполне непрерывны и

$$\|\cdot\|_s^E \le \|\cdot\|_{s+\delta}^E. \quad (6)$$

Параметр s не обязательно пробегает всю положительную вещественную полуось. Мы не используем пространства E_s, G_s с большими значениями s, поэтому можно, например, считать, что $s \in (0,1)$.

Введем константы $C, T, R > 0$ и $\phi, \alpha \ge 0$.

Пусть $S^t : G_s \to E_s$, $t > 0$ есть сильно непрерывная линейная полугруппа в том смысле, что для любого элемента $u \in E_s$ выполнены следующие соотношения:

$$\|S^t u - u\|_s^E \to 0 \quad \text{при} \quad t \searrow 0,$$
$$\|S^t u\|_s^E \le C\|u\|_s^E.$$

Дадим определение параболической полугруппы, действующей в шкале банаховых пространств. Это определение, как и определение абстрактной параболической задачи, приводимое ниже, является новым и введено автором.

Определение 1 Полугруппа S^t называется параболической, если существует такая постоянная $\gamma > 1$, что неравенство

$$\|S^t u\|_{s+\delta}^E \le \frac{C}{t^\phi}\|u\|_s^G \quad (7)$$

выполняется при любых $\delta, t > 0$, $\delta^\gamma < t < T$.

Пусть $B_s(r)$ – открытый шар радиуса r с центром в начале координат в пространстве E_s. Пусть $f : (0,T] \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \to G_s$ – такая непрерывная функция, что неравенство

$$\|f(t,u)\|_s^G \le \frac{C}{\delta^\alpha} \quad (8)$$

выполняется при $(s+\delta)^\gamma < t \le T$ и $u \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$.

Замечание 1 Случай

$$\|f(t,u)\|_s^G \le \frac{C}{t^\beta \delta^\alpha}, \quad \beta > 0,$$

довольно распространен, однако, поскольку $\delta^\gamma < t$, он сводится к (8):

$$C/(t^\beta \delta^\alpha) \leq C/\delta^{\beta\gamma+\alpha}.$$

Далее мы рассмотрим две постановки рассматриваемой задачи. Первая – классическая (и мы находим классические решения), а вторая – обобщенная (в этом случае получаем обобщенные решения).

В обобщенной постановке мы ищем решения следующего интегрального уравнения:

$$u(t) = \int\limits_0^t S^{(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi. \quad (9)$$

В классической постановке мы накладываем несколько дополнительных условий. А именно, пусть $G_s = E_s$. Введем линейный оператор $A : E_{s+\delta} \to E_s$ и предположим, что полугруппа $S^t = e^{At}$, генерируемая этим оператором, такова, что

$$\lim_{h\to 0+} \left\| \frac{1}{h}\Big(e^{Ah} - \mathrm{id}_{E_{s+\delta}}\Big)u - Au \right\|_s^E = 0 \quad (10)$$

для любого $u \in E_{s+\delta}$.

В классической постановке рассматриваемая задача имеет вид

$$u_t = f(t, u) + Au, \quad (11)$$

$$u\mid_{t=0} = 0. \quad (12)$$

Смысл начального условия (12) будет прояснен ниже.

Будем называть задачу (11) или (9) параболической, если полугруппа S^t — параболическая и

$$\chi = \phi + \frac{\alpha}{\gamma} < 1.$$

В случае, указанном в замечании 1, имеем $\chi = \phi + \beta + \alpha/\gamma$.

Обозначим $\tilde{E} = \bigcup_{s>0} E_s$. Зададим пространство $E^1(T),\ T > 0$ формулой

$$E^1(T) = \bigcap_{0<s^\gamma<\tau<T} C^1((\tau, T), E_s). \quad (13)$$

Пространство $E^1(T)$ состоит из отображений $f : (0, T) \to \tilde{E}$ таких, что

$$f\mid_{(\tau,T)} \in C^1((\tau, T), E_s)$$

при всех s, τ, удовлетворяющих неравенству $0 < s^\gamma < \tau < T$.

Пространство $E^1(T)$ является проективным пределом пространств

$$C^1((\tau, T), E_s), \quad 0 < s^\gamma < \tau < T$$

относительно отображений

$$E^1(T) \ni u \mapsto u\mid_{(\tau,T)} .$$

Теорема 2 Классическая постановка. Пусть задача (11) — параболическая. Тогда существует такая постоянная $T_* > 0$, что эта задача имеет решение $u(t) \in E^1(T_*)$, и для любой постоянной $c \in (0,1)$ справедливо соотношение

$$\|u(t)\|^E_{ct^{1/\gamma}} \to 0 \quad \text{при} \quad t \searrow 0. \quad (14)$$

Функция $u(t)$ удовлетворяет и уравнению (9).

Обобщенная постановка. Пусть задача (9) — параболическая. Тогда существует такая постоянная $T_* > 0$, что эта задача имеет решение

$$u(t) \in E(T_*) = \bigcap_{0<s^\gamma<\tau<T_*} C((\tau, T_*), E_s).$$

В обоих случаях постоянная T_* зависит только от C, α, γ, ϕ.

В **третьей главе** рассмотрены приложения данной теоремы к следующим уравнениям.

1) Уравнение Блэка–Шолза – это задача вида

$$u_t(t,z) = f(t,u) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(z^2 u(t,z)\Big), \quad u(0,z) = 0,$$

для которой ищется голоморфное в круге $|z| < r$ решение. Функция f непрерывна, но, вообще говоря, не липшицева в соответствующих пространствах.

2)Квазилинейное параболическое уравнение вида:

$$u_t = f(\nabla u) + \Delta u, \quad u|_{t=0} = \hat{u} \in H_0^{1,q}(M), \quad u(t, \partial M) = 0$$

в ограниченной области M. Функция f непрерывна в $\mathbb{R}^m$ и

$$|f(z)| \le c(|z|^p + 1), \quad q \ge p \ge 1, \quad m(p-1) < q$$

для всех $z \in \mathbb{R}^m$.

3) Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости на трехмерном торе (уравнение Навье–Стокса).

В последние две задачи рассмотрены для иллюстрации работы теоремы 2, с помощью которой получены теоремы существования в докритическом случае.

В **четвёртой главе** рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений и в множестве её решений строится ветка решений, измеримых по начальным данным.

Снабдим пространство $\mathbb{R}^m = \{x = (x^1, \dots, x^m)\}$ нормой

$$\|x\| = \max_{k=1,\dots,m} |x^k|.$$

Через $Q \subset \mathbb{R}^m$ обозначим открытую область. Введем следующее обозначение

$$I_\tau = [0, \tau).$$

Пусть вектор-функция $f(t,x) = (f^1, \dots, f^m)(t,x)$ принадлежит пространству $C(I_\tau \times \overline{Q}, \mathbb{R}^m)$, и

$$\|f(t,x)\| \le \psi(t) \in L^1(I_\tau), \quad M = \|\psi\|_{L^1(I_\tau)}.$$

Зафиксируем компактное множество $F \subset Q$ и положим

$$d = \inf\{\|x - y\| \mid x \in F, \quad y \in \partial Q\}.$$

Очевидно, $d > 0$. Если $Q = \mathbb{R}^m$ и, соответственно, $\partial Q = \emptyset$, то будем считать, что по определению $d = \infty$.

Мы исследуем множество решений следующей начальной задачи.

$$u_t(t,x) = f(t, u(t,x)), \quad u(0,x) = x \in F. \quad (15)$$

Предположим, что все решения этой задачи определены на I_T, где $T \in (0, \tau]$ – некоторая константа. Из стандартного курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что

$$T \ge \sup\Big\{ t \in I_\tau \Big| \int_0^t \psi(s)ds \le d \Big\}.$$

Отметим, что постоянные T, τ могут принимать значение ∞.

Введем в пространстве $C(I_T, \mathbb{R}^m)$ топологию компактной сходимости. Эта топология задается полунормами

$$p_a(v(\cdot)) = \max_{t\in[0,a]} \|v(t)\|, \quad v \in C(I_T, \mathbb{R}^m), \quad a \in I_T.$$

Пространство $C(I_T, \mathbb{R}^m)$ с топологией компактной сходимости является пространством Фреше.

Через $\mathcal{B}(V, W)$ обозначим множество измеримых по Борелю отображений топологического пространства V в топологическое пространство W.

Пусть $B(F)$ – пространство ограниченных на F и измеримых по Борелю отображений $v : F \to \mathbb{R}^m$, т . е. $\|v\|_{B(F)} = \sup_{x\in F} \|v(x)\| < \infty$.

Теорема 3 Задача (15) имеет решение $w(t, x)$ такое, что функции

$$x \mapsto w(t, x), \quad x \mapsto w_t(t, x)$$

принадлежат $\mathcal{B}(F, C(I_T, \mathbb{R}^m))$.

Этот факт мы будем записывать следующим образом:

$$w(t, x), w_t(t, x) \in \mathcal{B}(F, C(I_T, \mathbb{R}^m)).$$

Пусть $h(t, x) \in \mathcal{B}(F, C(I_T, \mathbb{R}^m))$ – какое-нибудь решение задачи (15). Тогда отображение $t \mapsto h(t, x)$ принадлежит пространству $C^1(I_T, B(F))$.

Из этой теоремы выведено следующее утверждение. Пусть $Q = \mathbb{R}^m$ и $\hat{\mu}$ – борелевская мера на Q с ограниченным носителем и $\hat{\mu}(Q) < \infty$.

Если функция f ограничена, то задача

$$\mu_t + \mathrm{div}_x\,(\mu f) = 0, \quad \mu\mid_{t=0} = \hat{\mu}$$

имеет обобщенное решение, которое является мерой Радона.

Уравнения Лагранжа с неголономными связями и силами, которые являются обобщенными функциями, рассмотрены в работе [9]. В этой работе дано определение обобщенного решения и доказана корректность соответствующей задачи Коши.

В **пятой главе** доказана теорема о компактности некоторого класса множеств в пространствах Фреше, обладающих безусловным базисом Шаудера. На основе этой теоремы построен мажорантный метод, который позволяет доказывать теоремы существования в указанных пространствах. Данный метод является новым и решает задачу типа Коши–Ковалевской в пространствах последовательностей.

В приложении к дифференциальным уравнениям этот метод дает возможность доказывать теоремы существования и получать эффективные оценки времени существования решения.

Результаты этого раздела обобщают работы Мюллера, Волкмана и Уля [20].

Рассмотрен ряд примеров.

Через E мы обозначим пространство Фреше, топология в котором задается полунормами $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ – безусловный базис Шаудера и

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Введем обозначение $I_T = [0, T], \quad T > 0$.

Зафиксируем элемент $y \in E$ и определим аффинный оператор

$$\mathcal{X}_j[y] : E \to E$$

формулой $\mathcal{X}_1[y]x = y_1 e_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k e_k$,

$$\mathcal{X}_j[y]x = \sum_{k=1}^{j-1} x_k e_k + y_j e_j + \sum_{k=j+1}^{\infty} x_k e_k, \quad j > 1.$$

Пусть функция $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(t) e_k \in C(I_T, E)$ такова, что

$$X_k(t) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in I_T,$$

и $X_k(t) \in C^1(I_T)$.

Введем обозначение

$$W_X = \{(t, x) \in I_T \times E \mid x \ll X(t)\}.$$

[20]M. Müller Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Math. Z., 26 (1927), 551-559, P. Volkmann, Ausdehnung eines Satzes von Max Müller auf unendliche Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen// Funkcial. Ekvac. 21 (1978), no. 2, 81-96, R. Uhl An Extension of Max Müller's Theorem to Differential Equations in Ordered Banach Spaces// Funkcialaj Ekvacioj, 39 (1996) 203-216.

Рассмотрим следующую начальную задачу

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = \hat{x}, \quad (16)$$

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t,x)e_k, \quad f \in C(W_X, E).$$

Теорема 4 Предположим, что $X_k(t) > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in I_T$ и для каждой пары $(t,x) \in W_X$ выполнено неравенство

$$\pm f_k(t, \mathcal{X}_k[\pm X(t)]x) \le \dot{X}_k(t), \quad \hat{x} \ll X(0).$$

Здесь и в дальнейшем это означает, что для каждого k справедливы два неравенства: в одном вместо $\pm$ стоит $+$, а в другом $-$.

Тогда задача (16) имеет решение $x(t) \in C^1(I_T, E)$ такое, что

$$x(t) \ll X(t), \quad t \in I_T.$$

Шестая глава посвящена приложению развитой в пятой главе мажорантной техники к уравнениям метода непрерывного усреднения.

Заключение

Итоги диссертации состоят в следующем:

- доказан аналог теоремы Пеано для абстрактной задачи Коши–Ковалевской в нелипшицевой постановке;

- доказана теорема существования для абстрактного квазилинейного параболического уравнения с нелипшицевой нелинейностью в шкале банаховых пространств; обобщены результаты А.Н. Карвальо;

- мажорантный метод Вейерштрасса–Ковалевской обобщён на системы счётного числа дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах; в частности, получено обобщение результатов Волкмана, Уля, Мюллера, а также также обобщение результата Линденштраусса и Цафрири о равномерной непрерывности одного диагонального оператора в пространстве Фреше с базисом Шаудера;

- с помощью мажорантного метода получены неулучшаемые оценки времени существования решения в пространствах Фреше с базисом Шаудера и построены классы систем, для которых решение существует;

- доказана теорема существования решений для системы уравнений метода непрерывного усреднения;

- получена теорема существования и эффективные оценки времени существования решения в уравнении Смолуховского.

Методы и результаты диссертации могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в теории функционально-дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах.

Результаты диссертации могут найти применение в научных исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Математическом институте им. Стеклова, Московском энергетическом институте, Воронежском Государственном Университете.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Перспективы данного исследования состоят в получении аналогичных результатов для эволюционных уравнений, правая часть которых удовлетворяет условиям Каратеодори, а также в доказательстве теоремы типа Пеано для абстрактного параболического уравнения в критическом случае.

Автор благодарен научному консультанту чл.-корр. РАН профессору Дмитрию Валерьевичу Трещёву за полезные обсуждения и постоянную поддержку.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

[1] Зубелевич О. Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелипшицевой правой частью// ДАН — 2012. — No 5, том 445 — С. 1-5.

[2] Зубелевич О. О мажорантном методе в задаче Коши–Ковалевской// Матем. заметки — 2001. — 69:3 — С. 363–374.

[3] Зубелевич О. О параболических задачах с нелипшицивеми нелинейностями// Современная математика. Фундаментальные направления. — Том 21 — январь 2007 — С.62-76.

[4] Зубелевич О.Э. Теорема Шаудера-–Тихонова в счетно нормированном пространстве// Матем. заметки — 2011. — 90:2 — С. 310–312.

[5] Зубелевич О. Теорема Пеано и задача Коши–Ковалевской// ДАН — 2009. — No 3, том 425 — С. 309-313.

[6] Зубелевич О. Об одной абстрактной версии задачи Коши–Ковалевской. Тезисы Четвертой международной конференции по дифференциальным и функционально — дифференциальным уравнениям Москва. Математический институт им. В. А. Стеклова. — 2005. — С. 88

[7] Зубелевич О., Функциональные методы в нелинейных задачах математической физики, Москва, РУДН, 2008

[8] Treschev D., Zubelevich O. Introduction to the Perturbation theory of Hamiltonian systems. — Heidelberg: Springer, 2010.

[9] Treschev D., Zubelevich O. On weak solutions to the Lagrange–Dalambert Equations// Applicationes Mathematicae —2013. — 40,3 — P. 383-392.

[10] Zubelevich O. On some topological view on the abstract Cauchy–Kowalewski problem// Complex Var. Theory Appl. — 2004. — V. 49, No 10 — p.703-709.

[11] Zubelevich O. Peano type theorem for abstract parabolic equations// Annales de l'Institut Henri Poincaré. Annales: Analyse Non Lineaire Nonlinear Analysis — 2009. — 26 (4) — P. 1407-1421.

[12] Zubelevich O. On Elliptic Equation With Perturbed p-Laplace Operator// Journal of Mathematical Analysis and Applications, 328 (2007),p.1188-1195.

[13] Zubelevich O. A fixed point theorem for affine mappings and its application to elasticity theory// Central European Journal of Math. Volume 8, Number 6, 2010, p. 1104-1108.

[14] Zubelevich O. A generalization of Schauder's theorem and its application to Cauchy–Kovalevskaya problem// Electron. J. Diff. Eqns. —2003. — V. 2003, No 55 — P. 1-6.

[15] Zubelevich O. Several notes on existence theorem of Peano// Funkcialaj Ekvacioj — 2012. — No 55 — P. 89-97.

[16] Zubelevich O. A note on existence theorem of Peano// Archivum Mathematicum — 2011. — T. 47 — P. 83-89.

[17] Zubelevich O. On analytic solutions to the Navier–Stokes equation in 3-D torus// Funkcialaj Ekvacioj — 2007. — No 50 — P. 171-185.

[18] Зубелевич О. Эволюционные дифференциальные уравнения с нелипшицевой нелинейностью// Дифференциальные уравнения — 2014 — No 9, том 50 — С. 1287-1288.