ФГБОУ ВО
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА"
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Зубелевич Олег Эдуардович

УДК 517.95

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕЛИПШИЦЕВЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

специальность
01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
член корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,
профессор Д. В. Трещев

Москва — 2015

Оглавление

Введение **4**

Глава I. Предварительные сведения из теории локально выпуклых пространств **17**

1. Определения и примеры . . . 17
2. Метризуемые пространства . . . 20
3. Теорема Шаудера — Тихонова в метризуемом пространстве . . . 22
4. Компакты в метризуемых пространствах . . . 24
5. Теорема Шаудера — Тихонова в задачах с параметрами . . . 25
6. Шкалы банаховых пространств . . . 27
7. Приложения к некоторым шкалам аналитических функций . . . 30

Глава II. Абстрактная задача Коши — Ковалевской **34**

8. Введение . . . 34
9. Основная теорема . . . 39
10. Доказательство основной теоремы . . . 41

Глава III. Абстрактные параболические уравнения **46**

11. Введение . . . 46
12. Основная теорема . . . 47
13. Сведения из функционального анализа . . . 51
14. Доказательство теоремы 12.1 . . . 53
15. Приложения . . . 61

Глава IV. Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелипшицевой правой частью **71**

16. Введение . . . 71
17. Основная теорема . . . 73

18. Уравнение переноса 75
19. Пример 77
20. Доказательство теоремы 17.1 78

Глава V. Мажорантный метод **81**
21. Пространства Фреше с базисом Шаудера 81
22. Компактные множества в пространствах Фреше с базисом Шаудера 86
23. Неподвижные точки отображений: мажорантный метод 89
24. Дифференциальные уравнения в пространствах Фреше 90
25. Другая версия мажорантного метода 94
26. Основные теоремы 94
27. Приложения 97
28. Доказательство основных теорем 102
29. Конечномерный случай 105

Глава VI. Об одном приложении мажорантного метода **107**
30. Описание метода непрерывного усреднения 107
31. Мажоранты 111
32. Усреднение быстрой фазы 113
33. Аналитические свойства усредняющей процедуры 117

Заключение **127**

Литература **129**

Введение

Эволюционной задачей мы будем называть дифференциальное уравнение, в левой части которого стоит производная по времени от элемента некоторого локально выпуклого пространства, а в правой части – отображение этого топологического пространства в себя. Эта задача дополняется начальными условиями в нулевой момент времени. Разумеется, на таком уровне общности ничего содержательного доказать нельзя, но он позволяет взглянуть с единой точки зрения на очень разные дифференциальные уравнения.

Необходимость такого взгляда вызвана несколькими причинами. Одна из них состоит в том, что в последние годы в инженерных приложениях, в экономике и в ряде других областей (см., например, [50], [70], [40]) возникает большое количество моделей, которые описываются функционально-дифференциальными уравнениями и системами бесконечного числа уравнений. Такие задачи невозможно отнести к какому-либо типу, известному из классической теории дифференциальных уравнений. Вместе с тем, эти задачи не носят "фундаментального"характера в том смысле, что они быстро теряют актуальность и заменяются новыми задачами, которые соответствуют вновь построенным моделям.

Таким образом, возникает необходимость в общих теоремах, позволяющих сразу сделать вывод о корректности построенной модели, т.е. имеет ли соответствующая задача решение, единственно ли оно и как оно зависит от начальных данных.

Далеко не все такие модели приводят к уравнениям с липшицевыми правыми частями, но даже когда липшицевость есть, она оказывается полезной, вобще говоря, при доказательстве единственности решения. При доказательстве существовнания липшицевость удается использовать не всегда, грубо говоря, потому, что в полуметрических пространствах нет принципа сжимающих отображений.

Другая причина состоит в том, что этот общий подход позволяет взглянуть по новому на такие классические понятия дифференциальных уравнений как, например, параболичность. Ниже, в частности, мы даем абстрактное определение параболического уравнения и рассматриваем с этой точки зрения уравнение Навье-Стокса и некоторые виды нелокальных уравнений, которые тоже естественно назвать параболическими, но в новом, обобщенном, смысле.

Актуальность результатов главы I

Результаты этой главы носят технический и методический характер и в основном известны. Они используются в последующих главах диссертации.

В частности, поскольку в работе активно используется теорема Шаудера — Тихонова о неподвижной точке, мы сочли целесообразным привести элементарное доказательство этой теоремы для случая метризуемых локально выпуклых пространств. В этом случае теорема Шаудерера — Тихонова сводится к теореме Шаудера для нормированных пространств и не использует аксиому выбора.

Хорошо известно, что стандартное доказательство теоремы Шаудера — Тихонова о неподвижной точке основано на аксиоме выбора. В этом доказательстве аксиома выбора играет принципиальную роль и не может быть заменена более элементарными соображениями, даже если пространство конечномерно.

Поскольку среди локально выпуклых пространств в приложениях наиболее часто встречаются именно метризуемые пространства, кажется целесообразным иметь простое доказательство теоремы Шаудера — Тихонова, которое, в частности, не опирается на аксиому выбора.

Кроме того, отметим, что имеются работы, в которых строятся теории линейных топологических пространств, основанные на разных аксиоматиках теории множеств без аксиомы выбора [81], [66], [42].

Актуальность результатов главы II

В главе II получена теорема, обобщающая теорему существования Пеано на случай дифференциальных уравнений в специальном классе линейных топологических пространств. Этот результат также обобщает классическую теорему Коши — Ковалевской.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений центральное место занимают две теоремы существования, касающиеся задачи

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Первая теорема называется теоремой Коши — Пикара, она гарантирует существование и единственность решения данной задачи при условии, что функция

f непрерывна по t и липшицева по x. Вторая теорема называется теоремой Пеано, она устанавливает существование решения в предположении, что функция f непрерывна.

Основная трудность при обобщении теоремы Пеано для обыкновенных дифференциальных уравнений на бесконечномерный случай состоит в том, что шар в бесконечномерном банаховом пространстве некомпактен. Поэтому вместо банахова пространства приходится использовать специальное локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Для того, чтобы гарантировать единственность, одной лишь непрерывности правой части недостаточно. Например, скалярная задача

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0,$$

имеет два решения: $x(t) = 0, \quad x(t) = t^2/4$.

Теорема Коши-Пикара доказывается с помощью принципа сжатых отображений. Доказательство теоремы Пеано несколько сложнее, оно основано на том, что всякое замкнутое ограниченное множество конечномерного пространства компактно.

Поскольку принцип сжатых отображений нечувствителен к размерности пространства, теорема Коши — Пикара легко обобщается на случай, когда переменная x лежит в произвольном банаховом пространстве.

Не так обстоит дело с теоремой Пеано. Первый пример того, что в бесконечномерном банаховом пространстве данная задача может не иметь решения, построил Дедонне [47].

В работе [93] имеется пример аналогичного эффекта в гильбертовом пространстве. Более того, как показал Годунов [56], в любом бесконечномерном банаховом пространстве имеется система указанного вида с непрерывной правой частью, не имеющая решений. Последнее означает, что справедливость теоремы существования Пеано эквивалентна конечномерности пространства.

Рассмотрим задачу Коши для функции $u(t, z)$:

$$\partial_t^m u = f(t, x, u, \partial_x^\alpha \partial_t^j u), \quad \partial_t^k u\,|_{t=0} = \varphi_k(x); \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

Здесь $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1$, каждая из компонент вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ принадлежит множеству $\mathbb{Z}_+$. Функция u может быть векторнозначной: $u = (u_1, \ldots, u_N)$; f – некоторая нелинейная функция ($N-$вектор), зависящая от t, x, u и всех производных от u порядка $\leqslant m$ вида

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j u, \quad |\alpha| + j \leqslant m, \quad j < m,$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Если функция f аналитична по всем своим аргументам, и функции φ_k тоже аналитичны, то теорема Коши — Ковалевской гарантирует существование единственного аналитического решения в окрестности любой начальной точки $(x^0, 0)$.

Несколько человек независимо друг от друга заметили, что в случае линейной системы уравнений не обязательно требовать аналитичность по t. Именно, если f – всего лишь непрерывная функция от t (значениями которой являются функции, аналитические по остальным переменным), то в окрестности точки $(x^0, 0)$ существует единственное решение $u(t, x)$, представляющее собой непрерывно дифференцируемую функцию от t, значения которой являются аналитическими функциями от x. В общей абстрактной формулировке (абстрактная формулировка теоремы Коши — Ковалевской обсуждается ниже) этот результат был получен в работе Т. Яманаки [92], а затем заново Л. В. Овсянниковым [26] (изложение вопроса и различные приложения можно найти в работе Ж. Ф. Трева [88]). Этот результат и его доказательство являются прямыми обобщениями соответствующих результата и доказательства Гельфанда и Шилова [3] для случая уравнений, коэффициенты которых не зависят от t.

Развернутое исследование корректности различных линейных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в различных шкалах банаховых пространств содержится в [5].

С тех пор, как в работах Яманаки и Овсянникова задача Коши — Ковалевской стала изучаться в абстрактной постановке в шкале банаховых пространств, в этой теории наметились параллели с теорией задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

С точки зрения функционального анализа, рассматриваемая задача определена на шкале банаховых пространств E_s, каждое из которых состоит из вектор-функций $u(z)$, голоморфных в поликруге B_{Rs}, $\quad 0 < s < 1$ и непрерывных в замыкании этого поликруга. Пространства E_s снабжены нормами равномерной сходимости, которые мы обозначаем через $\|\cdot\|_s$.

Отметим, что в силу оценок Коши

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial z_j}\Big\|_s \leqslant \frac{c}{\delta}\|u\|_{s+\delta}, \quad \delta > 0$$

(здесь и далее несущественные положительные постоянные мы будем обозначать одной и той же буквой c) операция дифференцирования оказывается ограниченным оператором

$$\frac{\partial}{\partial z_j} : E_{s+\delta} \to E_s, \quad \delta > 0.$$

После определенных преобразований это обстоятельство позволяет перейти к абстрактной формулировке задачи Коши — Ковалевской.

В шкале банаховых пространств $\{(E_s, \|\cdot\|_s)\}_{0<s<1}$,

$$E_{s+\delta} \subseteq E_s, \quad \|\cdot\|_s \leqslant \|\cdot\|_{s+\delta}$$

рассмотрим следующую задачу

$$u_t = f(t,u), \quad u\mid_{t=0} = 0.$$

Здесь отображение $f(t,\cdot) : E_{s+\delta} \to E_s$ липшицево:

$$\|f(t,u) - f(t,v)\|_s \leqslant \frac{c}{\delta}\|u-v\|_{s+\delta}$$

и непрерывно по $t \in [0,1]$.

В такой постановке задача была исследована Ниренбергом [72]. В предположении сильной дифференцируемости отображения f по второй переменной он доказал существование и единственность решения данной задачи. В своем доказательстве Ниренберг использовал итерационную процедуру Ньютоновского типа, следуя при этом идеям А. Н. Колмогорова [15] и Ю. Мозера [68].

Нишида [71] модифицировал технику Ниренберга, что позволило ему отказаться от сильной дифференцируемости и оставить лишь липшицевость отображения f.

М. В. Сафонов [77] на основе указанной шкалы построил банахово пространство, в котором абстрактная теорема существования и единственности в формулировке Нишиды доказывается с помощью принципа сжатых отображений. Методологически этот результат Сафонова очень важен, ибо он устанавливает связь между теоремой Коши — Ковалевской и теоремой Коши — Пикара для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Актуальность получения аналога теоремы Пеано для задачи Коши - Ковалевской в нелипшицевой постановке обусловлена, в частности, этой связью.

В работе [7] задача Коши — Ковалевыской рассматривается для системы из бесконечного числа дифференциальных уравнений, правые части которых аналитичны по всем переменным, кроме времени. Однако в целом эта система не является, вообще говоря, липшицевой как задача в функциональном пространстве. Кроме теорем существования, в данной работе предлагаются эффективные методы оценки времени существования решения.

Актуальность результатов главы III

В этой главе дано определение абстрактного параболического уравнения в шкале банаховых пространств и доказана теорема существования решения для соответствующей начальной задачи.

Эта теорема позволяет, в частности, рассматривать уравнение Навье — Стокса как параболическую задачу.

Исследование параболических задач в шкалах банаховых пространств началось с работ [37, 45]. В работе [37] рассматривается квазилинейное параболическое уравнение в шкале банаховых пространств и доказывается теорема существования и единственности для случая нелинейности с критическим ростом. Нелинейность является липшицевой. Отметим, что построение шкалы банаховых пространств в данной работе существенно отличается от нашего.

В работе [45] рассматриваются квазилинейные параболические уравнения с нелипшицевой нелинейностью в частично упорядоченных пространствах. Результаты этой работы вытекают из теорем главы III. Также из результатов этой главы вытекают теоремы работы [48], в которой полулинейное параболическое уравнение с нелипшицевой нелинейностью рассматривается с точки зрения принципа сравнения.

Глава III посвящена квазилинейным параболическим уравнениям с нелипшицевыми нелинейностями. В классической постановке квазилинейная начальная параболическая задача ставится следующим образом:

$$u_t = f(t, u, \nabla^k u) + Au, \quad u|_{t=0} = \hat{u}. \tag{1}$$

Здесь A – линейный эллиптический оператор порядка n, а член $\nabla^k u$ обозначает производные функции u до порядка k включительно. Кроме того, к уравнению (1) нужно добавить граничные условия.

Если функция $\hat{u}$ принадлежит подходящему пространству, отображение f является липшицевым (в некотором смысле) и $k < n$, то задача (1) имеет единственное локальное по времени решение. Это легко выводится при помощи принципа сжимающих отображений.

Мы рассматриваем случай, когда функция f не является липшицевой и, в отличие от работы [45], действует из одной шкалы банаховых пространств в другую. Хорошо известно (см. [4, 47, 93]), что в общем случае бесконечномерного банахового пространства начальная задача для дифференциального уравнения с нелипшицевой правой частью не имеет решений. Тем не менее, начальная задача, как правило, ставится не в одном банаховом пространстве, а в шкале таких пространств. Более того, пространства в шкале вполне непрерывно вложены. Таковы, например, шкала соболевских пространств, шкала пространств аналитических функций. Это подсказывает нам, что искать решение надо, изучая задачу во всей шкале.

Отметим еще одно свойство уравнений вида (1). Если мы опустим предположение о липшицевости f, то получим класс систем, для которых теорема существования справедлива даже в случае $k \geqslant n$. Системы такого типа остаются параболическими (в некотором обобщенном смысле).

Этот эффект имеет место не только для параболических уравнений. Если рассмотреть задачу Коши — Ковалевской в нелипшицевой постановке (см. [94]), то найдутся такие уравнения, что порядок производных в их правой части выше, чем в левой, а решение тем не менее существует.

Такие задачи относятся не к теории классических уравнений в частных производных, а к теории функционально-дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с нелокальными членами.

Актуальность результатов главы IV

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Вектор-функция v определена в прямом произведении отрезка $[-T, T]$ и области $Q \subseteq \mathbb{R}^m$.

Векторное поле v обычно считается непрерывным и липшицевым по второму аргументу:

$$\|v(t, x') - v(t, x'')\| \leqslant c\|x' - x''\|.$$

В этом случае задача имеет единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0 \in Q$. Этот факт известен как теорема Коши — Пикара.

В общем случае решение $x(t)$ определено не на всем отрезке $[-T, T]$,а только на его подотрезке достаточно малой длины. Отметим, что в условиях теоремы Коши — Пикара решение $x(t)$ непрерывно зависит от начальных данных x_0.

Как сама теорема Коши — Пикара, так и ее доказательство дословно переносятся со случая $x \in \mathbb{R}^m$ на случай, когда x принадлежит бесконечномерному банаховому пространству.

При отказе от предположения липшицевости задача чрезвычайно усложняется. Так, например, известно, что в бесконечномерном банаховом пространстве задача может не иметь решений при заданном начальном условии [93], [56]. В конечномерном случае существование решения гарантируется теоремой Пеано. При этом, если векторное поле v только непрерывно в $[-T, T] \times Q$, то одним и тем же начальным данным x_0 может соответствовать несколько решений.

Однако, если по каким-то причинам при каждом начальном условии x_0 решение единственно, то оно непрерывно зависит от x_0.

Вопросы единственности решений рассматривались во многих работах. Насколько известно автору, эти исследования начались с работ Камке [59] и Леви [62]. Их результаты в дальнейшем обобщались в различных направлениях (см., например, работы [75], [43] и ссылки, которые они содержат).

Случай, когда векторное поле v принадлежит пространствам Соболева (по крайней мере $H^{1,1}$), рассмотрен в работе [49] в связи с уравнением Навье — Стокса. В этой работе получен ряд теорем о существовании и единственности решений и характере их зависимости от начальных данных.

Предположим, что решение нашей задачи не единственно при некотором x_0, тогда существует много способов выбрать решение $x(t)$ такое, что $x(0) = x_0$. Можно показать, что в конечномерном случае одним начальным данным может соответствовать не более континуума решений. Это следует из того, что множество решений, определенных на интервале $[-\tau, \tau] \subseteq [-T, T]$ и удовлетворяющих условию $x(0) = x_0$, является компактным метрическим пространством относительно нормы $C[-\tau, \tau]$, а метрический компакт не может иметь мощность, большую континуума [51]. При этом известны примеры, когда через одну точку x_0 проходит континуум решений.

Множество начальных данных, при которых решение не единственно, исследовалось в работе [80]. Основной результат этой работы состоит в том, что это борелевское множество класса $F_{\sigma\delta}$.

Так или иначе, для каждого начального условия x_0 мы можем выбрать решение $x(t), \quad x(0) = x_0$ и записать

$$x(t) = x(t, x_0), \quad x(0, x_0) = x_0.$$

Это тривиальное, на первый взгляд, соображение основано на аксиоме выбора.

Из анализа мы знаем, что с помощью аксиомы выбора можно получить очень нерегулярные функции. Достаточно вспомнить, что неизмеримые функции на $\mathbb{R}$ существуют именно благодаря аксиоме выбора.

Таким образом, ожидать a priori от функции $x_0 \mapsto x(t, x_0)$ каких-либо "хороших"свойств не стоит. Это приводит к вопросу о том, можно ли для каждого начального условия так выбрать решение, чтобы зависимость $x(t, x_0)$ была все-таки регулярной в каком-либо смысле.

Оказывается, что "общее"решение $x(t, x_0)$ можно выбрать так, что оно окажется измеримой по Борелю функцией начальных данных. Одним из следствий этого наблюдения является теорема существования обобщенного решения для уравнения переноса. Обсуждению этих вопросов посвящена настоящая глава.

Актуальность результатов главы V

В этой главе мы доказываем несколько теорем, касающихся базиса Шаудера в пространствах Фреше. С помощью этих теорем мы получаем теоремы о компактности, которые позволяют решать в пространствах Фреше определенный класс эволюционных задач и получать эффективные оценки времени существования решения. Соответствующая техника называется мажорантным методом, она подробно рассмотрена в главе VI на содержательном примере. Отметим только, что данная техника обобщает мажорантный метод, созданный Вейерштрассом и использованный Ковалевской при доказательстве ее знаменитой теоремы.

Вообще говоря, базис Шаудера существует даже не во всех сепарабельных банаховых пространствах [52]. А в тех, в которых он существует, он мало пригоден для доказательства теорем существования дифференциальных уравнений. Исключение составляют лишь гильбертовы пространства.

Однако, если не ограничиваться изучением эволюционных задач в банаховых пространствах, а перейти к локально выпуклым пространствам, то ситуация сильно меняется.

Важным примером пространства Фреше с безусловным базисом Шаудера является пространство функций, голоморфных в открытом поликруге с центром в нуле, снабженное топологией компактной сходимости. Безусловный базис Шаудера в этом пространстве состоит из функций

$$\{z_1^{k_1}, \dots, z_m^{k_m}\}, \quad (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Многомерные ряды Лорана [29] тоже доставляют пример разложения элемента пространства Фреше по безусловному базису Шаудера.

Система $\{e^{i(k,x)}\}, \quad k \in \mathbb{Z}^m$ образует безусловный базис Шаудера в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{T}^m)$.

Приложения методов этой главы к дифференциальным уравнениям на идейном уровне тесно примыкают к методам, рассмотренным в главе II. В связи с этим отметим, что в работе [65] имеется ряд примеров и общих теорем о несуществовании решений нелипшицивых уравнений в локально выпуклых пространствах. В частности, там рассматриваются пространства последовательностей с различными системами полунорм. В этих пространствах строятся примеры несуществования, обобщающие задачу (II.2).

Однако, с помощью мажорантного метода в пространствах Фреше с базисом Шаудера можно получать конструктивные оценки времени существования решений и строить классы систем, для которых решения существуют. Соответствующие примеры рассмотрены в этой главе.

Актуальность результатов главы VI

Метод непрерывного усреднения создан Д. В. Трещевым. Он также построил и решил мажорантную задачу для уравнений метода непрерывного усреднения. Теоретико-функциональный анализ уравнений метода непрерывного усреднения и мажорантной задачи выполнен автором этой диссертации.

В главе VI на основе развитой выше техники доказывается теорема существования решения для системы уравнений метода непрерывного усреднения.

Система уравнений, которую мы будем исследовать в этой главе, является липшицевой. Однако ее анализ вполне вписывается в построенную выше схему рассуждений. Эти рассуждения не используют липшицевость. Она отвечает только за единственность решения.

Мажорантный метод доказательства существования и единственности аналитических решений начальной задачи для линейных уравнений в частных производных впервые был применен О. Коши в 1842 году. В 1874 году с помощью усовершенствованной версии этого метода С. В. Ковалевская решила задачу Коши в нелинейной постановке[1].

Поясним суть мажорантного метода на примере скалярной задачи:

$$\begin{cases} u_t & = & f(u, u_z, z, t), \\ u\,|_{t=0} & = & u_0(z), \end{cases} \tag{2}$$

где функция u_0 аналитична по z в нуле:

$$u_0(z) = \sum_k u_{0k} z^k,$$

[1] С разными версиями истории теоремы Коши — Ковалевской можно познакомиться по книгам [14, 18].

функция $f(u,v,z,t)$ аналитична в точке $(u_0,v_0,0,0)$:

$$f(u,v,z,t)=\sum_{i,j,m,n} f_{i,j,m,n}(u-u_0)^i(v-v_0)^j z^m t^n,$$

где $u_0=u_0(0)$ и $v_0=(u_0)_z(0)$. Будем искать решение задачи (2) в виде ряда по степеням z и t:

$$u(t,z)=\sum_{i,j} u_{i,j}z^i t^j. \tag{3}$$

Подставляя этот ряд в (2), мы получим рекуррентную систему алгебраических уравнений, из которой последовательно и однозначно находятся коэффициенты $u_{i,j}$. Для доказательства сходимости ряда (3) Ковалевская, пользуясь мажорантными функциями, предложенными Вейерштрассом, построила мажорантную задачу

$$\begin{cases} U_t &= F(U,U_z,z,t),\\ U\,|_{t=0} &= U_0(z), \end{cases} \tag{4}$$

решение которой $U(t,z)$ находится в явном виде. Здесь $U_0(z)=\sum_k U_{0k}z^k$,

$$F(U,V,z,t)=\sum_{i,j,m,n} F_{i,j,m,n}(U-U_0)^i(V-V_0)^j z^m t^n,$$

и $U_0=U_0(0)$, $V_0=(U_0)_z(0)$. Функции F и U_0 таковы, что $|u_{0k}|\leqslant U_{0k}$ и $|f_{i,j,m,n}|\leqslant F_{i,j,m,n}$. Соответствующий ряд

$$U(t,z)=\sum_{i,j} U_{i,j}t^i z^j \tag{5}$$

сходится в некотором бикруге. Сравнивая рекуррентные формулы для коэффициентов $u_{i,j}$ и $U_{i,j}$, убеждаемся, что $|u_{i,j}|\leqslant U_{i,j}$, поэтому ряд (3) сходится в том же бикруге.

В силу своей универсальности мажорантная система (4) дает лишь очень грубые оценки области сходимости ряда (3). Для улучшения этих оценок можно, следуя Пуанкаре, строить каждый раз свою систему (4), учитывая специфику задачи (2). Если же нужно получить точные оценки действительного промежутка времени существования решения, этот способ не подходит, так как круг в плоскости комплексного времени, в котором сходится решение, может оказаться ограниченным из-за комплексных особенностей, в то время как в действительном направлении решение можно продолжать и дальше. Для этого естественно раскладывать решение задачи (2) в ряд лишь по пространственной переменной z с коэффициентами, зависящими от t, и строить мажоранты для такого ряда (мажоранты по пространственной переменной z). Однако это приводит к системе из бесконечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений на эти коэффициенты, которая не является рекуррентной, и поэтому техника доказательства соответствующих утверждений совершенно иная.

Теоремы существования и единственности, освобожденные от требования аналитичности правых частей задачи (2) по времени, при различных предположениях получены в работах [25,77]. Однако указанные результаты по-прежнему локальны по t.

В ряде задач динамики [28, 74] возникает необходимость в доказательствах теорем существования решений для систем из бесконечного числа уравнений в частных производных, а также в получении довольно точных оценок (не вытекающих, в частности, из общих результатов вида [25, 77]) действительных промежутков времени существования решений в конкретных системах. Кроме того, необходимыми оказываются мажорантные оценки этих решений.

В этой главе на примере дифференциальных уравнений непрерывного усреднения обосновывается метод мажорант по пространственным переменным в приложении к системам из счетного числа уравнений в частных производных, правые части которых представляют собой непрерывные отображения пространства аналитических функций в себя.

В более классической постановке (уравнений – конечное число, правые части – аналитические функции по всем своим аргументам, кроме времени) мажорантный метод рассматривался в работе [20].

Отметим, что ниже получена теорема существования, единственность же решения в конкретных задачах может быть доказана, например, с помощью результатов работы [77].

Новизна результатов

Результаты глав II,III, IV,V,VI являются новыми.

Глава I в основном содержит стандартный аппарат теории локально выпуклых пространств, который используется в дальнейшем.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы.

Апробация результатов

Результаты диссертационной работы излагались на семинаре в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН под руководством академика РАН С. М. Никольского и чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцева; на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова: под руководством М. И. Вишика, под руководством В. А. Кондратьева, под руководством академика РАН В. В. Козлова и чл.-корр. РАН Д. В. Трещева, под руководством Е. В. Радкевича; на семинаре факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством академика РАН В. А. Ильина; на семинаре в Российском университете дружбы народов под руководством А. Л. Скубачевского; на семинаре в Московском энергетическом институте под руководством Ю. А. Дубинского, семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений под руководством профессоров И.В. Асташевой, А.В. Боровских, Н.Х. Розова, И.Н. Сергеева; на семинаре под руководством академика РАН, профессора В. А. Садовничего; на семинаре кафедры общих проблем управления мехмата МГУ под руководством профессора А. В. Фурсикова.

Материалы диссертации были использованы в курсе "Математические методы механики сплошной среды прочитанном автором в 2006/2007 учебном году в Российском университете дружбы народов.

В осеннем семестре 2007/2008 года в Научно-образовательном центре Математического института им. В. А. Стеклова РАН по материалам диссертации автором был прочитан курс "Функциональные методы в нелинейных задачах математической физики".

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [9], [94], [10], [96], [8], [95], [100], [6], [98], [99], [7], [101], [86], [97], [12]; тезисах Четвертой международной конференции по дифференциальным и функционально -дифференциальным уравнениям.

O. Zubelevich On some abstract version of the Cauchy-Kovalewski problem. Тезисы Четвертой международной конференции по дифференциальным и функционально -дифференциальным уравнениям Москва. Математический институт им. В. А. Стеклова. — 2005. — С. 88;

а также в монографии [11] и книге [85] (совместно с Д.В. Трещевым).

Глава I

Предварительные сведения из теории локально выпуклых пространств

Результаты этой главы носят технический и методический характер и в основном известны. Они используются в последующих главах диссертации.

Подробности можно найти в прекрасных текстах Эдвардса [31] и Робертсонов [27].

1. Определения и примеры

Мы будем рассматривать ленейные пространства над полями действительных и комплексных чисел. Если не оговорено отдельно, то считается, что полем скаляров является $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. *Функция $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ называется полунормой, если для всех $x, y \in E$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнены следующие условия:*

1) $\|x\| \geqslant 0$,

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Очевидно, что $\|0\| = 0$.

Если полунорма единственна, то изучать пространство E не очень интересно: этот случай легко сводится к случаю нормированного пространства. Действительно, рассмотрим линейное пространство $M = \{x \in E \mid \|x\| = 0\} \subseteq E$, и определим на E/M норму формулой $\|\xi\|_M = \inf\{\|x\| \mid x \in \xi\}$.

Предположим, что для некоторого множества индексов Ψ в пространстве E определена система полунорм $\{\|\cdot\|_\psi\}, \quad \psi \in \Psi$. Эта система позволяет превратить E в топологическое пространство.

Можно проверить, что множества вида

$$U(F, \varepsilon) = \{x \in E \mid \|x\|_f \leqslant \varepsilon, \quad f \in F\},$$

где F произвольное конечное подмножество Ψ, задают базу окрестностей нуля в E.

Принципиальным в этой конструкции является то, что множества $U(F, \varepsilon)$ выпуклы.

Определение 1.2. *Хаусдорфово линейное топологическое пространство называется локально выпуклым, если в нем существует база окрестностей нуля, состоящая из выпуклых множеств.*

Можно показать, что во всяком локально выпуклом пространстве топология может быть определена с помощью некоторого семейства полунорм.

Топологические понятия удобно рассматривать в терминах полунорм. Так, хаусдорфовость означает, что для любой точки $x \in E$ найдется индекс ψ' такой, что $\|x\|_{\psi'} > 0$.

Определение 1.3. *Множество $M \subset E$ называется ограниченным, если*

$$\sup\{\|x\|_\psi \mid x \in M\} < \infty$$

для любого $\psi \in \Psi$.

Свойство множества быть ограниченным не зависит от того, какая именно система полунорм задает локально выпуклую топологию. Это следует из предложения 1.1 (см. ниже).

Определение 1.4. *Говорят, что локально выпуклое пространство обладает свойством Монтеля, если всякое ограниченное подмножество в нем относительно компактно.*

Отметим, что это определение несколько отличается от стандартного определения монтелевского пространства.

Пример 1.1. Через B_R обозначим открытый поликруг в $\mathbb{C}^m$ с центром в нуле и радиусом R

$$B_R = \{z = (z_1, \ldots, z_m) \mid \max_k |z_k| < R\}.$$

Пусть $\mathcal{O}(B_R)$ – пространство голоморфных функций $u : B_R \to \mathbb{C}$. Введем в этом пространстве локально выпуклую топологию с помощью полунорм $\|u\|_K = \max_{z \in K} |u(z)|$, где $K \subset B_R$ произвольный компакт. Такая топология называется топологией компактной сходимости.

Пример 1.2. Рассмотрим семейство нормированных пространств $\{E_\psi, \quad \|\cdot\|_\psi\}$, занумерованных индексом ψ из некоторого множества Ψ. Напомним, что прямым произведением $\prod_{\psi \in \Psi} E_\psi$ называется пространство отображений $u : \Psi \to \bigcup_{\psi \in \Psi} E_\psi$ таких, что $u(\psi) \in E_\psi$.

Введем в $\prod_{\psi \in \Psi} E_\psi$ топологию с помощью системы полунорм

$$\|u\|_F = \max\{\|u(\psi)\|_\psi \mid \psi \in F\},$$

где $F \subseteq \Psi$ – произвольное конечное подмножество.

Такая топология называется топологией поточечной сходимости, или тихоновской топологией.

Предположим, что в каждом из пространств E_ψ задан компакт K_ψ. Тогда по теореме Тихонова [51] множество $\prod_{\psi \in \Psi} K_\psi$ компактно в $\prod_{\psi \in \Psi} E_\psi$.

Рассмотрим два локально выпуклых пространства

$$(X, \{\| \cdot \|_\psi\}_{\psi \in \Psi}), \quad (Y, \{| \cdot |_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})$$

и линейный оператор $A : X \to Y$.

Определение 1.5. *Линейный оператор A называется ограниченным, если он переводит ограниченные множества в ограниченные.*

Линейный оератор A называется компактным, если он переводит ограниченные множества в относительно компактные.

Предложение 1.1. *Линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $\gamma \in \Gamma$ найдутся $\psi \in \Psi$ и константа c такие, что для любого $x \in X$ имеет место следующая оценка*

$$|Ax|_\gamma \leqslant c\|x\|_\psi.$$

Из этого утверждения следует, в частности, что всякий непрерывный оператор ограничен. Обратное, вообще говоря, неверно. Локально выпуклое пространство, каждое ограниченное линейное отображение которого непрерывно, называется борнологическим.

Предложение 1.2 ([27]). *Пусть E – векторное пространство, и v_γ для каждого индекса $\gamma \in \Gamma$ есть его линейное отображение в локально выпуклое пространство E_γ, причем*

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \ker v_\gamma = \{0\}.$$

Тогда в E существует слабейшая топология, в которой все v_γ непрерывны; пространство E, наделенное этой топологией, локально выпукло.

Если $\mathcal{V}_\gamma$ – базис абсолютно выпуклых окрестностей[1] *в E_γ, то всевозможные конечные пересечения множеств $v_\gamma^{-1}(V_\gamma), \quad V_\gamma \in \mathcal{V}_\gamma$ образуют базис абсолютно выпуклых окрестностей этой топологии в E. В этом случае говорят, что E является проективным пределом пространств E_γ относительно отображений v_γ.*

2. Метризуемые пространства

Важным подклассом локально выпуклых пространств являются метризуемые локально выпуклые пространства. Это пространства, в которых топология может быть эквивалентным образом задана с помощью метрики. Этим свойством обладают те и только те локально выпуклые пространства, которые имеют счетный базис выпуклых окрестностей нуля, или эквивалентно, топология в которых может быть задана с счетным набором полунорм.

Если у нас имеется локально выпуклое пространство E со счетным набором полунорм $\{\|\cdot\|_k, \quad k \in \mathbb{N}\}$, то одна из возможных метрик, задающих топологию, вычисляется по формуле:

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min\{1, \|x-y\|_k\}.$$

Важно отметить, что не всякое локально выпуклое пространство метризуемо. Проверим, что пространство примера 1.2, вообще говоря, не является метризуемым.

[1]Множество V называется абсолютно выпуклым, если оно выпукло и и из того, что $x \in V$, следует, что $\lambda x \in V$ при всех $\lambda, \quad |\lambda| \leqslant 1$.

Действительно, пусть, например, $E_\psi = \mathbb{R}$ при всех $\psi \in \Psi = [0, 2\pi]$. Последовательность функций

$$\{\sin n\psi\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{I.1}$$

содержится во множестве $K = [-1, 1]^{[0,2\pi]} \subset \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$.

По теореме Тихонова множество K компактно в топологии поточечной сходимости. Если бы пространство $\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ было метризуемо, то последовательность (I.1) содержала бы сходящуюся подпоследовательность. Покажем, что это не так. От противного, пусть найдется подпоследовательность $u_i(\psi) = \sin n_i\psi$, которая поточечно сходится к функции $f(\psi)$. Но тогда, по теореме Лебега [16] $u_i \to f$ в $L^2[0, 2\pi]$.

Рассмотрим тождество

$$\|u_i - f\|^2_{L^2[0,2\pi]} = \|u_i\|^2_{L^2[0,2\pi]} - 2(u_i, f)_{L^2[0,2\pi]} + \|f\|^2_{L^2[0,2\pi]}.$$

Поскольку $\|u_i\|^2_{L^2[0,2\pi]} = \pi$, и по свойствам коэффициентов Фурье

$$(u_i, f)_{L^2[0,2\pi]} \to 0,$$

получаем противоречие.

Этот пример показывает, в частности, что в случае неметризуемых пространств "языка последовательностей"недостаточно для описания топологических объектов.

Однако, если предположить, что количество сомножителей в прямом произведении счетно, т.е. $\Psi = \mathbb{N}$, то пространство $\prod_{k\in\mathbb{N}} E_k$ метризуемо. Метрика задается формулой

$$d(f, g) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min\{1, \|f(k) - g(k)\|_k\}.$$

Определение 2.1. *Локально выпуклое пространство E называется пространством Фреше, если оно метризуемо и каждая последовательность Коши в нем имеет предел.*

В метризуемом пространстве топологические понятия можно формулировать в терминах сходящихся последовательностей.

Определение 2.2. *Говорят, что последовательность x_n сходится к x, если $\|x_n - x\|_k \to 0$ при любом $k \in \mathbb{N}$.*

Последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Коши, если для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\|x_m - x_j\|_k \to 0, \quad m, j \to \infty$.

Легко видеть, что последовательность x_n сходится к x тогда и только тогда, когда $d(x_n, x) \to 0$.

Свойство последовательности сходиться или быть последовательностью Коши не зависит от выбора системы полунорм в метризуемом пространстве. Действительно, пусть кроме системы полунорм $\{\|\cdot\|_k\}$ в E имеется еще система полунорм $\{|\cdot|_n\}$, и эти полунормы задают в E одну и ту же топологию. Тогда тождественный оператор $\mathrm{id} : (E, \{\|\cdot\|_k\}) \to (E, \{|\cdot|_n\})$ является линейным гомеоморфизмом, и независимость уакзанных свойств последовательности вытекает из предложения 1.1.

Предложение 2.1. *В метризуемом пространстве E множество $K \subset E$ компактно тогда и только тогда, когда всякая последовательность из K содержит подпоследовательность, которая сходится к элементу K.*

Пространство $\mathcal{O}(B_R)$ из примера 1.1 метризуемо. Эквивалентная топология в нем задается счетным семейством полунорм

$$|u|_s = \max_{z \in \overline{B}_s} |u(z)|, \quad s \in \{R(1 - 1/n) \mid n = 2, 3, \ldots\}.$$

Пространство $\mathcal{O}(B_R)$ обладает свойством Монтеля. Это непосредственно следует из теоремы Монтеля [30].

3. Теорема Шаудера — Тихонова в метризуемом пространстве

В этом и следующем разделе мы приведем элементарное доказательство теоремы Шаудера-Тихонова для случая метризуемых пространств [9].

Поскольку среди локально выпуклых пространств в приложениях наиболее часто встречаются именно метризуемые пространства, кажется целесообразным иметь простое доказательство теоремы Шаудера — Тихонова, которое, в частности, не опирается на лемму Цорна.

В общем случае стандартное доказательство теоремы Шаудера — Тихонова основано на лемме Цорна. В этом доказательстве лемма Цорна играет принципиальную роль и не может быть заменена более элементарными соображениями, даже если пространство конечномерно.

Однако, если заметить, что компакт в метризуемом пространстве гомеоморфен компакту некоторого нормированного пространства, то теорема Шаудера-

Тихонова для метризуемого пространства оказывается следствием теоремы Шаудера о неподвижной точке и, в частности, не использует лемму Цорна [9].

Пусть E – локально выпуклое пространство и C – его замкнутое выпуклое подмножество. Будем считать отображение $f : C \to C$ непрерывным и компактным. Последнее означает, что существует компакт $K \subseteq C$, для которого $f(C) \subseteq K$.

Теорема Шаудера — Тихонова формулируется следующим образом.

Теорема 3.1 ([33], [83]). *При сделанных предположениях, отображение f имеет неподвижную точку: существует элемент $\hat{x} \in K$ такой, что $f(\hat{x}) = \hat{x}$.*

В частном случае, когда пространство E нормировано, эта теорема была ранее получена Шаудером. Доказательство теоремы Шаудера можно найти в монографии Л. Ниренберга [25]. В этой книге доказательство проведено в предположении банаховости E, однако оно дословно переносится на случай нормированного E.

Имеются многочисленные версии теоремы Шаудера — Тихонова, см. например [44]. Свою наиболее законченную форму эта теорема приобрела в работе [46]. В этой работе теорема 3.1 доказана без предположения локальной выпуклости E.

Отличительная черта локально выпуклого пространства E состоит в том, что его геометрия хорошо описывается в терминах топологически сопряженного пространства E'. Это связано с тем, что топологически сопряженные пространства к локально выпуклым оказываются достаточно большими.

Так, например, если $A, B \subset E$ – непересекающиеся выпуклые множества и A открыто, то найдется функционал $f \in E'$, который разделяет эти множества, т. е. $f(A) \bigcap f(B) = \emptyset$ [27].

Если топологическое векторное пространство не является локально выпуклым, то сопряженное к нему пространство может состоять только из нулевого элемента. Стандартным примером этого рода является пространство

$$L^p(0,1), \quad 0 < p < 1$$

см. [31]. Топология в этом пространстве (после соответствующей факторизации) задается метрикой

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx.$$

4. Компакты в метризуемых пространствах

Пусть $(E, \{\|\cdot\|_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ – отделимое метризуемое пространство.

Теорема 4.1. *Пусть $K \subset E$ – компактное множество. Существует линейное пространство $F \subseteq E$, $\quad K \subset F$, на котором определена норма $\|\cdot\|$ такая, что вложение*

$$\varphi : (F, \|\cdot\|) \to (E, \{\|\cdot\|_k\}_{k\in\mathbb{N}})$$

непрерывно и является гомеоморфизмом между K с топологией, индуцированной нормой $\|\cdot\|$, и K с топологией, индуцированной полунормами $\{\|\cdot\|_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Доказательство. Всякая полунорма $\|\cdot\|_k$ является непрерывной функцией и потому достигает своего максимума на K:

$$m_k = \max\{1, \max_{x\in K} \|x\|_k\}.$$

Рассмотрим систему полунорм $\|\cdot\|'_k = m_k^{-1}\|\cdot\|_k, \quad k \in \mathbb{N}$. Эта система полунорм задает в E топологию, эквивалентную исходной. Действительно, последовательность сходится по полунормам $\{\|\cdot\|'_k\}$ тогда и только тогда, когда она сходится по полунормам $\{\|\cdot\|_k\}$.

Определим пространство F как линейную оболочку множества K. Зададим в F норму формулой

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|x\|'_k}{2^k}.$$

Поскольку полунормы $\{\|\cdot\|'_k\}$ не превосходят на K единицы, введенная функция определена для всех элементов из F. И так как пространство E отделимо, функция $\|\cdot\|$ невырождена: если $\|x\| = 0$, то $x = 0$.

Теперь доказательство теоремы следует из следующей леммы.

Лемма 4.1. *Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $\|z\| < \delta, \quad z \in F$, то $\|z\|'_k < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, N$.*

Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что если

$$\|x - y\|'_k < \delta, \quad k = 1, \dots, N, \quad x, y \in K,$$

то $\|x - y\| < \varepsilon$.

Докажем от противного первую часть леммы. Предположим, что существуют числа $\varepsilon \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $\delta > 0$ найдется $z \in F$, для которого верны неравенства: $\|z\| < \delta$ и $\|z\|'_n \geqslant \varepsilon$. Тогда

$$\delta > \|z\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Это неравенство противоречиво, если только δ достаточно мало.

Для доказательства второй части леммы зададимся малым $\varepsilon > 0$ и выберем N так, что $2\sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon/2$, а затем найдем $\delta > 0$ из условия $\delta < \varepsilon/2$. Здесь мы используем то, что для всякого $w \in K$ справедливо неравенство

$$\|w\|'_k \leqslant 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4.1 доказана.

Если E счетно нормировано, то, ввиду теоремы 4.1, для доказательства теоремы 3.1 достаточно применить теорему Шаудера о неподвижной точке к отображению $\varphi^{-1} f \varphi : C' \to C', \quad C' = C \bigcap F$ в нормированном пространстве F.

5. Теорема Шаудера — Тихонова в задачах с параметрами

В приложениях важно не только уметь решать нелинейные уравнения, но и устанавливать характер зависимости их решений от параметров задачи, например, от начальных данных в эволюционных дифференциальных уравнениях.

Если нелинейные уравнения решаются итерационными методами, например, с помощью принципа сжатых отображений, метода Ньютона — Канторовича и т. п., то проблем с характером зависимости решения от параметров, как правило, не возникает: при естественных предположениях указанные методы сходятся равномерно по параметрам задачи, а решение зависит от параметров непрерывно.

Совершенно иная ситуация возникает, если мы решаем уравнение методами компактности. Тогда единственности решения нет, и говорить о зависимости решения от параметров, на первый взгляд бессмысленно. Тем не менее, можно попытаться выделить из этой неединственности функциональную зависимость, которая описывалась бы средствами анализа.

В этом разделе мы рассмотрим задачу о неподвижной точке в следующей постановке.

Пусть E – пространство Фреше и C – его замкнутое выпуклое подмножество. Через (M, d) обозначим полное сепарабельное метрическое пространство[2]. Будем считать отображение $f : M \times C \to C$ непрерывным и предположим, что при любом $\lambda \in M$ отображение $f(\lambda, \cdot)$ компактно, т .е. найдется компакт $K_\lambda \subseteq C$, зависящий, вообще говоря, от λ такой, что $f(\lambda, C) \subseteq K_\lambda$.

Как мы знаем из теоремы 3.1, при каждом $\lambda \in M$ отображение f имеет неподвижную точку $f(\lambda, \hat{x}) = \hat{x} \in K_\lambda$. При этом одному λ может соответствовать бесконечное множество неподвижных точек.

Теорема 5.1. *При сделанных предположениях, существует измеримая по Борелю функция $x : M \to C$ такая, что $f(\lambda, x(\lambda)) = x(\lambda)$.*

Из общих теорем о борелевских отображениях [19] мы получаем следующее предложение.

Предложение 5.1. *Найдется такое множество первой категории $A \subset M$, что функция $x : M \backslash A \to C$ непрерывна.*

Доказательство теоремы 5.1. Эта теорема является следствием следующего топологического результата.

Теорема 5.2. *[1] Пусть X и Y польские пространства, $\Gamma \in X \times Y$ – борелевское множество, $\Gamma_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in \Gamma\}$ непусто и $\sigma-$компактно при всех $x \in X$. Тогда Γ содержит график некоторого борелевского отображения из X в Y.*

Действительно, пусть $X = M, \quad Y = C, \quad \Gamma = \{(\lambda, x) \mid f(\lambda, x) = x\}$.

В силу непрерывности f множество Γ замкнуто, и потому измеримо по Борелю.

По той же причине замкнуто множество $\Gamma_\lambda = \{x \in C \mid f(\lambda, x) = x\}$. Множество Γ_λ компактно, т.к. содержится в компактном множестве K_λ.

Теорема 5.1 доказана.

Применение рассуждений, применение рассуждений оссnúmeросновнных на теореме об изменримом выборе позволяет получать дополнительную информацию о зависимости решения от параметра в том случае, когда задача решается методами компактности, см. например, [99], [98].

[2]Такие пространства называются польскими.

6. Шкалы банаховых пространств

Введем следующее определение.

Определение 6.1. *Набор банаховых пространств* $\{(E_s, \|\cdot\|_s)\}_{s\in(0,1)}$ *мы будем называть шкалой, если выполнены следующие условия*

$$E_s \subseteq E_{s'}, \quad \|\cdot\|_s \geqslant \|\cdot\|_{s'}, \quad 0 < s' < s < 1.$$

Определение шкалы банаховых пространств не является стандартизованым. Оно вводится в различных статьях по-разному, в зависимости от удобства и рассматриваемых объектов. Например, возможны такие варианты:

$$s \in [0,1), [0,1], (0,1].$$

Неравенство иногда выглядит так: $\|\cdot\|_s \geqslant c_{s,s'}\|\cdot\|_{s'}$.

Шкале банаховых пространств сопоставлено пространство Фреше

$$E = \bigcap_{s\in(0,1)} E_s,$$

снабженное нормами $\{\|\cdot\|_s\}, \quad s \in (0,1)$

Пространство E действительно является пространством Фреше, ибо систему $\{\|\cdot\|_s\}$ можно заменить на эквивалентную систему из счетного набора норм, достаточно просто считать, что $s \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$.

Очевидно, пространство E является проективным пределом пространств E_s относительно вложений $\mathrm{id} : E \to E_s$.

Пример 6.1. В $\mathbb{C}^m$ введем норму формулой

$$\|w\| = \max_j |w_j|, \quad w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{C}^m.$$

Через $D \subset \mathbb{R}^m$ обозначим замкнутую область, и пусть

$$D_s = \{z = x + w \mid x \in D, \quad w \in \mathbb{C}^m, \quad \|w\| < sR\}, \qquad 0 < s < 1 \tag{I.2}$$

– комплексная окрестность этой области.

Пусть H_s– пространство функций $f : D_s \to \mathbb{C}$, аналитических в D_s и непрерывных в замыкании $\overline{D}_s$. Будучи снабжено нормой

$$\|f\|_s^H = \sup_{z\in D_s} |f(z)|$$

пространство H_s становится банаховым пространством. Пространства

$$H_s, \quad 0 < s < 1$$

образуют шкалу банаховых пространств.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_k} : H_{s'} \to H_s, \qquad 0 < s < s' < 1, \quad k = 1, \ldots, m.$$

В силу оценки Коши ([30]) имеем

$$\Big\| \frac{\partial}{\partial x_k} \Big\|_{H_{s'} \to H_s} \leqslant \frac{C}{s' - s}. \tag{I.3}$$

Константа Cв этой формуле не зависит от s и s'.

Свойство пространства Фреше быть полученным из шкалы банаховых пространств является наследственным в следующем смысле.

Предложение 6.1 ([85]). *Пусть $L \subseteq E$ – замкнутое подпространство. Тогда*

$$L = \bigcap_{s \in (0,1)} L_s,$$

где L_s – замыкание пространства L в E_s и $L_{s'} \subseteq L_s$ при $s' > s$.

Доказательство. Вложения $L \subseteq \bigcap_{s \in (0,1)} L_s, \quad L_{s'} \subseteq L_s$ очевидны.

Покажем, что $\bigcap_{s \in (0,1)} L_s \subseteq L$. Будем рассуждать от противного: предположим найдется точка $x \in \bigcap_{s \in (0,1)} L_s$ и $x \notin L$.

Это означает, что существуют последовательности $\{x_k^s\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L$ такие, что $\|x_k^s - x\|_s \to 0$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим возрастающую последовательность $s_j \to 1, \quad j \to \infty$. Для каждого j выберем номер k_j так, что

$$k_{j+1} > k_j, \quad \|x_{k_j}^{s_j} - x\|_{s_j} < 1/j.$$

Таким образом, последовательность $y_j = x_{k_j}^{s_j}$ сходится к элементу x по всем нормам $\{\| \cdot \|\}_s$. В силу замкнутости пространства L получаем $x \in L$. Противоречие.

Предложение доказано.

Предложение 6.2 ([85]). *Рассмотрим две шкалы банаховых пространств $\{(E_s, \| \cdot \|_s^E)\}$ и $\{(V_s, \| \cdot \|_s^V)\}$.*

Предположим, что для любого $s \in (0,1)$ найдется число $s' \in (0,1)$ такое, что вложение $E_{s'} \subseteq V_s$ компактно. Тогда вложение

$$E = \bigcap_{s\in(0,1)} E_s \subseteq V = \bigcap_{s\in(0,1)} V_s$$

тоже компактно.

*Доказательство.*Перенумеруем множество $Q = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ следующим образом

$$Q = \{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}.$$

Рассмотрим ограниченную последовательность $\{x_k\} \subset E$. Пусть s таково, что вложение $E_s \subset V_{s_1}$ компактно. Поскольку $\{x_k\}$ ограничена в E_s при любом s, найдется подпоследовательность $\{x_k^1\} \subseteq \{x_k\}$, которая сходится по норме $\|\cdot\|_{s_1}^V$. По тем же причинам существует подпоследовательность $\{x_k^2\} \subseteq \{x_k^1\}$, которая сходится по норме $\|\cdot\|_{s_2}^V$ и так далее.

Таким образом, диагональная последовательность $y_j = x_{s_j}^j$ сходится по всем нормам $\|\cdot\|_s^V$, а значит сходится в топологии V.

Предложение доказано.

Следствие 6.1. *Если все вложения $E_s \subseteq E_{s'}, \quad 0 < s' < s < 1$ компактны, то пространство E обладает свойством Монтеля.*

Действительно, в силу предложения 6.2 вложение $E \subseteq E$ компактно.

В заключение сформулируем полезную для дальнейшего теорему Асколи. Рассмотрим пространство $C([a,b],E)$ непрерывных функций, отображающих отрезок $[a,b]$ в E. Это пространство локально выпукло и топология в нем вводится полунормами

$$\|u(\cdot)\|_s^c = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_s, \qquad s \in (0,1).$$

Определение 6.1. Множество $G \subseteq C([a,b],E)$ назовем равностепенно непрерывным, если для любого $s \in (0,1)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $\delta > 0$ такая, что $\sup_{u\in G} \|u(t_1) - u(t_2)\|_s < \varepsilon$ для всех $t_1, t_2 \in [a,b], \quad |t_1 - t_2| < \delta$.

Теорема 6.1 (Асколи, [30])**.** *Предположим, что множество $W \subset C([a,b],E)$ равностепенно непрерывно и таково, что множество*

$$W_t = \{u(t) \mid u(t) \in W\} \subset E$$

компактно при каждом $t \in [a,b]$. Тогда W компактно $C([a,b],E)$.

7. Приложения к некоторым шкалам аналитических функций

Введем локально выпуклое пространство $H = \bigcap_{0<s<1} H_s$ с семейством полунорм $\{\|\cdot\|_s^H\}$ (см. пример 6.1).

Дадим другое описание пространства H.Рассмотрим открытую окрестность

$$D_1 = D(R) = \{z = x + w \mid x \in D, \quad w \in \mathbb{C}^m, \quad \|w\| < R\}$$

области D. Тогда H – это пространство голоморфных функций $f : D(R) \to \mathbb{C}$.

Напомним некоторые обозначения. Если $z = (z_1, \ldots, z_m) \in D(R)$ и $j = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, то мы будем писать

$$z^j = z_1^{j_1} \ldots z_m^{j_m}, \quad |j| = j_1 + \ldots + j_m, \quad \partial z^j = \partial z_1^{j_1} \ldots \partial z_m^{j_m}.$$

В силу (I.3) дифференциальный оператор n-го порядка:

$$D^n = \sum_{|j| \leqslant n} a_j(z) \frac{\partial^{|j|}}{\partial z^j} : H \to H, \qquad a_j \in H$$

непрерывен. Одно из следствий этого факта состоит в следующем. Множество $\ker D^n$ является замкнутым подпространством H, и таким образом, в силу предложения 6.1, пространство $\ker D^n$ тоже можно рассматривать как проективный предел некоторой шкалы банаховых пространств.

Теорема 7.1 (Монтель)**.** [3] *Вложения $H_{s'} \subset H_s, \ s < s'$ вполне непрерывны.*

Следствие 7.1. *Всякое ограниченное подмножество H относительно компактно.*

Действительно, по теореме Монтеля вложения $H_{s'} \subset H_s, \ \ s < s'$ вполне непрерывны. Следовательно, в силу предложения 6.2 вложение $H \subseteq H$ тоже вполне непрерывно.

Другие шкалы функциональных пространств

В этом разделе мы введем две специальные шкалы аналитических функций, которые понадобятся в дальнейшем.

[3]Общая формулировка теоремы Монтеля содержится в [30].

Первая шкала состоит из банаховых пространств $(G_s, \|\cdot\|_s^G)$. Пространство G_s – это пространство последовательностей функций $u = \{u_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $u_k \in H_s$, снабженное нормой

$$\|u\|_s^G = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \big\{(1+|k|^2)\|u_k\|_s^H\big\}. \tag{I.4}$$

Для любого $s < s'$ и $j = 1, \ldots, m$ введем оператор дифференцирования по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : G_{s'} \to G_s, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} u = \Big\{\frac{\partial}{\partial x_j} u_k(x)\Big\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Рассмотрим шкалу $(F_s, \|\cdot\|_s^F)$.Здесь банахово пространство F_s состоит из последовательностей $u = \{u_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\quad u_k \in H_s$ со следующей нормой

$$\|u\|_s^F = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)(\|u_k\|_s^H)^2}. \tag{I.5}$$

Непосредственно из формулы (I.3) следует, что

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial x_j} u\Big\|_s^F \leqslant \frac{C}{s'-s}\|u\|_{s'}^F, \qquad 0 < s < s' < 1. \tag{I.6}$$

Константа $C > 0$ не зависит от u, s, s'.

Предложение 7.1. *Вложения $G_{s'} \subset F_s$, $\quad 0 < s < s' < 1$ вполне непрерывны.*

Доказательство. Рассмотрим оператор проектирования $P_n u = \{u_k\}_{|k|\leqslant n}$, $u \in F_s$.

Пусть множество $W \subset G_{s'}$ ограничено. Следовательно, найдется константа $M > 0$ такая, что

$$\|w\|_{s'}^G \leqslant M \quad \text{для всех} \quad w = \{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in W.$$

Таким образом,

$$\|w_k\|_{s'}^H \leqslant \frac{M}{1+|k|^2}, \tag{I.7}$$

и множество $P_n(W)$ является ε-сетью для W в F_s. Действительно, рассмотрим элемент $w \in W$, в силу (I.7) получаем

$$(\|w - P_n w\|_s^F)^2 = \sum_{|k|>n} (\|w_k\|_s^H)^2(1+|k|^2) \leqslant M^2 \sum_{|k|>n} \frac{1}{1+|k|^2}.$$

Последнее выражение в этой формуле произвольно мало, если n достаточно велико.

По теореме Монтеля $P_n(W)$ относительно компактно в F_s. Таким образом, W относительно компактно в F_s.

Из теоремы 6.2 вытекает следующее следствие.

Следствие 7.2. *Вложение*

$$G \subset F, \quad G = \bigcap_{0<s<1} G_s, \quad F = \bigcap_{0<s<1} F_s$$

вполне непрерывно.

Введем в пространстве F_s структуру алгебры. Пусть $u = \{u_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in F_s$ и $v = \{v_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in F_s$.

Предложение 7.2. *Если набор констант $\{b_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ограничен:*

$$\sup_{m,n\in\mathbb{Z}} |b_{m,n}| \leqslant c_1 < \infty,$$

то F_s является банаховой алгеброй относительно умножения, заданного формулой:

$$uv = \Big\{ \sum_{m+n=k} b_{m,n} u_n v_m \Big\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Это означает, что

$$\|uv\|_s^F \leqslant c\, \|u\|_s^F\, \|v\|_s^F,$$

постоянная $c > 0$ зависит только от c_1.

Замечание 7.1. *Отметим, что это умножение конечно дистрибутивно, но, вообще говоря, не коммутативно и не ассоциативно. Алгебраические свойства введенного умножения зависят от констант $b_{m,n}$. В дальнейшем мы будем использовать это предложение в приложении только к случаю, когда константы $b_{m,n}$ таковы, что умножение коммутативно и ассоциативно.*

Proof. Введем две 2π-периодических функции

$$U(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|u_k\|_s^H e^{ikt}, \quad V(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|v_k\|_s^H e^{ikt}.$$

Эти функции принадлежат пространству Соболева[4] $H^1(\mathbb{T})$ и

$$\|u\|_s^F = \|U\|_{H^1(\mathbb{T})}, \quad \|v\|_s^F = \|V\|_{H^1(\mathbb{T})}.$$

[4]Пространство Соболева $H^1(\mathbb{T})$ – это банахово пространство, состоящее из рядов Фурье $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ikx}$ с конечной нормой $\|u\|^2_{H^1(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)|u_k|^2$ [82].

Так как пространство $H^1(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй относительно обычного умножения функций [32] ,получаем:

$$\begin{aligned}(\|uv\|_s^F)^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)\Big(\Big\|\sum_{m+n=k} b_{m,n}u_n v_m\Big\|_s^H\Big)^2 \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)\Big(\sum_{m+n=k}|b_{m,n}|\|u_n\|_s^H\|v_m\|_s^H\Big)^2 \\ &\leqslant c_1^2\,\|UV\|^2_{H^1(\mathbb{T})} \leqslant c^2\,\|U\|^2_{H^1(\mathbb{T})}\|V\|^2_{H^1(\mathbb{T})} = c^2\,(\|u\|_s^F)^2(\|v\|_s^F)^2. \end{aligned} \tag{I.8}$$

$\square$

Следствие 7.3. *Для любых $0 < s < s' < 1$ и $u, v, u', v' \in F_s$ имеем*

$$\Big\|u\frac{\partial v}{\partial x_j} - u'\frac{\partial v'}{\partial x_j}\Big\|_s^F \leqslant \frac{c\max\{\|v\|_{s'}^F, \|u'\|_{s'}^F\}}{s'-s}\,\big(\|u-u'\|_{s'}^F + \|v-v'\|_{s'}^F\big).$$

Положительная постоянная с зависит только от c_1.

Действительно, эта оценка легко следует из тождества

$$u\frac{\partial v}{\partial x_j} - u'\frac{\partial v'}{\partial x_j} = (u-u')\frac{\partial v}{\partial x_j} + u'\Big(\frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial v'}{\partial x_j}\Big)$$

и формулы (I.6).

Замечание 7.2. *В дальнейшем мы используем последовательности $w(z) = \{w_j(z)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, которые состоят не из скалярных функций $w_j(z)$, а из вектор-функций $w_j(z) = (w_{j,1}, \ldots, w_{j,q})(z)$.*

Пространства таких функций будут также обозначаться через G_s и F_s. Мы используем формулы (I.4) и (I.5), где $\|w_j\|_s^H = \sup_{z\in D_s}\|w_j(z)\|$, а $\|\cdot\|$ любая норма в $\mathbb{C}^q$.

Другой способ рассматривать векторно-значную последовательность функций $w = \{w_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ как элемент G_s или F_s – это просто растянуть ее в скалярно-значную последовательность:

$$(\ldots, w_{-1,1}, \ldots, w_{-1,q}, w_{0,1}, \ldots, w_{0,q}, w_{1,1}, \ldots, w_{1,q}, \ldots).$$

Все теоремы про пространства G_s и F_s остаются верными и в этом случае.

Глава II

Абстрактная задача Коши — Ковалевской

В этой главе мы излагаем в основном резульататы работ [94], [10].

8. Введение

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений центральное место занимают две теоремы существования, касающихся задачи

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m. \tag{II.1}$$

Первая теорема называется теоремой Коши-Пикара, она гарантирует существование и единственность решения данной задачи при условии, что функция f непрерывна по t и липшицева по x. Вторая теорема называется теоремой Пеано, она устанавливает существование решения в предположении, что функция f непрерывна.

Для того, чтобы гарантировать единственность, одной лишь непрерывности правой части недостаточно. Например, скалярная задача

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0,$$

имеет два решения: $x(t) = 0, \quad x(t) = t^2/4$.

Теорема Коши — Пикара доказывается с помощью принципа сжатых отображений. Доказательство теоремы Пеано несколько сложнее, оно основано на том, что всякое замкнутое ограниченное множество конечномерного пространства компактно.

Поскольку принцип сжатых отображений нечувствителен к размерности пространства, теорема Коши — Пикара легко обобщается на случай, когда переменная x лежит в произвольном банаховом пространстве.

Не так обстоит дело с теоремой Пеано. Первый пример того, что в бесконечномерном банаховом пространстве задача (II.1) может не иметь решения, построил Дедонне [47]. В его примере в пространстве c_0 (через c_0 мы обозначаем пространство сходящихся к нулю последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$ с нормой $\|x\| = \sup_k |x_k|$) рассматривается следующая задача

$$\dot{x}_k = \sqrt{|x_k|} + \frac{1}{k}, \quad x_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{II.2}$$

Непосредственным интегрированием этих уравнений легко убедиться, что эта задача не имеет решений в c_0.

В работе [93] имеется пример аналогичного эффекта в гильбертовом пространстве. Более того, как показал Годунов [56], в любом бесконечномерном банаховом пространстве имеется система вида (II.1) с непрерывной правой частью, не имеющая решений. Последнее означает, что справедливость теоремы существования Пеано эквивалентна конечномерности пространства.

Рассмотрим задачу Коши для функции $u(t, z)$:

$$\partial_t^m u = f(t, x, u, \partial_x^\alpha \partial_t^j u), \quad \partial_t^k u \mid_{t=0} = \varphi_k(x); \quad k = 0, \ldots, m-1. \tag{II.3}$$

Здесь $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1$, каждая из компонент вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ принадлежит множеству $\mathbb{Z}_+$. Функция u может быть векторнозначной: $u = (u_1, \ldots, u_N)$; f – некоторая нелинейная функция ($N-$вектор), зависящая от t, x, u и всех производных от u порядка $\leqslant m$ вида

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j u, \quad |\alpha| + j \leqslant m, \quad j < m,$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Если функция f аналитична по всем своим аргументам, и функции φ_k тоже аналитичны, то теорема Коши-Ковалевской гарантирует существование единственного аналитического решения в окрестности любой начальной точки $(x^0, 0)$.

Несколько человек независимо друг от друга заметили, что в случае линейной системы уравнений не обязательно требовать аналитичность по t. Именно, если f – всего лишь непрерывная функция от t (значениями которой являются функции, аналитические по остальным переменным), то в окрестности точки

$(x^0, 0)$ существует единственное решение $u(t, x)$, представляющее собой непрерывно дифференцируемую функцию от t, значения которой являются аналитическими функциями от x. В общей абстрактной формулировке (абстрактная формулировка теоремы Коши — Ковалевской обсуждается ниже) этот результат был получен в работе Т. Яманаки [92], а затем заново Л. В. Овсянниковым [26] (изложение вопроса и различные приложения можно найти в работе Ж. Ф. Трева [88]). Этот результат и его доказательство являются прямыми обобщениями соответствующих результата и доказательства Гельфанда и Шилова [3] для случая уравнений, коэффициенты которых не зависят от t.

В работе [87] (см. также [88]) Трев привел один нелинейный вариант абстрактной теоремы Коши — Ковалевской; этот вариант, однако, недостаточно силен, чтобы с его помощью можно было доказать существование (и единственность) решения (II.3) в случае, когда f является лишь непрерывно зависящей от t аналитической функцией остальных аргументов.

Развернутое исследование корректности различных линейных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в различных шкалах банаховых пространств содержится в [5].

С тех пор, как в работах Яманаки и Овсянникова задача Коши — Ковалевской стала изучаться в абстрактной постановке в шкале банаховых пространств, в этой теории наметились параллели с теорией задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем в пространстве $\mathbb{C}^p = \{z = (z_1, \dots, z_p)\}$ норму формулой $\|z\| = \max_k |z_k|$. Через B_R обозначим поликруг $B_R = \{z \in \mathbb{C}^p \mid \|z\| < R\}$.

Как известно, в аналитической (и даже гладкой) постановке задача (II.3) заменой переменных может быть приведена к следующей квазилинейной системе

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} = \sum_{k,j} a_{lkj}(t, z, u) \frac{\partial u_k}{\partial z_j} + h_l(t, z), \quad u\,|_{t=0} = 0. \qquad \text{(II.4)}$$

Здесь $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ – вектор-функция. Числа n, m, конечно, не совпадают уже с числами n, m из задачи (II.3).

Например, уравнение $u_t = u_x^2$ заменой $v = u_x$ приводится к системе

$$u_t = v^2, \quad v_t = 2vv_x.$$

Функции a_{lkj} и h_l голоморфны в поликругах радиуса $R > 0$ пространств $\mathbb{C}^{1+m+n}$ и $\mathbb{C}^{1+m}$ соответственно. По теореме Коши — Ковалевской, данная задача имеет решение $u(t, z)$, голоморфное в поликруге радиуса $r > 0$ пространства $\mathbb{C}^{1+m}$, и это решение единственно в классе аналитических функций.

С точки зрения функционального анализа, рассматриваемая задача определена на множестве банаховых пространств E_s, каждое из которых состоит из вектор-функций $u(z)$, голоморфных в поликруге B_{Rs}, $\quad 0 < s < 1$ и непрерывных в замыкании этого поликруга. Пространства E_s снабжены нормами равномерной сходимости, которые мы обозначаем через $\|\cdot\|_s$.

Отметим, что в силу оценок Коши

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial z_j}\Big\|_s \leqslant \frac{c}{\delta}\|u\|_{s+\delta}, \quad \delta > 0$$

(здесь и далее несущественные положительные постоянные мы будем обозначать одной и той же буквой c) операция дифференцирования оказывается ограниченным оператором

$$\frac{\partial}{\partial z_j} : E_{s+\delta} \to E_s, \quad \delta > 0. \tag{II.5}$$

Это обстоятельство позволяет перейти к абстрактной формулировке задачи Коши — Ковалевской.

В шкале банаховых пространств $\{(E_s, \|\cdot\|_s)\}_{0<s<1}$,

$$E_{s+\delta} \subseteq E_s, \quad \|\cdot\|_s \leqslant \|\cdot\|_{s+\delta} \tag{II.6}$$

рассмотрим следующую задачу

$$u_t = f(t, u), \quad u\,|_{t=0} = 0. \tag{II.7}$$

Здесь отображение $f(t, \cdot) : E_{s+\delta} \to E_s$ липшицево

$$\|f(t, u) - f(t, v)\|_s \leqslant \frac{c}{\delta}\|u - v\|_{s+\delta}$$

и непрерывно по $t \in [0, 1]$.

В такой постановке задача (II.7) была исследована Ниренбергом [72]. В предположении сильной дифференцируемости отображения f по второй переменной он доказал существование и единственность решения данной задачи. В своем доказательстве Ниренберг использовал итерационную процедуру Ньютоновского типа, следуя при этом идеям А. Н. Колмогорова [15] и Ю. Мозера [68].

Нишида [71] модифицировал технику Ниренберга, что позволило ему отказаться от сильной дифференцируемости и оставить лишь липшицевость отображения f.

М. В. Сафонов [77] на основе шкалы (II.6) построил банахово пространство, в котором абстрактная теорема существования и единственности в формулировке Нишиды доказывается с помощью принципа сжатых отображений. Методологически этот результат Сафонова очень важен, ибо он устанавливает связь между теоремой Коши — Ковалевской и теоремой Коши — Пикара для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Эта связь подсказывает идею исследовать задачу Коши — Ковалевской в нелипшицевой постановке с целью получить результаты типа теоремы Пеано для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Первые результаты в этом направлении содержатся в [41]. В этой работе предполагается, что отображение f правой части уравнения (II.7) сохраняет порядок сингулярности, т. е. неравенство

$$\|u\|_s \leqslant \frac{R}{(1-s)^k}$$

влечет

$$\|f(t,u)\|_{s'} \leqslant \frac{C}{(s-s')^k}$$

при всех $t \in (-T, T)$.

В работе [23] теорема типа Пеано для задачи (II.7) получена в существенном предположении того, что функция f определена для всех $u \in E_s$.

Ниже мы доказываем теорему типа теоремы Пеано для абстрактной задачи Коши-Ковалевской. При этом мы обобщаем на случай шкалы банаховых пространств не систему (II.3) с нелинейной правой частью, а квазилинейную систему (II.4).

Как уже отмечалось выше, основная трудность при обобщении теоремы Пеано для обыкновенных дифференциальных уравнений на бесконечномерный случай состоит в том, что шар в бесконечномерном банаховом пространстве некомпактен. Поэтому вместо банахова пространства приходится использовать специальное локально выпуклое пространство.

Основное наблюдение состоит в следующем. Рассмотрим шкалу банаховых пространств (II.6). Если, как и выше, пространства E_s состоят из аналитических функций, то, в силу теоремы Монтеля, вложения (II.6) компактны. Для абстрактной шкалы мы примем этот факт как аксиому.

Рассмотрим линейное пространство $E = \bigcap_{0<s<1} E_s$. Это пространство является пространством Фреше [27] относительно топологии определенной нормами

$\{\|\cdot\|_s\}_{0<s<1}$. Эквивалентным образом пространство E может быть определено как проективный предел пространств $\{E_s\}$.

Оказывается, пространство E обладает свойством Монтеля, это следует из следствия 6.1. Этот факт показывает, что в смысле свойств компактности, пространство E ближе к конечномерным пространствам, чем бесконечномерное банахово пространство. Это и делает возможным обобщение теоремы Пеано на случай уравнений в шкале банаховых пространств.

9. Основная теорема

Пусть $\{(E_s, \|\cdot\|_s)\}_{0<s<1}$ – шкала банаховых пространств:

$$E_{s+\delta} \subseteq E_s, \quad \|\cdot\|_s \leqslant \|\cdot\|_{s+\delta}, \quad s+\delta<1, \quad \delta>0. \tag{II.8}$$

Мы предполагаем, что все вложения (II.8) компактны. Такое предположение справедливо для пространств аналитических функций, пространств Соболева и многих других.

Пусть $B_s(r) = \{u \in E_s \mid \|u\|_s < r\}$ – открытый шар в E_s и $\overline{B}_s(r)$ – его замыкание.

Будем считать, что для некоторых положительных констант T, R, M, K отображения

$$A : [0,T]\times\overline{B}_{s+\delta}(R) \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \to E_s, \tag{II.9}$$

$$h : [0,T]\times\overline{B}_{s+\delta}(R) \to E_s, \quad \delta>0, \quad s+\delta<1 \tag{II.10}$$

непрерывны, и для любых $u, v \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$ выполнены следующие неравенства:

$$\|A(t,u,v)\|_s \leqslant \frac{M\|v\|_{s+\delta}}{\delta}, \quad \|h(t,u)\|_s \leqslant K, \quad \delta>0, \quad s+\delta<1. \tag{II.11}$$

Замечание 9.1. *Отображения вида (II.9), (II.10) являются стандартными для анализа в шкалах банаховых пространств, тем не менее, приведем их формальное определение.*

Формула (II.9) означает, что отображение A действует следующим образом

$$A : [0,T] \times \Big(\bigcup_{0<s<1} \big(\overline{B}_s(R) \times \overline{B}_s(R)\big)\Big) \to \bigcup_{0<s<1} E_s$$

и

$$A\big|_{[0,T]\times\overline{B}_{s+\delta}(R)\times\overline{B}_{s+\delta}(R)} \subseteq E_s.$$

Аналогично определяется отображение (II.10).

Предположим, что A выпукло по третьему аргументу в следующем смысле. Для всех $u, v, w \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\|A(t, u, \lambda v + (1-\lambda)w)\|_s \leqslant \lambda \|A(t, u, v)\|_s + (1-\lambda)\|A(t, u, w)\|_s. \qquad \text{(II.12)}$$

Основным объектом нашего изучения будет следующая задача Коши:

$$u_t = A(t, u, u) + h(t, u), \quad u\,|_{t=0} = 0. \qquad \text{(II.13)}$$

В такой постановке задача (II.13) является прямым обобщением задачи (II.4). Действительно, для того чтобы получить задачу (II.4), надо взять

$$A(t, u, v) = \sum_{k,j} a_{lkj}(t, z, u) \frac{\partial v_k}{\partial z_j}.$$

Через $\tilde{E}$ обозначим множество функций $f : [0, 1/a) \to \bigcup_{0<s<1} E_s$. Пространство $E^1 = \bigcap_{1-s-\tau a>0} C^1([0,\tau], E_s)$ состоит по определению из тех элементов $f \in \tilde{E}$, которые обладают следующим свойством:

$$f\,|_{[0,\tau]} \in C^1([0,\tau], E_s)$$

для всех $1 - s - \tau a > 0$. В дальнейшем мы снабдим пространство E^1 топологией проективного предела пространств $C^1([0,\tau], E_s)$ относительно отображений

$$E^1 \ni f \mapsto f\,|_{[0,\tau]}.$$

Теорема 9.1. *Предположим, что выполнены неравенства (II.11),(II.12). Тогда существует такая константа $a > 0$, что задача (II.13) имеет решение*

$$u(t) \in \bigcap_{1-s-\tau a>0} C^1([0,\tau], E_s). \qquad \text{(II.14)}$$

Замечание 9.2. *Опишем неформально роль теоремы 5.1 в данной теории.*

Предположим, что правая часть уравнения (II.13) непрерывно зависит от параметра p, принадлежащего некоторому польскому пространству.

Поскольку в конечном счете доказательство теоремы 9.1 основано на теореме Шаудера — Тихонова, то в силу теоремы 5.1 мы можем утверждать, что существует решение $u = u(t, p)$, являющееся измеримым по Борелю относительно второго аргуметна.

Отображение A зависит от трех аргументов. Первый аргумент – время, вместо второго и третьего аргумента подставляется искомая функция. По второму и третьему аргументу оператор A может быть нелипшицевым. На третий аргумент оператор A действует как дифференциальный оператор первого порядка. Это выражается неравенством (II.11).

Если отображение A тождественно равно нулю, то теорема 9.1 является прямым обобщением стандартной теоремы Пеано для шкал банаховых пространств.

В качестве примера рассмотрим шкалу аналитических функций в окрестности действительного m-мерного тора

$$\mathbb{T}^m_s = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^m \mid x \in \mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/(2\pi\mathbb{Z}^m), \quad |y| < Rs\}, \quad R > 0.$$

Через E_s обозначим пространство функций, аналитических в $\mathbb{T}^m_s$ и непрерывных в замыкании $\overline{\mathbb{T}}^m_s$. Пространства E_s являются банаховыми пространствами относительно норм равномерной сходимости:

$$\|u\|_s = \max_{z\in\overline{\mathbb{T}}^m_s} |u(z)|, \quad u \in E_s.$$

Пусть функция $\Phi(z, \xi)$ при почти всех $\xi \in \mathbb{T}^m$ принадлежит пространству E_1 и $\|\Phi(\cdot, \xi)\|_1 \in L^1(\mathbb{T}^m)$.

Если, например, взять

$$A(t, u, v) = \Big(\int_{\mathbb{T}^m} \frac{\Phi(z, \xi)}{1 - |u(\xi)|^q}\, d\xi\Big)^p \sum_{j=1}^m a_j(t, z) \frac{\partial v}{\partial z_j}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad q > 0,$$

где $a_j \in C([0, T], E_1)$ и $h(t, u) = u^2 + z_1$, то соответствующая задача имеет решение по теореме 9.1, но результат Ниренберга — Нишиды неприменим. Более того, неприменимыми оказываются результаты работ [41], [23].

10. Доказательство основной теоремы

10.1. Предварительные замечания

Введем треугольник:

$$\Delta = \{(\tau, s) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau > 0, \quad 0 < s < 1, \quad 1 - s - \tau a > 0\}.$$

Рассмотрим локально выпуклое линейное топологическое пространство

$$E = \bigcap_{(\tau,s)\in\Delta} C([0, \tau], E_s)$$

с семейством норм:

$$\|u\|_{\tau,s} = \max_{0\leqslant t\leqslant\tau} \|u(t)\|_s.$$

Очевидно,эти нормы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|\cdot\|_{\tau,s} \leqslant \|\cdot\|_{\tau+\delta,s}, \quad \|\cdot\|_{\tau,s} \leqslant \|\cdot\|_{\tau,s+\delta}, \quad \delta > 0. \tag{II.15}$$

Пространство E состоит из тех элементов f множества $\tilde{E}$, для которых верно следующее:

$$f\mid_{[0,\tau]} \in C([0,\tau], E_s)$$

для всех $(\tau, s) \in \Delta$. Пространство E с введенными нормами является проективным пределом пространств $C([0,\tau], E_s), \quad (\tau, s) \in \Delta$ относительно отображений $E \ni f \mapsto f\mid_{[0,\tau]}$.

Определение 10.1. *Будем говорить, что множество $G \subseteq E$ равностепенно непрерывно, если для всех $\varepsilon > 0$ и для всех $(\tau, s) \in \Delta$ существует*

$$\delta = \delta(\varepsilon, \tau, s) > 0$$

такое, что если $t_1, t_2 \in [0,\tau]$ и $|t_1 - t_2| < \delta$, тогда

$$\sup_{u\in G} \|u(t_1) - u(t_2)\|_s < \varepsilon.$$

Назовем множество $G \subseteq E$ ограниченным, если существуют такие константы $M_{\tau,s}$, что для всех $u \in G$ мы имеем $\|u\|_{\tau,s} \leqslant M_{\tau,s}$.

Напомним лемму Арцела — Асколи [30]:

Лемма 10.1. *Пусть $H \subset C([0,T], X)$ – множество в пространстве непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве X. Предположим, что множество H замкнуто, ограничено, равностепенно непрерывно и для каждого $t \in [0,T]$ множество $\{u(t) \in X\}$ является компактом в пространстве X. Тогда множество H компактно в пространстве $C([0,T], X)$.*

Очевидно, подобный критерий компактности имеется и в пространстве E.

Лемма 10.2. *Если замкнутое множество $G \subseteq E$ равностепенно непрерывно и ограничено,то оно является компактом.*

Доказательство. Пусть (τ, s) – произвольная точка в Δ.

Так как множество G ограничено и равностепенно непрерывно в пространстве $C([0,\tau], E_{s+\delta})$, то по лемме 10.1 оно компактно в пространстве $C([0,\tau], E_s)$. Следовательно, каждая последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset G$ содержит подпоследовательность, которая сходится по норме $\|\cdot\|_{\tau,s}$. Итак, остается доказать, что найдется подпоследовательность последовательности $\{u_k\}$, которая сходится по всем нормам $\|\cdot\|_{\tau,s}$ сразу.

Рассмотрим множество $\Delta_{\mathbb{Q}} = \Delta \bigcap \mathbb{Q}^2$. Это множество счетно, и пусть

$$\gamma : \mathbb{N} \to \Delta_{\mathbb{Q}}$$

– соответствующая биекция.

Пусть $\{u_k^1\} \subseteq \{u_k\}$ – подпоследовательность, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{\gamma(1)}$. В силу приведенных выше рассуждений, существует подпоследовательность $\{u_k^2\} \subseteq \{u_k^1\}$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{\gamma(2)}$ и т.д. Диагональная последовательность $\{u_k^k\}$ сходится по норме $\{\|\cdot\|_{\gamma(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Следовательно, благодаря неравенствам (II.15) она сходится по всем нормам.

10.2. Доказательство теоремы 9.1

Задача (II.13), очевидно, эквивалентна следующей задаче о неподвижной точке:

$$u(t) = F(u) = \int_0^t A(\xi, u(\xi), u(\xi)) + h(\xi, u(\xi))\, d\xi. \tag{II.16}$$

Если решение уравнения (II.16) непрерывно по переменной t, то оно и дифференцируемо по t.

Пусть множество $S \subset E$ состоит из элементов v, удовлетворяющих следующим условиям:

1)

$$\|v(t)\|_s \leqslant R, \tag{II.17}$$

2) неравенство

$$\|A(t, u(t), v(t))\|_s \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - at - s}} \tag{II.18}$$

справедливо для всех $u \in E$ таких, что $\|u(t)\|_s \leqslant R$,

3) для $t_1, t_2 \in [0, \tau]$, $\quad (\tau, s) \in \Delta$ верна оценка

$$\|v(t_1) - v(t_2)\|_s \leqslant \Big(K + \frac{1}{\sqrt{1 - s - a\tau}}\Big)|t_1 - t_2|. \tag{II.19}$$

Множество S не пусто: $0 \in S$.

Множество S выпукло в силу условия (II.12) и компактно по лемме 10.2.

Если мы покажем, что

$$F(S) \subseteq S \tag{II.20}$$

то доказательство теоремы 9.1 будет завершено применением теоремы Шаудера — Тихонова о неподвижной точке к отображению F и множеству S.

Итак, пусть $v \in S$. Проверим включение (II.20). Заметив, что

$$t < \frac{1}{a},$$

покажем, что отображение F сохраняет неравенство (II.17):

$$\begin{gathered}\|F(v)\|_s \leqslant \int_0^t \|A(\xi, u, v(\xi)\|_s + \|h(\xi, v(\xi))\|_s \, d\xi \\ \leqslant \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - a\xi - s}} + K \, d\xi = \frac{2}{a}\Big(\sqrt{1-s} - \sqrt{1 - at - s}\Big) + Kt \\ \leqslant \frac{2+K}{a}.\end{gathered} \tag{II.21}$$

Таким образом, в (II.21) нам достаточно взять $a \geqslant (2+K)/R$.

Для проверки неравенства (II.18) введем обозначение:

$$w(t) = A(t, v(t), v(t)) + h(t, v(t)).$$

С помощью неравенств (II.12), (II.11) и неравенства Йенсена [30] получим

$$\begin{gathered}\Big\|A\Big(t, u, \int_0^t w(\xi)\, d\xi\Big)\Big\|_s \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t \|A(t, u, tw(\xi))\|_s \, d\xi \\ \leqslant \frac{M}{t}\int_0^t \frac{\|tw(\xi)\|_{s+\delta}}{\delta}\Big|_{\delta = \frac{1-a\xi-s}{2}} d\xi \leqslant M \int_0^t \frac{\|w(\xi)\|_{s+\delta}}{\delta}\Big|_{\delta=\frac{1-a\xi-s}{2}} d\xi.\end{gathered} \tag{II.22}$$

Последний член в (II.22) не больше, чем

$$\begin{gathered}M\int_0^t \frac{\|A(\xi, v(\xi), v(\xi))\|_{s+\delta} + \|h(\xi, v(\xi))\|_{s+\delta}}{\delta}\Big|_{\delta=\frac{1-a\xi-s}{2}} d\xi \\ \leqslant M\int_0^t \Big(\frac{1}{\delta\sqrt{1 - a\xi - s - \delta}} + \frac{K}{\delta}\Big)\Big|_{\delta = \frac{1-a\xi-s}{2}} d\xi \leqslant \frac{C}{a\sqrt{1 - at - s}},\end{gathered} \tag{II.23}$$

где положительная константа C не зависит от s, t, a. Взяв в (II.23) $a \geqslant C$, мы видим, что отображение F сохраняет неравенство (II.18).

Проверим теперь условие (II.19). Предположим для определенности, что $t_2 \geqslant t_1$. Тогда неравенство (II.18) дает

$$\begin{aligned}\|F(v)(t_2) - F(v)(t_1)\|_s &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|A(\xi, v(\xi), v(\xi))\|_s + \|h(\xi, v(\xi))\|_s \, d\xi \\ &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{1 - a\xi - s}} + K \, d\xi \\ &\leqslant \Big(K + \frac{1}{\sqrt{1 - s - a\tau}}\Big)(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

Теорема 9.1 доказана.

Глава III

Абстрактные параболические уравнения

В этой главе мы излагаем результаты работ [96], [8].

11. Введение

Этот раздел посвящен квазилинейным параболическим уравнениям с нелипшицевыми нелинейностями. В классической постановке квазилинейная начальная параболическая задача ставится следующим образом:

$$u_t = f(t, u, \nabla^k u) + Au, \quad u|_{t=0} = \hat{u}. \tag{III.1}$$

Здесь A – линейный эллиптический оператор порядка n, а член $\nabla^k u$ обозначает производные функции u до порядка k включительно. Кроме того, к уравнению (III.1) нужно добавить граничные условия.

Если функция $\hat{u}$ принадлежит подходящему пространству, отображение f является липшицевым (в некотором смысле) и $k < n$, то задача (III.1) имеет единственное локальное по времени решение. Это легко выводится при помощи принципа сжимающих отображений.

Мы рассматриваем случай, когда функция f не является липшицевой. Хорошо известно (см. [4, 47, 93]), что в общем случае бесконечномерного банахового пространства начальная задача для дифференциального уравнения с нелипшицевой правой частью не имеет решений. Тем не менее, начальная задача, как правило, ставится не в одном банаховом пространстве, а в шкале таких пространств. Более того, пространства в шкале вполне непрерывно вложены. Таковы, например, шкала соболевских пространств, шкала пространств аналитических функций. Это подсказывает нам, что искать решение надо, изучая задачу во всей шкале.

Отметим еще одно свойство уравнений вида (III.1). Если мы опустим предположение о липшицевости f, то получим класс систем, для которых теорема существования справедлива даже в случае $k \geqslant n$. Системы такого типа остаются параболическими (в некотором обобщенном смысле).

Этот эффект имеет место не только для параболических уравнений. Если рассмотреть задачу Коши — Ковалевской в нелипшицевой постановке (см. [94]), то найдутся такие уравнения, что порядок производных в их правой части выше, чем в левой, а решение тем не менее существует.

Такие задачи относятся не к теории классических уравнений в частных производных, а к теории функционально-дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с нелокальными членами.

Основные методы исследования, применяемые в данной работе, – это теорема Шаудера о неподвижной точке для локально выпуклых пространств и теория шкал банаховых пространств. Другие подходы к абстрактным параболическим задачам в липшицевой постановке можно найти в [37, 45].

12. Основная теорема

Рассмотрим две шкалы банаховых пространств

$$\{E_s, \|\cdot\|_s^E\}_{s>0} \quad \text{и} \quad \{G_s, \|\cdot\|_s^G\}_{s>0}$$

такие, что $E_s \subseteq G_s$ для всех $s > 0$. Все вложения $E_{s+\delta} \subseteq E_s$, $\delta > 0$, вполне непрерывны и

$$\|\cdot\|_s^E \leqslant \|\cdot\|_{s+\delta}^E. \tag{III.2}$$

Параметр s не обязательно пробегает всю положительную вещественную полуось. Мы не используем пространства E_s, G_s с большими значениями s, поэтому можно, например, считать, что $s \in (0, 1)$.

Введем константы $C, T, R > 0$ и $\varphi, \alpha \geqslant 0$.

Определение 12.1. *Полугруппа линейных отображений*

$$S^t : \bigcup_s G_s \to \bigcup_s E_s, \quad S^t(G_s) \subset E_s, \quad t > 0$$

называется сильно непрерывной если для любого элемента $u \in E_s$ *выполнены следующие соотношения:*

$$\|S^t u - u\|_s^E \to 0 \quad \textit{при} \quad t \searrow 0,$$
$$\|S^t u\|_s^E \leqslant C\|u\|_s^E.$$

Определение 12.2. *Полугруппа* S^t *называется параболической, если существует такая постоянная* $\gamma > 1$*, что неравенство*

$$\|S^t u\|_{s+\delta}^E \leqslant \frac{C}{t^\varphi}\|u\|_s^G \tag{III.3}$$

выполняется при любых $\delta, t > 0,\ \delta^\gamma < t < T$*.*

Пусть $B_s(r)$ – открытый шар радиуса r с центром в начале координат в пространстве E_s.

Введем функцию

$$f : (0,T] \times \Big(\bigcup_s \overline{B}_s(R)\Big) \to \bigcup_s G_s, \quad f\big((0,T] \times \overline{B}_{s+\delta}(R)\big) \subset G_s$$

такую, что сужение $f : (0,T] \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \to G_s$ непрерывно и неравенство

$$\|f(t,u)\|_s^G \leqslant \frac{C}{\delta^\alpha} \tag{III.4}$$

выполняется при $(s+\delta)^\gamma < t \leqslant T$ и $u \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$.

Замечание 12.1. *Случай*

$$\|f(t,u)\|_s^G \leqslant \frac{C}{t^\beta \delta^\alpha}, \quad \beta > 0,$$

довольно распространен, однако, поскольку $\delta^\gamma < t$*, он сводится к (III.4):*

$$C/(t^\beta \delta^\alpha) \leqslant C/\delta^{\beta\gamma+\alpha}.$$

Мы рассмотрим задачу о существовании решений квазилинейного параболического уравнения в классической и обобщенной постановке.

Обобщенная постановка. При сделанных предположениях, рассматривается следующее интегральное уравнение:

$$u(t) = \int_0^t S^{(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi. \tag{III.5}$$

Классическая постановка. В дополнение к сделанным предположениям, будем считать, что $G_s = E_s$, и существует ограниченный линейный оператор

$$A : E_{s+\delta} \to E_s, \quad s, \delta > 0$$

такой, что

$$\lim_{h \to 0+} \left\| \frac{1}{h} \Big(S^h - \mathrm{id}_{E_{s+\delta}} \Big) u - Au \right\|_s^E = 0 \tag{III.6}$$

для любого $u \in E_{s+\delta}$.

При выполнении условия (III.6) мы будем говорить, что оператор A является генератором полугруппы S^t и писать $S^t = e^{At}$.

В классической постановке рассматриваемая задача имеет вид

$$u_t = f(t, u) + Au, \tag{III.7}$$

$$u \,|_{t=0} = 0. \tag{III.8}$$

Смысл начального условия (III.8) будет прояснен ниже.

Теперь дадим определение.

Определение 12.3. *Будем называть задачу (III.7) или (III.5) параболической, если полугруппа S^t — параболическая и*

$$\chi = \varphi + \frac{\alpha}{\gamma} < 1.$$

В случае, указанном в замечании 12.1, имеем $\chi = \varphi + \beta + \alpha/\gamma$.

Обозначим $\tilde{E} = \bigcup_{s>0} E_s$. Зададим пространство $E^1(T),\ T > 0$ формулой

$$E^1(T) = \bigcap_{0 < s^\gamma < \tau < T} C^1((\tau, T), E_s). \tag{III.9}$$

Пространство $E^1(T)$ состоит из отображений $w : (0, T) \to \tilde{E}$ таких, что

$$w \,|_{(\tau,T)} \in C^1((\tau, T), E_s)$$

при всех s, τ, удовлетворяющих неравенству $0 < s^\gamma < \tau < T$.

В дальнейшем пространство $E^1(T)$ наделяется топологией проективного предела пространств

$$C^1((\tau, T), E_s), \quad 0 < s^\gamma < \tau < T$$

относительно отображений

$$E^1(T) \ni w \mapsto w \,|_{(\tau,T)} .$$

Аналогично вводится пространство

$$E(T) = \bigcap_{0<s^\gamma<\tau<T} C((\tau, T), E_s).$$

Теорема 12.1.

Пусть задача (III.7) -(III.8) *– параболическая. Тогда существует такая постоянная $T_* > 0$, что эта задача имеет решение $u(t) \in E^1(T_*)$, и для любой постоянной $c \in (0,1)$ справедливо соотношение*

$$\|u(t)\|^E_{ct^{1/\gamma}} \to 0 \quad \textit{при} \quad t \searrow 0. \tag{III.10}$$

Функция $u(t)$ удовлетворяет также и уравнению (III.5).

Пусть задача (III.5) *– параболическая. Тогда существует такая постоянная $T_* > 0$, что эта задача имеет решение $u(t) \in E(T_*)$.*

Замечание 12.2. *Опишем неформально роль теоремы 5.1 в данной теории.*

Предположим, что правые части уравнений (III.5,III.7) непрерывно зависит от параметра p, принадлежащего некоторому польскому пространству.

Поскольку в конечном счете доказательство теоремы 12.1 основано на теореме Шаудера - Тихонова, то в силу теоремы 5.1 мы можем утверждать, что существует решение $u = u(t,p)$, являющееся измеримым по Борелю относительно второго аргуметна.

Теорема 12.1 доказывается в разделах 13 и 14.

Затем, чтобы продемонстрировать эффект, о котором говорилось во введении, теорема 12.1 применяется к нелокальным параболическим задачам. Чтобы сравнить наш результат с результатами, полученными ранее, мы также рассматриваем уравнение Навье – Стокса.

Если A – это классический оператор Лапласа, а параболическое уравнение рассматривается в подходящей области, то $\gamma = 2$, а неравенство из формулы (III.9) принимает вид $0 < s^2 < \tau$.

Отметим, что, если $G_s = E_s = \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|^E_s = |\cdot|$, $s > 0$, $A = 0$, то теорема 12.1 обобщает классическую теорему Пеано на случай, когда правая часть уравнения удовлетворяет (III.4) с $s = \delta = (t/3)^{1/\gamma}$.

13. Предварительные сведения из функционального анализа

В этом разделе приведены некоторые факты из функционального анализа. Они будут использованы в разделе 14 при доказательстве теоремы 12.1.

Рассмотрим пространства

$$C([\tau, T], E_{\mu\tau^{1/\gamma}}), \quad 0 < \mu < 1, \quad 0 < \tau < T$$

со стандартными нормами и построим проективный предел этих пространств. Определим пространство $E(T)$ следующим образом:

$$E(T) = \bigcap_{0<\mu<1} \bigcap_{0<\tau<T} C([\tau, T], E_{\mu\tau^{1/\gamma}}).$$

Есть и другое, эквивалентное, определение пространства $E(T)$:

$$E(T) = \bigcap_{0<s^\gamma<\tau<T} C([\tau, T], E_s).$$

Пространство $E(T)$, снабженное набором полунорм

$$\|u\|_{\tau,\mu} = \max_{\tau\leqslant\xi\leqslant T} \|u(\xi)\|^E_{\mu\tau^{1/\gamma}}, \quad u \in E(T), \tag{III.11}$$

становится локально выпуклым пространством.

Очевидно, эти полунормы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|u\|_{\tau,\mu} \leqslant \|u\|_{\tau,\mu+\delta}, \quad \delta > 0, \tag{III.12}$$

$$\|u\|_{\tau,r\mu} \leqslant \|u\|_{r^\gamma\tau,\mu}, \quad 0 < r \leqslant 1. \tag{III.13}$$

Действительно, формула (III.12) непосредственно следует из (III.2). Формула (III.13) вытекает из оценки

$$\|u\|_{\tau,r\mu} = \max_{\tau\leqslant\xi\leqslant T} \|u(\xi)\|^E_{\mu(r^\gamma\tau)^{1/\gamma}} \leqslant \max_{r^\gamma\tau\leqslant\xi\leqslant T} \|u(\xi)\|^E_{\mu(r^\gamma\tau)^{1/\gamma}} = \|u\|_{r^\gamma\tau,\mu}.$$

Из формул (III.12), (III.13) следует, что $E(T)$ — это топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности: топология этого пространства может быть задана полунормами (III.11) только при $\mu, \tau \in \mathbb{Q}$.

Напомним теорему Арцела — Асколи (см. [30]).

Теорема 13.1. *Пусть $H \subset C([0, T], X)$ есть множество в пространстве непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве X. Пусть множество H замкнуто, ограничено и равномерно непрерывно, а множество $\{u(t) \in X : u \in H\}$ компактно в пространстве X для любого $t \in [0, T]$. Тогда множество H компактно в пространстве $C([0, T], X)$.*

Теперь установим один из аналогов этого результата.

Предложение 13.1. *Пусть множество $K \subset E(T)$ замкнуто. Тогда K компактно, если выполнены два следующих условия:*

1. *Множество K ограничено.*

2. *Для любых $\varepsilon > 0$, $\tau \in (0, T)$, $\mu \in (0, 1)$ существует такая константа $\delta > 0$, что если $t', t'' \in [\tau, T]$ и $|t' - t''| < \delta$, то*

$$\sup_{u \in K} \|u(t') - u(t'')\|^E_{\mu\tau^{1/\gamma}} < \varepsilon$$

(*это означает, что K – равномерно непрерывное множество*).

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 13.1. *Пусть $\{v_j\} \subseteq K$ – последовательность. Тогда для любого $\tau \in (0, T)$ эта последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся во всех нормах*

$$\| \cdot \|_{\tau,\mu}, \ \mu \in (0, 1).$$

Доказательство. Действительно, возьмем возрастающую последовательность $\mu_k \to 1$, $\mu_1 > 0$, и зафиксируем любое значение $\tau \in (0, T)$. Поскольку последовательность $\{v_j\}$ ограничена и равномерно непрерывна в $C([\tau, T], E_{\mu_2\tau^{1/\gamma}})$, то в силу теоремы 13.1 она содержит подпоследовательность $\{v_j^1\}$, сходящуюся в $C([\tau, T], E_{\mu_1\tau^{1/\gamma}})$.

Последовательность $\{v_j^1\}$ ограничена и равномерно непрерывна в

$$C([\tau, T], E_{\mu_3\tau^{1/\gamma}})$$

. Значит, можно выбрать такую подпоследовательность $\{v_j^2\} \subseteq \{v_j^1\}$, что последовательность $\{v_j^2\}$ сходится в $C([\tau, T], E_{\mu_2\tau^{1/\gamma}})$ и т. д.

В силу неравенства (III.12) диагональная последовательность $\{v_j^j\}$ сходится во всех нормах $\| \cdot \|_{\tau,\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ при выбранном фиксированном τ.

Доказательство предложения 13.1. Множество $P = \mathbb{Q} \cap (0, T)$ счетно. Следовательно, его элементы можно занумеровать следующим образом: $P = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Мы должны показать, что любая последовательность $\{u_j\} \subseteq K$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{u_{j_k}\}$.

По лемме 13.1 существует подпоследовательность $\{u_j^1\} \subseteq \{u_j\}$, сходящаяся во всех нормах $\| \cdot \|_{\tau_1,\mu}$, $\mu \in (0, 1)$. Точно так же доказывается, что существует последовательность $\{u_j^2\} \subseteq \{u_j^1\}$, сходящаяся во всех нормах $\|\cdot\|_{\tau_2,\mu}$, $\mu \in (0,1)$, и т. д.

Диагональная последовательность $\{u_j^j\}$ сходится во всех нормах

$$\|\cdot\|_{\tau_k,\mu}, \ k \in \mathbb{N}, \ \mu \in (0,1).$$

В силу неравенства (III.13) последовательность $\{u_j^j\}$ сходится во всех нормах $\|\cdot\|_{\tau,\mu}$, $\tau \in (0,T)$, $\mu \in (0,1)$.

Предложение 13.1 доказано.

Лемма 13.2. *Пусть X и Y – банаховы пространства. Предположим, что $A_a : X \to Y$, $a' > a > 0$, – такой набор ограниченных линейных операторов, что для любого $x \in X$ справедливы соотношения*

$$\sup_{a'>a>0} \|A_a x\|_Y < \infty,$$
$$\|A_a x\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0.$$

Тогда

$$\sup_{x\in B} \|A_a x\|_Y \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0$$

для любого компактного множества $B \subset X$.

Этот результат непосредственно следует из теоремы Банаха — Штейнгауза (см. [30]).

14. Доказательство теоремы 12.1

Положим

$$W(T_*) = \{u \in E(T_*) \mid \|u\|_{\tau,\nu} \leqslant R, \ 0 < \tau < T_*, \ 0 < \nu < 1\}.$$

Постоянная $T_* > 0$ будет определена ниже.

Прежде всего, найдем неподвижную точку отображения

$$F(u) = \int_0^t S^{t-\xi} f(\xi, u(\xi))\, d\xi.$$

Эта неподвижная точка и будет обобщенным решением, о существовании которого говорится во второй части утверждения теоремы. Затем, используя формулу (III.6), мы покажем, что эта неподвижная точка есть искомое решение задачи (III.7).

Лемма 14.1. *Если постоянная T_* достаточно мала, то отображение F переводит $W(T_*)$ в себя.*

Доказательство. Пусть постоянные t и s таковы, что $0 < s < t^{1/\gamma}$ и $t \leqslant T_*$. Пусть $u \in W(T_*)$. Оценим функцию $v(t) = F(u)$:

$$\|v(t)\|_s^E \leqslant \int_0^t \|S^{t-\xi} f(\xi, u(\xi))\|_s^E \, d\xi = X + Y, \tag{III.14}$$

где

$$X = \int_0^{t-s^\gamma} \|S^{t-\xi} f(\xi, u(\xi))\|_s^E \, d\xi, \quad Y = \int_{t-s^\gamma}^t \|S^{t-\xi} f(\xi, u(\xi))\|_s^E \, d\xi.$$

Чтобы оценить слагаемое X, выберем постоянные ε и μ так, чтобы

$$0 < \varepsilon < \frac{s}{t^{1/\gamma}} < \mu < 1 \tag{III.15}$$

(ε выбирается достаточно малым, а μ — достаточно близким к единице).

Введем переменные δ и δ':

$$\delta = s - \varepsilon \xi^{1/\gamma}, \quad \delta' = \xi^{1/\gamma}(\mu - \varepsilon).$$

Учитывая, что $\xi \in (0, t - s^\gamma]$, получаем, что δ, δ' положительны и

$$s - \delta > 0, \quad s - \delta + \delta' < \xi^{1/\gamma}, \quad \delta < (t - \xi)^{1/\gamma}. \tag{III.16}$$

Из среднего неравенства следует, что

$$u(\xi) \in \overline{B}_{s-\delta+\delta'}(R), \tag{III.17}$$

а значит, слагаемое X оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} X &\leqslant C \int_0^{t-s^\gamma} (t-\xi)^{-\varphi} \|f(\xi, u(\xi))\|_{s-\delta}^G \, d\xi \leqslant C^2 \int_0^{t-s^\gamma} \frac{1}{\delta'^\alpha (t-\xi)^\varphi} \, d\xi \leqslant \\ &\leqslant \frac{C^2}{(\mu-\varepsilon)^\alpha} \int_0^{t-s^\gamma} \frac{d\xi}{(t-\xi)^\varphi \xi^{\alpha/\gamma}} \Big|_{\xi = yt} = \\ &= \frac{C^2 t^{1-\chi}}{(\mu-\varepsilon)^\alpha} \int_0^{1-s^\gamma/t} \frac{dy}{(1-y)^\varphi y^{\alpha/\gamma}} \leqslant \frac{C^2 J t^{1-\chi}}{(\mu-\varepsilon)^\alpha}, \end{aligned} \tag{III.18}$$

где

$$J = \int\limits_0^1 \frac{dy}{(1-y)^{\varphi} y^{\alpha/\gamma}}.$$

Оценим теперь слагаемое Y. Введем функцию ψ:

$$\psi(y) = y^{1/\gamma} + (1-y)^{1/\gamma} - 1.$$

В интервале $(0, 1)$ эта функция положительна. Определим константу I следующим образом:

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dy}{(1-y)^{\varphi}(\psi(y))^{\alpha}}.$$

Константа μ определена выше. Переопределим переменные δ, δ' следующим образом:

$$\delta = \mu(t-\xi)^{1/\gamma}, \quad \delta' = \mu\xi^{1/\gamma} + \delta - s.$$

Теперь переменная ξ принадлежит $[t - s^{\gamma}, t]$, а значит, переменные δ и δ' положительны и удовлетворяют неравенствам (III.16).

Единственным нетривиальным моментом является доказательство положительности переменной δ'. Вначале заметим, что

$$\delta' = \mu\xi^{1/\gamma} + \mu(t-\xi)^{1/\gamma} - s = t^{1/\gamma}\Big(\mu y^{1/\gamma} + \mu(1-y)^{1/\gamma} - \frac{s}{t^{1/\gamma}}\Big) \tag{III.19}$$

(напомним, что $y = \xi/t$). Из (III.19) следует, что

$$\delta' > t^{1/\gamma}\mu\psi(y). \tag{III.20}$$

Как и раньше, включение (III.17) выполнено для новых δ, δ'.

Теперь можно оценить слагаемое Y. Из (III.20) следует, что

$$\begin{aligned} Y &\leqslant C \int\limits_{t-s^{\gamma}}^{t} (t-\xi)^{-\varphi} \|f(\xi, u(\xi))\|^G_{s-\delta}\, d\xi \leqslant C^2 \int\limits_{t-s^{\gamma}}^{t} \frac{d\xi}{(t-\xi)^{\varphi}\delta'^{\alpha}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{C^2 t^{1-\chi}}{\mu^{\alpha}} \int\limits_{1-s^{\gamma}/t}^{1} \frac{dy}{(1-y)^{\varphi}(\psi(y))^{\alpha}} \leqslant \frac{C^2 I}{\mu^{\alpha}} t^{1-\chi}. \end{aligned} \tag{III.21}$$

Теперь утверждение леммы следует из формул (III.14), (III.18), (III.21).

Следствие 14.1. *Из формул* (III.18), (III.21) *следует, что если* $0 < s^{\gamma} < t \leqslant T_*$ *и* $v(t) = F(u)$, $u \in W(T_*)$, *то найдется такая положительная постоянная* c_2, *не зависящая от* u, t, s, *что*

$$\|v(t)\|^E_s \leqslant c_2 t^{1-\chi}.$$

Лемма 14.2. *Множество $F(W(T_*))$ предкомпактно в $E(T_*)$.*

Доказательство. В силу предложения 13.1 достаточно доказать, что множество $F(W(T_*))$ равномерно непрерывно.

Пусть $u \in W(T_*)$, $v(t) = F(u)$. Мы должны показать, что если $t', t'' \geqslant \tau$, $\tau \in (0, T_*)$, то

$$\sup_{u \in W(T_*)} \|v(t') - v(t'')\|^E_{\mu\tau^{1/\gamma}} \to 0 \quad \text{при} \quad |t' - t''| \to 0$$

для любого $\mu \in (0,1)$.

Действительно, предположим для определенности, что $t'' > t'$. Тогда

$$v(t'') - v(t') = \int\limits_{t'}^{t''} S^{t''-\xi} f(\xi, u)\, d\xi + \tag{III.22}$$

$$+ \left(S^{t''-t'} - \mathrm{id}_{E_s}\right) \int\limits_0^{t'} S^{t'-\xi} f(\xi, u)\, d\xi, \quad s^\gamma < \tau.$$

Выбирая положительную постоянную δ так, что $(s+\delta)^\gamma < \tau$, и используя параболичность полугруппы S^t, оценим первое слагаемое правой части последнего равенства:

$$\left\| \int\limits_{t'}^{t''} S^{t''-\xi} f(\xi, u)\, d\xi \right\|^E_s \leqslant C \int\limits_{t'}^{t''} (t'' - \xi)^{-\varphi} \|f(\xi, u)\|^G_s \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \int\limits_{t'}^{t''} \frac{d\xi}{\delta^\alpha (t'' - \xi)^\varphi} = \frac{C^2}{\delta^\alpha (1-\varphi)} (t'' - t')^{1-\varphi}.$$

Таким образом, первое слагаемое правой части (III.22) равномерно стремится к нулю.

Рассмотрим множество

$$U = \bigcup_{\tau \leqslant t' \leqslant T_*} \left\{ \int\limits_0^{t'} S^{t'-\xi} f(\xi, u)\, d\xi \;\middle|\; u \in W(T_*) \right\}.$$

По лемме 14.1 множество U ограничено в любом пространстве $E_{\mu'\tau^{1/\gamma}}$ с $1 > \mu' > \mu$. Значит, оно компактно в $E_{\mu\tau^{1/\gamma}}$. По лемме 13.2 имеем

$$\sup_{w \in U} \|S^{t''-t'} w - w\|^E_{\mu\tau^{1/\gamma}} \to 0 \quad \text{при} \quad t'' - t' \to 0.$$

Отсюда следует, что и второе слагаемое правой части (III.22) равномерно стремится к нулю.

Следствие 14.2. *Множество $F(W(T_*))$ равномерно непрерывно относительно переменной t.*

Лемма 14.3. *Отображение $F : W(T_*) \to W(T_*)$ непрерывно в топологии пространства $E(T_*)$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{v_l\} \subset W(T_*)$ сходится к $v \in W(T_*)$ при $l \to \infty$. Нам нужно показать, что для любого $s^\gamma < \tau < T_*$ последовательность

$$\sup_{\tau \leqslant t \leqslant T_*} \left\| \int_0^t S^{t-\xi} f(\xi, v_l(\xi))\, d\xi - \int_0^t S^{t-\xi} f(\xi, v(\xi))\, d\xi \right\|_s^E$$

стремится к нулю при $l \to \infty$.

В силу следствия 14.2 последовательность

$$\left\{ \int_0^t S^{t-\xi} f(\xi, v_l(\xi))\, d\xi \right\} \tag{III.23}$$

равномерно непрерывна в интервале $[\tau, T_*]$. Равномерная сходимость такой последовательности эквивалентна ее поточечной сходимости (см. [30]). Таким образом, достаточно доказать, что последовательность (III.23) сходится в E_s для любого $t \in [\tau, T_*]$.

Зафиксируем $t \in [\tau, T_*]$. Пусть константы ε, μ удовлетворяют неравенству (III.15). Повторяя рассуждения леммы 14.1, будем иметь

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t S^{t-\xi}(f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi)))\, d\xi \right\|_s^E \leqslant \\ &\leqslant \int_0^{t-s^\gamma} (t-\xi)^{-\varphi} \|f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}}^G\, d\xi + \\ &+ \int_{t-s^\gamma}^t (t-\xi)^{-\varphi} \|f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|_{s-\mu(t-\xi)^{1/\gamma}}^G\, d\xi. \end{aligned} \tag{III.24}$$

Поскольку функция f непрерывна, для фиксированного ξ получаем следующие соотношения:

$$(t-\xi)^{-\varphi} \|f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}}^G \to 0, \quad \xi \in [0, t-s^\gamma],$$
$$(t-\xi)^{-\varphi} \|f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|_{s-\mu(t-\xi)^{1/\gamma}}^G \to 0, \quad \xi \in [t-s^\gamma, t),$$

при $l \to \infty$.

Более того, в силу (III.18) и (III.21) оба эти выражения мажорируются L^1-интегрируемой функцией:

$$
\begin{aligned}
&(t-\xi)^{-\varphi}\|f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|^G_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}} \leqslant \\
&\leqslant (t-\xi)^{-\varphi}(\|f(\xi, v_l(\xi))\|^G_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}} + \|f(\xi, v(\xi))\|^G_{\varepsilon\xi^{1/\gamma}}) \leqslant \\
&\leqslant \frac{2C^2}{(\mu-\varepsilon)^\alpha \xi^{\alpha/\gamma}(t-\xi)^\varphi},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(t-\xi)^{-\varphi}\|f(\xi, v_l(\xi)) - f(\xi, v(\xi))\|^G_{s-\mu(t-\xi)^{1/\gamma}} \leqslant \\
&\leqslant \frac{2C^2}{t^{\alpha/\gamma}\mu^\alpha(\psi(\xi/t))^\alpha(t-\xi)^\varphi}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, в силу теоремы о мажорированной сходимости, интегралы в правой части (III.24) стремятся к нулю при $l \to \infty$.

Итак, по теореме Шаудера — Тихонова и леммам 14.1–14.3 мы получаем неподвижную точку отображения F; обозначим ее через u:

$$
F(u) = u \in W(T_*).
$$

Это доказывает вторую часть теоремы 12.1.

Чтобы доказать первую часть, покажем, что эта неподвижная точка есть решение задачи (III.7). Пусть $t, t+h > s^\gamma$. Сначала рассмотрим случай положительного h. Продифференцируем функцию $u(t)$ явно:

$$
\begin{aligned}
&u_t(t) = \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1}\left(\int_0^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\,d\xi - \int_0^t e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\,d\xi\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1}\int_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\,d\xi + \\
&+ \lim_{h\to 0} h^{-1}(e^{Ah} - \mathrm{id}_{E_s})\int_0^t e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\,d\xi.
\end{aligned}
\tag{III.25}
$$

Из леммы 14.1 следует, что $\int_0^t e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\,d\xi \in E_{s'}$ с $s^\gamma < s'^\gamma < t, t+h$. Следовательно, формула (III.6) дает следующее соотношение:

$$
h^{-1}(e^{Ah} - \mathrm{id}_{E_s})\int_0^t e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\,d\xi \to A\int_0^t e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\,d\xi \tag{III.26}
$$

в E_s при $h \to 0$.

Докажем, что

$$h^{-1} \int\limits_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi \to f(t, u(t)) \tag{III.27}$$

в E_s при $h \to 0$.

Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} &h^{-1} \int\limits_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi - f(t, u(t)) = \\ &= h^{-1} \left(\int\limits_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} (f(\xi, u(\xi)) - f(t, u(t)))\, d\xi + \right. \\ &+ \left. \int\limits_t^{t+h} (e^{A(t+h-\xi)} - \mathrm{id}_{E_s}) f(t, u(t))\, d\xi \right). \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части этой формулы оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left\| \int\limits_t^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} (f(\xi, u(\xi)) - f(t, u(t)))\, d\xi \right\|_s^E \leqslant \\ &\leqslant Ch \max_{t \leqslant \xi \leqslant t+h} \| f(\xi, u(\xi)) - f(t, u(t)) \|_s^E = o(h). \end{aligned}$$

Поскольку полугруппа e^{At} сильно непрерывна, для второго интеграла получаем, что

$$\begin{aligned} &\left\| \int\limits_t^{t+h} (e^{A(t+h-\xi)} - \mathrm{id}_{E_s}) f(t, u(t))\, d\xi \right\|_s^E \leqslant \\ &\leqslant h \max_{t \leqslant \xi \leqslant t+h} \left\| \left(e^{A(t+h-\xi)} - \mathrm{id}_{E_s} \right) f(t, u(t)) \right\|_s^E = o(h). \end{aligned}$$

Если $h < 0$, то вместо (III.25) нужно использовать соотношение

$$\begin{aligned} u_t(t) = \lim_{h \to 0} h^{-1} \Big(\left(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah} \right) \int\limits_0^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi - \\ - \int\limits_{t+h}^{t} e^{A(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi \Big). \end{aligned}$$

В этом случае новым является лишь доказательство равенства

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\left(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\right)\int\limits_0^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi =$$
$$= A\int\limits_0^{t} e^{(t-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi.$$

Докажем его. Очевидно,

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\right)\int\limits_0^{t+h} e^{A(t+h-\xi)} f(\xi, u(\xi))\, d\xi =\\ &= (\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah})u(t) + (\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah})(u(t+h) - u(t)).\end{aligned} \tag{III.28}$$

Множество

$$V = \left\{ \frac{u(t+h) - u(t)}{\|u(t+h) - u(t)\|^E_{s'}} \;\middle|\; h \in (h', 0) \right\},$$

где h' отрицательно и близко к нулю, ограничено в $E_{s'}$, $s^\gamma < s'^\gamma < t + h'$. Следовательно, V – компактное множество в E_s. По лемме 13.2 множество

$$(A_{-h} - A)V, \quad A_{-h} = \frac{1}{h}\Big(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\Big),$$

ограничено в E_s. Значит, множество $A_{-h}V$ тоже ограничено.

Таким образом, учитывая непрерывность функции $u(t)$, получаем

$$\left\| \frac{1}{h}\Big(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\Big)(u(t+h) - u(t)) \right\|^E_s =$$
$$= \|u(t+h) - u(t)\|^E_{s'} \cdot \left\| A_{-h} \frac{u(t+h) - u(t)}{\|u(t+h) - u(t)\|^E_{s'}} \right\|^E_s = o(1).$$

Отсюда вытекает следующая оценка для второго слагаемого правой части (III.28):

$$\left\| \left(\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah}\right)(u(t+h) - u(t)) \right\|^E_s = o(h).$$

Первое слагаемое правой части (III.28) оценивается следующим образом:

$$\left\| (\mathrm{id}_{E_s} - e^{-Ah})u(t) - hAu(t) \right\|^E_s = o(h).$$

Подставляя (III.26) и (III.27) в (III.25), мы видим, что функция u есть решение уравнения (III.7).

Формула (III.10) вытекает из следствия 14.1.

Теорема 12.1 доказана.

15. Приложения

В дальнейшем мы будем обозначать все несущественные положительные константы одной и той же буквой c.

15.1. Уравнение Блэка — Шолза (The Black-Scholes equatation)

В этом разделе мы рассмотрим уравнение типа Блэка — Шолза. Это уравнение возникает в экономике, в [40], [54].

Через E_s обозначим банахово пространство функций $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}$, снабженное нормой

$$\|u\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|(s_0 + s)^k, \quad s_0, s > 0.$$

Очевидно, каждая функция из этого пространства голоморфна в круге $\{|z| < s_0 + s\}$ и непрерывна на его границе. Кроме того, $\|uv\|_s \leqslant \|u\|_s \cdot \|v\|_s$.

Вложения $E_{s+\delta} \subset E_s, \quad \delta > 0$ вполне непрерывны. Через $B_s(R)$ обозначим открытый шар пространства E_s радиуса R с центром в нуле.

Отметим, что сходимость последовательности элементов $u^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(n)} z^k$ при $n \to \infty$ влечет сходимость числовых последовательностей $\{u_k^{(n)}\}$, хотя эти последовательности не обязаны сходиться равномерно по k.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$u_t(t, z) = f(t, u) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big(z^2 u(t, z)\Big), \quad u(0, z) = 0. \tag{III.29}$$

Здесь $f : (0, T] \times \overline{B}_{s+\delta}(R) \to E_s$ – непрерывное отображение. Причем при

$$(s + \delta)^2 < t \leqslant T, \quad u \in \overline{B}_{s+\delta}(R)$$

верно неравенство

$$\|f(t, u)\|_s \leqslant \frac{C}{\delta^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 2.$$

Например, если $s_0 \geqslant 1$, то указанным условиям удовлетворяет отображение

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \lambda(k))^\alpha u_{k+\lambda(k)} z^k, \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$$

с любой функцией $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Действительно,

$$\|f(u)\|_s \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (k + \lambda(k))^\alpha |u_{k+\lambda(k)}|(s_0 + s)^{k+\lambda(k)}.$$

В качестве другого примера можно взять

$$f(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s_0+1)^k}|u_k|^{\nu_k}z^k,\quad 0\leqslant\nu_k\leqslant 1.$$

Кроме того, легко показать, что

$$\|e^{-t\frac{\partial^2}{\partial z^2}z^2}u\|_{s+\delta}\leqslant c\|u\|_s$$

при $\delta^2<t$.

Таким образом, при сделанных предположениях выполнены условия теоремы 12.1 для классической постановки. Следовательно, при достаточно малых $T_*>0$ задача (III.29) имеет решение $u(t,z)\in E^1(T_*)$.

15.2. Параболические уравнения с градиентными нелинейностями

В этом разделе мы рассмотрим модельный пример.

Пусть $M\subset\mathbb{R}^m$ – ограниченная область с гладкой границей ∂M.

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t=f(\nabla u)+\Delta u,\quad u|_{t=0}=\hat{u}\in H_0^{1,q}(M),\quad u(t,\partial M)=0,\quad t>0.\tag{III.30}$$

Здесь $q>1$.

Функция f непрерывна в $\mathbb{R}^m$ и $|f(z)|\leqslant c(|z|^p+1)$, $q\geqslant p\geqslant 1$, для всех $z\in\mathbb{R}^m$. Отметим, что функция f необязательно липшицева.

Покажем, что если

$$m(p-1)<q,\tag{III.31}$$

то задача (III.30) имеет обобщенное решение из $C([0,T],H_0^{1,q}(M))$, где положительная константа T зависит от $\hat{u}$.

Если функция f липшицева, то неравенство (III.31) хорошо известно: оно соответствует докритическому случаю в смысле Фуджиты.

После замены неизвестной функции $u=e^{\Delta t}\hat{u}+v$ рассматриваемая задача принимает вид

$$v_t=g(t,x,\nabla v)+\Delta v,\quad v\,|_{t=0}=0,\quad g(t,x,\nabla v)=f(\nabla(e^{\Delta t}\hat{u}+v)).\tag{III.32}$$

Введем пространства дробных степеней оператора Лапласа с нулевыми граничными условиями $X^{s,p}=(-\Delta)^{-s/2}(L^p(M))$. Эти пространства удовлетворяют почти всем теоремам вложения, что и пространства Соболева $H^{s,p}(M)$. Теория этих пространств содержится в [34], [35], [36], [58]. Отметим, что $X^{k,p} = H^{k,p}(M) \cap H_0^{1,p}(M), \quad k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим задачу (III.32) в шкалах

$$E_s = X^{1+s_0+s,q}(M), \quad \|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{X^{1+s_0+s,q}(M)}, \quad s \in (0, S),$$

и

$$G_s = X^{-\lambda,q}(M), \quad \|\cdot\|^G = \|\cdot\|_{X^{-\lambda,q}(M)}.$$

Здесь все пространства G_s совпадают друг с другом, а константы $S > 0$, $s_0 \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda < m(1 - 1/q)$ подлежат определению.

Введем константу

$$r = \frac{qm}{m + \lambda q} \in (1, q].$$

Затем, используя факты из теории пространств дробных степеней, оценим функцию g:

$$\begin{aligned} \|g(t, x, \nabla v)\|^G &\leqslant c\|g(t, x, \nabla v)\|_{L^r(M)} \leqslant \\ &\leqslant c\left(\|\nabla(e^{\Delta t}\hat{u} + v)\|^p_{L^{pr}(M)} + 1\right) \leqslant \\ &\leqslant c\left(\|e^{\Delta t}\hat{u}\|^p_{X^{1,pr}(M)} + \|v\|^p_{X^{1,pr}(M)} + 1\right). \end{aligned} \tag{III.33}$$

Выберем константу s_0 следующим образом:

$$s_0 = m\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{rp}\right).$$

Тогда выполнено условие $X^{1+s_0,q}(M) \subseteq X^{1,pr}(M)$.

Здесь мы выбираем λ так, чтобы выполнялось неравенство $q < rp$. Отметим, что

$$\|e^{\Delta t}\hat{u}\|^p_{X^{1,pr}(M)} \leqslant ct^{-\beta}\|\hat{u}\|^p_{X^{1,q}(M)}, \quad \beta = \frac{m}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{r}\right).$$

Если $v \in B_s = \left\{h \in E_s \mid \|h\|_s^E \leqslant 1\right\}$, то в силу вышеизложенного из формулы (III.33) следует неравенство

$$\|g(t, x, \nabla v)\|^G \leqslant \frac{c}{t^\beta}.$$

Кроме этого, нам потребуется неравенство

$$\|e^{\Delta t}w\|_s \leqslant ct^{-\varphi}\|w\|^G, \quad \varphi = \frac{1 + s_0 + s + \lambda}{2},$$

которое которое также следует из теории пространств дробных степеней.

Предложение 15.1. *Отображение* $(t, v) \mapsto g(t, x, \nabla v)$ *непрерывно переводит* $(0, T) \times B_s$ *в* G_s.

Доказательство. Предположим противное: существует такая последовательность (t_k, v_k), что $t_k \to t \in (0, T)$, $v_k \to v$ в E_s при $k \to \infty$, $v, v_k \in B_s$ и

$$\|g_k(x) - g(x)\|^G \geqslant c > 0, \tag{III.34}$$

где $g_k(x) = g(t_k, x, \nabla v_k)$, $g(x) = g(t, x, \nabla v)$.

Как и выше, из (III.34) следует, что

$$\|g_k(x) - g(x)\|_{L^r(M)} \geqslant c > 0.$$

Поскольку $\nabla v_k \to \nabla v$ в $L^{pr}(M)$, существует такая подпоследовательность $\{v_{k'}\} \subseteq \{v_k\}$, что $\nabla v_{k'} \to \nabla v$ почти всюду в M. Значит, $|g_{k'}(x) - g(x)|^r \to 0$ почти всюду в M. Следовательно, $|g_{k'}(x) - g(x)|^r \to 0$ по мере.

Остается показать, что последовательность $|g_{k'}(x) - g(x)|^r$ равномерно интегрируема. В этом случае в силу теоремы сходимости Витали (см. [53]), будем иметь $\|g_{k'}(x) - g(x)\|_{L^r(M)} \to 0$, и полученное противоречие завершит доказательство.

Отметим, что поскольку $v_k, v \in E_s$, $s > 0$, для малых $\sigma > 0$ справедливо соотношение $\nabla v_k \to \nabla v$ в $L^{pr+\sigma}(M)$. Таким образом, функции $g_{k'}(x) - g(x)$ принадлежат не только $L^r(M)$, но и $L^{r+\varepsilon}(M)$ с малыми $\varepsilon > 0$, а последовательность $\|g_{k'}(x) - g(x)\|_{L^{r+\varepsilon}(M)}$ ограничена (что доказывается точно так же, как и выше). Это можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sup_{k'} \int\limits_M |g_{k'}(x) - g(x)|^r \omega(|g_{k'}(x) - g(x)|)\, dx = \\ = \sup_{k'} \|g_{k'}(x) - g(x)\|^{r+\varepsilon}_{L^{r+\varepsilon}(M)} < \infty,\end{aligned}$$

где $\omega(y) = y^\varepsilon$. Поскольку функция ω монотонна и неограничена в $\mathbb{R}_+$, это доказывает равномерную интегрируемость последовательности $|g_{k'}(x) - g(x)|^r$. Предложение доказано.

Таким образом, $\alpha = 0$. Значит, чтобы применить теорему 12.1, нам потребуется неравенство $\chi = \varphi + \beta < 1$. Его легко вывести из (III.31), если постоянная S достаточно мала, а постоянная λ выбрана так, чтобы pr было достаточно близко к q.

15.3. Шкала аналитических функций

Через $\mathbb{T}^m$ обозначим m-мерный тор $\mathbb{R}^m/(2\pi\mathbb{Z})^m$. Вся развиваемая ниже техника может быть перенесена (почти без изменений) на задачу в m-мерном кубе с нулевыми краевыми условиями.

Обозначим элемент пространства $\mathbb{R}^m$ через $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Пусть

$$\mathbb{T}^m_s = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^m \mid x \in \mathbb{T}^m,\ |y| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_m^2} < s\}$$

– комплексная окрестность тора $\mathbb{T}^m$.

Определим множество $E_s,\ s > 0$, следующим образом: $E_s = C(\overline{\mathbb{T}}^m_s) \cap \mathcal{O}(\mathbb{T}^m_s)$. Здесь $\mathcal{O}(\mathbb{T}^m_s)$ обозначает множество функций, аналитических в $\mathbb{T}^m_s$.

Множество E_s является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_s = \max_{z \in \overline{\mathbb{T}}^m_s} |u(z)|$$

. По теореме Монтеля вложения $E_{s+\delta} \subset E_s,\ \delta > 0$ вполне непрерывны. Положим $E_0 = C(\mathbb{T}^m),\ \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{C(\mathbb{T}^m)}$.

Пусть Δ обозначает оператор Лапласа,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m} \partial_j^2, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Лемма 15.1 ([96]). *Существует такая положительная постоянная c, что следующее неравенство справедливо для любых $u \in E_s,\ s \geqslant 0$:*

$$\|e^{t\Delta}u\|_{s+\delta} \leqslant c \exp\left(\frac{\delta^2}{4t}\right) \|u\|_s, \quad t, \delta > 0.$$

Постоянная c зависит только от m.

По лемме 15.1 полугруппа $e^{t\Delta}$ параболична с $\gamma = 2$.

Лемма 15.2. *Возьмем константу $\rho \in (0, 1/2]$. Для любого $\varepsilon \in (0, 2\rho)$ существует такая положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$, что выполнены неравенства (при $u \in E_{s+\delta}$)*

$$\|(-\Delta)^{-\rho}\partial_j u\|_s \leqslant \frac{c}{\delta^{1-2\rho+\varepsilon}} \|u\|_{s+\delta}, \quad s \geqslant 0, \quad \delta > 0, \tag{III.35}$$

$$\|(-\Delta)^{\rho}u\|_s \leqslant \frac{c}{\delta^{2\rho+\varepsilon}} \|u\|_{s+\delta}. \tag{III.36}$$

Доказательство. Докажем формулу (III.35). Используя известные факты из теории соболевских пространств, получаем

$$\|(-\Delta)^{-\rho}\partial_j u\|_s \leqslant c\|(-\Delta)^{-\rho}\partial_j u\|_{H^{\varepsilon,p}(\mathbb{T}^m_s)} \leqslant$$
$$\leqslant c\|u\|_{H^{\varepsilon+1-2\rho,p}(\mathbb{T}^m_s)}, \quad \varepsilon p > 2m.$$

Тогда (III.35) следует из интерполяционной формулы и неравенства Коши:

$$\|u\|_{H^{\varepsilon+1-2\rho,p}(\mathbb{T}^m_s)} \leqslant c\|u\|^{\varepsilon+1-2\rho}_{H^{1,p}(\mathbb{T}^m_s)}\|u\|^{2\rho-\varepsilon}_{L^p(\mathbb{T}^m_s)},$$

$$\|u\|_{H^{1,p}(\mathbb{T}^m_s)} \leqslant \frac{c}{\delta}\|u\|_{s+\delta}.$$

Формула (III.36) выводится таким же образом. Лемма доказана.

Предложение 15.2 (см. [82])**.** *Для любых $a \geqslant r \geqslant 0$ справедлива оценка*

$$\|e^{t\Delta}u\|_{H^a(\mathbb{T}^m)} \leqslant \frac{c}{t^{(a-r)/2}}\|u\|_{H^r(\mathbb{T}^m)}.$$

Если $a > m/2$, то $\|u\|_0 \leqslant c\|u\|_{H^a(\mathbb{T}^m)}$.

Первый из следующих двух примеров иллюстрирует эффект, описанный во введении, второй приводится для сравнения нашего результата с результатами, полученными ранее.

15.4. Интегродифференциальные параболические уравнения

В этом разделе используются шкалы

$$G_s = E_s = C(\overline{\mathbb{T}}^m_s) \cap \mathcal{O}(\mathbb{T}^m_s).$$

Основное внимание будет уделено одномерным системам ($m = 1$).

Рассмотрим задачу

$$u_t = \|(-\Delta)^n u\,|_{\mathbb{T}^m}\,\|^{\lambda}_{L^2(\mathbb{T})} + \Delta u, \tag{III.37}$$
$$u|_{t=0} = \hat{u}(x) = \sum_{|k|\geqslant 2}\frac{e^{ikx}}{|k|^{1/2}\log|k|} \in L^2(\mathbb{T}).$$

Здесь λ – положительный параметр, $n \in \mathbb{N}$.

Параболические уравнения с правыми частями, зависящими от L^p-норм неизвестной функции, возникают в теории несжимаемой вязкой жидкости (см. [73]).

После замены переменных $u = e^{t\Delta}\hat{u} + v$ рассматриваемая задача принимает вид

$$\begin{gathered} v_t = f(t,v) + \Delta v, \quad v\,|_{t=0} = 0, \\ f(t,v) = \|(-\Delta)^n e^{t\Delta}\hat{u} + (-\Delta)^n v\|^{\lambda}_{L^2(\mathbb{T})}. \end{gathered} \tag{III.38}$$

Покажем, что при $n\lambda < 1$ задача (III.37) имеет решение в смысле теоремы 12.1.

Тогда получим оценку

$$|f(t,v)| \leqslant c(\|e^{t\Delta}\hat{u}\|^{\lambda}_{H^{2n}(\mathbb{T})} + \|(-\Delta)^n v\|^{\lambda}_{L^2(\mathbb{T})}).$$

Предложение 15.2 приводит к оценке

$$\|e^{t\Delta}\hat{u}\|_{H^{2n}(\mathbb{T})} \leqslant ct^{-n}\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

а неравенство Коши – к оценке

$$\|(-\Delta)^n v\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant c\|(-\Delta)^n v\|_s \leqslant c\delta^{-2n}\|v\|_{s+\delta}, \quad \delta > 0.$$

Объединяя эти неравенства и учитывая, что $(s+\delta)^2 < t$, имеем

$$|f(t,v)| \leqslant c\delta^{-2n\lambda}(\|\hat{u}\|^{\lambda}_{L^2(\mathbb{T})} + \|v\|^{\lambda}_{s+\delta}).$$

Таким образом, $\chi = n\lambda$, и по теореме 12.1 при $n\lambda < 1$ задача имеет хотя бы одно аналитическое решение.

Рассмотрим случай $\lambda = 1$, и пусть (для простоты) $n = 1$.

Обозначим коэффициенты Фурье функции u через u_k:

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ikx}.$$

Отметим, что норму в $L^2(\mathbb{T})$ можно представить следующим образом:

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = c\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2.$$

Тогда, разделяя переменные в задаче (III.37), получаем, что

$$u_0 = c\int\limits_0^t \left(\sum_{|k|\geqslant 2} \frac{|k|^3 e^{-2\xi|k|^2}}{(\log|k|)^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\xi, \quad u_k = \begin{cases} 0 & \text{при } |k| = 1, \\ \dfrac{e^{-t|k|^2}}{|k|^{1/2}\log|k|} & \text{при } |k| \geqslant 2. \end{cases} \tag{III.39}$$

Нетрудно показать, что

$$\left(\sum_{|k|\geqslant 2}\frac{|k|^3e^{-2\xi|k|^2}}{(\log|k|)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant -\frac{c}{\xi\log\xi},\quad \xi\in(0,1).$$

Значит, интеграл в формуле (III.39) не существует. Поэтому в рассматриваемом случае решений не существует.

15.5. Трехмерное уравнение Навье — Стокса

В этом разделе используется шкала $G_s = E_s = C(\overline{\mathbb{T}}_s^m)\cap\mathcal{O}(\mathbb{T}_s^m)$.

Рассмотрим уравнение Навье — Стокса в бездивергентной постановке. Проекция Лере приведет это уравнение к известной форме

$$\begin{aligned}(u^k)_t &= A_l^k\partial_j(u^ju^l)+\Delta u^k,\quad A_l^k=(\Delta^{-1}\partial_k\partial_l-\delta_{kl}),\\ u^k|_{t=0} &= \hat u^k\in H^r(\mathbb{T}^3),\end{aligned}\tag{III.40}$$

где δ_{kl} равно единице при $k=l$ и нулю в противном случае, $k,l,j=1,2,3$ и используется эйнштейновское обозначение суммирования.

Из [55, 60] следует, что при $r=1/2$ задача (III.40) имеет решение $u^i(t,x)$, которое регулярно по пространственным переменным для всех $t\in(0,T_*)$. Здесь T_* – малая положительная постоянная.

Покажем, что из теоремы 12.1 следует существование аналитического решения при любом $r>1/2$, т. е., используя терминологию [37], теорема 12.1 пригодна лишь для докритического случая. Отметим, что это вполне естественно, поскольку теорема 12.1 очень общая.

Предположим, что параметр $\rho\in(0,1/2)$ близок к $1/2$ и заменим переменные в (III.40):

$$u^k=e^{t\Delta}\hat u^k+(-\Delta)^\rho v^k.$$

Задача примет форму

$$v_t^k=f^k(t,v)+\Delta v^k,\quad v^k\mid_{t=0}=0,$$

где

$$\begin{aligned}f^k(t,v)=A_l^k\partial_j(-\Delta)^{-\rho}(e^{t\Delta}\hat u^je^{t\Delta}\hat u^l+e^{t\Delta}\hat u^j(-\Delta)^\rho v^l+\\ +(-\Delta)^\rho v^je^{t\Delta}\hat u^l+(-\Delta)^\rho v^j(-\Delta)^\rho v^l).\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое. Используя лемму 15.2, получим

$$\|A_l^k \partial_j (-\Delta)^{-\rho}((-\Delta)^\rho v^j (-\Delta)^\rho v^l)\|_s \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\delta^{\varepsilon+1-2\rho}} \sum_{j,l=1}^3 \|(-\Delta)^\rho v^j (-\Delta)^\rho v^l\|_{s+\delta/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\delta^{\varepsilon+1-2\rho}} \sum_{j,l=1}^3 \|(-\Delta)^\rho v^j\|_{s+\delta/2} \|(-\Delta)^\rho v^l\|_{s+\delta/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\delta^{\varepsilon+1+2\rho}} \sum_{j,l=1}^3 \|v^j\|_{s+\delta} \|v^l\|_{s+\delta}.$$

Теперь нужно выбрать параметры $\varepsilon > 0$ и $\rho \in (0, 1/2)$ так, чтобы

$$\frac{\varepsilon + 1 + 2\rho}{2} < 1. \tag{III.41}$$

Применяя леммы 15.1, 15.2 и предложение 15.2 ($(s+\delta)^2 < t$), оценим другое слагаемое функции f:

$$\|A_l^k \partial_j (-\Delta)^{-\rho}(e^{t\Delta} \hat{u}^j e^{t\Delta} \hat{u}^l)\|_s \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\delta^{1+\varepsilon-2\rho}} \sum_{j,l=1}^3 \|e^{t\Delta} \hat{u}^j\|_{s+\delta} \|e^{t\Delta} \hat{u}^l\|_{s+\delta} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\delta^{1+\varepsilon-2\rho}} \sum_{j,l=1}^3 \|e^{t\Delta/2} \hat{u}^j\|_0 \|e^{t\Delta/2} \hat{u}^l\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\delta^{1+\varepsilon-2\rho}} \sum_{j,l=1}^3 \|e^{t\Delta/2} \hat{u}^j\|_{H^a(\mathbb{T}^3)} \|e^{t\Delta/2} \hat{u}^l\|_{H^a(\mathbb{T}^3)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\delta^{1+\varepsilon-2\rho} t^{a-r}} \sum_{j,l=1}^3 \|\hat{u}^j\|_{H^r(\mathbb{T}^3)} \|\hat{u}^l\|_{H^r(\mathbb{T}^3)},$$

где $a > 3/2$. Значит, нам нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1 + \varepsilon - 2\rho}{2} + a - r < 1. \tag{III.42}$$

Точно так же получаем оценку

$$\|A_l^k \partial_j (-\Delta)^{-\rho}(e^{t\Delta} \hat{u}^j (-\Delta)^\rho v^l)\|_s \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\delta^{\varepsilon+1} t^{(a-r)/2}} \sum_{j,l=1}^3 \|\hat{u}^j\|_{H^r(\mathbb{T}^3)} \|v^l\|_{s+\delta}.$$

Значит, нам нужно, чтобы выполнялось еще и неравенство

$$\varepsilon + 1 + a - r < 2. \tag{III.43}$$

Нетрудно показать, что для любого $r > 1/2$ существуют такое положительное значение малого параметра $\varepsilon > 0$, такое близкое к $3/2$ (и большее, чем $3/2$) значение параметра a и такое близкое к $1/2$ (и меньшее, чем $1/2$) значение параметра ρ, что неравенства (III.41)–(III.43) выполнены.

Глава IV

Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелипшицевой правой частью

Результаты этой главы изложены в [100], [6], [97].

16. Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{IV.1}$$

Вектор-функция v определена в прямом произведении отрезка $[-T, T]$ и области $Q \subseteq \mathbb{R}^m$.

Векторное поле v обычно считается непрерывным и липшицевым по второму аргументу:

$$\|v(t, x') - v(t, x'')\| \leqslant c\|x' - x''\|. \tag{IV.2}$$

В этом случае задача (IV.1) имеет единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0 \in Q$. Этот факт известен как теорема Коши — Пикара. Все стандартные теоремы об обыкновенных дифференциальных уравнениях, упоминаемые в этом разделе, содержатся в [57].

В общем случае решение $x(t)$ определено не на всем отрезке $[-T, T]$,а только на его подотрезке достаточно малой длины. Отметим, что в условиях теоремы Коши-Пикара решение $x(t)$ непрерывно зависит от начальных данных x_0.

Как сама теорема Коши — Пикара, так и ее доказательство, дословно переносятся со случая $x \in \mathbb{R}^m$ на случай, когда x принадлежит бесконечномерному банаховому пространству.

При отказе от предположения липшицевости (IV.2) задача чрезвычайно усложняется. Так, например, известно, что в бесконечномерном банаховом пространстве задача (IV.1) может не иметь решений при заданном начальном условии [93], [56]. В конечномерном случае существование решения гарантируется теоремой Пеано. При этом, если векторное поле v только непрерывно в $[-T, T] \times Q$, то одним и тем же начальным данным x_0 может соответствовать несколько решений.

Однако, если по каким-то причинам при каждом начальном условии x_0 решение единственно, то оно непрерывно зависит от x_0.

Вопросы единственности решений рассматривались во многих работах. Насколько известно автору, эти исследования начались с работ Камке [59] и Леви [62]. Их результаты в дальнейшем обобщались в различных направлениях (см., например, работы [75], [43] и ссылки, которые они содержат).

Случай, когда векторное поле v принадлежит пространствам Соболева (по крайней мере $H^{1,1}$), рассмотрен в работе [49] в связи с уравнением Навье — Стокса. В этой работе получен ряд теорем о существовании и единственности решений и характере их зависимости от начальных данных.

Предположим, что решение задачи (IV.1) не единственно при некотором x_0, тогда существует много способов выбрать решение $x(t)$ такое, что $x(0) = x_0$. Можно показать, что в конечномерном случае одним начальным данным может соответствовать не более континуума решений. Это следует из того, что множество решений, определенных на интервале $[-\tau, \tau] \subseteq [-T, T]$ и удовлетворяющих условию $x(0) = x_0$, является компактным метрическим пространством относительно нормы $C[-\tau, \tau]$, а метрический компакт не может иметь мощность большую континуума [51]. При этом известны примеры, когда через одну точку x_0 проходит континуум решений.

Множество начальных данных, при которых решение не единственно, исследовалось в работе [80]. Основной результат этой работы состоит в том, что это борелевское множество класса $F_{\sigma\delta}$.

Так или иначе, для каждого начального условия x_0 мы можем выбрать решение $x(t), \quad x(0) = x_0$ и записать

$$x(t) = x(t, x_0), \quad x(0, x_0) = x_0.$$

Это тривиальное, на первый взгляд, соображение основано на аксиоме выбора.

Из анализа мы знаем, что с помощью аксиомы выбора можно получить очень нерегулярные функции. Достаточно вспомнить, что неизмеримые функции на $\mathbb{R}$ существуют именно благодаря аксиоме выбора.

Таким образом, ожидать a priori от функции $x_0 \mapsto x(t, x_0)$ каких-либо "хороших"свойств не стоит. Это приводит к вопросу о том, можно ли для каждого начального условия так выбрать решение, чтобы зависимость $x(t, x_0)$ была все-таки регулярной в каком-либо смысле.

Уравнения Лагранжа с неголономными связями и силами, которые являются обобщенными функциями рассмотрены в работе [86]. В этой работе дано определение обобщенного решения и доказана корректность соответствующей задачи Коши.

17. Основная теорема

Снабдим пространство $\mathbb{R}^m = \{x = (x^1, \dots, x^m)\}$ нормой

$$\|x\| = \max_{k=1,\dots,m} |x^k|.$$

Через $Q \subset \mathbb{R}^m$ обозначим открытую область. Введем следующее обозначение

$$I_\tau = [0, \tau).$$

Пусть вектор-функция $f(t, x) = (f^1, \dots, f^m)(t, x)$ принадлежит пространству $C(I_\tau \times \overline{Q}, \mathbb{R}^m)$, и

$$\|f(t, x)\| \leqslant \psi(t) \in L^1(I_\tau), \quad M = \|\psi\|_{L^1(I_\tau)}.$$

Зафиксируем компактное множество $F \subset Q$ и положим

$$d = \inf\{\|x - y\| \mid x \in F, \quad y \in \partial Q\}.$$

Очевидно, $d > 0$. Если $Q = \mathbb{R}^m$ и, соответственно, $\partial Q = \emptyset$, то будем считать, что по определению $d = \infty$.

Мы исследуем множество решений следующей начальной задачи.

$$u_t(t, x) = f(t, u(t, x)), \quad u(0, x) = x \in F. \tag{IV.3}$$

Предположим, что все решения этой задачи определены на I_T, где $T \in (0, \tau]$ – некоторая константа. Из стандартного курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что

$$T \geqslant \sup\Big\{t \in I_\tau \Big| \int_0^t \psi(s) ds \leqslant d\Big\}.$$

Отметим, что постоянные T, τ могут принимать значение ∞.

Введем в пространстве $C(I_T, \mathbb{R}^m)$ топологию компактной сходимости. Эта топология задается полунормами

$$p_a(v(\cdot)) = \max_{t\in[0,a]} \|v(t)\|, \quad v \in C(I_T, \mathbb{R}^m), \quad a \in I_T.$$

Пространство $C(I_T, \mathbb{R}^m)$ с топологией компактной сходимости является пространством Фреше [13].

Через $\mathcal{B}(V, W)$ обозначим множество измеримых по Борелю отображений топологического пространства V в топологическое пространство W.

Введем также следующее обозначение. Пусть $B(F)$ – пространство ограниченных на F и измеримых по Борелю отображений $v : F \to \mathbb{R}^m$, т . е. $\|v\|_{B(F)} = \sup_{x\in F} \|v(x)\| < \infty$.

Теорема 17.1. *При седеланных предположениях, верны следующие утверждения.*

1) Задача (IV.3) имеет решение $w(t,x)$ такое, что функции

$$x \mapsto w(t,x), \quad x \mapsto w_t(t,x)$$

принадлежат $\mathcal{B}(F, C(I_T, \mathbb{R}^m))$.

2)Пусть $h(t,x) \in \mathcal{B}(F, C(I_T, \mathbb{R}^m))$ – какое-нибудь решение задачи (IV.3). Тогда отображение $t \mapsto h(t,x)$ принадлежит пространству $C^1(I_T, B(F))$.

Мы докажем теорему 17.1 в разделе 20.

Замечание 17.1. *При анализе этой теоремы удобно иметь в виду, что если $u(t,x) \in \mathcal{B}(F, C(I_T, \mathbb{R}^m))$, то для любой фиксированной точки t отображение $x \mapsto u(t,x)$ принадлежит множеству $\mathcal{B}(F, \mathbb{R}^m)$.*

Действительно, через $\delta_t : C(I_T, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ обозначим стандартную δ-функцию: $\delta_t(v(\cdot)) = v(t)$. Это непрерывная функция, следовательно, композиция $\delta_t \circ u$ измерима.

Следствие 17.1. *Найдется такое множество $U \subseteq F$ первой категории в F, что отображение $x \mapsto w(t,x)$ непрерывно в $F \backslash U$.*

Этот факт является прямым следствием соответствующей теоремы из теории борелевских функций [19].

Через ν обозначим стандартную лебеговскую меру на $\mathbb{R}^m$.

Следствие 17.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое по Лебегу множество*

$$V \subseteq F, \quad \nu(F \backslash V) < \varepsilon$$

такое, что отображение $x \mapsto w(t,x)$непрерывно на V. При этом множество V замкнуто в F.

Этот факт тоже является следствием стандартного результата из теории функций действительного переменного [30].

18. Уравнение переноса

В этом разделе положим $Q = \mathbb{R}^m$.

Теорема 17.1позволяет переносить меры с помощью решения $w(t,x)$. Пусть $\hat{\mu}$ – борелевская мера на $\mathbb{R}^m$. Обозначим через $D \subseteq \mathbb{R}^m$ произвольное борелевское множество. Зададим меру $\mu(t)$ формулой

$$\mu(t,D) = \hat{\mu}(w^{-1}(t,D)), \quad w^{-1}(t,D) = \{x \in F \mid w(t,x) \in D\}.$$

Рассмотрим соответствующую конструкцию в терминах мер Радона. Через $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m) \subset C(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство функций с компактным носителем. Напомним, что последовательность φ_n сходится к φ в $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$, если 1) найдется компактное множество P такое, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq P$ и 2) $\sup_{x \in P} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ называются мерами Радона. Обозначим пространство таких функционалов через $\mathcal{K}'(\mathbb{R}^m)$.

Определим семейство мер Радона $\mu(t)$ следующим образом:

$$(\mu(t), \varphi(\cdot)) = (\hat{\mu}, \varphi(w(t,\cdot))) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(w(t,x))\, d\hat{\mu}_x, \quad \varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m). \tag{IV.4}$$

Поскольку функция $x \mapsto w(t,x)$ определена только для x, принадлежащих компактному множеству, формула (IV.4) имеет смысл только при условии, что $\operatorname{supp} \hat{\mu}$ содержится в компактном множестве $F \subset \mathbb{R}^m$. Т.е. $\hat{\mu}(D) = 0$ если только $D \cap F = \emptyset$. Кроме того, мы предположим еще, что $\hat{\mu}(\mathbb{R}^m) < \infty$.

С учётом этих предположений из формулы (IV.4) вытекает следующая оценка:

$$|(\mu(t), \varphi(\cdot))| \leqslant \|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^m)} \hat{\mu}(\mathbb{R}^m). \tag{IV.5}$$

Таким образом, $\mu(t)$ действительно является мерой Радона.

Предположим, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m} \|f(t,x)\| < \infty \tag{IV.6}$$

для каждого $t \in I_T$. Возьмем пробную функцию φ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ и продифференцируем по t левую и правую части равенства (IV.4):

$$(\mu_t(t), \varphi(\cdot)) = (\hat{\mu}, \varphi_x(w(t,\cdot))f(t, w(t,\cdot))). \tag{IV.7}$$

Левая часть этой формулы является определением μ_t, а правая – это результат дифференцирования интеграла Лебега по параметру с учетом уравнения (IV.3).

Из формул (IV.7) и (IV.4) мы находим

$$(\mu_t(t), \varphi(\cdot)) = (\mu(t), \varphi_x(\cdot)f(t,\cdot)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m). \tag{IV.8}$$

Заметим, что формула (IV.4) позволяет умножать меру $\mu(t)$ на функцию

$$\alpha(x) \in C(\mathbb{R}^m), \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |\alpha(x)| < \infty$$

следующим образом

$$(\alpha(\cdot)\mu(t), \varphi(\cdot)) = (\mu(t), \alpha(\cdot)\varphi(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}^m} \alpha(w(t,x))\varphi(w(t,x))\, d\hat{\mu}_x.$$

Следовательно, мы можем переписать (IV.8)в виде

$$(\mu_t(t), \varphi(\cdot)) = (\mu(t), \varphi_x(\cdot)f(t,\cdot)) = (f(t,\cdot)\mu(t), \varphi_x(\cdot)).$$

В терминах производных обобщенных функций последнее равенство записывается так:

$$\mu_t + \operatorname{div}_x(\mu f) = 0, \quad \mu\,|_{t=0} = \hat{\mu}. \tag{IV.9}$$

Снабдим пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{K}'(\mathbb{R}^m)$ топологиями $\sigma(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m), \mathcal{D}(\mathbb{R}^m))$ и $\sigma(\mathcal{K}'(\mathbb{R}^m), \mathcal{K}(\mathbb{R}^m))$ соответственно.

Теперь мы готовы сформулировать следующую теорему.

Теорема 18.1. *Пусть $\hat{\mu}$ есть борелевская мера на $\mathbb{R}^m$ с ограниченным носителем и $\hat{\mu}(\mathbb{R}^m) < \infty$. В дополнение к условиям, перечисленным в разделе 17, предположим, что f удовлетворяет (IV.6). Тогда начальная задача (IV.9) имеет решение*

$$\mu(t) \in C(I_T, \mathcal{K}'(\mathbb{R}^m)) \cap C^1(I_T, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)).$$

Доказательство теоремы 18.1.

Фактически, нам осталось проверить, что $\mu(t) \in C(I_T, \mathcal{K}'(\mathbb{R}^m))$, тогда включение $\mu_t(t) \in C(I_T, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m))$ следует из (IV.8).

Покажем, что $(\mu(t+h)-\mu(t), \varphi) \to 0, \quad \varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ при $h \to 0$. Действительно,

$$(\mu(t+h) - \mu(t), \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(w(t+h, x)) - \varphi(w(t, x))\, d\hat{\mu}_x.$$

Но из теоремы 17.1 мы знаем, что $\|w(t+h, \cdot) - w(t, \cdot)\|_{B(F)} \to 0$.

Теорема доказана.

Важно отметить, что из неравенства (IV.5) не вытекает единственность в теореме 18.1. Так происходит потому, что неравенство (IV.5) не следует из задачи (IV.9), оно было получено лишь для специального класса решений (IV.9). Например, если задача (IV.3) допускает два различных решения $w_1(t, x)$ и $w_2(t, x)$, то мера

$$\mu(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t), \quad (\mu_i(t), \varphi(\cdot)) = (\tilde{\mu}, \varphi(w_i(t, \cdot)))$$

удовлетворяет задаче (IV.9) с начальным условием $\hat{\mu} = 0$, но не удовлетворяет неравенству (IV.5), и получается, что задача (IV.9) имеет еще и решение, тождественно равное нулю.

В разделе 19 мы рассмотрим соответствующий пример.

19. Пример

Рассмотрим самый стандартный пример уравнения с неединственностью решений:

$$u_t(t) = \sqrt{|u(t)|}. \tag{IV.10}$$

Это уравнение имеет набор решений $\{u_c(t)\}, \quad c \in \mathbb{R}$, который описывается следующим образом: $u_c(t) = (t-c)^2/4$, если $t \geqslant c$ и $u_c(t) = -(t-c)^2/4$ для остальных t. Кроме этого, имеется решение, тождественно равное нулю: $u(t) = 0$.

Можно определить по крайней мере два решения

$$w_1(t, x), w_2(t, x), \quad w_i(0, x) = x \in F = [-2, -1], \quad i = 1, 2$$

в смысле теоремы 17.1.

Положим $c = 2\sqrt{-x}$. Зададим решение $w_1(t, x)$ формулой $w_1(t, x) = u_c(t)$. И пусть $w_2(t, x) = u_c(t)$ при $t \leqslant c$ и $w_2(t, x) = 0$ при $t > c$.

Отображения $x \mapsto w_1(t,x)$ образуют множество гомеоморфизмов между F и $w_1(t,F)$. Это напоминает поведение обычных систем с условием Липшица.

Теперь рассмотрим меру

$$(\hat{\mu},\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\chi_F(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$$

и проследим за ее эволюцией на решениях w_1 и w_2:

$$(\mu_i(t),\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(w_i(t,x))\chi_F(x)dx.$$

Для каждого t мера μ_1 абсолютно непрерывна относительно меры dx. Но поскольку $w_2(t,x) = 0, \quad t \geqslant 2\sqrt{2}$, получим

$$\mu_2(t) = \delta_0, \quad t \geqslant 2\sqrt{2}.$$

20. Доказательство теоремы 17.1

Сперва докажем первую часть.

Рассмотрим множество

$$K = \{u(\cdot) \in C^1(I_T,\mathbb{R}^m) \mid u_t(t) = f(t,u(t)), \quad u(0) \in F\}.$$

Мы считаем K топологическим пространством с топологией, индуцированной из $C(I_T,\mathbb{R}^m)$.

Сначала проверим, что K компактно.

Функции из K удовлетворяют интегральному уравнению

$$u(t) = u(0) + \int_0^t f(s,u(s))\,ds. \tag{IV.11}$$

Таким образом множество K равностепенно непрерывно: для любых $t',t'' \in I_T$ справедливо неравенство

$$\|u(t') - u(t'')\| \leqslant \Big| \int_{t'}^{t''} \psi(s)ds \Big|.$$

Напомним стандартный факт из анализа [53]: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\Big| \int_{t'}^{t''} \psi(s)ds \Big| < \varepsilon$ лишь только $|t' - t''| < \delta$.

Для каждого t множество $K(t) = \{u(t) \mid u(\cdot) \in K\}$ ограничено. Действительно, по формуле (IV.11) находим

$$\|u(t)\| \leqslant \max_{x\in F} \|x\| + M. \tag{IV.12}$$

Следовательно, по теореме Асколи [30] множество K относительно компактно в $C(I_T, \mathbb{R}^m)$.

Остается заметить, что K замкнуто в $C(I_T, \mathbb{R}^m)$. Действительно, пусть последовательность $\{u_n(t)\} \subseteq K$ сходится к функции $u(t)$, тогда из стандартных теорем анализа вытекает, что $u \in C(I_T, \mathbb{R}^m)$ и u удовлетворяет (IV.11). Следовательно, $u \in K$.

Следующее предложение является одной из версий теоремы об измеримом выборе.

Предложение 20.1 ([1]). *Пусть K – компактное метрическое пространство, и пусть Y – хаусдорфово топологическое пространство. Тогда для любого непрерывного отображения $g : K \to Y$ найдется борелевское множество $B \subseteq K$ такое, что $g(B) = g(K)$ и отображение $g\mid_B$ инъективно, причем отображение $g^{-1} : g(K) \to B$ измеримо по Борелю.*

В качестве Y мы возьмем множество F и положим $g(u(\cdot)) = \delta_0(u(\cdot)) = u(0)$. В силу предложения 20.1 определена борелевская функция $x \mapsto w(t, x)$, которая является решением задачи (IV.3).

Обозначим отображение $x \mapsto w(t, x)$ через $q : F \to C(I_T, \mathbb{R}^m)$. Для того , чтобы показать, что $x \mapsto w_t(t, x) = f(t, w(t, x))$ измеримо по Борелю, введем непрерывную функцию $\varphi : C(I_T, \overline{Q}) \to C(I_T, \mathbb{R}^m)$ по формуле $\varphi(y(\cdot)) = f(t, y(t))$. Отображение $f(t, w(t, x)) = \varphi \circ q$ измеримо по Борелю как композиция измеримых по Борелю отображений.

Докажем вторую часть теоремы.

В силу замечания 17.1 для любого фиксированного значения t функция $h(t, x)$ является измеримой функцией на F со значениями в $\mathbb{R}^m$. Поскольку $h(t, x)$ ограничена (по тем же причинам, что выражены формулой (IV.12)), получаем $h(t, x) \in B(F)$ при любом $t \in I_T$.

Чтобы убедиться, что отображение $t \mapsto h(t, x)$ принадлежит пространству $C(I_T, B(F))$, достаточно заметить, что

$$\|h(t', x) - h(t'', x)\| \leqslant \left| \int_{t'}^{t''} \psi(s) ds \right|, \quad t', t'' \in I_T.$$

Более того, отображение $t \mapsto h(t, x)$ принадлежит пространству $C^1(I_T, B(F))$.

Действительно, пусть для определенности $\xi > 0$, тогда

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{h(t+\xi,\cdot)-h(t,\cdot)}{\xi} - f(t,h(t,\cdot))\Big\|_{B(F)} \\
&\quad = \Big\|\frac{1}{\xi}\int_t^{t+\xi} f(s,h(s,\cdot)) - f(t,h(t,\cdot))\,ds\Big\|_{B(F)} \\
&\quad \leqslant \sup_{t\leqslant s\leqslant t+\xi} \|f(s,h(s,\cdot)) - f(t,h(t,\cdot))\|_{B(F)}.
\end{aligned} \qquad \text{(IV.13)}$$

Мы уже показали, что $\|h(t,\cdot)-h(s,\cdot)\|_{B(F)} \to 0$ при $s \to t$. Функция $f(t,y)$ равномерно непрерывна на компактном множестве

$$[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \times \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|y\| \leqslant \max_{x\in F} \|x\| + M\} \cap \overline{Q}.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ считается достаточно малым. Следовательно, последний член в формуле (IV.13) стремится к нулю при $\xi \to 0$.

Теорема 17.1 доказана.

Глава V

Мажорантный метод

Мажорантный метод был развит автором в [7], [101].

В разделе 21 докажем несколько теорем о базисе Шаудера в пространствах Фреше. Эти теоремы обобщают соответствующие результаты о пространствах Банаха из [63]. Введение в теорию базиса Шаудера в пространствах Фреше см. также в [31].

21. Пространства Фреше с базисом Шаудера

Пусть X – пространство Фреше над полем комплексных чисел с семейством полунорм $\{\|\cdot\|_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Определение 21.1. *Последовательность элементов $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}\subset X$ называется базисом Шаудера в X, если любой элемент $x\in X$ единственным образом представим в виде*

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}x_ke_k. \tag{V.1}$$

Базис Шаудера в X называется безусловным, если при любой перестановке членов ряда (V.1) его сходимость не нарушается при любом $x\in X$.

В дальнейшем мы будем считать, что пространство X обладает безусловным базисом Шаудера.

Вообще говоря, базис Шаудера существует даже не во всех сепарабельных банаховых пространствах [52]. Важный пример пространств, в которых имеется безусловный базис Шаудера, доставляют сепарабельные гильбертовы пространства. Ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства является, как нетрудно проверить, безусловным базисом Шаудера.

Важным примером пространства Фреше с безусловным базисом Шаудера является пространство $\mathcal{O}(B_R)$. (Напомним, что через $\mathcal{O}(B_R)$ мы обозначаем пространство функций, голоморфных в поликруге B_R.) Безусловный базис Шаудера в этом пространстве состоит из функций $\{z_1^{k_1}, \ldots, z_m^{k_m}\}, \quad (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^m$.

Система $\{e^{i(k,x)}\}, \quad k \in \mathbb{Z}^m$ образует безусловный базис Шаудера в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{T}^m)$.

Другим примером пространства с безусловным базисом Шаудера служит банахово пространство $L^p(0,1), \quad 1 < p < \infty$. Безусловным базисом в этом пространстве является система Хаара [64].

Сформулируем некоторые утверждения.

Предложение 21.1. *Операторы проектирования*

$$P_n x = \sum_{k=0}^{n} x_k e_k : X \to X$$

непрерывны при любом $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Рассмотрим полунормы

$$|x|_i = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \Big\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k \Big\|_i.$$

Все эти полунормы конечны по самому определению сходимости ряда, и

$$\| \cdot \|_i \leqslant | \cdot |_i.$$

Таким образом, тождественное отображение

$$\mathrm{id}_X \, : (X, \{| \cdot |_i\}) \to (X, \{\| \cdot \|_i\})$$

непрерывно.

Полнота пространства $(X, \{| \cdot |_i\})$ доказывается совершенно аналогично [21].

В силу теоремы об открытом отображении, отображение id_X^{-1} непрерывно,и потому наборы полунорм $\{\| \cdot \|_i\}$ и $\{| \cdot |_i\}$ задают в X одну и ту же топологию. Теперь остается заметить , что $|P_n x|_i \leqslant |x|_i$ при всех i.

Предложение доказано.

Замечание 21.1. *Поскольку* $x_i e_i = P_i x - P_{i-1} x$, *из утверждения 21.1 в частности, вытекает, что все линейные функционалы* $e_i^*(x) = x_i$ *непрерывны.*

Действительно, топология, индуцированная из X в одномерное комплексное пространство, натянутое на вектор e_i, эквивалентна стандартной топологии $\mathbb{C}$.

Последнее следует из того, что любая локально выпуклая хаусдорфова топология в конечномерном пространстве нормируема [27].

Мы не приводим доказательства следующего утверждения, т .к. оно дословно повторяет соответствующие рассуждения из [63].

Предложение 21.2. *Ряд (V.1) сходится безусловно тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий.*

1) Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k x_k e_k,$$

где числа $\theta_k \in \{\pm 1\}$ выбраны произвольно, сходится.

2) Для любого номера i и любого $\varepsilon > 0$ существует число n такое, что

$$\Big\| \sum_{k \in \sigma} x_k e_k \Big\|_i < \varepsilon$$

для любого конечного множества $\sigma \subset \mathbb{Z}_+, \quad \min \sigma > n$.

3) Ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i} e_{k_i}$$

сходится для любой последовательности $k_1 < k_2 < \dots$.

Если ряд (V.1) сходится безусловно, то его сумма остается прежней при любой перестановке слагаемых.

Следствие 21.1. *Если ряд (V.1) сходится то для любого номера i и любого $\varepsilon > 0$ существует число n такое, что*

$$\Big\| \sum_{k \in \sigma} x_k e_k \Big\|_i < \varepsilon$$

для любого, не обязательно конечного, множества $\sigma \subseteq \mathbb{Z}_+, \quad \min \sigma > n$.

Действительно, выберем n_1 так, что для любого конечного $\sigma_1, \quad \min \sigma_1 > n_1$ будет

$$\Big\| \sum_{k \in \sigma_1} x_k e_k \Big\|_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем $n_2 > n_1$ так, что для любого конечного $\sigma_2, \quad \min \sigma_2 > n_2$ будет

$$\Big\| \sum_{k\in\sigma_2} x_k e_k \Big\|_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

И так далее. Возьмем теперь любое множество $\sigma, \quad \min \sigma > n_1$. И положим $\sigma_j = (n_j, n_{j+1}] \cap \sigma, \quad j = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $\sigma = \cup_{j=1}^{\infty} \sigma_j$. Это и доказывает утверждение.

Пусть $\theta = \{\theta_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ – произвольная последовательность плюс/минус единиц $\theta_i \in \{\pm 1\}$. Снабдим множество $S = \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ топологией прямого произведения; можно записать $\theta \in S$. Введем оператор $M_\theta x = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k x_k e_k : X \to X$.

Предложение 21.3. *Оператор M_θ непрерывен.*

Доказательство. Покажем, что оператор M_θ замкнут. Действительно, пусть $x^j = \sum_{k=0}^{\infty} x_{jk} e_k \to x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k$ при $j \to \infty$. В силу замечания 21.1 из этого следует, что $x_{jk} \to x_k$ при всех k. Предположим, что

$$M_\theta x^j \to z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k e_k.$$

Но тогда, опять в силу замечания 21.1, $\theta_k x_{jk} \to z_k$, и значит $z_k = \theta_k x_k$, т. е. $M_\theta x^j \to M_\theta x$. По теореме о замкнутом графике оператор M_θ непрерывен.

Предложение доказано.

Предложение 21.4. *Множество операторов $\{M_\theta\}_{\theta\in S}$ равностепенно непрерывно: для любого $i \in \mathbb{N}$ найдется константа c и номер $i' \in \mathbb{N}$ такие, что при всех x будет*

$$\sup_{\theta\in S} \|M_\theta x\|_i \leqslant c\|x\|_{i'}.$$

Доказательство. В силу следствия 21.1, отображение $\theta \mapsto M_\theta x$ непрерывно, и, в частности, непрерывно отображение $\theta \mapsto \|M_\theta x\|_i$ при любом $i \in \mathbb{N}$.

Действительно, пусть $\theta^k = \{\theta_j^k\}_{j\in\mathbb{Z}_+} \to \theta = \{\theta_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ при $k \to \infty$ в S. Это означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется номер K, начиная с которого $(k > K)$ выполнены равенства $\theta_j^k = \theta_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n$. Тогда

$$M_{\theta^k} x - M_\theta x = -2\sum_{k\in\sigma_1} x_k e_k + 2\sum_{k\in\sigma_2} x_k e_k, \qquad \min \sigma_1, \quad \min \sigma_2 > n.$$

В силу Следствия 21.1 для любого $i \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ получим

$$\Big\| \sum_{k\in\sigma_1} x_k e_k \Big\|_i, \quad \Big\| \sum_{k\in\sigma_2} x_k e_k \Big\|_i \to 0.$$

По теореме Тихонова прямое произведение S компактно, поэтому для любого номера i и любого элемента $x \in X$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{\theta \in S} \|M_\theta x\|_i < \infty.$$

Таким образом, операторы M_θ поточечно ограничены. Следовательно, они равностепенно непрерывны [27].

Предложение доказано.

Зафиксируем набор чисел $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{C}, \quad \sup_k |\lambda_k| < \infty$ и введем оператор $M_\lambda x = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \lambda_k x_k e_k$.

Теорема 21.1. *Оператор M_λ определен на всем X. Для любого номера $i' \in \mathbb{N}$ найдутся независящие от λ номер $i \in \mathbb{N}$ и положительная константа c такие, что при всех $x \in X$ справедливо неравенство*

$$\|M_\lambda x\|_{i'} \leqslant c \sup_k |\lambda_k| \|x\|_i. \tag{V.2}$$

Доказательство. Мы проведем доказательство для пространства X над полем действительных чисел. Комплексная версия теоремы получается применением действительной версии к каждому из слагаемых в правой части следующей формулы:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \lambda_k x_k e_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \alpha_k p_k e_k - \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \gamma_k q_k e_k + i \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \gamma_k p_k e_k + i \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \alpha_k q_k e_k,$$

где $\lambda_k = \alpha_k + i\gamma_k, \quad x_k = p_k + iq_k$.

Обозначим

$$b_{nm} = \sum_{n \leqslant k \leqslant m} \lambda_k x_k e_k, \quad a_{nm} = \sum_{n \leqslant k \leqslant m} x_k e_k.$$

Покажем, что для любого $j \in \mathbb{N}$ выполнено отношение $\|b_{nm}\|_j \to 0, \quad n, m \to \infty$. Действительно, существует линейная функция $f : X \to \mathbb{C}$ такая, что $f(b_{nm}) = \|b_{nm}\|_j$ и $|f(x)| \leqslant \|x\|_j$ при всех x [27]. Тогда $f(b_{nm}) = \sum_{n \leqslant k \leqslant m} \lambda_k x_k f(e_k)$. И пусть теперь $\theta_k = 1$, если $x_k f(e_k) \geqslant 0$ и $\theta_k = -1$, если $x_k f(e_k) < 0$. Получим

$$\|b_{nm}\|_j = \Big\| \sum_{n \leqslant k \leqslant m} \lambda_k x_k f(e_k) \Big\|_j \leqslant \sup_k |\lambda_k| \sum_{n \leqslant k \leqslant m} \theta_k x_k f(e_k).$$

Откуда

$$\|b_{nm}\|_j \leqslant \sup_k |\lambda_k| f(M_\theta a_{nm}) \leqslant \sup_k |\lambda_k| \|M_\theta a_{nm}\|_j.$$

В силу предложения 21.4 найдется номер l и независящая от θ константа $c > 0$ такие, что $\|M_\theta a_{nm}\|_j \leqslant c\|a_{nm}\|_l$. Правая часть в последней формуле стремится с ростом n и m к нулю в силу сходимости ряда (V.1). Следовательно, ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \lambda_k x_k e_k$ сходится, и оператор M_λ определен на всем X.

Если теперь вместо b_{nm} взять частичные суммы ряда $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \lambda_k x_k e_k$ и повторить приведенные рассуждения, то мы получим оценку (V.2).

Теорема доказана.

Замечание 21.2. *Если $U = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} U_k e_k \in X$ и имеется набор чисел $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{C}$ такой, что $|u_k| \leqslant |U_k|$, то ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} u_k e_k$ сходится в X. При этом для любого i' найдется константа c и номер i такие, что $\|u\|_{i'} \leqslant c\|U\|_i$. При этом, если U фиксировано, то c и i не зависят от $\{u_k\}$.*

Действительно, элемент $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} u_k e_k$ получается следующим образом: $u = M_\lambda U$, где $\lambda_j = u_j/U_j$, если $U_j \neq 0$, и $\lambda_j = 0$ в остальных случаях.

22. Компактные множества в пространствах Фреше с базисом Шаудера

Определение 22.1. *Будем говорить, что элемент*

$$U = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} U_k e_k \tag{V.3}$$

мажорирует элемент $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} u_k e_k$, и писать $u \ll U$, если

$$|u_k| \leqslant U_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, отношение $\ll$ обладает следующими свойствами. Если $u \ll U$ и $v \ll V$, то $u + v \ll U + V$ и $\lambda u \ll |\lambda| U, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

Теорема 22.1. *Множество $K_U = \{u \in X \mid u \ll U\}$ компактно в X.*

Доказательство. В силу замечания 21.1 множество K_U замкнуто. Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно проверить его предкомпактность [27]. В терминах полунорм предкомпактность означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого индекса $i \in \mathbb{N}$ найдутся m шаров ($m = m(\varepsilon, i)$)

$$B_i(y_j, \varepsilon) = \{v \in X \mid \|v - y_j\|_i < \varepsilon\}, \quad j = 1, \ldots, m$$

таких, что $K_U \subseteq \cup_{j=1}^m B_i(y_j, \varepsilon)$.

Покажем, что множество K_U ограничено. Действительно, пусть $u \in K_U$. Положим

$$\lambda_k = \frac{u_k}{U_k},$$

если $U_k \neq 0$, и $\lambda_k = 0$, если $U_k = 0$. Заметим, что по условию $|\lambda_k| \leqslant 1$.

Тогда

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \lambda_k U_k e_k.$$

По теореме 21.1 для любого номера i найдутся независящие от u номер i' и число c такие, что

$$\|u\|_i \leqslant c\|U\|_{i'}.$$

Это доказывает ограниченность множества K_U.

Рассмотрим множества $K_n = P_n(K_U)$. Образ $P_n(X)$ является конечномерным пространством $\mathbb{C}^{n+1}$. Множества $K_n \subset P_n(X)$ замкнуты в силу замечания 21.1, и в силу непрерывности проекторов – ограничены. Следовательно, множества K_n компактны.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и номер i. И пусть u – любой элемент из K_U. Введем обозначения $Q_n = \mathrm{id}_X - P_n$. Представим $Q_n u$ в виде $Q_n u = M_\lambda Q_n U$. Так же, как и выше, в силу теоремы 21.1 найдется константа $c > 0$ и номер i' (обе величины не зависят от n и U) такие, что

$$\|Q_n u\|_i = \|M_\lambda Q_n U\|_i \leqslant c\|Q_n U\|_{i'}. \tag{V.4}$$

В силу сходимости ряда (V.3) номер n выберем таким, что $c\|Q_n U\|_{i'} < \varepsilon/2$. Значит, по формуле (V.4) имеем

$$\|Q_n u\|_i < \varepsilon/2. \tag{V.5}$$

Компактность множества K_n позволяет выбрать m шаров

$$\{B_i(y_j, \varepsilon/2)\}, \quad y_j \in K_n, \quad j = 1, \dots m$$

так, что $K_n \subseteq \cup_{j=1}^m B_i(y_j, \varepsilon/2)$.

Проверим, что $K_U \subseteq \cup_{j=1}^m B_i(y_j, \varepsilon)$. Действительно, представим $u \in K_U$ в виде $u = P_n u + Q_n u$. Тогда найдется номер j такой, что

$$P_n u \in B_i(y_j, \varepsilon/2). \tag{V.6}$$

Теперь остается применить формулы (V.6) и (V.5) к оценке

$$\|u - y_j\|_i \leqslant \|P_n u - y_j\|_i + \|Q_n u\|_i.$$

Теорема доказана.

Сформулируем условия, при которых компактное множество обладает мажорантной функцией. Эти условия в некотором смысле обращают теорему 22.1. Мы будем рассматривать пространство X над полем действительных чисел, на комплексный случай наши рассуждения обобщаются с помощью операции овеществления [17].

Пусть
$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} u_k e_k, \quad v = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} v_k e_k \in X.$$
Тогда по определению положим
$$u \vee v = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \max\{u_k, v_k\} e_k.$$
Этот ряд, вообще говоря, может оказаться и расходящимся.

Теорема 22.2. *Пусть множество $K \subset X$ компактно, уравновешено* [1] *и вместе с любыми своими элементами u, v оно содержит и элемент $u \vee v$.*

Тогда найдется такой элемент $U \in K$, что $K \subseteq K_U$.

Пусть, например, X – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}$. Легко видеть, что компакт $\{e_k/\sqrt{k}\}$ не содержится ни в каком K_U.

Доказательство теоремы 22.2.

Введем в K отношение частичного порядка:
$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k e_k \prec \sum_{k=0}^{\infty} v_k e_k,$$
если $u_k \leqslant v_k$.

Пусть
$$u_b = \sum_{k=0}^{\infty} u_{bk} e_k, \quad b \in \mathcal{B}$$
какая-нибудь цепь в K. Из непрерывности функционалов e_j^* вытекает, что для каждого k выполнено $\sup_b\{u_{bk}\} < \infty$, поэтому каждая цепь $\{u_{bk}\}$, будучи одновременно и направленностью, имеет предел $u_{bk} \to \hat{u}_k$.

[1]Множество A называется уравновешеным, если вместе с любым элементом a оно содержит и $\lambda a, \quad |\lambda| \leqslant 1$.

Множество называется абсолютно выпуклым, если оно выпукло и уравновешено.

В силу теоремы Банаха — Штейнгауза [30] линейные операторы $\mathrm{id}_X - P_n$ равномерно сходятся к нулю на компакте K. Т.е. для любого i имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_b\Big\|\sum_{j=n+1}^{\infty}u_{bk}e_k\Big\|_i \to 0.$$

Следовательно, направленность $\{u_b\}$ сходится в топологии X, и ее предел лежит в K. Очевидно, этот предел является верхней гранью для $\{u_b\}$.

Таким образом, по лемме Цорна множество K содержит максимальный элемент. Обозначим его U. В силу равенства $U \vee u = U$ этот элемент сравним с любым $u \in K$.

Для завершения доказательство остается заметить, что т. к. $u, -u \prec U$, то $u \ll U$.

Теорема доказана.

23. Неподвижные точки отображений: мажорантный метод

В этом разделе мы сформулируем и докажем одну модельную теорему. Эта теорема иллюстрирует один из возможных путей обобщения метода мажорантных оценок, использованного С.В. Ковалевской при доказательстве ее знаменитой теоремы существования аналитических решений уравнений в частных производных.

Отметим, что классическая теорема Коши — Ковалевской в части существования следует из теоремы 23.1 как частный случай. Мы не будем на этом останавливаться, поскольку в главе VI мажорантный метод будет рассмотрен в более сложной ситуации.

На замкнутом выпуклом множестве $D \subseteq X$ рассмотрим непрерывное отображение $f : D \to X$.

Определение 23.1. *Будем говорить, что отображение $F : D \to X$ мажорирует f, и писать $f \ll F$, если из того, что $u \ll v$, следует, что $f(u) \ll F(v)$.*

Теорема 23.1. *Пусть $f \ll F$. Предположим, что существует элемент U такой, что*

$$F(U) \ll U, \quad K_U \subseteq D. \tag{V.7}$$

Тогда отображение f имеет неподвижную точку $w \in K_U$: $f(w) = w$.

В ряде случаев мажорантное отображение F удается подобрать таким образом, что неравенство (V.7) легко решается, и мы находим элемент U. Тогда по теореме 23.1 неподвижная точка w отображения f существует, и мы даже получаем оценку для элемента w.

Доказательство теоремы 23.1 Легко видеть, что множество K_U выпукло и, по теореме 22.1, компактно.

Пусть $u \in K_U$ тогда $f(u) \ll F(U) \ll U$, т. е. $f(K_U) \subseteq K_U$. По теореме Шаудера — Тихонова отображение f имеет неподвижную точку.

Теорема 23.1 доказана.

24. Дифференциальные уравнения в пространствах Фреше

Как уже отмечалось в главе II, дифференциальные уравнения с нелипшицевой правой частью, вообще говоря, не имеют решений в бесконечномерном банаховом пространстве.

В работе [65] имеется ряд примеров и общих теорем о несуществовании решений нелипшицивых уравнений в локально выпуклых пространствах. В частности, там рассматриваются пространства последовательностей с различными системами полунорм. В этих пространствах строятся примеры несуществования, обобщающие задачу (II.2).

Однако, в пространствах с базисом Шаудера можно не только получать конструктивные результаты о существовании решений, но и эффективно оценивать промежуток времени, на котором решение определено.

Мы приведем несколько примеров такого сорта, используя нелинейность типа задачи (II.2).

Обозначим через $(X, \{\|\cdot\|_j\}), \quad j \in \mathbb{N}$ пространство Фреше с безусловным базисом Шаудера $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Это пространство состоит из элементов $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k e_k$. В частности, в качестве X можно брать $c_0, \quad l_p, \quad 1 \leqslant p < \infty$ или пространства, перечисленные в начале этой главы.

Пример 24.1. Рассмотрим следующую задачу

$$\dot{x}_k = f_k(t,x) = a_k(t,x)\sqrt{|x_k|} + \frac{1}{1+t}x_k + b_k(t,x), \quad x(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{V.8}$$

Предположим, что

$$a_k(t,x), b_k(t,x) \in C([0,T] \times X).$$

И пусть найдется последовательность $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что элемент

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} A_k^2 e_k \in X, \tag{V.9}$$

и при всех $(t,x)\in[0,T]\times X$ справедливы неравенства

$$A_k \geqslant |a_k(t,x)|, \quad A_k^2 \geqslant |b_k(t,x)|, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Область определения правой части (V.8) неочевидна и не обязана совпадать, вообще говоря, со всем пространством X.

Теорема 24.1. *Задача (V.8) имеет решение $x(t)\in C^1([0,T],X)$ при любом $T>0$.*

Отметим, что эта теорема глобальна по времени.

Доказательство теоремы 24.1 Рассмотрим мажорантную задачу

$$\dot y_k = F_k(t,y) = A_k\sqrt{y_k} + \frac{1}{1+t}y_k + A_k^2(t+1), \quad y_k(0) = (\varphi A_k)^2, \tag{V.10}$$

где $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. В каком смысле эта задача мажорирует задачу (V.8), выяснится позже, а сейчас отметим, что задача (V.10) имеет решение

$$\{y_k(t)\} = \{\varphi^2 A_k^2 (t+1)^2\} \in C^1([0,T],X).$$

Мы будем искать неподвижную точку следующего непрерывного отображения.

Лемма 24.1. *Отображение*

$$g = \{g_k\}, \quad g_k(x(\cdot)) = \int_0^t f_k(s,x(s))\,ds. \tag{V.11}$$

переводит множество

$$W = \{\{u_k(t)\}\in C([0,T],X) \mid |u_k(t)| \leqslant y_k(t), \quad t\in[0,T], \quad k\in\mathbb{N}\}$$

в себя и непрерывно на этом множестве. Множество $g(W)$ относительно компактно в $C([0,T],X)$.

Из этой леммы мгновенно следует теорема 24.1. Действительно, отображение g по теореме Шаудера — Тихонова имеет неподвижную точку в W.

Докажем лемму. Проверим, что $g(W) \subseteq W$. Пусть $u(t) \in W$. Из того, что $|u_k(t)| \leqslant y_k(t)$ следует неравенство $|f_k(t, u(t))| \leqslant F_k(t, y(t))$. Поэтому

$$|g_k(u(\cdot))(t)| \leqslant \int_0^t F_k(s, y(s))\, ds \leqslant y_k(t).$$

Используя замечание 21.2, для любых $t', t'' \in [0, T], \quad t' < t''$ находим

$$\|g(u(\cdot))(t') - g(u(\cdot))(t'')\|_{i'} \leqslant c \int_{t'}^{t''} \|F(s, y(s))\|_i\, ds.$$

Следовательно, множество $g(W)$ равностепенно непрерывно. По теореме 22.1 множества $W(t) = \{u(t) \mid u(t) \in W\} \subset X$ относительно компактны при каждом $t \in [0, T]$. По теореме Арцела — Асколи [30] множество $g(W)$ относительно компактно.

Теорема доказана.

Отметим, что отображение $x \mapsto \{a_k(t, x)\sqrt{|x_k|}\}$ не является, вообще говоря, ни липшицевым ни компактным в пространстве

$$\tilde{l}_1 = \Big\{x = \{x_k\} \mid \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}|x_k| < \infty\Big\}.$$

Поэтому теорема 24.1 не вытекает из результатов работ [39], [65], [22].

Этот эффект мы поясним подробнее на следующем простом примере.

Пример 24.2. В качестве X возьмем пространство $\tilde{l}_1$.

Рассмотрим в этом пространстве задачу

$$\dot{x}_k = a_k(t, x)x_k + 1, \quad x_k(0) = 0. \tag{V.12}$$

Предположим, что функции $a_k \in C([0, T] \times \tilde{l}_1)$ и

$$1 \leqslant a_k(t, x) \leqslant 2$$

при всех t, x, k.

Теорема 24.2. *Задача V.12 имеет решение $x(t) \in C^1([0, T), \tilde{l}_1)$.*

Эта теорема доказывается по изложенной выше схеме. В качестве W надо взять множество

$$\{x(t) \in C([0, T), \tilde{l}_1) \mid |x_k(t)| \leqslant M(t)\},$$

где $M(t)$ является решением мажорантной задачи

$$\dot{M} = 2M + 1, \quad M(0) = 0.$$

Отображение $x \mapsto \{a_k(t,x)x_k\}$, вообще говоря, некомпактно и нелипшицево. Нелипшицевость получается если функции a_k брать нелипшицевыми.

Некомпактность тоже очевидна. Действительно, возьмем последовательность элементов, лежащих на единичной сфере $x^{(i)} = i^2 e_i$. Имеем

$$y^{(i)} = a_i(t, x^{(i)}) i^2 e_i, \quad \|y^{(i)} - y^{(j)}\| \geqslant 2, \quad i \neq j.$$

Пример 24.3. Путь теперь $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Это пространство Фреше относительно тихоновской топологии, которая, очевидно, порождается полунормами

$$\|x\|_n = \max_{k \leqslant n} |x_k|, \quad x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Рассмотрим следующую задачу.

$$\dot{x}_k = a_k(t,x)\Big(x_{k+n_k}\Big)^{\frac{k+1}{k+n_k}} + b_k(t,x), \quad x_k(0) = 0, \quad n_k \in \mathbb{N}. \tag{V.13}$$

Здесь $b_k(t,x), a_k(t,x) \in C(\mathbb{R}_+ \times X)$ и при всех t, x, k верны неравенства

$$|a_k(t,x)| \leqslant k, \quad |b_k(t,x)| \leqslant 1.$$

Теорема 24.3. *При любом положительном $T < 1$ задача (V.13) имеет решение $x(t) \in C^1([0,T], X)$, и верна следующая оценка*

$$0 \leqslant x_k(t) \leqslant \frac{1}{(1-t)^k}.$$

Теорема 24.3 доказывается аналогично предыдущим, в качестве W следует взять множество:

$$\Big\{x(t) \in C([0,T), X) \mid 0 \leqslant x_k(t) \leqslant \frac{1}{(1-t)^k}\Big\}.$$

Действительно,

$$g_k(x(\cdot)) = \int_0^t a_k(s, x(s))\Big(x_{k+n_k}(s)\Big)^{\frac{k+1}{k+n_k}} ds + t, \quad |g_k(x(\cdot))| \leqslant \int_0^t \frac{k}{(1-s)^{k+1}} ds + t$$
$$= \frac{1}{(1-t)^k} - (1-t) \leqslant \frac{1}{(1-t)^k}.$$

Т.е. $g(W) \subseteq W$.

Оценка времени существования решения в теореме 24.3 неулучшаема. Действительно, положим

$$n_k = 1, \quad b_k = 1, \quad a_k = k.$$

Введем функцию $u(t,z)=\sum_{k=1}^\infty x_k(t)z^k, \quad z\in\mathbb{R}$. Коэффициенты Тейлора этого разложения являются решением задачи (V.13) тогда и только тогда когда

$$u_t = z\Big(\frac{u}{z}\Big)_z + \frac{z}{1-z}, \quad u(0,z)=0.$$

Откуда находим

$$u(t,z) = z\Big(-\ln(1-t) - \ln\Big(1-\frac{z}{1-t}\Big) + \ln(1-z)\Big).$$

25. Другая версия мажорантного метода

Результаты этого раздела докладывались на конференции "Научное наследие Владимира Михайловича Миллионщикова"в 2014 году.

В этой части мы рассмотрим более тонкую версию мажорантного метода, которая приспособлена к пространствам Фреше над полем действительных чисел и существенно использует непрерывность правой части дифференциального уравнения.

Примеры счетных систем дифференциальных уравнений в шкалах банаховых пространств можно найти в [78], [61].

Результаты этого раздела обобщают результаты работ [69], [90], [89].

26. Основные теоремы

Через E мы обозначим пространство Фреше, топология в котором задается полунормами $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Как и выше, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset E$ – безусловный базис Шаудера и

$$x=\sum_{k=1}^\infty x_k e_k.$$

Введем обозначения $I_T=[0,T], \quad T>0$. По определению положим $I_\infty = [0,\infty)$.

Определение 26.1. Элемент $x(t)\in C^1(I_T,E)$ по определению тогда и только тогда, когда для каждого $t\in I_T$ существует элемент $\dot x(t)$ такой, что для каждого i имеем

$$\lim_{h\to 0}\Big\|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}-\dot x(t)\Big\|_i = 0. \qquad \text{(V.14)}$$

При этом, элемент $\dot{x}$ принадлежит $C(I_T, E)$.

В формуле (V.14) предполагается, что если $t = 0$, то $h > 0$, а если $t = T$, то $h < 0$.

Зафиксируем элемент $y \in E$ и определим аффинный оператор

$$\mathcal{X}_j[y] : E \to E$$

формулой $\mathcal{X}_1[y]x = y_1 e_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k e_k$,

$$\mathcal{X}_j[y]x = \sum_{k=1}^{j-1} x_k e_k + y_j e_j + \sum_{k=j+1}^{\infty} x_k e_k, \quad j > 1.$$

Пусть функция $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(t) e_k \in C(I_T, E)$ такова, что

$$X_k(t) \geqslant 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in I_T,$$

и $X_k(t) \in C^1(I_T)$.

Напомним обозначение

$$W_X = \{(t, x) \in I_T \times E \mid x \ll X(t)\}.$$

Рассмотрим следующую начальную задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = \hat{x}, \tag{V.15}$$
$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t, x) e_k, \quad f \in C(W_X, E).$$

Теорема 26.1. *Предположим, что* $X_k(t) > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in I_T$ *и для каждой пары* $(t, x) \in W_X$ *выполнено неравенство*

$$\pm f_k(t, \mathcal{X}_k[\pm X(t)]x) \leqslant \dot{X}_k(t), \quad \hat{x} \ll X(0).$$

(Здесь и в дальнейшем это означает, что для каждого k *справедливы два неравенства: в одном вместо* $\pm$ *стоит* $+$*, а в другом* $-$*.)*

Тогда задача (V.15) имеет решение $x(t) \in C^1(I_T, E)$ *такое, что*

$$x(t) \ll X(t), \quad t \in I_T.$$

Теорема 26.2. *Пусть* $T = \infty$*, а функция* f $\omega-$*периодична* $(\omega > 0)$ *по* t.

Предположим также, что $X_k(t)>0, \quad k\in\mathbb{N}, \quad t\in I_T$ *и для каждой пары* $(t,x)\in W_X$ *выполнено неравенство*

$$\pm f_k(t,\mathcal{X}_k[\pm X(t)]x)\leqslant \dot X_k(t),$$

и $X(\omega)\ll X(0)$.

Тогда задача (V.15) имеет решение $\tilde x(t)\in C^1(I_\infty,E)$ *такое, что*

$$\tilde x(t)\ll X(t),\quad \tilde x(t+\omega)=\tilde x(t)\quad t\in I_\infty.$$

Теоремы 26.1, 26.2 доказаны в разделе 28.

Следующее техническое предложение полезно при проверке условий этих теорем.

Предложение 26.1. *Зафиксируем элемент* $A=\sum_{k=1}^\infty A_k e_k\in E, \quad A_k\geqslant 0$.

Предположим, что последовательность $x_n=\sum_{k=1}^\infty x_{kn}e_k$ *содержится в*

$$K_A=\Big\{y=\sum_{k=1}^\infty y_k e_k\in E\mid |y_k|\leqslant A_k\Big\}$$

и является слабо сходящейся в следующем смысле: для каждого k *выполнено* $x_{kn}\to x_k$ *при* $n\to\infty$. *Тогда* $x=\sum_{k=1}^\infty x_k e_k\in K_A$ *и данная последовательность сходится в in* E.

Это предложение доказывается методами раздела 28.

26.1. Неотрицательные решения

В физических приложениях (см. уравнение Смолуховского ниже) возникают системы счетного числа уравнений, в которых требуется найти решение, все компоненты которого неотрицательны.

В этом разделе мы формулируем соответствующие теоремы существования. Доказательство этих теорем, с точностью до очевидных модификаций повторяет рассуждения раздела 28.

Снабдим пространство E частичным порядком $\prec$ по следующему правилу.

Определение 26.2. Скажем, что $x=\sum_{k=1}^\infty x_k e_k\prec y=\sum_{k=1}^\infty y_k e_k$ если

$$x_k\leqslant y_k,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Введем так же множество

$$W_X^+ = \{(t, x) \in I_T \times E \mid 0 \prec x \prec X(t)\}.$$

Предположим, что $f \in C(W_X^+, E)$.

Теорема 26.3. *Пусть $X_k(t) > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in I_T$ и для каждой пары $(t, x) \in W_X^+$ верна оценка*

$$f_k(t, \mathcal{X}_k[X(t)]x) \leqslant \dot{X}_k(t), \quad 0 \prec \hat{x} \prec X(0)$$

и $f_k(t, \mathcal{X}_k[0]x) \geqslant 0$.

Тогда задача (V.15) имеет решение $x(t) \in C^1(I_T, E)$ такое, что

$$0 \prec x(t) \prec X(t), \quad t \in I_T.$$

Теорема 26.4. *Пусть $T = \infty$ и функция f $\omega-$периодична ($\omega > 0$) по t.*

Предположим еще, что $X_k(t) > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in I_T$ и для каждой пары $(t, x) \in W_X^+$ верна оценка

$$f_k(t, \mathcal{X}_k[X(t)]x) \leqslant \dot{X}_k(t),$$

и $f_k(t, \mathcal{X}_k[0]x) \geqslant 0$. Более того, предположим, что $X(\omega) \ll X(0)$.

Тогда задача (V.15) имеет решение $\tilde{x}(t) \in C^1(I_\infty, E)$ такое, что

$$0 \prec \tilde{x}(t) \prec X(t), \quad \tilde{x}(t + \omega) = \tilde{x}(t) \quad t \in I_\infty.$$

27. Приложения

27.1. Линейное уравнение в частных производных

Чтобы освободить наше изложение от технических деталей, мы рассмотрим уравнение в частных производных с одной пространственной переменной z, однако легко сформулировать подобную теорему и для случая УРЧП со многими пространственными переменными.

Теорема существования

Через $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ обозначим подпространство в пространстве целых функций $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Это пространство Фреше относительно полунорм

$$\|v\|_n = \max_{|z| \leqslant n} |v(z)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Безусловный базис Шаудера образуют векторы $e_j = z^j, \quad j \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Подпространство $E \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$ состоит из таких целых функций

$$v : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

что $\overline{v(z)} = v(\overline{z})$.

Зафиксируем произвольное положительное число T и пусть $a(t), b(t) \in C(I_T, \mathbb{R})$. Рассмотрим следующую начальную задачу

$$v_t(t,z) = b(t)v(t,z) + a(t)z^m \frac{\partial^N v(t,z)}{\partial z^N}, \quad v(0,z) = \hat{v}(z). \tag{V.16}$$

Здесь $N > m \geqslant 0$ некоторые целые числа.

Введем обозначения

$$q_{jmN} = \frac{(j-m+N)!}{(j-m)!}, \quad j \geqslant m, \quad a^* = \|a\|_{C(I_T)}.$$

Предположим, что $a^* \neq 0$. Выберем произвольные положительные константы $U_0, \ldots U_{N-1}$ и определим последующие постоянные рекуррентно

$$U_{j-m+N} = \frac{U_j}{a^* q_{jmN}}, \quad j \geqslant m.$$

Легко показать, что $U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j z^j \in E$.

Предложение 27.1. *Предположим, что $\hat{v} \ll U$. Тогда задача (V.16) имеет решение $v(t,z) \in C^1(I_T, E)$ и $v(t,z) \ll e^{\int_0^t b(s)ds + t} U(z)$ для всех $t \in I_T$.*

Заметим, что это утверждение не следует из общей теории линейных дифференциальных уравнений в пространствах целых функций, развитой в [5].

После замены неизвестной функции $v = e^{\int_0^t b(s)ds + t} u$ задача (V.16) приобретает вид

$$u_t(t,z) = -u(t,z) + a(t)z^m \frac{\partial^N u(t,z)}{\partial z^N}, \quad u(0,z) = \hat{v}(z). \tag{V.17}$$

В координатной записи уравнение (V.17) выглядит следующим образом: $u(t,z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t) z^j$,

$$\dot{u}_j = -u_j, \quad u_j(0) = \hat{v}_j, \quad j < m,$$

и

$$\dot{u}_j = -u_j + q_{jmN} a(t) u_{j-m+N}, \quad u_j(0) = \hat{v}_j, \quad j \geqslant m. \tag{V.18}$$

Чтобы применить теорему 26.1 к задаче (V.18) заметим, что для любого

$$|u_l| \leqslant U_l, \quad l \geqslant m$$

верна оценка

$$\pm\big(-(\pm U_j)+a(t)q_{jmN}u_{j-m+N}\big)$$
$$\leqslant -U_j+a^*q_{jmN}U_{j-m+N}=0=\dot U_j,\quad j\geqslant m.$$

Предложение доказано.

Периодические решения

Переопределим последовательность $\{U_k\}$. А именно, возьмем последовательность $F_k\geqslant 0,\quad k\in\mathbb{N}$ и произвольные положительные константы $U_0,\dots U_{N-1}$. Положим

$$U_{j-m+N}=\frac{U_j}{a^*q_{jmN}+F_j},\quad j\geqslant m.$$

Легко показать, что $U(z)=\sum_{j=0}^\infty U_jz^j\in E$.

Рассмотрим следующую систему

$$u_t(t,z)=-u(t,z)+a(t)z^m\frac{\partial^N u(t,z)}{\partial z^N}+f(t,z). \tag{V.19}$$

Коэффициенты разложения

$$f(t,z)=\sum_{k=0}^\infty f_k(t)z^k\in C(I_\infty,E)$$

функции f_k являются $\omega-$периодическими. Функция $a(t)$ тоже $\omega-$периодична и непрерывна на I_∞.

Предложение 27.2. *Предположим, что для $j\geqslant m$ выполнены следующие неравенства*

$$\max_{t\in I_\omega}|f_j(t)|\leqslant F_jU_{j-m+N}.$$

Тогда система (V.19) имеет $\omega-$периодическое решение $u(t,z)\in C^1(I_\infty,E)$.

В координатной записи задача (V.19) выглядит следующим образом

$$\dot u_j=-u_j+f_j,\quad j<m,$$

и

$$\dot u_j=-u_j+q_{jmN}a(t)u_{j-m+N}+f_j,\quad j\geqslant m. \tag{V.20}$$

Чтобы применить теорему 26.2 к задаче (V.20) заметим, что для любого

$$|u_l|\leqslant U_l,\quad l\geqslant m$$

выполнено

$$\pm\big(-(\pm U_j)+a(t)q_{jmN}u_{j-m+N}+f_j(t)\big)\\ \leqslant -U_j+a^*q_{jmN}U_{j-m+N}+F_jU_{j-m+N}=0=\dot U_j,\quad j\geqslant m.$$

Предложение доказано.

27.2. Периодические решения уравнения Смолуховского

В этом разделе мы рассмотрим следующую задачу Коши

$$\dot x_k=c_k+\frac{1}{2}\sum_{i+j=k}b_{ij}x_ix_j-x_k\sum_j b_{kj}x_j,\quad x_k(0)=\hat x_k,\quad i,j,k\in\mathbb{N}. \tag{V.21}$$

Функции $c_i(t), b_{ij}(t)\in C(I_T)$ принимают неотрицательные значения,

$$b_{ij}=b_{ji},\quad \hat x_k\geqslant 0.$$

Физический интерес для этой задачи представляют неотрицательные решения: $x_k(t)\geqslant 0$.

В работах [67], [91] были доказаны локальные теоремы существования в следующих предположениях $b_{ij}(t)\leqslant (i+j)^\alpha$, $\alpha\in[0,1]$ и $\hat x_k, c_k$ – убывающие порядка c/k^p коэффициенты, $p>\alpha$.

Мы не предполагаем каких-либо ограничений на рост коэффициентов b_{ij} при $i\neq j$, но зато наложим весьма сильные условия на рост коэффициентов b_{kk}. В таких предположениях мы докажем теорему существования периодического решения, когда b_{ij}, c_k периодичны.

Положим

$$c_k(t)\leqslant C_k,\quad b_{kk}(t)\geqslant\beta_k,\quad b_{ij}(t)\leqslant B_{ij}.$$

В этих формулах $i,j,k\in\mathbb{N}$ и неравенства верны для всех $t\in I_T$; C_k, B_{ij}, β_k – некоторые неотрицательные константы, $\beta_1>0$.

Введем последовательность

$$X_1=\sqrt{C_1/\beta_1},\quad X_k=\sqrt{\frac{C_k+\frac{1}{2}\sum_{i+j=k}B_{ij}X_iX_j}{\beta_k}},\quad k=2,3,\ldots.$$

Предположим, что числа β_k таковы, что

$$b_k=\sum_{j=1}^{\infty}B_{kj}X_j<\infty.$$

Пусть

$$A_k = C_k + \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} B_{ij}X_iX_j + X_kb_k, \quad F_k = \max\{1, A_k, X_k\}.$$

Введем банахово пространство E, состоящее из последовательностей $x = \{x_k\}$, для которых конечна норма

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2F_k}|x_k| < \infty.$$

Это пространство обладает следующим безусловным базисом Шаудера: $e_j = \{\delta_{ij}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Заметим, что

$$A = \sum_{k\in\mathbb{N}} A_ke_k, \quad X = \sum_{k\in\mathbb{N}} X_ke_k \in E.$$

Предложение 27.3. *Предположим, что* $\hat{x} \prec X$.

Тогда задача (V.21) имеет решение $x(t) \in C^1(I_T, E)$ *такое, что*

$$0 \leqslant x_k(t) \leqslant X_k, \quad t \in I_T.$$

Более того, если функции b_{ij}, c_j *являются* $\omega-$*периодичными, то решение* $\tilde{x}(t) \in C^1(I_\infty, E), \quad \tilde{x}_k(t) \geqslant 0$ *тоже* $\omega-$*периодично и* $0 \leqslant \tilde{x}_k(t) \leqslant X_k$.

Доказательство. Итак, мы хотим применить теоремы 26.3, 26.4.

Для $0 \leqslant x_s \leqslant X_s, \quad s \in \mathbb{N}$ и $x_k = 0$ условия этих теорем выполнены:

$$c_k + \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} b_{ij}x_ix_j \geqslant 0.$$

Теперь мы должны проверить выполнение условий теорем для $0 \leqslant x_s \leqslant X_s, \quad s \in \mathbb{N}$ и $x_k = X_k$:

$$\begin{aligned} &c_k + \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} b_{ij}x_ix_j - x_k\sum_j b_{kj}x_j \\ &\qquad \leqslant C_k + \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} B_{ij}X_iX_j - X_k^2\beta_k \leqslant \dot{X}_k = 0 \end{aligned}$$

Остается показать, что отображение

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t,x)e_k, \quad f_k = c_k + \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} b_{ij}x_ix_j - x_k\sum_j b_{kj}x_j$$

является непрерывным как отображение из W_X^+ в E. Заметим, что для каждой пары $(t,x) \in W_X^+$ верна оценка $f(t,x) \ll A$. Теперь непрерывность следует из предложения 26.1.

28. Доказательство основных теорем

Функционально-аналитический аспект задачи

Через $\mathcal{P}_n : E \to E$ обозначим оператор проектирования

$$\mathcal{P}_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

Положим так же $\mathcal{Q}_n = \mathrm{id} - \mathcal{P}_n$.

Лемма 28.1. *Множество W_X компактно в $I_T \times E$.*

Доказательство.

Рассмотрим непрерывные отображения

$$v_n : I_T \to E, \quad v_n(t) = \mathcal{Q}_n X(t).$$

Данная последовательность сходится к нулю поточечно: $v_n(t) \to 0, \quad n \to \infty$ для любого $t \in I_T$. С другой стороны, эта последовательность равностепенно непрерывна на I_T.

Действительно, в силу теоремы 21.1 отображения $\mathcal{Q}_n$ равностепенно непрерывны, следовательно, для любого i' найдется постоянная $c > 0$ и номер i такие, что

$$\|v_n(t') - v_n(t'')\|_{i'} \leqslant c\|X(t') - X(t'')\|_i.$$

При этом отображение X равномерно непрерывно на компакте I_T.

Следовательно, $v_n(t) \to 0$ равномерно на I_T [30].

Множество W_X замкнуто. Лемма будет доказана, если мы покажем, что множества

$$A_n = \{(t, \mathcal{P}_n x) \in I_T \times E \mid x \ll X(t)\}$$

образуют компактные $\epsilon-$сети в W_X.

Действительно, каждое множество A_n содержится в $\mathbb{R}^{n+1}$, является замкнутым и ограниченным.

Возьмем произвольный элемент $(t, x) \in W_X$; и применим теорему 21.1 с

$$\lambda_k(t) = x_k / X_k(t), \quad |\lambda_k(t)| \leqslant 1$$

тогда для любого числа i' найдется номер i и константа c такие, что

$$\|x - \mathcal{P}_n x\|_{i'} = \|\mathcal{M}_{\lambda(t)} \mathcal{Q}_n X(t)\|_{i'} \leqslant c\|v_n(t)\|_i.$$

Следовательно, $\sup_{(t,x)\in W_X} \|x - \mathcal{P}_n x\|_{i'} \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма доказана.

Теорема 28.1 ([30]). *Рассмотрим множество $K\subset C(I_T,E)$. Предположим, что*

1) для любого $t\in I_T$ множество $K_t=\{x(t)\mid x(\cdot)\in K\}\subset E$ компактно.

2) для любого $\epsilon>0$ и любого $n\in\mathbb{N}$ существует постоянная $\delta>0$ такая, что если $t',t''\in I_T,\quad |t'-t''|<\delta$ то

$$\|x(t')-x(t'')\|_n\leqslant\epsilon.$$

Множество K компактно.

Доказательство теоремы 26.1

Приблизим задачу (V.15) конечномерными задачами

$$\dot y^n=\mathcal{P}_n f(t,y^n),\quad y^n(0)=\hat y^n=\mathcal{P}_n\hat x,\quad y^n=\sum_{j=1}^n y_je_j. \tag{V.22}$$

По теореме 29.1 все задачи (V.22) имеют решения $y^n(t)\in C^1(I_T,\mathbb{R}^n)$ и

$$(t,y^n(t))\in W_X,\quad t\in I_T. \tag{V.23}$$

По теореме 21.1 и лемме 28.1 для любого i' существует номер i и постоянная c такие, что

$$\begin{aligned}&\sup\{\|\dot y^n(t)\|_{i'}\mid n\in\mathbb{N},\quad t\in I_T\}\\&\qquad\leqslant\sup\{\|\mathcal{P}_nf(t,x)\|_{i'}\mid(t,x)\in W_X,\quad n\in\mathbb{N}\}\\&\qquad\leqslant c\sup_{(t,x)\in W_X}\|f(t,x)\|_i\leqslant C_{i'}<\infty.\end{aligned}$$

Для любых $t',t''\in I_T$ это дает

$$\|y^n(t')-y^n(t'')\|_{i'}=\Big\|\int_{t'}^{t''}\dot y^n(s)ds\Big\|_{i'}\leqslant C_{i'}|t'-t''|.$$

По теореме 28.1 и лемме 22.1 последовательность $\{y^n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность в $C(I_T,E)$. Обозначим эту подпоследовательность так же:

$$y^n(\cdot)\to x(\cdot)\quad\text{in}\quad C(I_T,E).$$

Поскольку операторы $\mathcal{P}_n$ непрерывны, формула (V.23) влечет $x(t)\ll X(t),\quad t\in I_T$.

Покажем, что $x(t)$ является решением задачи (V.15). Перепишем задачу (V.22) следующим образом

$$y^n(t) - \hat{y}^n = \int_0^t \mathcal{P}_n f(s, y^n(s))ds. \tag{V.24}$$

Переходя к пределу $n \to \infty$ в левой части этой формулы, получаем $x(t) - \hat{x}$.

Рассмотрим правую часть формулы (V.24).

Лемма 28.2. *Для всех $i \in \mathbb{N}$, $\quad t \in I_T$ имеет место предельный переход*

$$\Big\| \int_0^t \mathcal{P}_n f(s, y^n(s))ds - \int_0^t f(s, x(s))ds \Big\|_i \to 0$$

as $n \to \infty$.

Интегралы понимаются в смысле Миллионщикова [22].

Доказательство. Оценим следующее выражение по частям

$$\begin{aligned}\Big\| \int_0^t \mathcal{P}_n f(s, y^n(s))ds - \int_0^t f(s, x(s))ds \Big\|_i \\ \leqslant \int_0^t \|\mathcal{P}_n(f(s, y^n(s)) - f(s, x(s)))\|_i ds \\ + \int_0^t \|\mathcal{Q}_n f(s, x(s))\|_i ds.\end{aligned}$$

В силу теоремы 21.1 имеем

$$\|\mathcal{P}_n(f(s, y^n(s)) - f(s, x(s)))\|_i \leqslant c_i \|f(s, y^n(s)) - f(s, x(s))\|_{i'} \to 0.$$

Поскольку функция f равномерно непрерывна на компакте W_X, этот предел равномерен по $s \in I_T$.

Множество $f(W_X)$ компактно как образ компактного множества при непрерывном отображении. Операторы $\mathcal{Q}_n$ равномерно непрерывны (теорема 21.1). Следовательно, сходимость $\|Q_n f(s, x(s))\|_i \to 0$ равномерна по $s \in I_T$ [30].

Лемма доказана. Из леммы 28.2 и формулы (V.24) следует, что

$$x(t) - \hat{x} = \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Таким образом, $x(t) \in C^1(I_T, E)$ and $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. [22].

Теорема 26.1 доказана.

Доказательство теоремы 26.2

По теореме 29.2 все задачи (V.22) имеют $\omega-$периодические решения $\tilde{y}^n(t)$ такие, что

$$\tilde{y}^n(t) \ll X(t).$$

Множество $\{\tilde{y}^n(\cdot)\}$ относительно компактно $C(I_\omega, E)$. Это следует из рассуждений, аналогичных приведенным выше.

Пусть $y_*(t)$ – предельная точка данного множества. Тогда функция

$$\tilde{x}(t) = y_*(\tau), \quad \tau \in I_\omega, \quad t = \tau \pmod{\omega}$$

является искомым периодическим решением.

Теорема доказана.

29. Конечномерный случай

В этом разделе мы рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения в $\mathbb{R}^m$ и сформулируем несколько известных результатов, которые необходимы для наших бесконечномерных задач.

Пусть функция $X(t) \in C^1(I_T, \mathbb{R}^m)$ такова, что

$$X(t) \in \mathbb{R}^m_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_k \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, m\},$$

для всех $t \in I_T$ с некоторым фиксированным $T > 0$.

Введем функцию $f \in C(W_X, \mathbb{R}^m)$ и рассмотрим следующую задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = \hat{x}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m). \tag{V.25}$$

Теорема 29.1 ([69])**.** *Пусть* $X_k(t) > 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad t \in I_T$ *и для каждого* $(t, x) \in W_X$ *верна оценка*

$$\pm f_k(t, x_1, \ldots, x_{k-1}, \pm X_k(t), x_{k+1}, \ldots, x_m) \leqslant \dot{X}_k(t), \quad \hat{x} \ll X(0).$$

Тогда задача (V.25) имеет решение $x(t) \in C^1(I_T, \mathbb{R}^m)$ *такое, что* $x(t) \ll X(t)$.

Следующая теорема является следствием теоремы [69], теоремы о неподвижной точке Брауэра и того факта, что задача (V.25) равномерно аппроксимируется задачами с локально липшицевыми правыми частями, и решение задачи (V.25) равномерно аппроксимируется соответствующими решениями этих задач.

Теорема 29.2. *Пусть* $T = \infty$ *и в добавок к условиям теоремы 29.1 предположим дополнительно, что функция* f *является* $\omega-$*периодичной* $(\omega > 0)$ *по* t*:*

$$f(t+\omega, x) = f(t, x)$$

и $X(\omega) \ll X(0)$.

Тогда задача (V.25) имеет решение $\tilde{x}(t) \in C^1(I_T, \mathbb{R}^m)$ *такое, что* $\tilde{x}(t) \ll X(t), \quad t \in I_T$ *и* $\tilde{x}(t+\omega) = \tilde{x}(t)$.

Глава VI

Об одном приложении мажорантного метода

В этом разделе мы изложим некоторые результаты книги [85] (совместно с Д.В. Трещевым)

Метод непрерывного усреднения создан Д.В. Трещевым. Он также построил и решил мажорантную задачу для уравнений метода непрерывного усреднения. Теоретико-функциональный анализ уравнений метода непрерывного усреднения и мажорантной задачи выполнен автором.

30. Описание метода непрерывного усреднения

В теории возмущений имеются несколько задач, в которых стандартные методы не дают удовлетворительных результатов. Это, например, проблема вложения диффеоморфизма в поток в аналитической постановке и проблема количественного описания экспоненциально малых эффектов в динамических системах.

Один из возможных путей исследования этих задач основан на методе непрерывного усреднения. Этот метод возникает как обобщение усредняющей процедуры, предложенной Нейштадтом [24] и хорошо работающей при описании экспоненциально малых эффектов.

Идея метода состоит в следующем. Преобразуем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = \hat{u}(z), \tag{VI.1}$$

с помощью замены переменных

$$z \mapsto Z(z, \Delta). \tag{VI.2}$$

Здесь z – точка многообразия M, $\hat{u}$ – гладкое векторное поле на M, Δ – неотрицательный параметр.Сама замена (VI.2) – сдвиг вдоль решений уравнения[1]

$$Z' = f(Z, \delta), \qquad Z(z, 0) = z, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant \Delta, \tag{VI.3}$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменной δ.

Пусть замена $z \mapsto Z$ преобразует уравнение (VI.1)к виду:

$$\dot{Z} = u(Z, \delta). \tag{VI.4}$$

Дифференцируя уравнение (VI.4) по переменной δ, мы получаем:

$$\dot{f}(Z, \delta) = u_\delta(Z, \delta) + \partial_f u(Z, \delta) \quad \text{or} \quad u_\delta = [u, f].$$

Здесь ∂_f – это оператор дифференцирования вдоль векторного поля f на M, нижний индекс δ обозначает частную производную, и $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор векторных полей: $[u_1, u_2] = \partial_{u_1} u_2 - \partial_{u_2} u_1$. Полагая $f = \xi u$, где ξ – некоторый линейный оператор, мы получаем следующую задачу Коши

$$u_\delta = -[\xi u, u], \qquad u|_{\delta=0} = \hat{u}. \tag{VI.5}$$

Уравнение $f = \xi u$ является ключевым для нашего метода. Традиционно векторное поле f в методе Ли строится в виде ряда по малому параметру. Выбор оператора ξ зависит от того, к какому виду мы хотим привести исходные уравнения. Систему (VI.5) мы назовем усредняющей системой.

Если система (VI.1) является гамильтоновой с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}(z)$ и симплектической структурой ω, то естественно искать замену (VI.2) среди симплектических преобразований и считать уравнение (VI.3) гамильтоновым с некоторой функцией Гамильтона $F(z, \delta)$. В силу этих предположений системы (VI.4) тоже гамильтоновы. Их гамильтонианы H удовлетворяют уравнениям $H(Z, \delta) = \hat{H}(z)$. Дифференцируя это равенство по δ, мы получаем:

$$H_\delta(Z, \delta) + \partial_{f(Z,\delta)} H(Z, \delta) = 0 \quad \text{or} \quad H_\delta = -\{F, H\},$$

здесь использовано равенство $\partial_f H = \{F, H\}$. Полагая $F = \xi H$ для некоторого линейного оператора ξ, получим:

$$H_\delta = -\{\xi H, H\}, \qquad H|_{\delta=0} = \hat{H}. \tag{VI.6}$$

[1]Такой способ построения замены переменных называется методом Ли. Соответствующая гамильтонова версия называется методом Депри-Хори.

Теперь построим неавтономный аналог (VI.6). Для этого предположим, что функции $\hat{H}$ и F явно зависят от времени. Тогда и гамильтониан H тоже явно зависит от t. Мы выведем уравнение для H с помощью редукции к автономному случаю. Пусть переменная E канонически сопряжена t.Рассмотрим автономную систему с гамильтонианом $H + E$ и симплектической структурой $\omega + dE \wedge dt$. Пусть $\{\,,\}_*$ – новые скобки Пуассона и $F = \xi H$. Тогда (VI.6) приобретает вид:

$$(H+E)_\delta = -\{\xi H, H+E\}_*\,, \qquad H|_{\delta=0} = \hat{H}.$$

Это эквивалентно следующей задаче:

$$H_\delta = (\xi H)_t - \{\xi H, H\}, \qquad H|_{\delta=0} = \hat{H}(z,t). \tag{VI.7}$$

Это и есть неавтономный аналог системы (VI.6).

Аналогично строится неавтономная версия системы (VI.5):

$$u_\delta = (\xi u)_t - [\xi u, u], \qquad u|_{\delta=0} = \hat{u}(z,t). \tag{VI.8}$$

Проиллюстрируем свойства усредняющей системы на следующем примере. Рассмотрим гамильтонову систему с полутора степенями свободы:

$$\dot{y} = -\varepsilon \partial \hat{H}/\partial x, \quad \dot{x} = \varepsilon \partial \hat{H}/\partial y, \qquad \hat{H} = \hat{H}(x,y,t). \tag{VI.9}$$

Здесь $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}$; функция $\hat{H}$ вещественно-аналитична по x, y, и 2π-периодична по t. Эта система имеет две медленные переменные x и y ($\dot{x} = O(\varepsilon), \quad \dot{y} = O(\varepsilon)$) и одну быструю $t \in \mathbb{T}$.

Попробуем ослабить зависимость гамильтониана $\hat{H}$ от времени с помощью канонической замены

$$(x,y) \mapsto \big(X(x,y,t,\Delta), Y(x,y,t,\Delta)\big), \qquad \Delta > 0,$$

где

$$X' = \partial F/\partial Y, \quad Y' = -\partial F/\partial X, \qquad F = F(X,Y,t,\delta) = \xi H. \tag{VI.10}$$

Положим[2]

$$\xi H(x,y,t,\delta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} i\sigma_k H^k(x,y,\delta)e^{ikt}, \qquad \sigma_k = \operatorname{sign} k, \tag{VI.11}$$

где H^k – коэффициенты Фурье

$$H(x,y,t,\delta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} H^k(x,y,\delta)e^{ikt}.$$

[2]Такой оператор ξ называется преобразованием Гильберта.

Уравнение (VI.7) приобретает вид

$$H^k_\delta = -|k|H^k - \varepsilon\{\xi H, H\}^k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{VI.12}$$

Здесь $\{\,,\}^k$ обозначает коэффициент Фурье с номером k. В более подробной записи система (VI.12) выглядит следующим образом:

$$H^k_\delta = -|k|H^k + i\varepsilon\sigma_k\{H^0, H^k\} - 2i\varepsilon \sum_{l+m=k,\, m<0<l} \{H^l, H^m\},$$
$$H^k|_{\delta=0} = \hat{H}^k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Члены $\varepsilon\{\xi H, H\}^k$ в системе (VI.12) пропорциональны малому параметру. Следовательно, в нулевом приближении ими можно пренебречь. Полагая $\varepsilon = 0$, мы получаем:

$$H^k_\delta = -|k|H^k.$$

При $k \neq 0$ решения этих уравнений быстро стемятся к нулю при $\delta \to \infty$.

Более точно приближение для системы (VI.12) получится, если принять во внимание члены $i\varepsilon\sigma_k\{H^0, H^k\}$. Мы получаем следующую систему:

$$H^k_\delta = -|k|H^k + i\varepsilon\,\sigma_k\{H^0, H^k\}.$$

Ее решение имеет следующий вид

$$H^k = e^{-|k|\delta}\hat{H}^k \circ g^{i\varepsilon\sigma_k\delta}, \tag{VI.13}$$

где g^s сдвиг на время s вдоль решений системы

$$\dot{x} = \partial H^0/\partial y, \qquad \dot{y} = -\partial H^0/\partial x,$$

т. е. $(x,y)|_{t=0} \mapsto (x,y)|_{t=s}$.

Особенности функции $\hat{H}^k \circ g^s$ в комплексной плоскости переменной s не позволяют продолжить решения (VI.13) на все множество положительных значений δ. Однако, поскольку δ может быть выбрано порядка $\sim 1/\varepsilon$, функции (VI.13) могут быть сделаны экспоненциально малыми по ε .

Разумеется, эти рассуждения не могут являться доказательством того, что системы типа (VI.12) могут быть использованы для усреднения. Точные оценки и формулировки приведены ниже.

31. Мажоранты

Для анализа уравнений (VI.5)–(VI.8) мы будем использовать мажорантный метод. В этом разделе мы обсудим некоторые простые свойства мажорант.

Пусть $f(z), g(z)$ – функции, аналитические в точке $z = 0$, $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$:

$$f(z) = \textstyle\sum_\beta f_\beta z^\beta, \qquad g(z) = \textstyle\sum_\beta g_\beta z^\beta,$$
$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m), \qquad \beta_j \geqslant 0, \qquad z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdots z_m^{\beta_m}.$$

Функция g называется мажорантной для f ($f \ll g$), если для любого мультииндекса β выполнены следующие неравенства: $g_\beta \geqslant |f_\beta|$. В том случае, когда f и g – векторнозначные функции, отношение $f \ll g$ означает, что каждая компонента вектора g является мажорантой для соответствующей компоненты вектора f.

Лемма 31.1. *Отношение $\ll$ обладает следующими свойствами:*

(1) Если $f_1 \ll g_1$ и $f_2 \ll g_2$, то $f_1 + f_2 \ll g_1 + g_2$ и $f_1 f_2 \ll g_1 g_2$.

(2) Если $f \ll g$, то $\partial f/\partial z_j \ll \partial g/\partial z_j$ для любого $j = 1, \dots, m$.

(3) Если $f(z, \lambda) \ll g(z, \lambda)$ для любого значения параметра $\lambda \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(z, \lambda)\, d\lambda \ll \int_a^b g(z, \lambda)\, d\lambda.$$

(4) Пусть $|f(z)| \leqslant c$ в области

$$\{z = (z_1, \dots, z_m) : |z_j| \leqslant b,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Тогда $f(z) \ll c/w$, где $w = b^{-m}(b - z_1) \cdots (b - z_m)$.

Утверждения (1)–(3) леммы 31.1 очевидны. Утверждение (4) следует из формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \oint d\zeta_1 \dots \oint d\zeta_{m-1} \oint \frac{f(\zeta) d\zeta_m}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_m - z_m)},$$

где интегрирование ведется по окружностям $\{|z_j| = b\}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_m} f}{\partial z_1^{\beta_1} \dots \partial z_m^{\beta_m}}(0) \right| &= \left| \frac{1}{(2\pi i)^m} \oint d\zeta_1 \dots \oint d\zeta_{m-1} \oint \frac{\beta_1! \dots \beta_m! f(\zeta) d\zeta_m}{\zeta_1^{\beta_1 + 1} \dots \zeta_m^{\beta_m + 1}} \right| \\ &\leqslant \frac{\beta_1! \dots \beta_m!\, c}{b^{\beta_1 + \dots + \beta_m}} = \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_m}}{\partial z_1^{\beta_1} \dots \partial z_m^{\beta_m}} \bigg|_{z=0} \frac{c}{w}. \end{aligned}$$

В дальнешем мы будем использовать мажоранты для оценки решений начальных задач для уравнений в частных производных. Основная идея состоит в следующем. Пусть

$$f = f(z,\delta) = (\ldots, f^{-1}(z,\delta), f^{0}(z,\delta), f^{1}(z,\delta), \ldots), \qquad z \in \mathbb{C}^n,\ \delta \in \mathbb{R}$$

– бесконечномерная вектор-функция, и все компоненты f^k, $k \in \mathbb{Z}$ аналитичны в точке z и принимают значения в $\mathbb{C}^m$. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f^k_\delta(z,\delta) = F^k(f(z,\delta), z, \delta), \qquad f^k(z,0) = \hat{f}^k(z) \tag{VI.14}$$

с некоторыми известными функциями F^k и начальными данными $\hat{f}^k$.

Назовем систему

$$\mathbf{f}^k_\delta(z,\delta) = \mathbf{F}^k(\mathbf{f}(z,\delta), z, \delta), \qquad \mathbf{f}^k(z,0) = \hat{\mathbf{f}}^k(z) \tag{VI.15}$$

мажорантной системой для (VI.14), если

(a) $\hat{f}(z) \ll \hat{\mathbf{f}}(z)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$ и

(b) $F^k(g(z), z, \delta) \ll \mathbf{F}^k(\mathbf{g}(z), z, \delta)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, $\delta \geqslant 0$, и $g \ll \mathbf{g}$.

Далее мы используем следующую версию мажорантного метода.

Мажорантный метод. *Предположим , что $\mathbf{f}(z,\delta)$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ – решение системы, мажорантной для (VI.14). Тогда система (VI.14) имеет решение и*

$$f^k(z,\delta) \ll \mathbf{f}^k(z,\delta) \quad \textit{для любого} \quad \delta \in [0,\delta_0],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Более того, в формуле (VI.15) можно заменить “$=$” на “$\gg$”.

Те же соображения действуют, если мы перепишем системы (VI.14)–(VI.15) в следующей форме:

$$\begin{aligned} f^k(z,\delta) &= \hat{f}^k(z) + \int_0^\delta F^k(f(z,s), z, s)\, ds, \\ \mathbf{f}^k(z,\delta) &= \hat{\mathbf{f}}^k(z) + \int_0^\delta \mathbf{F}^k(\mathbf{f}(z,s), z, s)\, ds, \end{aligned}$$

где опять равенства “$=$” в мажорантных уравнениях могут быть заменены на “$\gg$”.

Некоторые функциональные свойства операции "$\ll$".

Предположим формально, что область D (см. раздел 7) состоит из единственной точки $0 \in \mathbb{R}^m$, и пусть

$$D_s = \{z \in \mathbb{C}^m \,:\, \|z\| < sR\}.$$

Таким образом, D_s теперь у нас полидиск радиуса sR.

Предложение 31.1. *Предположим, что* $u, U \in H_s$, $\;u \ll U$. *Тогда* $\|u\|_s^H \leqslant \|U\|_s^H$.

Доказательство. Пусть $u(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^m} u_j z^j$, $\;U(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^m} U_j z^j$. Тогда $|u_j| \leqslant U_j$. Найдется точка $\hat{z} \in \overline{D_s}$ такая, что

$$\|u\|_s^H = |u(\hat{z})| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^m} |u_j|\,|\hat{z}^j| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^m} U_j (sR)^{|j|} = U(\tilde{z}), \qquad \tilde{z} = sR\cdot\mathbf{1}.$$

□

Предложение 31.2. *Множество* $V = \{u \mid u \ll U \in H_s\}$ *замкнуто в* H_s.

Доказательство. Пусть $\{u_k\} \subset V$ и $u_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^m} u_{k,j} z^j \to u = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^m} u_j z^j$ в H_s при $k \to \infty$. Очевидно, достаточно проверить, что $u_{k,j} \to u_j$. Но этот факт вытекает из оценки Коши:

$$\Big| \frac{\partial^{|j|}(u_k - u)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_m^{j_m}}(0) \Big| \leqslant c_{|j|,s} \|u_k - u\|_s^H.$$

Постоянная $c_{|j|,s} > 0$ не зависит от u, u_k.

32. Усреднение быстрой фазы

Многие физические модели представляются системами обыкновенных дифференциальных уравнений, которые содержат угловые переменные, меняющиеся значительно быстрее, чем остальные переменные, входящие в задачу. Принимая быструю фазу за новое время, мы можем переписать уравнения в следующем виде:

$$\dot{z} = \varepsilon \hat{v}(z, t, \varepsilon), \qquad z \in M, \tag{VI.16}$$

здесь M – m-мерное фазовое пространство системы, а ε – малый параметр. Этот параметр соответствует отношению типичного изменения медленной переменной к типичному изменению быстрой переменной. Векторное поле $\hat{v}$ считается гладким и зависит от времени 2π-периодически.

Хорошо известно, что заменой переменных можно ослабить зависимость в (VI.16) от времени.В частности, используя стандартный метод усреднения (см. например, [2]), легко построить 2π-периодическую по t замену переменных $z \mapsto z_*$ такую, что уравнения (VI.16) примут форму

$$\dot{z}_* = \varepsilon \bar{v}^0(z_*) + \varepsilon^2 \hat{v}_*(z_*, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{v}(z_*, t, \varepsilon). \tag{VI.17}$$

Здесь от t в правой части зависит только член порядка $\varepsilon\tilde{v} = O(\varepsilon^K)$. Натуральное число K произвольно, и

$$\bar{v}^0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{v}(z,t,0)\,dt$$

– среднее по времени от функции $\hat{v}(z,t,0)$.

Теперь предположим, что функции $\hat{v}$ зависят аналитически от фазовых переменных. Пуанкаре заметил, что в этом случае степенные ряды по малому параметру, представляющие замену переменных, которая убирает t из уравнений, формально существуют , но расходятся: коэффициенты при ε^k в этих рядах имеют порядок $k!$. В общем случае этот факт был доказан в работе [79].

Нейштадт [24, 38] заметил, что в случае аналитической зависимости от фазовых переменных функции $\hat{v}$ в (VI.17) можно получить

$$\tilde{v} = O(e^{-\alpha/\varepsilon}), \tag{VI.18}$$

где $\alpha > 0$ – некоторая константа (параметр ε считается неотрицательным). Таким образом, явная зависимость уравнений от времени может быть сделана экспоненциально малой. Метод, который использовал Нейштадт для доказательства этого утверждения, основан на большом (порядка $1/\varepsilon$) числе последовательных замен переменных. Эти замены постепенно ослабляют зависимость уравнений от времени. Рамис и Шефке [76] получили аналогичные результаты, анализируя расходящиеся ряды обычной теории возмущений.

Известно, что, вообще говоря, существует константа $A > \alpha$ такая, что невозможно построить 2π-периодическую по t замену переменных

$$z \mapsto z_*, \quad \tilde{v} = O(e^{-A/\varepsilon}).$$

Это утверждение следует, например, из оценки величины расщепления сепаратрис в гамильтоновых системах типа (VI.16) с полутора степенями свободы. В этом разделе, следуя работе [84], мы получим реалистичные оценки “максимального” α, для которого оценка (VI.18) возможна.

Пусть g^t – фазовый поток усредненной системы

$$\dot{z} = \bar{v}^0(z). \tag{VI.19}$$

Предположим, что многообразие M вещественно-аналитично. Зафиксируем его комплексную окрестность $M_{\mathbb{C}}$. Пусть Q – компакт в M, и $V_Q \subset M_{\mathbb{C}}$ – его комплексная окрестность. Например, можно положить, что $M = \mathbb{R}^m$ и Q – замыкание некоторой ограниченной области в $\mathbb{R}^m$. Тогда естественно взять

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{C}} &= \big\{z \in \mathbb{C}^m : z = x + ia,\ x \in \mathbb{R}^m,\ a \in \mathbb{R}^m,\ |a| < c\big\}, \\ V_Q &= \big\{z \in \mathbb{C}^m : z = x + b,\ x \in Q,\ b \in \mathbb{C}^m,\ |b| < \tilde{c}\big\}. \end{aligned}$$

Разумно предположить, что $\tilde{c}$ мало.

Предположим, что для любого действительного $s \in (-\alpha, \alpha)$ и любой точки $z \in V_Q$ отображение g^{is} аналитично в точке z, и более того, $g^{is}(z) \in M_{\mathbb{C}}$. Зададим множество

$$U_{Q,\alpha} = \bigcup_{-\alpha<s<\alpha} g^{is}(V_Q).$$

Теорема 32.1. *Пусть положительные постоянные $\alpha, \rho, \varepsilon_0$ таковы, что*

(1) $U_{Q,\alpha} \subset M_{\mathbb{C}}$.

(2) Векторное поле $\hat{v}$ вещественно-аналитично по z и C^2-гладкое по t, ε в $U_{Q,\alpha} \times \mathbb{T} \times [0, \varepsilon_0]$.

Тогда для достаточно малого ε_0 существует открытое множество $V'_Q \subset V_Q$ и 2π-периодическая по t, вещественно- аналитическая по z замена

$$F : V'_Q \times \mathbb{T} \times (0, \varepsilon_0) \to M_{\mathbb{C}}, \qquad Q \subset V'_Q,$$

такая, что

(a) $F(z, t, \varepsilon) = z_* = z + O(\varepsilon)$,

(b) Отображение $F \times id_t$ преобразует векторное поле $\begin{pmatrix} \varepsilon\hat{v} \\ 1 \end{pmatrix}$ на расширенном фазовом пространстве $M \times \mathbb{T}_t$ в векторное поле $\begin{pmatrix} \varepsilon v_* \\ 1 \end{pmatrix}$, где

$$v_*(z, t, \varepsilon) = \bar{v}^0(z) + \varepsilon\hat{v}_*(z, \varepsilon) + \tilde{v}(z, t, \varepsilon). \tag{VI.20}$$

(c) Зависящий от времени член $\tilde{v}$ оценивается следующим образом:

$$|\tilde{v}(z, t, \varepsilon)| \leqslant Ce^{-\alpha/\varepsilon}, \qquad z \in V'_Q, \quad t \in \Sigma_\rho, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0). \tag{VI.21}$$

Теорема 32.1 означает, в частности, что в случае, когда компоненты $\hat{v}$ являются целыми функциями переменной z, величина α в (VI.21) может быть любым положительным числом, так что для всех $s \in [-\alpha, \alpha]$ отображения $z \mapsto g^{is}(z)$ голоморфны в любой точке $z \in Q$.

Теорема 32.1 является следствием своей локальной версии (теоремы 32.2). Чтобы сформулировать эту локальную версию, мы вместо компакта Q рассмотрим точку $z^0 \in M$. Пусть $V \subset M_{\mathbb{C}}$ будет ее окрестностью.

Предположим, что для всех действительных s таких, что $s \in (-\alpha, \alpha)$, и для любой точки $z \in V$ отображение g^{is} аналитично в точке z и, более того, $g^{is}(z) \in M_{\mathbb{C}}$. Определим множество

$$U_\alpha = \bigcup_{-\alpha<s<\alpha} g^{is}(V).$$

Теорема 32.2. *Пусть положительные постоянные $\alpha, \rho, \varepsilon_0$ таковы, что*

(1) $U_\alpha \subset M_{\mathbb{C}}$.

(2) функция $\hat{v}$ аналитична z и C^2-гладкая по t, ε на множестве $U_\alpha \times \mathbb{T} \times [0, \varepsilon_0]$.

Тогда для достаточно малых ε_0 существует 2π-периодическая по t вещественно - аналитическая по z замена $f : V' \times \mathbb{T} \times (0, \varepsilon_0) \to V$, где $V' \subset V$ – это окрестность точки z^0, и справедливы следующие утверждения:

(a) $f(t, z, \varepsilon) = z_* = z + O(\varepsilon)$.

(b) В координатах z_*, t векторное поле $\varepsilon\hat{v}$ имеет вид εv_* (см. (VI.20)), где для некоторой постоянной C_0

$$|\tilde{v}(z, t, \varepsilon)| \leqslant C_0 e^{-\alpha/\varepsilon}, \qquad z \in V', \quad t \in \mathbb{T}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0). \tag{VI.22}$$

Теорема 32.1 выводится из теоремы 32.2. Это следует из следующего наблюдения. Усредняющая система, которую мы используем в доказательстве теоремы 32.2, определена независимо от окрестности V и точки z^0. Следовательно, отображения f, которые мы строим в теореме 32.2, склеиваются друг с другом и дают отображение F. Мы можем положить $V'_Q = \cup_z V'(z)$, где $z \in Q$, и окрестности $V'(z)$ определены в теореме 32.2. Благодаря компактности Q, мы можем считать, что объединение берется по конечной системе окрестностей. Константа C в (VI.21) может быть взята максимальной среди констант C_0, соответствующим множествам $V'(z)$ из этой системы.

Доказательство теоремы 32.2 основано на методе непрерывного усреднения. А именно, мы решаем задачу Коши (VI.8), где вместо u и $\hat{u}$ пишем εv и $\varepsilon\hat{v}$:

$$v_\delta = (\xi v)_t - \varepsilon[\xi v, v], \qquad v|_{\delta=0} = \hat{v}(z, t, \varepsilon). \tag{VI.23}$$

Оператор ξ определяется так же, как и раньше. Пусть

$$v(z, t, \varepsilon, \delta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v^k(z, \varepsilon, \delta) e^{ikt}.$$

Тогда положим

$$\xi v(z, t, \varepsilon, \delta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} i \operatorname{sign} k \, v^k(z, \varepsilon, \delta) e^{ikt} \tag{VI.24}$$

(ср. с (VI.11)). В соответствие с эвристическими рассуждениями, аналогичными тем, что приведены в разделе 30, можно надеяться, что система (VI.23)–(VI.24) действительно усредняет по t. Требуемая замена переменных соответствует значению $\delta = \alpha/\varepsilon$. Анализ решения системы (VI.23) на интервале $\delta \in [0, \alpha/\varepsilon]$ содержится в следующем разделе.

Замечание 32.1. *В соответствие с определением, усредняющая процедура обладает следующим важным свойством. Предположим, что векторное поле $\hat{v}$ для каждых фиксированных t и ε принадлежит некоторой подалгебре χ в алгебре Ли всех векторных полей на M. Тогда для фиксированных t, ε и δ векторное поле $v(z, t, \varepsilon, \delta)$ тоже лежит в χ. Таким образом, диффеоморфизм f принадлежит соответствующей группе Ли. Более того, если $\hat{v}$ обратимо относительно некоторой инволюции $I : M \to M$, то векторное поле $v(z, t, \varepsilon, \delta)$ тоже I-обратимо. В частности, если начальное векторное поле $\hat{v}$ – гамильтоново, то $v_* = v(z, t, \varepsilon, \alpha/\varepsilon)$ тоже гамильтоново, и соответствующая замена переменных F – симплектическая.*

33. Аналитические свойства усредняющей процедуры

Мы разделим анализ системы (VI.23)–(VI.24) на две части. Сначала мы построим мажорантные оценки для решения нашей задачи так, как будто уже доказано, что оно существует – так называемые априорные оценки. Это эвристическая часть доказательства.

Во второй части мы дадим формальное доказательство теоремы 32.2.

Мы используем пространства функций, аналитических в поликругах. Это локальное рассотрение оправдывается тем, что система (VI.23)–(VI.24) определена инвариантым, независимым от локальных систем координат образом. Поэтому решения этой системы, полученные в отдельных картах многообразия M, склеиваются в глобальное решение.

Ниже, для краткости, мы не пишем ε среди аргументов рассматриваемых функций.

Априорные оценки.

Положив $\bar{v} = \hat{v}^0|_{\varepsilon=0}$,

$$v^0(z, \delta) = w^0(z, \delta) + \overline{v}(z), \quad v^k(z, \delta) = w^k(z, \delta) e^{-|k|\delta}, \qquad k \neq 0,$$

представим систему (VI.23)–(VI.24) в виде

$$\begin{array}{rcl} w_\delta^0 & = & -2i\varepsilon\sum_{l>0}[w^l, w^{-l}]e^{-2l\delta}, \\ w_\delta^k & = & i\sigma_k\varepsilon[\overline{v}+w^0, w^k] - 2i\varepsilon\sum_{l,n}[w^l, w^n]e^{(|k|-|l|-|n|)\delta}, \end{array} \qquad \text{(VI.25)}$$

$$w^0(z,0) = \hat{v}^0(z) - \overline{v}(z), \quad w^k(z,0) = \hat{v}^k(z), \qquad k \neq 0, \qquad \text{(VI.26)}$$

где l, n в сумме $\sum_{l,n}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$l + k = n, \quad n < 0 < l. \qquad \text{(VI.27)}$$

Для любого векторного поля $u(z)$ на M положим

$$\mathbf{g}^s u(z) = Dg^s u \circ g^{-s}(z), \qquad s \in \mathbb{C}, \qquad \text{(VI.28)}$$

где Dg^s – дифференциал фазового потока g^s по переменной z.

Для любых $z \in M$ $\mathbf{g}^s : T_zM \to T_zM$ – линейный оператор. Следовательно, $u \mapsto \mathbf{g}^s u$ – линейный оператор на пространстве гладких (или аналитических) векторных полей на M.

Операторы $\mathbf{g}^s$ образуют однопараметрическую группу: $\mathbf{g}^{s_1}\mathbf{g}^{s_2} = \mathbf{g}^{s_1+s_2}$. Более того,

$$\mathbf{g}^s[u_1, u_2] = \big[\mathbf{g}^s u_1, \mathbf{g}^s u_2\big].$$

Предложение 33.1. *Пусть векторное поле $w(z,\delta)$ на M является решением начальной задачи*

$$w_\delta = i\sigma\varepsilon[\overline{v}, w] + \eta(z,\delta), \qquad w(z,0) = \hat{w}(z)$$

с некоторыми известными η и $\hat{w}$. Тогда

$$w(z,\delta) = \mathbf{g}^{i\sigma\varepsilon\delta}\hat{w}(z) + \int_0^\delta \mathbf{g}^{i\sigma\varepsilon(\delta-s)}\eta(z,s)\,ds.$$

Доказательство следует из тождества

$$\frac{d}{ds}\mathbf{g}^s u = [\bar{v}, \mathbf{g}^s u]. \qquad \text{(VI.29)}$$

□

В соответствие с предложением 33.1, система (VI.25) эквивалентна системе

$$\begin{array}{l} w^0(z,\delta) = \hat{v}^0(z) - \overline{v}(z) + i\varepsilon\displaystyle\int_0^\delta \eta^0(z,s)\,ds, \\ w^k(z,\delta) = \mathbf{g}^{i\sigma_k\varepsilon\delta}\hat{v}^k(z) + i\varepsilon\displaystyle\int_0^\delta \mathbf{g}^{i\sigma_k\varepsilon(\delta-s)}\eta^k(z,s)\,ds, \end{array} \qquad \text{(VI.30)}$$

$$\begin{array}{l} \eta^0(z,s) = -2\displaystyle\sum_{l>0}[w^l, w^{-l}](z,s)e^{-2ls}, \\ \eta^k(z,s) = \sigma_k[w^0, w^k] - 2\displaystyle\sum_{l,n}[w^l, w^n](z,s)e^{(|k|-|l|-|n|)s}. \end{array} \qquad \text{(VI.31)}$$

Лемма 33.1. *Для любого действительного $s \in [-\alpha, \alpha]$ коэффициенты Фурье $\hat{v}^k$ удовлетворяют следующей мажорантной оценке:*

$$\mathbf{g}^{is}(\hat{v}^0(z) - \overline{v}(z)) \ll \frac{\varepsilon\beta\kappa}{(\kappa - \zeta)}\mathbf{1}, \quad \mathbf{g}^{is}\hat{v}^k(z) \ll \frac{\beta\kappa}{k^2(\kappa - \zeta)}\mathbf{1}, \qquad k \neq 0,$$

где $\zeta = z_1 + \cdots + z_m$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$, и β, κ – положительные постоянные.

Доказательство. В соответствие с предположением (2) теоремы 32.2, для любого малого ε и $s \in [-\alpha, \alpha]$ векторное поле $\mathbf{g}^{is}\hat{v}(z, t)$ является аналитическим в $z \in V$ и C^2-гладким по $t \in \mathbb{T}$. Положим $V' = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \kappa\} \subset V$ для некоторой положительной κ. Пусть

$$\beta' = \max_{s\in[-\alpha,\alpha],(z,t)\in V'\times\mathbb{T}} \left| \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{g}^{is}\hat{v}(z, t) \right|.$$

Тогда, очевидно,

$$\max_{s\in[-\alpha,\alpha],z\in V'} \left| k^2\mathbf{g}^{is}\hat{v}^k(z) \right| \leqslant \beta', \qquad k \neq 0.$$

Используя утверждение (4) леммы 31.1, для любого $s \in [-\alpha, \alpha]$ и $k \neq 0$ мы получаем оценку

$$\mathbf{g}^{is}\hat{v}^k(z) \ll \frac{\beta'\kappa^m}{k^2(\kappa - z_1)\ldots(\kappa - z_m)}\mathbf{1} \ll \frac{\beta'\kappa}{k^2(\kappa - \zeta)}\mathbf{1}. \tag{VI.32}$$

Последнее неравенство следует из оценки

$$\frac{\kappa^m}{(\kappa - z_1)\ldots(\kappa - z_m)} \ll \frac{\kappa}{\kappa - z_1 - \ldots - z_m}.$$

Отметим, что $\hat{v}^0 - \overline{v}(z) = O(\varepsilon)$. Таким образом, для некоторого положительного β'' имеем

$$\max_{s\in[-\alpha,\alpha],z\in V_0} \left| \mathbf{g}^{is}(\hat{v}^0(z) - \overline{v}(z)) \right| \leqslant \varepsilon\beta''.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{g}^{is}(\hat{v}^k(z) - \overline{v}(z)) \ll \frac{\varepsilon\beta''\kappa}{\kappa - \zeta}\mathbf{1}. \tag{VI.33}$$

Лемма 33.1 вытекает из оценок (VI.32)–(VI.33). □

Зададим функцию

$$\varphi(\delta) = 32m\beta\kappa \int_0^\delta \left(\varepsilon^2 K + K^{-1}e^{-2s}\right) ds.$$

Эта функция зависит от параметров β, κ, K.

Лемма 33.2. *Пусть положительная постоянная K такова, что*

$$\varphi(\delta) < \kappa^2 \quad \textit{for any} \quad \delta \in [0, \alpha/\varepsilon]. \tag{VI.34}$$

Тогда для любого $\delta \in [0, \alpha/\varepsilon]$ и $\tau \in [-\alpha + \varepsilon\delta, \alpha - \varepsilon\delta]$

$$\mathbf{g}^{i\tau} w^0(z, \delta) \ll \varepsilon K \mathbf{w}(\zeta, \delta)\mathbf{1}, \quad \mathbf{g}^{i\tau} w^k(z, \delta) \ll k^{-2}\mathbf{w}(\zeta, \delta)\mathbf{1}, \qquad k \neq 0, \tag{VI.35}$$

где скалярная функция $\mathbf{w}$ удовлетворяет задаче Коши

$$\mathbf{w}_\delta = 8m\big(\varepsilon^2 K + K^{-1} e^{-2\delta}\big)\mathbf{w}\mathbf{w}_\zeta, \quad \mathbf{w}(\zeta, 0) = \frac{\beta\kappa}{\kappa - \zeta}. \tag{VI.36}$$

Из леммы 33.2 следует теорема 32.2. Действительно, функция $\mathbf{w}$может быть найдена явно:

$$\mathbf{w}(\zeta, \delta) = \frac{2\beta\kappa}{\kappa - \zeta + \sqrt{(\kappa - \zeta)^2 - \varphi(\delta)}}.$$

В силу (VI.34) функция $\mathbf{w}$ является аналитической в точке $z = 0$ при $\delta \in [0, \alpha/\varepsilon]$. Следовательно,

$$v^0(z, \alpha/\varepsilon) - \overline{v}(z) \ll \varepsilon K \mathbf{w}(\zeta, \alpha/\varepsilon)\mathbf{1}, \quad v^k(z, \alpha/\varepsilon) \ll e^{-|k|\alpha/\varepsilon}\mathbf{w}(\zeta, \alpha/\varepsilon)\mathbf{1}.$$

Из этих оценок следует теорема 32.2.

Докажем лемму 33.2. Сперва заметим, что в соответствии с (VI.30), функции

$$\mathbf{g}^{i\tau} w^n(z, \delta), \qquad 0 \leqslant \delta \leqslant \alpha/\varepsilon, \quad -\alpha + \varepsilon\delta \leqslant \tau \leqslant \alpha - \varepsilon\delta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{i\tau} w^0(z, \delta) &= \mathbf{g}^{i\tau} w^0(z, 0) + i\varepsilon \int_0^\delta \mathbf{g}^{i\tau} \eta^0(z, s)\, ds, \\ \mathbf{g}^{i\tau} w^k(z, \delta) &= \mathbf{g}^{i(\tau + \sigma_k \varepsilon\delta)} \hat{v}^k(z) + i\varepsilon \int_0^\delta \mathbf{g}^{i(\tau + \sigma_k \varepsilon(\delta - s))} \eta^k(z, s)\, ds, \end{aligned} \tag{VI.37}$$

где η^n определены из (VI.31) и $\sigma_k = \operatorname{sign} k$. Таким образом, векторные поля в правых частях являются комбинациями векторных полей

$$\mathbf{g}^{i\tau'} w^{n'}(z, \delta'), \qquad 0 \leqslant \delta' \leqslant \alpha/\varepsilon, \quad -\alpha + \varepsilon\delta' \leqslant \tau' \leqslant \alpha - \varepsilon\delta', \quad n' \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^0(\zeta, \delta) &= \mathbf{w}^0(\zeta, 0) + \varepsilon \textstyle\int_0^\delta \rho^0(\zeta, s)\, ds, \\ \mathbf{w}^k(\zeta, \delta) &= \mathbf{w}^k(\zeta, 0) + \varepsilon \textstyle\int_0^\delta \rho^k(\zeta, s)\, ds, \qquad k \neq 0, \end{aligned} \tag{VI.38}$$

$$\rho^k(\zeta, s) = 2m \textstyle\sum_{n<0<l,\, l+n=k} (\mathbf{w}^l_\zeta \mathbf{w}^n + \mathbf{w}^l \mathbf{w}^n_\zeta)(\zeta, s)\, ds,$$

$$\mathbf{w}^0(\zeta, 0) = \varepsilon K \tfrac{\beta\kappa}{\kappa - \zeta}, \quad \mathbf{w}^k(\zeta, 0) = \tfrac{1}{k^2} \tfrac{\beta\kappa}{\kappa - \zeta}, \qquad k \neq 0. \tag{VI.39}$$

Теперь, считая, что решения обеих систем существуют, мы дадим неформальное объяснение того, почему решения системы (VI.38), (VI.39) мажорируют решение системы (VI.30), (VI.26). В этом смысле мы говорим, что (VI.38), (VI.39) является мажорантной системой для системы (VI.30), (VI.26). Все рассуждения этого раздела следует рассматривать как эвристический метод для того, чтобы получить систему (VI.38), (VI.39) из системы (VI.30), (VI.26). Пока мы суммируем все рассуждения, проведенные выше, в виде следующего утверждения.

Предложение 33.2. *Система (VI.38), (VI.39) является мажорантной системой для (VI.30), (VI.26).*

Проверим мажорантные оценки (VI.35). Сперва заметим, что в силу леммы 33.1 эти оценки выполнены при $\delta = 0$. Мы заменим левые и правые части (VI.37) соответствующими мажорантами, основываясь на лемме 33.2 и покажем, что после этого формула (VI.37) остается верной , если заменить "=" на "$\gg$".

Мы используем следующее простое наблюдение: для любых двух векторных полей u', u'' таких, что $u'(z) \ll \mathbf{w}'(\zeta)\mathbf{1}$ и $u''(z) \ll \mathbf{w}''(\zeta)\mathbf{1}$

$$[u', u''](z) \ll m\Big(\mathbf{w}'_\zeta(\zeta)\mathbf{w}''(\zeta) + \mathbf{w}'(\zeta)\mathbf{w}''_\zeta(\zeta)\Big)\mathbf{1}.$$

Мы начнем с мажорант для

$$Q^0 = \mathbf{g}^{i\tau}\eta^0(z,s) \quad \text{and} \quad Q^k = \mathbf{g}^{i(\tau+\sigma_k\varepsilon(\delta-s))}\eta^k(z,s).$$

Лемма 33.2 дает оценку

$$\begin{aligned} Q^0 &\ll \sum_{l>0} \frac{4me^{-2ls}}{l^4}\mathbf{w}(\zeta,s)\mathbf{w}_\zeta(\zeta,s)\mathbf{1} \ll 4me^{-2s}\mathbf{w}(\zeta,s)\mathbf{w}_\zeta(\zeta,s)\sum_{l>0}\frac{1}{l^4}\mathbf{1} \\ &\ll 8me^{-2s}\mathbf{w}(\zeta,s)\mathbf{w}_\zeta(\zeta,s)\mathbf{1} = \frac{e^{-2s}\mathbf{w}_s(\zeta,s)}{\varepsilon^2K + K^{-1}e^{-2s}}\mathbf{1} \ll K\mathbf{w}_s(\zeta,s)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} Q^k &\ll \frac{2m\varepsilon K}{k^2}\mathbf{w}(\zeta,0)\mathbf{w}_\zeta(\zeta,0)\mathbf{1} + \sum_{l,n}\frac{4me^{(|k|-|l|-|n|)s}}{l^2n^2}\mathbf{w}(\zeta,s)\mathbf{w}_\zeta(\zeta,s)\mathbf{1} \\ &\ll \frac{2m}{k^2}\mathbf{w}(\zeta,s)\mathbf{w}_\zeta(\zeta,s)\Big(\varepsilon K + 2e^{-2s}\sum_{l,n}\frac{k^2}{l^2n^2}\Big)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что $\mathbf{w}(z,0) \ll \mathbf{w}(z,s)$ для любого $s \in [0, \alpha/\varepsilon]$. Напомним, что l, n удовлетворяют неравенствам (VI.27). Следовательно,

$$\sum_{l,n} k^2 l^{-2} n^{-2} < \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \pi^2/6$$

и

$$\begin{aligned} Q^k &\ll \frac{2m}{k^2}\mathbf{w}(\zeta,s)\mathbf{w}_\zeta(\zeta,s)\big(\varepsilon K + \pi^2 e^{-2s}/3\big)\mathbf{1} \\ &= \frac{\varepsilon K + \pi^2 e^{-2s}/3}{4(\varepsilon^2 K + K^{-1}e^{-2s})}\frac{\mathbf{w}_s(\zeta,s)}{k^2}\mathbf{1} \ll \frac{\mathbf{w}_s(\zeta,s)}{\varepsilon k^2}\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Теперь мы рассмотрим мажорантные неравенства для (VI.37):

$$\begin{aligned} \varepsilon K\mathbf{w}(\zeta,\delta) &\gg \varepsilon K\mathbf{w}(\zeta,0) + \varepsilon\int_0^\delta K\mathbf{w}_s(\zeta,s)\,ds, \\ k^{-2}\mathbf{w}(\zeta,\delta) &\gg k^{-2}\mathbf{w}(\zeta,0) + \varepsilon\int_0^\delta \frac{\mathbf{w}_s(\zeta,s)}{\varepsilon k^2}ds. \end{aligned}$$

Оба этих отношения следуют из (VI.36). □

Теорема существования. Пусть $R > 0$ таково, что $\mathbf{w}(\zeta,\alpha/\varepsilon)$ является аналитической функцией в поликруге $\{\|\zeta\| < R\}$.

Чтобы построить пространства H_s, G_s, F_s (см. раздел 7), в формуле (I.2) в качестве D мы возьмем формально точку $z = 0$ так, чтобы области D_s оказались полидисками $\|z\| < sR$, где $0 < s < 1$.

Таким образом, мы получаем следующие определения.

Банахово пространство H_s представляет собой множество функций $f : D_s \to \mathbb{C}$, которые аналитичны в D_s и непрерывны в замыкании $\overline{D}_s$. В этом пространстве введена норма

$$\|f\|_s^H = \sup_{z\in D_s}|f(z)|.$$

Банахово пространство G_s состоит из последовательностей

$$u = \{u_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}},\ u_k \in H_s,$$

в G_s введена норма

$$\|u\|_s^G = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\big\{(1+|k|^2)\|u_k\|_s^H\big\}.$$

Банаховы пространства F_s состоят из последовательностей

$$u = \{u_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad u_k \in H_s$$

и наделены следующими нормами:

$$\|u\|_s^F = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)(\|u_k\|_s^H)^2}.$$

Напомним, что
$$F = \bigcap_{0<s<1} F_s, \quad G = \bigcap_{0<s<1} G_s.$$

Через V обозначим множество функций

$$w(z,\delta) = \{w^k(z,\delta)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in C([0,\alpha/\varepsilon], F),$$

которые удовлетворяют следующим условиям.

Для любых $\delta \in [0,\alpha/\varepsilon]$ и $\tau \in [-\alpha+\varepsilon\delta, \alpha-\varepsilon\delta]$ выполнены оценки (VI.35).

Для любых $\delta', \delta'' \in [0,\alpha/\varepsilon]$ и $0 < s < 1$

$$\|w(\cdot,\delta') - w(\cdot,\delta'')\|_s^F \leqslant K_s|\delta' - \delta''|. \tag{VI.40}$$

Положительные константы $\{K_s\}$ одинаковы для всех $w(z,\delta) \in V$, эти константы будут определены в дальнейшем. Заметим, что множество V выпукло.

Через $C([0,\alpha/\varepsilon], F)$ обозначим пространство непрерывных отображений отрезка $[0,\alpha/\varepsilon]$ в пространство F с топологией, определенной в разделе 7.

Теорема 33.1. *При надлежащем выборе постоянных*

$$\{K_s\}_{s\in(0,1)}$$

система (VI.30)-(VI.31) имеет решение, принадлежащее множеству V.

Замечание 33.1. *Если решение интегральных уравнений (VI.30)–(VI.31) принадлежит пространству $C([0,\alpha/\varepsilon], F)$, то оно является дифференцируемой функцией по переменной δ, и оно также решает систему (VI.25)-(VI.26). Это наблюдение следует из предложения 33.1 и стандартных соображений, касающихся связи дифференциального и соответствующего интегрального уравнений.*

Определим множество W. Это множество состоит из функций

$$w(z,\delta) = \{w^k(z,\delta)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in C([0,\alpha/\varepsilon], F)$$

таких, что выполнена оценка (VI.40) и

$$w^0(z,\delta) \ll \varepsilon K \mathbf{w}(\zeta,\delta)\mathbf{1}, \quad w^k(z,\delta) \ll k^{-2}\mathbf{w}(\zeta,\delta)\mathbf{1}, \qquad k \neq 0. \tag{VI.41}$$

Поскольку отношения (VI.41) являются частным случаем отношений (VI.35), когда $\tau = 0$, получаем, что
$$V \subseteq W. \tag{VI.42}$$

Определим отображение $P[w]$ формулой

$$P^0[w](z,\delta) = \hat{v}^0(z) - \overline{v}(z) + i\varepsilon \int_0^\delta \eta^0(z,s)\,ds,$$
$$P^k[w](z,\delta) = \mathbf{g}^{i\sigma_k\varepsilon\delta}\hat{v}^k(z) + i\varepsilon \int_0^\delta \mathbf{g}^{i\sigma_k\varepsilon(\delta-s)}\eta^k(z,s)\,ds, \quad k \neq 0.$$

Область определения отображения $P[w]$ мы опишем ниже.

Теперь мы докажем теорему 33.1. План доказательства следующий. Сперва мы покажем, что множество W компактно $C([0,\alpha/\varepsilon],F)$. Мы покажем, что множество V замкнуто, тогда V окажется компактом как замкнутое подмножество компакта W. И, наконец, мы проверим, что $P[V] \subseteq V$ и $P \in C(V,V)$. В силу этих наблюдений и по теореме Шаудера -Тихонова мы найдем неподвижную точку $\tilde{w} \in V$ отображения P: $P[\tilde{w}] = \tilde{w}$. Это и завершит доказательство.

Лемма 33.3. *Множество W компактно в $C([0,\alpha/\varepsilon],F)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $W_u \subset F$, которое состоит из функций $w(z,\delta) \in W$ с $\delta = u$. Ввиду предложений 31.1, 31.2 и по формуле (VI.41) множества $W_u, \quad u \in [0,\alpha/\varepsilon]$ ограничены в G и замкнуты в F.

По следствию 7.2 множества $W_u, \quad u \in [0,\alpha/\varepsilon]$ компактны F.

Теперь в силу (VI.40) доказательство леммы следует из 6.1.

Оператор $\mathbf{g}^{i\tau}$, заданный формулой (VI.28)

$$\mathbf{g}^{i\tau}w(z,\delta) = \{\mathbf{g}^{i\tau}w^k(z,\delta)\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

является непрерывным оператором из V в W.

Лемма 33.4. *Множество V компактно в $C([0,\alpha/\varepsilon],F)$.*

Доказательство. По лемме 33.3 и в силу вложения (VI.42) достаточно проверить, что множество V замкнуто в $C([0,\alpha/\varepsilon],F)$.

Рассмотрим последовательность $\{w_j\} \in V$ такую, что $w_j \to w$ в $C([0,\alpha/\varepsilon],F)$ при $j \to \infty$ и $w \in C([0,\alpha/\varepsilon],F)$. Тогда

$$\mathbf{g}^{i\tau}w_j^0(z,\delta) \ll \varepsilon K\mathbf{w}(\zeta,\delta)\mathbf{1}, \quad \mathbf{g}^{i\tau}w_j^k(z,\delta) \ll k^{-2}\mathbf{w}(\zeta,\delta)\mathbf{1}, \qquad k \neq 0. \qquad \text{(VI.43)}$$

Сходимость в $C([0,\alpha/\varepsilon],F)$ подразумевает, в частности, и поточечную сходимость по переменной δ. Таким образом, мы переходим к пределу в формулах

(VI.43) при $j \to \infty$ в каждой точке $\delta \in [0, \alpha/\varepsilon]$ при каждом $\tau \in [-\alpha + \varepsilon\delta, \alpha - \varepsilon\delta]$. Используя непрерывность оператора $\mathbf{g}^{i\tau}$ и предложение 31.2, получим

$$\mathbf{g}^{i\tau} w^0(z, \delta) \ll \varepsilon K \mathbf{w}(\zeta, \delta)\mathbf{1}, \quad \mathbf{g}^{i\tau} w^k(z, \delta) \ll k^{-2}\mathbf{w}(\zeta, \delta)\mathbf{1}, \qquad k \neq 0.$$

Следовательно, $w \in V$. □

Лемма 33.5. *Зададим набор констант $\{K_s\}_{s\in(0,1)}$ так, что*

$$K_s = \frac{c_5}{(s'-s)}\Big(1 + \sup_{\xi\in[0,\alpha/\varepsilon]} (\|\mathbf{w}(\cdot, \xi)\|^H_{s'})^2\Big), \qquad s' = \frac{1+s}{2}.$$

Тогда отображение P переводит множество V (см. (VI.40)) в себя.

Доказательство. Из мажорантных соображений, приведенных выше, следует, что если функция $w(z, \delta) \in F$ удовлетворяет отношениям (VI.35), то $P[w](z, \delta)$ тоже удовлетворяет этим отношениям. Это суть формулировки и доказательства леммы 33.2 и предложения 33.2.

Итак, осталось подобрать постоянные $\{K_s\}_{s\in(0,1)}$ так , что для любых $w \in V$ функция $P[w]$ удовлетворяет формуле (VI.40).

Оценим члены P^k, где $k \neq 0$. Положим для определенности $\delta'' > \delta'$. По теореме о среднем получим

$$\begin{aligned} &\|P^k[w](\cdot, \delta') - P^k[w](\cdot, \delta'')\|^H_s \\ &\qquad\leqslant \sup_{\xi\in[\delta',\delta'']} \|P^k_\delta[w](\cdot, \xi)\|^H_s \cdot |\delta' - \delta''|, \qquad k \neq 0. \end{aligned} \tag{VI.44}$$

Формула (VI.29) дает

$$P^k_\delta[w](z, \xi) = i\varepsilon\Big(\sigma_k[\bar v(z), P^k[w](z, \xi)] + \eta^k(z, \xi)\Big), \quad k \neq 0. \tag{VI.45}$$

Мы знаем, что $P[w] \in W$. Таким образом, благодаря свойствам отношения "$\ll$"(см. предложение 31.1) и в силу оценки Коши (I.3) получается, что

$$\|[\bar v, P^k[w]](\cdot, \xi)\|^H_s \leqslant \frac{c}{k^2(s'-s)}\|\bar v\|^H_{s'}\|\mathbf{w}(\cdot, \xi)\|^H_{s'}, \qquad 0 < s < s' < 1. \tag{VI.46}$$

Положительная постоянная c не зависит от s, s', k и w.

Рассмотрим член η^k. Рассуждая так же, как и выше, мы получаем

$$\begin{aligned} \|\eta^k(\cdot, \xi)\|^H_s &\leqslant \|[w^0, w^k](\cdot, \xi)\|^H_s + 2\sum_{l,n} \|[w^l, w^n](\cdot, \xi)\|^H_s \\ &\leqslant \frac{c_1(\|\mathbf{w}(\cdot, \xi)\|^H_{s'})^2}{s'-s}\Big(\frac{1}{k^2} + \sum_{l,n}\frac{1}{n^2 l^2}\Big), \qquad 0 < s < s' < 1. \end{aligned} \tag{VI.47}$$

Положительная постоянная c_1 зависит только от m. Напомним, что суммирование в этой формуле идет по всем целым n, l таким , что $n < 0 < l, \quad l+n = k \neq 0$. Отсюда мы получаем оценку

$$\sum_{l,n} \frac{1}{n^2 l^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \sum_{l>0,\, l\neq k} \frac{1}{l^2(1-l/k)^2} \leqslant \frac{c_2}{k^2}$$

с некоторой положительно постоянной $c_2 > 0$. Комбинируя формулы (VI.45), (VI.46), (VI.47), и подставляя их в (VI.44), находим

$$\begin{aligned} &\|P^k[w](\cdot,\delta') - P^k[w](\cdot,\delta'')\|_s^H \\ &\quad \leqslant \frac{c_3}{k^2(s'-s)} \Big(1 + \sup_{\xi\in[\delta',\delta'']} (\|\mathbf{w}(\cdot,\xi)\|_{s'}^H)^2\Big) \cdot |\delta' - \delta''|, \qquad k \neq 0. \end{aligned} \tag{VI.48}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &\|P^0[w](\cdot,\delta') - P^0[w](\cdot,\delta'')\|_s^H \\ &\quad \leqslant \frac{c_4}{(s'-s)} \sup_{\xi\in[\delta',\delta'']} (\|\mathbf{w}(\cdot,\xi)\|_{s'}^H)^2 \cdot |\delta' - \delta''|. \end{aligned} \tag{VI.49}$$

По формулам (VI.48) и (VI.49) мы получаем

$$\|P[w](\cdot,\delta') - P[w](\cdot,\delta'')\|_s^F \leqslant K_s \cdot |\delta' - \delta''|, \tag{VI.50}$$

где константы K_s определены выше. □

Отображение $P : V \to V$ является липшицевым в следующем смысле:

$$\sup_{\xi\in[0,\alpha/\varepsilon]} \|P[w'](\cdot,\xi) - P[w''](\cdot,\xi)\|_s^F \leqslant \frac{c_6}{s'-s} \sup_{\xi\in[0,\alpha/\varepsilon]} \|w'(\cdot,\xi) - w''(\cdot,\xi)\|_{s'}^F,$$
$$w', w'' \in V, \quad 0 < s < s' < 1.$$

Эта формула получена на основе следствия 7.3. Таким образом, отображение $P : V \to V$ непрерывно, и по теореме Шаудера — Тихонова оно имеет неподвижную точку $\tilde{w}$:

$$P(\tilde{w}) = \tilde{w}, \qquad \tilde{w} \in V.$$

Эта неподвижная точка является искомым решением (VI.30)-(VI.31).

Теорема 33.1 доказана.

Заключение

Итоги диссертации состоят в следующем:

- доказан аналог теоремы Пеано для абстрактной задачи Коши–Ковалевской в нелипшицевой постановке;
- доказана теорема существования для абстрактного квазилинейного параболического уравнения с нелипшицевой нелинейностью в шкале банаховых пространств; обобщены результаты А.Н. Карвалью;
- мажорантный метод Вейерштрасса–Ковалевской обобщён на системы счётного числа дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах; в частности, получено обобщение результатов Волкмана, Уля, Мюллера, а также также обобщение результата Линденштраусса и Цафрири о равномерной непрерывности одного диагонального оператора в пространстве Фреше с базисом Шаудера;
- с помощью мажорантного метода получены неулучшаемые оценки времени существования решения в пространствах Фреше с базисом Шаудера и построены классы систем, для которых решение существует;
- доказана теорема существования решений для системы уравнений метода непрерывного усреднения;
- получена теорема существования и эффективные оценки времени существования решения в уравнении Смолуховского.

Методы и результаты диссертации могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в теории функционально-дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах.

Результаты диссертации могут найти применение в научных исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Математическом институте им. Стеклова, Московском энергетическом институте, Воронежском Государственном Университете.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Перспективы данного исследования состоят в получении аналогичных результатов для эволюционных уравнений, правая часть которых удовлетворяет условиям Каратеодори, а также в доказательстве теоремы типа Пеано для абстрактного параболического уравнения в критическом случае.

Литература

[1] Богачев В.И. Теория меры. — Москва- Ижевск, РХД, 2003.

[2] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.

[3] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1958.

[4] Годунов А.Н. Теорема Пеано в банаховых пространствах.// Функц. анализ и его прилож. — 1974. — №9, вып. 1 — С. 59-60

[5] Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной плоскости. — Издательство МЭИ, 1996.

[6] Зубелевич О. Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелипшицевой правой частью.// ДАН — 2012. — том 445, №5 — С. 1-5.

[7] Зубелевич О. О мажорантном методе в задаче Коши-Ковалевской. // Матем. заметки — 2001. — 69:3 — С. 363–374.

[8] Зубелевич О. О параболических задачах с нелипшицивыми нелинейностями.// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — том 21 —РУДН.

[9] Зубелевич О.Э. Теорема Шаудера — Тихонова в счетно нормированном пространстве. // Матем. заметки — 2011. — 90:2 — С. 310–312.

[10] Зубелевич О. Теорема Пеано и задача Коши — Ковалевской. // ДАН — 2009. — том 425, №3 — С. 309-313.

[11] Зубелевич О. Функциональные методы в нелинейных задачах математической физики. — М.: РУДН, 2008.

[12] Зубелевич О. Эволюционные дифференциальные уравнения с нелипшицевой нелинейностью.// Дифференциальные уравнения — 2014. — том 50, №9 — С. 1287-1288.

[13] Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

[14] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. т.1 — М.: Наука, 1989.

[15] Колмогоров А.Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.// ДАН — 1954. — 98, №4 — С. 527-530.

[16] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.

[17] Кострикин А., Манин Ю. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1980.

[18] Кочина П.Я. Софья Васильевна Ковалевская. — М.: Наука, 1981.

[19] Куратовский К. Топология. т. 1,2. — М.: Мир, 1966.

[20] Леднев Н.А. Новый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных. // Мат. сб. — 1948. — 22(64) — С. 205-259.

[21] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.

[22] Миллионщиков В.М. К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах.// Математический сборник — 1962. — т.59(99), №4 — С. 385-406.

[23] Назаров В.И. Задача Коши — Ковалевской для дифференциальных уравнений в шкалах банаховых пространств с компактными вложениями.// Дифференциальные уравнения — 1991. — 27 — С. 1976-1980.

[24] Нейштадт А.И. Разделение движений в системах с быстро вращающейся фазой.// Прикл. Мат. Мех. — 1984. — 48:2 — С. 197-204.

[25] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.

[26] Овсянников Л.В. Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств.// ДАН — 1965. — 163 — С. 819-822.

[27] Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства //Б-ка сб. Математика — М.: Мир, 1967.

[28] Трещёв Д.В. Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем. — М.: Фазис, 1998.

[29] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Том 2. —М.: Наука, 1976.

[30] Шварц Л. Анализ. — М.: Мир, 1972.

[31] Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.

[32] Adams R. Sobolev spaces. — New York: Academic Press, 1975.

[33] Agarwal R., Meehan M., O'Regan D. Fixed Point Theory and Applications. — Cambridge University Press, 2004.

[34] Amann H. On Abstract Parabolic Functional Equations.// J. Math. Soc. Japan — 1987. — 39 — P. 93-116.

[35] Amann H. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems. //Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis in Teubner zur Mathematik / H. Schmeisser, H. Nriebel (Edr.) — Teubner — 1993. — V. 133 — P. 9-126.

[36] Amann H. Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Abstract Linear Theory. — Birkhauser Verlag, 1995.

[37] Arrieta J.M., Carvalho A.N. Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier — Stokes and Heat equations. //Trans. of Amer. Math. Soc. — V.352, №1 — P. 285-310.

[38] Arnold V.I., Kozlov V.V. and Neishtadt A.I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics.// Encyclopedia of Math.Sciences, vol.3 — Berlin: Springer, 1989.

[39] Astala K. On Peano's theorem in locally convex spaces. // Stud. Math. — 1982. — V.73, №3 — P. 213-223.

[40] Barles Guy, Halil Mete Soner. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation. // Finance Stochast. — 1998. — №2 — P. 369–397.

[41] Begehr H., Eine Bemerkung zum nichtlinearen klassischen Satz von Cauchy — Kowalewski.// Math. Nachr. — 1987. — №131 — P. 175-181.

[42] Blair Charles E. The Baire category theorem implies the principle of dependent choices. // Bull. Acad. Polon. Sci. Se'r. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1977. — 25, №10 — P. 933–934.

[43] Bownds M. A Uniqueness Theorem for Non-Lipschitzian Systems of Ordinary Differential Equations. // Funkcialaj Ekvacioj — 1970. — 13 — P. 61-65.

[44] Browder F. E. A new generalization of the Schauder fixed point theorem.// Math. Ann. — 1967. — 174 — P. 285-290.

[45] Carvalho A.N., Cholewa J.W., Dlotko T. Abstract parabolic problems in ordered Banach spaces.// Colloq. Math. — 2001. — 90 — P. 1-17.

[46] Cauty R. Solution du probl'eme de point fixe de Schauder [Solution of Schauder's fixed point problem]. // Fund. Math. — 2001. — 170, №3 — P. 231-246.

[47] Dieudonné J. Deux exemples singuliers d'équations différentielles. // Acta. Scien. Math. (Szeged) — 1950. — 12 — P. 38-40.

[48] Dickstein F. On semilinear parabolic problems with non-Lipschitz nonlinearities.// Mat. Contemp. — 2000. — V. 18 — P. 111-121.

[49] DiPerna R.J., Lions P.L. Ordinary Differential Equations, Transport Theory and Sobolev Spases. // Invent. math. —1989. — 98 — P. 511-547.

[50] El Hachimi Abderrahmane, Moulay Rchid Sidi Ammi, Delfim F. M. Torres Existence and uniqueness of solutions for a nonlocal parabolic thermistor-type problem.// Int. J. Tomogr. Stat. — 2007. — V.5, №. W07 — P. 150-154.

[51] Engelking R. General Topology. — Warszawa, 1977.

[52] Enflo P. A conterexample to the approximation property in Banach spaces.// Acta Math. — 1973. — 130 — P. 309-317.

[53] Folland G. Real analysis: modern techniques and their applications./ 2nd ed. — Chichester: Wiley-Interscience, 1999.

[54] Frey R., Polte U. Nonlinear Black — Scholes equations in finance: associated control problems and properties of solutions.// SIAM J.Control Optim. — 2011. — V. 49, №1 — P. 185-204.

[55] Fudjita H., Kato T. On the Navier — Stokes initial value problem.// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1964. — 16 — P. 269-315.

[56] Godunov A.N. Peano's theorem in Banach spaces.// Functional Anal. Appl. — 1975. — 9 — P. 53-55.

[57] Hartman Ph. Ordinary Differential Equations. — New York: Jhon Wiley, 1964.

[58] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations./ Lecture Notes in Mathematics. — V. 840 — Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[59] Kamke E. Differentialgleichungen reeler Functionen. — Leipzig: Academische Verlagagesellschaft, Giest and Portig, 1930.

[60] Kato T., Fudjita H. On the nonstationary Navier — Stokes system.// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1962. — 32 — P. 243-260.

[61] Kuksin S. Analysis of Hamiltonian PDEs. Oxford, 2000.

[62] Levy P. Provessus stochastiques et mouvement Brownien. — Paris: Gauthier-Villars, 1948.

[63] Lindenstrauss J., Lior Tzafriri. Classical Banach Spaces I. — New York, 1977.

[64] Lindenstrauss J., Lior Tzafriri. Classical Banach Spaces II. — New York, 1977.

[65] Lobanov S.G., Smolyanov O.G. Ordinary differential equations in locally convex spaces.// Uspekhi Mat. Nauk — 1994. — V. 49, №3(297) — P. 93–168.

[66] Maitland Wright J. D. All operators on a Hilbert space are bounded.// Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — V. 79, №6 — P. 1247-1250.

[67] McLeod J. B., On an infinite set of nonlinear differential equations, Quart. J. Math. Oxford Ser (2) 13 (19620, 119-128.

[68] Moser J. A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations. I,II // Ann. Scuola Norm. Sup. Piza — 1966. — №20 — P. 265-315, P. 499-535.

[69] M. Müller Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Math. Z., 26 (1927), 551-559.

[70] Moulay Rchid Sidi Ammi. Application of the L^∞- energy method to the non local thermistor problem.// The Arabian Journal for Science and Engineering — 2010 — V. 35, №1 — P. 1–12.

[71] Nishida T. A Note On A Theorem Of Nirenberg.// J. Differential Geometry — 1977. — №12 — P. 629-633.

[72] Nirenberg L. An abstract form of the nonlinear Cauchy — Kowalewski theorem.// J. Differential Geometry — 1972. — №6 — P. 561-576.

[73] Ohkitani K., Okamoto H. Blow-up problems modeled from the strain-vorticity dynamics.// Proceedings of «Tosio Kato's Method and Principles for Evolution Equations in Mathematical Physics» — Eds. H. Fujita, S.T. Kuroda and H. Okamoto. — 2001. — RIMS Kokyuroku — 1234 — P. 240-250.

[74] Pronin A., Treschev D. Continuous averaging in multi-frequency slow-fast systems.// Regular and Chaotic Dynamics — 2000. — 5:2 — P. 157–170.

[75] Ramankutty P. Kamke's Uniqueness Theorem.// J. London Math. Soc. — 1980. — (2), 22 — P. 110-116.

[76] Ramis J.P., Schäfke R. Gevrey separation of fast and slow variables.// Nonlinearity — 1996. — 9 — P. 353-384.

[77] Safonov M.V. The Abstract Cauchy — Kovalevskaya Theorem in a Weighted Banah Space.// Communications on Pure and Applied Mathmatics — 1995. — V.48 — P. 629-643.

[78] Samoilenko A. M., Teplinskii Yu. V., Countable Systems of Differential Equations, Brill, 2003.

[79] Sausin D. Caractere Gevrey des solutions formelles dun probleme de moyennisation.// C.R.Acad.Sci.Paris — 1992. — Ser.I 315 — P. 991-995.

[80] Sobolevskii S.L. Systems of Differential Equations with Nonunique Solutions of the Cauchy Problem.// Differential Equations — 2002. — V.38, №3 — P. 451-452.

[81] Solovay R.M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.// Ann. of Math. — 1970. — (2) 92 MR 42 №64 — P. 1-56.

[82] Taylor M.E. Partial Differential Equations.V.1-3 — New York: Springer, 1996.

[83] Tichonoff A. Ein Fixpunktatz.// Math. Ann. — 1935. — 111 — P. 767-776.

[84] Treschev D. The continuous averaging method in the problem of separation of fast and slow motions.// Regul.Chaotic Dyn. — 1997. — 2:3/4 — P. 9-20.

[85] Treschev D., Zubelevich O. Introduction to the Perturbation theory of Hamiltonian systems. — Heidelberg: Springer, 2010.

[86] Treschev D., Zubelevich O. On weak solutions to the Lagrange — Dalambert Equations.// Applicationes Mathematicae — 2013. — 40,3 — P. 383-392.

[87] Treves J.F. An abstact nonlinear Cauchy — Kovalevska theorem.// Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — 150 — P. 77-92.

[88] Treves J.F. Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators.// Notas Mat. — 1968. — 46 — Mimeographed notes.

[89] R. Uhl An Extension of Max Müller's Theorem to Differential Equations in Ordered Banach Spaces. Funkcialaj Ekvacioj, 39 (1996) 203-216.

[90] P. Volkmann, Ausdehnung eines Satzes von Max Müller auf unendliche Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Funkcial. Ekvac. 21 (1978), no. 2, 81-96.

[91] Warren H. Wite A Global Existence Theorem to Smoluchowsi's Coagulation Equation. Proceedings of the AMS Vol. 80 No 2 Oct. 1980.

[92] Yamanaka T. Note on Kowalevskaja's system of partial differential equations.// Comment. Math. Univ. St. Paul. — 1960. — 9 — P. 7-10.

[93] Yorke J. A. A continuous differential equation in Hilbert space without existence.// Funkcjalaj Ekvacioj — 1970. — №13 — P. 19-21.

[94] Zubelevich O. On some topological view on the abstract Cauchy — Kowalewski problem.// Complex Var. Theory Appl. — 2004. — V. 49,№10 — P. 703-709.

[95] Zubelevich O. A generalization of Schauder's theorem and its application to Cauchy — Kovalevskaya problem.// Electron. J. Diff. Eqns. — 2003. — V. 2003 №55 — P. 1-6.

[96] Zubelevich O. Peano type theorem for abstract parabolic equations.// Annales de l'Institut Henri Poincare. Annales: Analyse Non Lineaire Nonlinear Analysis – 2009. — V.26, №4 — P. 1407-1421.

[97] Zubelevich O. A note on existence theorem of Peano.// Archivum Mathematicum — 2011. — T. 47 — P. 83-89.

[98] Zubelevich O. On Elliptic Equation With Perturbed p-Laplace Operator.//Journal of Mathematical Analysis and Applications, 328 (2007),p.1188-1195.

[99] Zubelevich O. A fixed point theorem for affine mappings and its application to elasticity theory.// Central European Journal of Math. Volume 8, Number 6, 2010, p. 1104-1108.

[100] Zubelevich O. Several notes on existence theorem of Peano.// Funkcialaj Ekvacioj — 2012. — №55 — P. 89-97.

[101] Zubelevich O. On analytic solutions to the Navier — Stokes equation in 3-D torus.// Funkcialaj Ekvacioj — 2007. — №50 — P. 171-185.