Отзыв официального оппонента
о диссертационной работе
Зубелевича Олега Эдуардовича
«Эволюционные дифференциальные уравнения
с нелипшицевыми нелинейностями»,
представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

В диссертационной работе Зубелевича О.Э. «Эволюционные дифференциальные уравнения с нелипшицевыми нелинейностями» строится общая теория локальной разрешимости задач с начальными условиями для эволюционных нелинейных дифференциальных уравнений с нелипшицевой зависимостью правой части уравнения от неизвестной функции. Изучается такие направления теории нелинейных начально-краевых задач, как обобщение абстрактной задачи Коши-Ковалевской на эволюционные дифференциальные уравнения с нелипшицевыми отображениями в шкалах банаховых пространств, абстрактное квазилинейное параболическое уравнение с нелипшицевым нелинейным оператором, системы счетного множества дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах, оценка времени существования решения, мажорантный метод и его приложения к динамическим системам – разработанному в исследованиях Д.В. Трещева методу непрерывного усреднения. В диссертации разработан единый функционально аналитический подход к этим задачам, разработаны новые методы исследования существования решений у широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений, установлено существование решений и даны неулучшаемые оценки времени существования для уранения Смолуховского и системы уравнений метода непрерывного усреднения.

Диссертационное исследование является естественным развитием классических результатов Коши и Пеано для дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах. Как известно из работ Годунова, Йорка, Смолянова теорема существования Пеано не обобщается на бесконечномерные пространства. Первые положительные результаты в данном направлении были получены Миллионщиковым. В диссертации О.Э. Зубелевича предложен ряд новых подходов к вопросам существования решений для дифференциальных уравнений с нелипшицевой правой частью в локально выпуклых пространствах и получен ряд новых теорем, которые являются естественным развитием теории бесконечномерных дифференциальных уравнений. С помощью разработанных в диссертации подходов получены не только теоремы существования, но и неулучшаемые оценки времени существования решения в ряде важных задач, которые недоступны для исследования другими известными методами, в том числе методами, развитыми в работах Миллионщикова, Волкмана, Уля, Мюллера.

Диссертационное исследование, изложенное на 136 страницах, состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 101 источника.

Во введении диссертации представлен обзор основных направлений развития современной теории дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах и сформулированы цели и задачи исследования. Автор даёт исторический обзор и краткое описание содержания работы по главам, формулирует основные полученные им результаты.

Первая глава служит введением в разделы функционального анализа, используемые в дальнейшем для решения поставленных в диссертации задач. В ней содержатся некоторые сведения из теории локально выпуклых пространств, а также доказывается ряд технических утверждений, которые используются в последующих главах. Эти утверждения на защиту не выносятся. Отметим только раздел первой главы, посвящённый теореме Шаудера -- Тихонова для задач с параметрами. В нём доказана теорема, касающаяся задачи о неподвижной точке для отображения, непрерывно зависящего от параметра (параметр является элементом польского пространства). Данная теорема устанавливает существование решения задачи о неподвижной точке, являющегося измеримой по Борелю функцией параметра.

Во второй главе исследован аналог задачи Коши – Ковалевской для дифференциального уравнения с нелипшицевой правой частью в шкале банаховых пространств с компактными вложениями. Правая часть определена на ограниченном множестве проективного предела банаховых пространств, образующих шкалу. В этих условиях доказана локальная по времени теорема существования решения. С помощью полученной в первой главе теоремы типа Шаудера-Тихонова установлено существование решения, которое зависит от начальных данных как измеримая по Борелю функция. Оба результата являются прогрессом как по отношению к последним результатам Назарова 1991 года, Сафонова 1995 г, так и по отношению к классическим работам Овсянникова 1965 г, Ниренберга 1972 г, Нишиды 1977 г., Трева 1968 и 1970 г. Приведен пример интегро-дифференциального уравнения, для которого теорема существования устанавливается предложенным в диссертации методом, но не может быть доказана методами перечисленных выше работ.

Третья глава посвящена изучению абстрактного квазилинейного параболического уравнения с нелипшицевой нелинейностью в шкале банаховых пространств. Доказаны две локальных по времени теоремы существования для классической и для обобщённой постановки задачи. Показано, что задача допускает решения, являющиеся борелевской функцией от начальных данных. Параболические задачи в абстрактной постановке в шкале банаховых пространств впервые появились в работе Арриета и Карвальо 1999 года. Теоремы, полученные в главе 3 диссертационной работы, обобщают результаты Карвальо, Холевы и Длотко 2001 года. Рассмотрены примеры приложения полученных в главе 3 результатов к уравнению Навье – Стокса и уравнению Блэка – Шолза. Кроме того, в качестве иллюстрации приложения развитой техники рассмотрено квазилинейное параболическое уравнение, в котором нелинейность является нелипшицевой функцией градиента искомой функции. Отметим, что построенная теория может найти приложения в интегро-дифференциальных и нелокальных параболических задачах, например, в нелокальной параболической задаче о термисторе (Торрес, 2005 г).

В четвёртой главе рассмотрена задача Коши для дифференциального уравнения в конечномерном пространстве в условиях классической теоремы Пеано. Установлена локальная по времени теорема существования «общего» решения данной задачи, которое является борелевской функцией начальных данных. Как приложение полученной теории рассматривается ее применение к уравнению переноса с непрерывными, но не обязательно липшицевыми коэффициентами. Для уравнения переноса доказана теорема существования решения в пространстве мер Радона. Наиболее близкой по результатам является работа ДиПерна и Лионса (1989 г), в которой рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с векторными полями, принадлежащими пространствам Соболева.

В пятой главе исследуются дифференциальные уравнения с непрерывной, но нелипшицевой правой частью в пространствах Фреше, снабжённых безусловным базисом Шаудера. Для таких уравнений построены две версии мажорантного метода. Эти версии позволяют получать теоремы существования решений, а также строить эффективные оценки времени существования решения. Кроме того, построена версия мажорантного метода, позволяющая получать периодические решения. Данный метод является прямым развитием классического мажорантного метода Коши – Вейерштрасса – Ковалевской и обобщает работы Волкмана (1978 г), Уля (1996 г), Мюллера (1927г), а также классическую теорему Коши – Ковалевской. Полученные автором диссертации результаты имеют важные приложения в теории возмущений динамических систем. В ходе обоснования мажорантного метода в главе 5 доказана теорема о равномерной ограниченности семейства диагональных операторов на пространстве Фреше. Эта теорема обобщает соответствующий результат Линденштраусса и Дзафрири (1971 г), полученный для банаховых пространств. В качестве модельных приложений мажорантного метода доказана теорема существования периодических решений для уравнения Смолуховского.

Шестая глава посвящена приложениям результатов пятой главы к теории возмущений динамических систем (метод непрерывного усреднения Д.В. Трещёва 1997 г). В этой главе проводится анализ систем дифференциальных уравнений, возникающих в методе непрерывного усреднения и аналитических свойств усредняющей процедуры. Установлены априорные мажорантные оценки для решения усредненной системы и определяется система уравнений, мажорантная для исследуемой. С помощью теоремы Шаудера-Тихонова наБ основании исследования мажорантной системы доказана теорема о существовании решения исследуемой усредненной системы.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и представляют большой научный интерес. Утверждения снабжены убедительными доказательствами. Автором разработаны собственные методы исследования дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах.

Отмечу некоторые недостатки диссертационной работы

1. Определение 12.1 полугруппы операторов следовало бы, на мой взгляд, дать более подробно. Например, условия на рост нормы операторов полугруппы сформулированы в определении 12.1 не для полуоси, а для ограниченного промежутка (локального существования решения), что проясняется только при дальнейшем изучении работы.
2. Определение решения (классического или обобщенного) задачи (III.1) не дано явно. Однако обсуждения задачи (Ш.1) во введении главы III носят неформальный характер, а в теоремах о решении задачи (III.)-(III.8) определением решения служит равенство (III.5). В дальнейших исследованиях было бы интересно проследить за тем, как факт суще-

вования решения или длина промежутка его существования зависят от выбора определения решения.

3. Также в качестве пожелания для дальнейших исследований можно поставить цель дать описание множества решений рассматриваемых задач и исследовать зависимость этого множества от определения решения.
4. Автореферат диссертации несколько неполно отражает результаты шестой главы диссертации, было бы желательно более четко изложить структуру полученных в ней результатов.

Сделанные замечания нисколько не изменяют общего положительного впечатления о диссертационной работе. В целом о диссертационной работе О.Э. Зубелевича можно сделать следующие выводы:

1. Тема диссертации актуальна и соответствует научной специальности 01.01.02 –«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».
2. Результаты работы являются новыми и опубликованы в 18 статьях (16 из них входит в список ВАК РФ), а также в ведущих международных математических журналах, входящих в базы цитирования.
3. Результаты диссертации представляют значительный научный интерес и могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в МГУ им. Ломоносова, Математическом институте им. Стеклова, Санкт-Петербургском государственном университете, Московском энергетическом институте, Воронежском государственном университете, Московском физико-техническом институте и других университетах и научно-исследовательских институтах. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности«Математика».
4. Структура и содержание работы соответствуют поставленным целям и задачам исследования. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного можно заключить, что диссертационная работа «Эволюционные дифференциальные уравнения с нелипшицевыми нелинейностями» отвечает всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а её автор Зубелевич О.Э. заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 -- «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Автор отзыва Сакбаев Всеволод Жанович, доктор физико-математических наук, доцент.

Место работы, должность: Московский физико-технический институт (государственный университет), доцент кафедры высшей математики.

Почтовый адрес: 141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д.9

Телефон: (495) 408-45-54

Доктор физико-математических наук, В.Ж. Сакбаев
Доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Подпись Сакбаева В.Ж. удостоверяю,
Ученый секретарь МФТИ Ю.И. Скалько
28.03.2016г