Отзыв официального оппонента
о диссертационной работе
Зубелевича Олега Эдуардовича
**«Эволюционные дифференциальные уравнения
с нелипшицевыми нелинейностями»**,
представленной на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ

Работа посвящена исследованию вопросов существования решений для начальных задач эволюционных дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах. Данная тематика берёт своё начало от классических результатов Коши и Пеано для дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах.

Как известно из работ Дьедонне, Годунова, Йорка, Смолянова, теорема существования Пеано, вообще говоря, не обобщается на бесконечномерные пространства. Первые положительные результаты в данном направлении были получены Миллионщиковым. В диссертационной работе предложен ряд новых подходов к вопросам существования решений для дифференциальных уравнений с нелипшицевой правой частью в локально выпуклых пространствах и получен ряд новых теорем, которые являются естественным развитием теории бесконечномерных дифференциальных уравнений. Эти результаты позволяют получать не только теоремы существования, но и эффективные оценки времени существования решения в ряде важных задач, которые недоступны для исследования другими известными методами, в частности развитыми в работах Миллионщикова, Волкмана, Назарова, Уля, Мюллера.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И ИХ НОВИЗНА

Диссертационное исследование, изложенное на 136 страницах, состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 101 источника.

Во введении автор диссертации указывает основные направления развития современной теории дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах. Он доказывает важность рассмотренных им проблем для данной области науки и формулирует цели и задачи исследования. Автор даёт исторический обзор и краткое описание содержания работы по главам, формулирует основные полученные им результаты.

Первая глава носит в основном вспомогательный характер. В ней содержатся некоторые сведения из теории локально выпуклых пространств, а также доказывается ряд технических утверждений, которые используются в последующих главах. Эти утверждения на защиту не выносятся. Отметим только раздел первой главы, посвящённый теореме Шаудера–Тихонова для задач с параметрами. В нём доказана теорема, касающаяся задачи о неподвижной точке для отображения, непрерывно зависящего от параметра (параметр является элементом польского пространства). Данная теорема устанавливает существование решения задачи о неподвижной точке, являющегося измеримой по Борелю функцией параметра.

Во второй главе рассмотрена задача типа Коши–Ковалевской с нелипшицевой правой частью в шкале банаховых пространств с компактными вложениями. Правая часть определена на ограниченном множестве проективного предела банаховых пространств, образующих шкалу. В этих условиях доказана локальная по времени теорема существования решения. Кроме того, доказано существование решения, которое зависит от начальных данных как измеримая по Борелю функция. Оба результата являются прогрессом как по отношению к последним результатам Назарова 1991 года, Сафонова 1995 г, так и по отношению к классическим работам Овсянникова 1965 г, Ниренберга 1972 г, Нишиды 1977 г., Трева 1968 и 1970 г. В качестве модельного примера рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение, для которого теорема существования доказывается методами автора диссертации, но не доказывается методами перечисленных выше работ.

В третьей главе рассматривается абстрактное параболическое уравнение квазилинейного типа с нелипшицевой нелинейностью в шкале банаховых пространств. Доказаны две локальных по времени теоремы существования для классической и для обобщённой постановки задачи. Показано, что задача допускает решения, являющиеся борелевской функцией от начальных данных. Параболические задачи в абстрактной постановке в шкале банаховых пространств впервые появились в работе Арриета и Карвальо 1999 года. Теоремы, полученные в главе 3 диссертационной работы, обобщают результаты Карвальо, Холевы и Длотко 2001 года. В качестве модельных примеров рассмотрены приложения данной теории к уравнению Навье–Стокса и уравнению Блэка–Шолза. Кроме того, в качестве иллюстрации приложения развитой техники рассмотрено квазилинейное параболическое уравнение, в котором нелинейность является нелипшицевой функцией градиента искомой функции.

В четвёртой главе исследуется задача Коши для дифференциального уравнения в конечномерном пространстве в условиях классической теоремы Пеано. Доказана локальная по времени теорема существования «общего» решения данной задачи, которое является борелевской функцией начальных данных. В качестве приложения рассматривается уравнение переноса с непрерывными (но не обязательно липшицевыми) коэффициентами. Для уравнения переноса доказана теорема существования решения в пространстве мер Радона.

Пятая глава посвящена дифференциальным уравнениям с непрерывной, но нелипшицевой правой частью в пространствах Фреше, снабжённых безусловным базисом Шаудера. Для таких уравнений построены две версии мажорантного метода. Эти версии позволяют получать теоремы существования решений, а также строить эффективные оценки времени существования решения. Кроме того, построена версия мажорантного метода, позволяющая получать периодические решения. Данный метод является прямым развитием классического мажорантного метода Коши–Вейерштрасса–Ковалевской и обобщает работы Волкмана (1978 г), Уля (1996 г), Мюллера (1927г), а также классическую теорему Коши–Ковалевской. В ходе обоснования мажорантного метода в главе 5 доказана теорема о равномерной ограниченности семейства диагональных операторов на пространстве Фреше. В качестве модельных приложений мажорантного метода доказана теорема существования периодических решений для уравнения Смолуховского.

Шестая глава посвящена приложениям результатов пятой главы к теории возмущений динамических систем (метод непрерывного усреднения Д.В. Трещёва 1997 г).

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и снабжены убедительными доказательствами. Автором разработаны собственные методы исследования дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах.

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ДИССЕРТАЦИИ

1. Непонятно, зачем части общего введения дублируются в соответствующих вводных параграфах к главам 2,3 и 4.

2. Условие “выпуклости” (II.12) на стр. 40 фактически являются условием линейности по третьему аргументу.

3. На стр. 65 при рассмотрении периодического случая утверждается, что “развиваемая ниже техника может быть перенесена (почти без изменений) на задачу в m-мерном кубе с нулевыми краевыми условиями”. В качестве примера рассматривается трехмерная система Навье—Стокса с периодическими краевыми условиями и доказывается аналитичность решений. Здесь было бы очень уместно сравнить результаты автора с хорошо известной работой Фояша и Темама (Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations , C. Foias, R. Temam, J. Funct. Analysis 87 (2), 359-369), где рассматривался периодический случай. А также убедится в том, что техника автора работает и в случае условий Дирихле (что не является очевидным), тем более, что метод Фояша и Темама с краевыми условиями Дирихле не работает.

4. Хотелось бы видеть больше содержательных примеров приложений развиваемой автором абстрактной теории.

ВЫВОДЫ ПО ДИССЕРТАЦИИ

В целом о диссертационной работе О.Э. Зубелевича можно сделать следующие выводы:

1. Тема диссертации актуальна и соответствует научной специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».
2. Результаты работы являются новыми и опубликованы в 18 статьях (16 из них входит в список ВАК РФ), а также в международных математических журналах, входящих в базы цитирования.
3. Результаты диссертации имеют несомненное теоретическое значение и могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в МГУ им. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Российском университете дружбы народов, Московском физико-техническом институте (государственном университете), Математическом институте им. В.А. Стеклова, Национальном исследовательском университете «МЭИ», Воронежском государственном университете. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности «Математика».
4. Структура и содержание работы соответствуют поставленным целям и задачам исследования. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного можно заключить, что диссертационная работа «Эволюционные дифференциальные уравнения с нелипшицевыми нелинейностями» отвечает всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям по математике, а её автор Зубелевич О.Э. заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

24 марта 2016г.

Автор отзыва: Ильин Алексей Андреевич, доктор физико-математических наук.

Место работы и должность: Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша, ведущий научный сотрудник.

Почтовый адрес: 125047 г.Москва, Миусская пл, д.4 , 8(499)972-37-14

Адрес электронной почты: ilyin@keldysh.ru.

Ведущий научный сотрудник

Института прикладной математики им. М.В.Келдыша,

д. ф.-м.н. А.А. Ильин

Подпись д. ф.-м.н. А.А. Ильина заверяю

Ученый секретарь Института прикладной математики им. М.В.Келдыша

к. ф.-м.н. А.И. Маслов