МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.518

Дергачев Артем Владимирович

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ТИПА ЧЕЗАРО–ПЕРРОНА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность 01.01.01 —
«вещественный, комплексный и функциональный анализ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Скворцов Валентин Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Холщевникова Наталья Николаевна, профессор кафедры прикладной математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет «Станкин» (ФГБОУ ВПО «МГТУ «Станкин»)
	кандидат физико-математических наук, доцент Нараленков Кирилл Михайлович, доцент кафедры математических методов и информационных технологий Московского государственного института международных отношений (университета) (МГИМО(У))
Ведущая организация:	Московский физико-технический институт (Государственный университет)

Защита состоится 26 декабря 2014 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский пр-т, 27, сектор А, 8 этаж) и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su

Автореферат разослан   октября 2014 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
д.ф.-м.н.   Сорокин В.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Настоящая диссертация посвящена исследованию свойств одного из обобщений интеграла Перрона, а именно “шкалы интегрирования” Чезаро–Перрона, построенной Беркилем — последовательности определений обобщенных понятий предела, непрерывности, производной и интеграла, занумерованной целым неотрицательным параметром — “порядком усреднения”. Каждое следующее определение в этой шкале является более общим, чем предыдущее, то есть охватывет все более широкие классы функций.

Действительная функция f называется интегрируемой по Перрону на отрезке $[a, b]$, если существуют сколь угодно равномерно близкие друг к другу функции Ψ и ψ такие, что нижняя производная функции Ψ больше f, а верхняя производная функции ψ меньше f; при этом общая нижняя грань приращений таких “мажорантных функций” Ψ и верхняя грань приращений “минорантных функций” ψ называется определенным интегралом Перрона функции f на $[a, b]$.

Это определение легко поддается модификации за счет подмены используемого в нем понятия производной.

Первоначальное определение интеграла Чезаро–Перрона, или CP-интеграла, соответствующее первому порядку усреднения, было введено Беркилем[1] посредством использования в определении интеграла Перрона “производной Чезаро”

$$CDF(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} F(t)\,dt - F(x)}{\dfrac{h}{2}} \tag{1}$$

вместо обыкновенной производной, где интеграл понимается как классический интеграл Перрона. Лишь затем[2] был введен C_kP-интеграл Беркиля любого целого порядка $k \geqslant 1$ индукцией по k при помощи чезаровской производной соответствующего порядка, определяемой формулой

$$C_kDF(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{k}{h^k}\displaystyle\int_x^{x+h} (x+h-t)^{k-1} F(t)\,dt - F(x)}{\dfrac{h}{k+1}}, \tag{2}$$

[1] J.C. Burkill. The Cesàro–Perron integral // Proc. London Math. Soc. 1932. T. 34, № 4. C. 314–322.

[2] J.C. Burkill. The Cesàro–Perron scale of integration // Proc. London Math. Soc. 1935. T. 39, № 7. C. 541–552.

где интеграл понимается как $C_{k-1}P$-интеграл; при этом C_1P-интеграл совпадает с CP-интегралом, введенным ранее, а правая часть формулы (2) при $k = 1$ превращается в правую часть формулы (1).

Можно дать эквивалентное определение C_kP-интеграла при помощи производных Пеано. Получающийся при этом процесс интегрирования, называемый несимметричным $\mathcal{P}^n$-интегралом, сразу восстанавливает функцию по ее пеановской производной порядка n. В таком виде $\mathcal{P}^n$-интеграл был впервые введен Джеймсом[3, §8]. Впоследствии[4] было продемонстрировано построение теории $\mathcal{P}^n$-интеграла напрямую, без отсылок к свойствам C_kP-интеграла Беркиля.

C_kP-интеграл Беркиля относится к классу определений интеграла, введенных с целью решения задачи восстановления коэффициентов всюду сходящихся или суммируемых различными методами тригонометрических рядов по их сумме. Классическим результатом в этом вопросе является теорема дю Буа-Реймона–Лебега–Валле-Пуссена[5].

Теорема 1 (Валле-Пуссен, 1912г.). *Пусть ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{3}$$

сходится при всех $x \in [-\pi, \pi]$ (кроме, быть может, не более чем счетного множества исключительных точек) к некоторой функции $f(x)$, а сама функция f интегрируема по Лебегу на $[-\pi, \pi]$, то ряд (3) является рядом Фурье функции f, то есть имеют место формулы

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Однако только лишь из сходимости ряда (3) еще не следует интегрируемость функции f в смысле Лебега, что видно на классическом примере ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}, \tag{5}$$

сходящегося всюду, но расходящегося после почленного интегрирования, что невозможно для рядов Фурье суммируемых по Лебегу функций.

---

[3] R.D. James. Generalized nth primitives // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. T. 76, № 1. C. 149–176.

[4] P.S. Bullen. The P^n-integral // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. T. 14. C. 219–236.

[5] Ch.J. Vallée-Poussin. Sur l'unicité du développement trigonométrique // Bull. Acad. Roy. de Belg. 1912. C. 702–718.

Первым исчерпывающим решением проблемы восстановления был результат Данжуа, который показал[6], что сумма всякого всюду сходящегося ряда вида (3) интегрируема в смысле определенного им процесса интегрирования $(T_{2s})_0$, и для такой функции имеют место формулы (4), где интеграл понимается в смысле $(T_{2s})_0$. В дальнейшем аналогичное утверждение было доказано для симметричного P^2-интеграла Джеймса[7,8], симметричного интеграла Чезаро–Перрона Беркиля ("SCP-интеграла")[9], симметричного аппроксимативного интеграла Хенстока ("ASH-интеграла")[10, теорема 9.64].

Подобные теоремы доказывались и для рядов, суммируемых различными обобщенными методами. Так, имеет место[7] следующая теорема.

Теорема 2 (Джеймс, 1955г.). *Если $k \geqslant 0$, ряд* (3) *суммируем методом Чезаро (C, k) к некоторой функции $f(x)$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$, а члены ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx - a_n \sin nx, \tag{6}$$

сопряженного к (3)*, стремятся к нулю в смысле (C, k) всюду на $[-\pi, \pi]$, то функция $f(x)$ интегрируема в смысле симметричного P^{k+2}-интеграла вместе с функциями $f(x) \cos nx$ и $f(x) \sin nx$, и коэффициенты a_n, b_n выражаются через функцию f по формулам Фурье в смысле этого интеграла.*

При этом в формулы (4) вносится поправка, учитывающая, что P^{k+2}-интеграл восстанавливает сразу $(k+2)$-ю первообразную. Дополнительное условие на ряд (6) не может быть отброшено без нарушения единственности восстановления коэффициентов: так, например, ряд $\sum n \sin nx$ всюду суммируем методом $(C, 2)$ к нулю. В то же время оно является достаточно слабым — например, в случае сходящихся рядов ($k = 0$) оно выполняется автоматически.

$C_k P$-интеграл Беркиля не является достаточно общим для решения задачи восстановления коэффициентов сходящихся или суммируемых рядов в самом общем случае; тем не менее, он справляется с этой задачей при весьма слабых дополнительных условиях. Возможности $C_k P$-интеграла раскрывает следующая теорема[11].

6 A. Denjoy. Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique. Paris, 1941–1949.

7 R.D. James. Integrals and summable trigonometric series // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. T. 76, № 1. C. 1–15.

8 R.D. James. Summable trigonometric series // Pacif. J. Math. 1956. T. 6, № 1. C. 99–110.

9 J.C. Burkill. Integrals and trigonometrical series // Proc. London Math. Soc. 1951. T. 1. C. 46–57.

10 B.S. Thomson. Symmetric properties of real function // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 1994. T. 183.

11 G. Cross. The expression of trigonometrical series in Fourier form // Canad. J. Math. 1960. T. 12. C. 694–698.

Теорема 3 (Кросс, 1960г.). *Если $k \geqslant 0$ и как сам ряд (3), так и сопряженный ряд (6), ограничены в смысле Чезаро (C, k), то функция $f(x)$, определяемая как $(k+2)$-я производная в смысле Пеано от $(k+2)$ раз почленно проинтегрированного ряда (3), существует почти всюду и интегрируема в смысле $C_{k+1}P$-интеграла, и коэффициенты a_n, b_n выражаются через функцию f по формулам Фурье в смысле этого интеграла.*

В частности, если ряды (3) и (6) всюду суммируемы по Чезаро к некоторой функции $g(x)$, то $f(x) = g(x)$ почти всюду, и имеют место формулы (4), где интеграл понимается как $C_{k+1}P$-интеграл.

В то же время из известных[12,13] теорем о связи симметричного варианта C_kP-интеграла — SC_kP-интеграла с C_kP-интегралом и P^{k+1}-интегралом Джеймса в частности следует, что если в условиях теоремы 2 функция f является $C_{k+1}P$-интегрируемой, то формулы Фурье (4) заведомо имеют место.

Как отмечает Беркиль[9], более сильное условие на сопряженный ряд в теореме 3 является необходимым, поскольку в терминах интеграла оно в известном смысле соответствует существованию всюду и чезаровской непрерывности неопределенного интеграла, что по-прежнему неверно, например, для ряда (5).

Теоремы 2 и 3 позволяют также получать обобщения теоремы 1 на всевозможные обобщения интеграла Лебега, которые включаются или, во всяком случае, не противоречат симметричному P^k-интегралу или C_kP-интегралу соответственно. Так, если ряд Фурье сходится всюду к интегрируемой по Перрону функции, то его коэффициенты есть коэффициенты Фурье в смысле интеграла Перрона. Однако Скляренко показал[14], что для широкого интеграла Данжуа подобная теорема неверна: существует тригонометрический ряд, всюду сходящийся к интегрируемой широким интегралом Данжуа функции, у которого коэффициент a_0 не совпадает с числом, даваемым формулой Фурье, если интеграл в ней понимать как широкий интеграл Данжуа. В то же время из теоремы 3 следует, что такое невозможно в случае, когда ряд сходится вместе с сопряженным, поскольку CP-интеграл не противоречит широкому интегралу Данжуа[15].

Отметим также, что в отличие от естественного доказательства теоремы 3 при помощи интегрирования по частям, теорема 2 доказывается при помощи формального перемножения тригонометрических рядов. Для SCP-интеграла первая теорема об интегрировании по частям была впо-

[12] P.S. Bullen, C.M. Lee. The SC_nP-integral and the P^{n+1}-integral // Canad. J. Math. 1973. T. 25. C. 1274–1284.

[13] G. Cross. The $SC_{k+1}P$-integral and trigonometric series // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. T. 69, № 2.

[9] J.C. Burkill. Integrals and trigonometrical series // Proc. London Math. Soc. 1951. T. 1. C. 46–57.

[14] В.А. Скляренко. Об интегрируемых по Данжуа суммах всюду сходящихся тригонометрических рядов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, № 3. С. 533–536.

[15] В.А. Скворцов. Некоторые свойства CP-интеграла // Матем. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 304–324.

следствии получена Скляренко[16] (SCP-интеграл эквивалентен симметричному P^2-интегралу с точностью до некоторых деталей определения[17]).

Помимо элегантной формулировки теоремы об интегрировании по частям, установленной еще в оригинальной работе Беркиля[2], одним из замечательных результатов теории C_kP-интеграла является дескриптивное определение C_kP-интеграла[18]. А именно, вводится класс C_k-ACG$_*$-функцией и доказывается, что неопределенные C_kP-интегралы и только они являются C_k-ACG$_*$-функциями. В частности, это означает возможность введения интеграла Чезаро–Данжуа — "C_kD_*-интеграла", эквивалентного C_kP-интегралу Беркиля. Из этого также следует, что неопределенный C_kP принадлежит классу VBG и обладает N-свойством Лузина. В этой работе[18] были в дальнейшем обнаружены неточности, не повлиявшие, тем не менее, на истинность результатов. Одна из них была исправлена[19]. В настоящей диссертации указана и исправлена еще одна неточность. Впоследствии также было дано определение C_kD_*-интеграла при помощи производных Пеано[20].

В то же время многие результаты, известные для C-производных и CP-интеграла, до сих пор не удавалось перенести на C_kP-интеграл при $k > 1$. Так, известно, что C-производная не противоречит аппроксимативной производной[21], откуда в сочетании с дескриптивным описанием CP-интеграла легко вывести, что CP-интеграл не противоречит широкому интегралу Данжуа[15], в отличие от SCP-интеграла Беркиля, симметричного P^k-интеграла Джеймса и $(T_{2s})_0$-интеграла Данжуа[22].

Другим важным результатом, также полученным лишь при $k = 1$, является доказательство теоремы типа Марцинкевича для CP-интеграла[15], позволяющей устанавливать интегрируемость функции, не вычисляя значение интеграла. Следующая классическая теорема была опубликована и припи-

[16] В.А. Скляренко. Об интегрировании по частям в SCP-интеграле Беркилля // Матем. сб. 1980. Т. 112(154). С. 630–646.

[17] В.А. Скляренко. Некоторые свойства P^2-примитивной // Матем. заметки. 1972. Т. 12. С. 693–700.

[2] J.C. Burkill. The Cesàro–Perron scale of integration // Proc. London Math. Soc. 1935. Т. 39, № 7. С. 541–552.

[18] W.L.C. Sargent. A descriptive definition of Cesàro–Perron integrals // Proc. London Math. Soc. 1941. Т. 47. С. 212–247.

[19] S. Verblunsky. On a descriptive definition of Cesàro–Perron integrals // J. London Math. Soc. 1971. Т. 3. С. 326–333.

[20] W.L.C. Sargent. On generalized derivatives and Cesáro–Denjoy integrals // Proc. London Math. Soc. 1951. Т. 52. С. 365–376.

[21] W.L.C. Sargent. On the Cesàro derivates of a function // Proc. London Math. Soc. 1935. Т. 40, № 3,4. С. 235–254.

[15] В.А. Скворцов. Некоторые свойства CP-интеграла // Матем. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 304–324.

[22] В.А. Скворцов. Взаимоотношение между общим интегралом Данжуа и тотализацией $(T_{2s})_0$ // Матем. сб. 1960. Т. 52(94). С. 551–578.

сана Марцинкевичу в монографии Сакса “Теория интеграла”[23, гл.VIII, §3] и была передоказана независимо Толстовым[24].

Теорема 4 (Марцинкевич). *Для интегрируемости по Перрону некоторой измеримой функции необходимо и достаточно, чтобы у этой функции существовала хотя бы одна непрерывная перроновская мажоранта и хотя бы одна непрерывная перроновская миноранта.*

При этом, как видно на примере функций

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x} - 1, & x > 0, \end{cases}$$

являющихся на $[-1, 1]$ перроновскими мажорантой и минорантой соответственно для их общей левой производной, условие непрерывности отбросить нельзя, хотя можно существенно ослабить[25]. Теорема Марцинкевича может быть применена для установления весьма общей теоремы о существовании решения дифференциальных уравнений[26].

В дальнейшем было замечено, что некоторые обобщения интеграла Перрона обладают “свойством Марцинкевича”, то есть утверждение, аналогичное теореме 4, имеет место для них в той или иной форме, а некоторые другие — не обладают. В частности, CP-интеграл обладает свойством Марцинкевича[15]:

Теорема 5 (Скворцов). *Для CP-интегрируемости некоторой измеримой функции необходимо и достаточно, чтобы у этой функции существовала хотя бы одна CP-мажоранта и хотя бы одна CP-миноранта.*

В этой теореме в понятие CP-мажоранты уже заложено требование C-непрерывности, более слабое, чем требование непрерывности. Но для симметричных интегралов типа Перрона даже непрерывности в обычном смысле оказывается недостаточно:

- Существует измеримая на отрезке функция, не интегрируемая ни симметричным, ни аппроксимативным симметричным интегралом Перрона, но имеющая непрерывную мажоранту и миноранту в обоих смыслах[27].

---

[23] С. Сакс. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.

[24] Г.П. Толстов. Об интеграле Perron'а // Матем. сб. 1939. Т. 5, № 47. С. 647–660.

[25] D.N. Sarkhel. A criterion for Perron integrability // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. T. 70. C. 109–112.

[26] P.S. Bullen, R. Vyborny. Some applications of a theorem of Marcinkiewicz // Canad. Math. Bull. 1991. T. 34, № 2. C. 165–174.

[15] В.А. Скворцов. Некоторые свойства CP-интеграла // Матем. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 304–324.

[27] V.A. Skvortsov, B.S. Thomson. Symmetric integrals do not have the Marcinkiewicz property // Real Analysis Exchange. 1995-1996. T. 21(2). C. 510–520.

- Существует измеримая на отрезке функция, не являющаяся SCP-интегрируемой, но имеющая непрерывную SCP-мажоранту и SCP-миноранту[28].

Не обладает свойством Марцинкевича и двоичный интеграл Перрона[29], применяемый для восстановления коэффициентов всюду сходящихся рядов Уолша по их сумме.

Цель работы

Целью настоящей работы является развитие теории C_k-производных и C_kP-интеграла Беркиля при $k \geqslant 2$, в частности, получение дескриптивных характеристик перроновских мажорант и минорант для этих интегралов, исследование взаимосвязи C_kP-интеграла с другими обобщениями интеграла Лебега, доказательство свойства Марцинкевича для C_kP-интеграла.

Методы исследований

В работе использованы методы метрической теории функций, теории меры и интеграла. При изучении обобщенных интегралов используется перроновский и дескриптивный методы определения интегралов.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказана теорема типа Марцинкевича для C_kP-интеграла для всех порядков чезаровского усреднения $k \geqslant 1$: для C_kP-интегрируемости измеримой функции необходимо и достаточно наличия у этой функции хотя бы одной C_kP-мажоранты и хотя бы одной C_kP-миноранты.

2. Показано, что C_kP-интеграл, находясь в общем положении с широким интегралом Данжуа (“D-интегралом”), не противоречит ему. В качестве следствия получена усиленная теорема типа дю Буа-Реймона D-интеграла, показывающая, что D-интеграл правильно восстанавливает коэффициенты тригонометрического ряда, всюду суммируемого по Чезаро вместе с сопряженным, как только сумма самого ряда D-интегрируема.

---

[28] В.А. Скляренко. Об одном свойстве SCP-интеграла Беркилля // Матем. заметки. 1999. Т. 65. С. 599–606.

[29] В.А. Скворцов. О теореме Марцинкевича для двоичного интеграла Перрона // Матем. заметки. 1996. Т. 59. С. 267–277.

3. Приведены примеры, показывающие, что некоторые свойства C-производной не имеют места для C_k-производных с $k \geqslant 2$. В частности, при $k \geqslant 2$ C_k-производные начинают противоречить аппроксимативной производной на множестве положительной меры и теряют свойство Варда.

4. Рассмотрены обобщенные производные Чезаро, определяемые произвольным ядром усреднения, и выявлены свойства ядер усреднения, отвечающие некоторые особенности поведения определений производных. Продемонстрирована возможность применения обобщенных производных Чезаро к исследованию классической конструкции C_kP-интеграла.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер и является вкладом в теорию неабсолютных интегралов типа Перрона. Полученные результаты также могут найти применение в теории ортогональных рядов и теории дифференциальных уравнений.

Аппробация работы

1. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре кафедры Теории функций и функционального анализа по теории ортогональных рядов под руководством профессора М.К. Потапова, профессора М.И. Дьяченко, профессора Т.П. Лукашенко и профессора В.А. Скворцова (неоднократно, 2010–2013)

2. На 16-й зимней математической школе “Современные проблемы теории функций и их приложения”, Саратов (2012)

3. На международной конференции “Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV”, Ростов-на-Дону (2014)

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора [1, 2, 3, 4, 5], из которых две — в журналах из перечня ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 41 наименование. Общий объем диссертации составляет 85 страниц.

Краткое содержание диссерации

В **главе 1**, помимо изложения общих вспомогательных фактов из теории C_kP-интеграла, построены два примера функций, вскрывающих ряд отличий между чезаровскими производными старших порядков усреднения (начиная с C_2-производной) и C_1-производной.

Теорема A. *Для всякого* $k \geqslant 2$ *существует функция* $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ *такая, что*

1) F *непрерывна на* $[0,1]$*;*

2) $C_k\underline{D}F(x) > -\infty$ *для всех* $x \in (0,1)$*;*

3) F *не принадлежит классу* VBG *на* $[0,1]$.

При $k = 1$ даже всякая C-непрерывная функция, удовлетворяющая пункту 2, является VBG-функцией[15].

Из пунктов 1 и 2 этой теоремы следует, что функция F является C_2P-мажорантой для хотя бы одной действительной функции — например, для

$$f(x) = \begin{cases} C_2\underline{D}F(x) & \text{при } C_2\underline{D}F(x) < +\infty, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Однако, поскольку всякий неопределенный C_kP-интеграл является VBG-функцией, а всякая C_kP-мажоранта интегрируемой функции отличается от неопределенного интеграла на монотонную функцию, функция $f(x)$ не может быть C_kP-интегрируемой. Таким образом, дескриптивные характеристики мажорант произвольных функций и мажорант интегрируемых функций при $k \geqslant 2$ различаются гораздо существеннее, чем при $k = 1$.

Отметим также, что сам факт несовпадения классов мажорант произвольных функций и мажорант интегрируемых функций не является удивительным и имеет место в том числе и для классического интеграла Перрона, даже если ограничиться только непрерывными мажорантами и минорантами. Действительно, пусть $K(x)$ есть классическая канторова лестница на отрезке $[0,1]$. Определим функцию $\varphi(x) = K(x) - x$. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть монотонно убывающая к нулю последовательность точек,

[15] В.А. Скворцов. Некоторые свойства CP-интеграла // Матем. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 304–324.

$\psi(x) = (1/n)\varphi((x-a_n)/(a_{n-1}-a_n))$ при $x \in [a_n, a_{n-1}]$, $\chi(x) = \max|\psi(t)|$ по $t \in [0,x]$. Тогда функция $\Psi(x) = \psi(x) + \chi(x)$ является непрерывной перроновской мажорантой для своей нижней производной. Функция $\chi(x)$ монотонна, и потому ее производная интегрируема по Лебегу, а производная функции $\psi(x)$ равна $-(n(a_{n-1}-a_n))^{-1}$ почти всюду на $[a_n, a_{n-1}]$, и потому ее интеграл на $[0, a_1]$ равен $-\infty$. Таким образом, не существует интегрируемой функции, для которой Ψ была бы мажорантой.

Теорема B. *Для любого $\alpha \in (0,1)$ и любого натурального $k \geqslant 2$ существует функция $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, такая, что*

1) *F принадлежит классу Lip_α на $[0,1]$;*

2) *$C_k DF(x) = +\infty$ почти всюду на $[0,1]$;*

3) *$F'_{\mathrm{ap}}(x)$ существует и конечна почти всюду на $[0,1]$.*

C-производная C-непрерывной функции не может противоречить аппроксимативной производной на множестве положительной меры[21]. Это свойство, как и принадлежность мажорант классу VBG, оказывается удобным для доказательства теорем типа Марцинкевича, но при $k \geqslant 2$ теряется.

С другой стороны, пункт 2 теоремы B интересен сам по себе: он показывает, что для C_k-производной при $k \geqslant 2$ неверны теоремы типа Варда и не имеют места соотношения Данжуа. Так, не существует функции, обыкновенная или даже аппроксимативная производная которой была бы равна $+\infty$ на множестве положительной меры[23, гл. IX]; C-производная также не может быть равна $+\infty$ на множестве положительной меры[21].

В **главе 2** вводится обобщенное понятие чезаровской производной. С его помощью совершается попытка в весьма общем виде ответить на вопрос: какими именно особенностями определения C_k-производной обусловлено наличие или отсутствие тех или иных свойств?

Конечную разность, определяющая C_k-производную в формуле (2), можно представить в виде

$$C_\varphi \Delta f(x,y) = \frac{\dfrac{1}{y-x} \cdot \displaystyle\int_x^y \varphi\left(\frac{t-x}{y-x}\right) f(t)\,dt - f(x)}{\alpha(y-x)}, \tag{7}$$

где $\varphi(s) = \varphi_k(s) = k(1-s)^{k-1}$, $\alpha = \alpha_k = \displaystyle\int_0^1 s\varphi_k(s)\,ds = \frac{1}{k+1}$.

Однако формула (7) имеет смысл при любых функциях φ, обладающих достаточной гладкостью, а именно, принадлежат классу так называемых

[21] W.L.C. Sargent. On the Cesàro derivates of a function // Proc. London Math. Soc. 1935. T. 40, № 3,4. C. 235–254.

[23] С. Сакс. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.

VB_k-функций — $(k-1)$-кратных неопределенных интегралов от функций ограниченной вариации. Разумеется, также требуется выполнение условия $\alpha \neq 0$, и желательно, чтобы интеграл от $\varphi(s)$ на отрезке $[0,1]$ был равен 1.

Таким образом, на каждом шаге построения шкалы интегрирования Чезаро–Перрона Беркиля мы можем подменить функцию φ_k на другую функцию весьма общего вида, и получить новое определение понятий предела, непрерывности, производной и, быть может, интеграла Перрона (если удастся обосновать корректность, предъявив соответствующую лемму о монотонности).

Результаты главы 2 состоят в исследовании зависимости свойств определений обобщенных производных Чезаро — “C_φ-производных” — от свойств “ядра усреднения” — функции φ. Так, например, имеет место

Теорема C. *Пусть $k \geqslant 1$, и функция $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что*

1) $\varphi \in \mathrm{VB}_k[0,1]$;

2) $\int_0^1 \varphi(s)\,ds = 1$;

3) $\alpha = \int_0^1 s\varphi(s)\,ds \neq 0$;

4) $\varphi(1) = \varphi'(1) = \ldots = \varphi^{(k-2)}(1) = 0$.

Тогда всякая C_k-непрерывная функция является C_φ-непрерывной.

Свойства 1) – 3), как уже отмечалось выше, достаточно естественны для обеспечения корректности определения C_φ-производной и согласованности этого определения с обыкновенной производной на простейших функциях.

Таким образом, общность получаемого определения C_φ-предела и C_φ-непрерывности во многом зависит от скорости убывания функции $\varphi(s)$ при приближении к точке $s = 1$.

Некоторые результаты главы 2 относятся только к неотрицательным функциям φ:

5) $\varphi(s) \geqslant 0$ *для всех* $s \in [0,1]$.

Однако особенно интересными с точки зрения настоящего исследования оказываются свойства производных Чезаро, построенных по функциям φ, обладающих свойством симметрии:

6) $\varphi(s) = \varphi(1-s)$ *для всех* $s \in [0,1]$.

Видно, что C_k-производная является в этом смысле симметричной при $k = 1$ и несимметричной при $k < 1$. Следующие результаты показывают, что все симметричные C_φ-производные обладают интересующими нас свойствами, которые, как мы видели в главе 1, имеются у C_1-производной, но теряются у C_k-производных при $k > 1$:

Теорема D. *Пусть функция F имеет аппроксимативную производную F'_{ap} всюду на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}$ и является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[a,b]$, содержащем множество E, а φ удовлетворяет условиям 1) – 4) и 6). Тогда для почти всех $x \in E$ имеют место соотношения*

$$C_\varphi \underline{D} F(x) \leqslant F'_{\mathrm{ap}}(x) \leqslant C_\varphi \overline{D} F(x).$$

Теорема E. *Пусть $k \geqslant 1$, φ удовлетворяет условиям 1) – 4) и 6), и C_k-непрерывная функция F такова, что $C_\varphi \underline{D} F(x) > -\infty$ для всех $x \in (a,b)$. Тогда существует такое счетное семейство замкнутых множеств $\{H_i\}$, объединение которых совпадает с (a,b), что функция F имеет ограниченную вариацию на каждом из H_i, и для каждого i существует число $K_i \in \mathbb{R}$ такое, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^p$ с концами на H_i имеют место оценки*

$$\sum_{j=1}^{p} \inf_{a_j<x<b_j} \Big(C_\varphi F(a_j,x) - F(a_j) \Big) \geqslant -K_i,$$
$$\sum_{j=1}^{p} \inf_{a_j<x<b_j} \Big(F(b_j) - C_\varphi F(b_j,x) \Big) \geqslant -K_i.$$

Таким образом, в случае симметричной φ C_φ-производные не противоречат аппроксимативной производной, а $C_\varphi P$-мажоранты всегда являются VBG-функциями. Дескриптивная характеристика мажорант, даваемая теоремой D, в некотором смысле оказывается достаточно общей для доказательства теорем типа Марцинкевича.

В **главе 3** рассматривается частный случай конструкции, построенной в главе 2: вводится понятие $C_k^m P$-интеграла — интеграла типа Чезаро–Перрона, основанного на производной, определяемой по формуле (7) ядром усреднения

$$\varphi_k^m(s) = \frac{s^{m-1}(1-s)^{k-1}}{B(m,k)},$$

где $B(m,k)$ есть бета-функция Эйлера. Это семейство функций удовлетворяет условиям 1) – 5) и содержит в качестве частного случая (при $m=1$) классическое чезаровское ядро усреднения $\varphi_k = \varphi_k^1$.

С другой стороны, при $m = k$ функция φ_k^m удовлетворяет также и условию 6), то есть является симметричным ядром усреднения, что дает нам возможность применять к $C_k^k P$-мажорантам и минорантам теоремы D и E.

Однако для того, чтобы вывести из этих теорем свойства классического интеграла Беркиля, требуется исследовать взаимосвязь между $C_k^m P$-интегралами с различными m. С этой целью доказываются следующие утверждения:

Теорема F. *Если $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и функция F является C_k-непрерывной в окрестности точки x, то имеют место соотношения*

$$C_k^{m+1}\underline{D}_- F(x) \leqslant C_k^m \underline{D}_- F(x) \leqslant C_k^m \overline{D}_- F(x) \leqslant C_k^{m+1}\overline{D}_- F(x),$$
$$C_k^{m+1}\underline{D}_+ F(x) \leqslant C_k^m \underline{D}_+ F(x) \leqslant C_k^m \overline{D}_+ F(x) \leqslant C_k^{m+1}\overline{D}_+ F(x).$$

Теорема G. *Пусть $k \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$, и функции Ψ, ψ на отрезке $[a,b]$ таковы, что $C_k^m \underline{D}\Psi(x) > C_k^m \overline{D}\psi(x)$. Тогда существуют такие функции Ψ_*, ψ_* на $[a,b]$, что*

$$C_k^{m+1}\overline{D}\psi_*(x) \leqslant C_k^m \overline{D}\psi(x) < C_k^m \underline{D}\Psi(x) \leqslant C_k^{m+1}\underline{D}\Psi_*(x),$$

и при этом

$$\Big(\Psi_*(b) - \Psi_*(a)\Big) - \Big(\psi_*(b) - \psi_*(a)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{2k}{m} + 1\right)\Big(\Psi(b) - \Psi(a)\Big) - \Big(\psi(b) - \psi(a)\Big).$$

Из теоремы F следует, что C_k^m-производная оказывается все менее и менее общей при увеличении m. Таким образом, класс $C_k^m P$-мажорант является подклассом класса $C_k P$-мажорант, и всякая $C_k^m P$-интегрируемая функция является $C_k P$-интегрируемой с тем же значением интеграла.

Из теоремы G, напротив, следует, что как только у нас имеется пара из $C_k P$-мажоранты и $C_k P$-миноранты — то всегда можно построить достаточно близкие $C_k^m P$-мажоранту и $C_k^m P$-миноранту. Таким образом, $C_k^m P$-интеграл эквивалентен $C_k P$-интегралу при всех $m \geqslant 1$.

Более того, из теоремы G также видно, что теорема Марцинкевича для $C_k^m P$-интеграла эквивалентна теореме Марцинкевича для $C_k P$-интеграла, несмотря на то, что классы мажорант и минорант в определениях этих интегралов, вообще говоря, не совпадают.

В **главе 4** получены основные положительные результаты диссертации. Первым из них является непротиворечие $C_k P$-интеграла и широкого интеграла Данжуа:

Теорема H. *Если $k \geqslant 1$ и функция f является одновременно $C_k P$-интегрируемой на отрезке $[a,b]$ с неопределенным $C_k P$-интегралом F_1 и D-интегрируемой на $[a,b]$ с неопределенным D-интегралом F_2, то функция $H(x) = F_1(x) - F_2(x)$ является постоянной на всем $[a,b]$.*

Из этой теоремы выводится теорема типа Валле-Пуссена для широкого интеграла Данжуа:

Теорема I. *Пусть $k \geqslant 0$ и некоторый тригонометрический ряд ограничен в смысле Чезаро (C, k) всюду на $[-\pi, \pi]$ вместе с сопряженным рядом и суммируется методом Чезаро (C, k) почти всюду к некоторой D-интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции f. Тогда коэффициенты этого тригонометрического ряда вычисляются по функции f по формулам Фурье, в которых интеграл понимается как D-интеграл.*

Вторым основным результатом является теорема типа Марцинкевича для C_kP-интеграла.

Теорема K. *Пусть $k \geqslant 1$, и у функции f, измеримой по Лебегу на отрезке $[a, b]$, есть хотя бы одна C_kP-мажоранта Ψ и хотя бы одна C_kP-миноранта ψ на $[a, b]$. Тогда f является C_kP-интегрируемой на $[a, b]$.*

Доказательство всех трех теорем этой главы опирается на теоремы D и E; несмотря на то, что в силу примеров из главы 1 они не применимы непосредственно к C_kP-интегралу, мы можем применить их к C_k^mP-интегралу, во всяком случае, при $m = k$, а затем, пользуясь теоремами F и G, перенести полученные результаты на C_kP-интеграл.

Автор выражает огромную благодарность научному руководителю профессору Валентину Анатольевичу Скворцову за постановку задачи, многочисленные плодотворные обсуждения и моральную поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. А.В. Дергачев. Некоторые свойства чезаровских производных высших порядков // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. Т. 67, № 3. С. 3–10.

2. А.В. Дергачев. Обобщенные производные и интегралы типа Чезаро–Перрона. I // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2014. Т. 69, № 2. С. 14–25.

3. А.В. Дергачев. Обобщенные производные и интегралы типа Чезаро–Перрона. // Деп. в ВИНИТИ, №276-В2014.

4. А.В. Дергачев. Чезаровские и обобщенные чезаровские производные высших порядков // Материалы 16-ой Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". 2012. С. 64–65.

5. А.В. Дергачев. Интеграл Чезаро–Перрона и свойство Марцинкевича // Международная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV", Тезисы докладов. Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2014. С. 54–55.