МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.518

Дергачев Артем Владимирович

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ТИПА ЧЕЗАРО–ПЕРРОНА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность 01.01.01 —
«вещественный, комплексный и функциональный анализ»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.А. Скворцов

Москва – 2014

Содержание

Введение

Развитие теории действительных функций в начале XX века было во многом обусловлено построением теории меры и интеграла Лебега, по сей день остающейся фундаментом метрической теории функций. Одновременно ставились задачи, для исчерпывающего решения которых общности, достигаемой определением интеграла по Лебегу, оказывалось недостаточно, и возникали другие, более общие определения интеграла, такие как интеграл Данжуа [1], интеграл Перрона [2] и впоследствии интеграл Хенстока–Курцвейля [3]. Эти определения, изначально созданные ради решения задачи восстановления функции по ее точной обыкновенной производной, в свою очередь подвергались естественным модификациям, часто следовавшим за обобщениями понятий предела, непрерывности и производной и позволявшим приписать численное значение определенного интеграла все более широкому классу функций. Иногда, напротив, рассматривались более узкие определения интеграла, позволяющие извлечь больше выгоды из факта интегрируемости тех или иных функций за счет сужения этого класса, пользоваться более удобными свойствами самой операции интегрирования, а также избежать ситуаций противоречия, когда одним и тем же функциям с точки зрения различных определений приписываются различные значения интеграла.

Настоящая диссертация посвящена исследованию свойств одного из обобщений интеграла Перрона, а именно "шкалы интегрирования" Чезаро–Перрона, построенной Беркилем — последовательности определений обобщенных понятий предела, непрерывности, производной и интеграла, занумерованной целым неотрицательным параметром — "порядком усреднения". Каждое следующее определение в этой шкале является более общим, чем предыдущее, то есть охватывает все более широкие классы функций.

Интеграл Чезаро–Перрона Беркиля

Действительная функция f называется интегрируемой по Перрону на отрезке $[a, b]$, если существуют сколь угодно равномерно близкие друг к другу функции Ψ и ψ такие, что нижняя производная функции Ψ больше f, а верхняя производная функции ψ меньше f; при этом общая нижняя грань приращений таких “мажорантных функций” Ψ и верхняя грань приращений “минорантных функций” ψ называется определенным интегралом Перрона функции f на $[a,b]$.

Это определение легко поддается модификации за счет подмены используемого в нем понятия производной.

Первоначальное определение интеграла Чезаро–Перрона, или CP-интеграла, соответствующее первому порядку усреднения, было введено Беркилем [4] (1932г.) посредством использования в определении интеграла Перрона “производной Чезаро”

$$CDF(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} F(t)\,dt - F(x)}{\dfrac{h}{2}} \tag{1}$$

вместо обыкновенной производной, где интеграл понимается как классический интеграл Перрона. Лишь затем в [5] (1935г.) был введен C_kP-интеграл Беркиля любого целого порядка $k \geqslant 1$ индукцией по k при помощи чезаровской производной соответствующего порядка, определяемой формулой

$$C_kDF(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{k}{h^k}\displaystyle\int_x^{x+h} (x+h-t)^{k-1}F(t)\,dt - F(x)}{\dfrac{h}{k+1}}, \tag{2}$$

где интеграл понимается как $C_{k-1}P$-интеграл; при этом C_1P-интеграл совпадает с CP-интегралом, введенным ранее, а правая часть формулы (2) при $k=1$ превращается в правую часть формулы (1).

Можно дать эквивалентное определение C_kP-интеграла при помощи производных Пеано. Получающийся при этом процесс интегрирования, называемый несимметричным $\mathcal{P}^n$-интегралом, сразу восстанавливает функцию по ее пеановской производной порядка n. В таком виде $\mathcal{P}^n$-интеграл был впервые введен Джеймсом в [6, §8]. В [7] продемонстрировано построение теории $\mathcal{P}^n$-интеграла напрямую, без отсылок к свойствам C_kP-интеграла Беркиля.

C_kP-интеграл и проблема восстановления коэффициентов

C_kP-интеграл Беркиля относится к классу определений интеграла, введенных с целью решения задачи восстановления коэффициентов всюду сходящихся или суммируемых различными методами тригонометрических рядов по их сумме. Классическим результатом в этом вопросе является теорема дю Буа-Реймона–Лебега–Валле-Пуссена [8].

Теорема 1 (Валле-Пуссен, 1912г.). *Пусть ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{3}$$

сходится при всех $x \in [-\pi, \pi]$ *(кроме, быть может, не более чем счетного множества исключительных точек) к некоторой функции* $f(x)$*, а сама функция* f *интегрируема по Лебегу на* $[-\pi, \pi]$*, то ряд* (3) *является рядом Фурье функции* f*, то есть имеют место формулы*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Однако только лишь из сходимости ряда (3) еще не следует интегрируемость функции f в смысле Лебега, что видно на классическом примере ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}, \tag{5}$$

сходящегося всюду, но расходящегося после почленного интегрирования, что невозможно для рядов Фурье суммируемых по Лебегу функций.

Первым исчерпывающим решением проблемы восстановления был результат Данжуа, который в [9] показал, что сумма всякого всюду сходящегося ряда вида (3) интегрируема в смысле определенного им процесса интегрирования $(T_{2s})_0$, и для такой функции имеют место формулы (4), где интеграл понимается в смысле $(T_{2s})_0$. В дальнейшем аналогичное утверждение было доказано для симметричного P^2-интеграла Джеймса (см. [10], [11]), симметричного интеграла Чезаро–Перрона Беркиля (“SCP-интеграла”) [12], симметричного аппроксимативного интеграла Хенстока (“ASH-интеграла”) [13, теорема 9.64].

Подобные теоремы доказывались и для рядов, суммируемых различными обобщенными методами. Так, в [10] установлена следующая теорема.

Теорема 2 (Джеймс, 1955г.). *Если* $k \geqslant 0$*, ряд* (3) *суммируем методом Чезаро* (C, k) *к некоторой функции* $f(x)$ *для всех* $x \in [-\pi, \pi]$*, а члены ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx - a_n \sin nx, \tag{6}$$

сопряженного к (3)*, стремятся к нулю в смысле* (C, k) *всюду на* $[-\pi, \pi]$*, то функция* $f(x)$ *интегрируема в смысле симметричного* P^{k+2}*-интеграла вместе с функциями* $f(x)\cos nx$ *и* $f(x)\sin nx$*, и коэффициенты* a_n*,* b_n *выражаются через функцию* f *по формулам Фурье в смысле этого интеграла.*

При этом в формулы (4) вносится поправка, учитывающая, что P^{k+2}-интеграл восстанавливает сразу $(k+2)$-ю первообразную. Дополнительное условие на ряд (6) не может быть отброшено без нарушения единственности восстановления коэффициентов: так, например, ряд $\sum n \sin nx$ всюду суммируем методом $(C, 2)$ к нулю. В то же время оно является достаточно слабым — например, в случае сходящихся рядов ($k = 0$) оно выполняется автоматически.

$C_k P$-интеграл Беркиля не является достаточно общим для решения задачи восстановления коэффициентов сходящихся или суммируемых рядов в самом общем случае; тем не менее, он справляется с этой задачей при весьма слабых дополнительных условиях. Возможности $C_k P$-интеграла раскрывает следующая теорема [14].

Теорема 3 (Кросс, 1960г.). *Если $k \geqslant 0$ и как сам ряд* (3), *так и сопряженный ряд* (6), *ограничены в смысле Чезаро (C, k), то функция $f(x)$, определяемая как $(k+2)$-я производная в смысле Пеано от $(k+2)$ раз почленно проинтегрированного ряда* (3), *существует почти всюду и интегрируема в смысле $C_{k+1}P$-интеграла, и коэффициенты a_n, b_n выражаются через функцию f по формулам Фурье в смысле этого интеграла.*

В частности, если ряды (3) и (6) всюду суммируемы по Чезаро к некоторой функции $g(x)$, то $f(x) = g(x)$ почти всюду, и имеют место формулы (4), где интеграл понимается как $C_{k+1}P$-интеграл.

В то же время из полученных в работах [15] и [16] теорем о связи симметричного варианта $C_k P$-интеграла — $SC_k P$-интеграла с $C_k P$-интегралом и P^{k+1}-интегралом Джеймса в частности следует, что если в условиях теоремы 2 функция f является $C_{k+1}P$-интегрируемой, то формулы Фурье (4) заведомо имеют место.

Как отмечает Беркиль в [12], более сильное условие на сопряженный ряд в теореме 3 является необходимым, поскольку в терминах интеграла оно в известном смысле соответствует существованию всюду и чезаровской непрерывности неопределенного интеграла, что по-прежнему неверно, например, для ряда (5).

Теоремы 2 и 3 позволяют также получать обобщения теоремы 1 на всевозможные обобщения интеграла Лебега, которые включаются или, во всяком случае, не противоречат симметричному P^k-интегралу или $C_k P$-интегралу соответственно. Так, если ряд Фурье сходится всюду к интегрируемой по Перрону функции, то его коэффициенты есть коэффициенты Фурье в смысле интеграла Перрона. Однако Скляренко в работе [17] показал, что для широкого интеграла Данжуа подобная теорема неверна: существует тригонометрический ряд, всюду сходящийся к интегрируемой широким интегралом Данжуа функции, у которого коэффициент a_0 не совпадает с числом, даваемым формулой Фурье, если интеграл в ней понимать как широкий интеграл Данжуа. В то же время из теоремы 3 следует, что такое невозможно в случае, когда ряд сходится вместе с сопряженным, поскольку CP-интеграл не противоречит широкому интегралу Данжуа [18].

Отметим также, что в отличие от естественного доказательства теоремы 3 при помощи интегрирования по частям, теорема 2 доказывается при помощи формального перемножения тригонометрических рядов. Для SCP-интеграла первая теорема об интегрировании по частям была впоследствии получена Скляренко в [19] (1980г.; в работе [20] того же автора отмечается, что SCP-интеграл эквивалентен симметричному P^2-интегралу с точностью до некоторых деталей определения).

Дескриптивные характеристики и теорема Марцинкевича

Помимо элегантной формулировки теоремы об интегрировании по частям, установленной еще в оригинальной работе Беркиля [5], одним из замечательных результатов теории C_kP-интеграла является дескриптивное определение C_kP-интеграла. А именно, в работе [21] (1942г.)вводится класс C_k-ACG$_*$-функцией и доказывается, что неопределенные C_kP-интегралы и только они являются C_k-ACG$_*$-функциями. В частности, это означает возможность введения интеграла Чезаро–Данжуа — “C_kD_*-интеграла”, эквивалентного C_kP-интегралу Беркиля. Из этого также следует, что неопределенный C_kP принадлежит классу VBG и обладает N-свойством Лузина. В работе [21] были в дальнейшем обнаружены неточности, не повлиявшие, тем не менее, на истинность результатов. Одна из них была исправлена в [22]. В настоящей диссертации указана и исправлена еще одна неточность (теорема 4.1.2). В работе [23] было дано определение C_kD_*-интеграла при помощи производных Пеано.

В то же время многие результаты, известные для C-производных и CP-интеграла, до сих пор не удавалось перенести на C_kP-интеграл при $k > 1$. Так, известно, что C-производная не противоречит аппроксимативной производной [24], откуда в сочетании с дескриптивным описанием CP-интеграла легко вывести, что CP-интеграл не противоречит широкому интегралу Данжуа [18], в отличие от SCP-интеграла Беркиля, симметричного P^k-интеграла Джеймса и $(T_{2s})_0$-интеграла Данжуа [25].

Другим важным результатом работы [18] является доказательство теоремы типа Марцинкевича для CP-интеграла, позволяющей устанавливать интегрируемость функции, не вычисляя значение интеграла. Следующая классическая теорема была опубликована и приписана Марцинкевичу в монографии Сакса “Теория интеграла” [26, гл.VIII, §3] и была передоказана независимо Толстовым в [27].

Теорема 4 (Марцинкевич)**.** *Для интегрируемости по Перрону некоторой измеримой функции необходимо и достаточно, чтобы у этой функции* *существовала хотя бы одна непрерывная перроновская мажоранта и хотя бы одна непрерывная перроновская миноранта.*

При этом, как видно на примере функций

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x} - 1, & x > 0, \end{cases}$$

являющихся на $[-1, 1]$ перроновскими мажорантой и минорантой соответственно для их общей левой производной, условие непрерывности отбросить нельзя, хотя можно существенно ослабить [28]. Теорема Марцинкевича может быть применена для установления весьма общей теоремы о существовании решения дифференциальных уравнений [29].

В дальнейшем было замечено, что некоторые обобщения интеграла Перрона обладают “свойством Марцинкевича”, то есть утверждение, аналогичное теореме 4, имеет место для них в той или иной форме, а некоторые другие — не обладают. В частности, CP-интеграл обладает свойством Марцинкевича:

Теорема 5 (Скворцов[18])**.** *Для CP-интегрируемости некоторой измеримой функции необходимо и достаточно, чтобы у этой функции существовала хотя бы одна CP-мажоранта и хотя бы одна CP-миноранта.*

В этой теореме в понятие CP-мажоранты уже заложено требование C-непрерывности, более слабое, чем требование непрерывности. Но для симметричных интегралов типа Перрона даже непрерывности в обычном смысле оказывается недостаточно:

- Существует измеримая на отрезке функция, не интегрируемая ни симметричным, ни аппроксимативным симметричным интегралом Перрона, но имеющая непрерывную мажоранту и миноранту в обоих смыслах (Скворцов, Томсон [30]).

- Существует измеримая на отрезке функция, не являющаяся SCP-интегрируемой, но имеющая непрерывную SCP-мажоранту и SCP-миноранту (Скляренко [31]).

Не обладает свойством Марцинкевича и двоичный интеграл Перрона (Скворцов [32]), применяемый для восстановления коэффициентов всюду сходящихся рядов Уолша по их сумме.

Обзор результатов диссертации

Основной целью настоящей работы является исследование возможности обобщения ряда ключевых результатов упомянутых выше работ [24] и [18] с CP-интеграла на C_kP-интеграл при всех $k \geqslant 1$.

Для C_kP-интеграла устанавливается полноценная теорема типа Марцинкевича. Доказывается, что C_kP-интеграл не противоречит широкому интегралу Данжуа. В частности, для широкого интеграла Данжуа устанавливается более общая теорема типа Валле-Пуссена, покрывающая ряды, суммируемые по Чезаро вместе с сопряженными.

С другой стороны, строятся примеры функций, показывающие, что C_kP-мажоранты и миноранты не обладают рядом полезных свойств, присущих CP-мажорантам и минорантам; но такое происходит только лишь в том случае, когда они не являются мажорантами или минорантами никакой интегрируемой функции.

Наконец, вводится модификация определения C_k-производной и C_kP-интеграла, исключающая подобные примеры, но приводящая к эквивалентному определению интеграла.

В **главе 1**, помимо изложения общих вспомогательных фактов из теории C_kP-интеграла, построены два примера функций, вскрывающих ряд отличий между чезаровскими производными старших порядков усреднения (начиная с C_2-производной) и C_1-производной.

Теорема 1.3.5. *Для всякого $k \geqslant 2$ существует функция $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что*

1) *F непрерывна на $[0,1]$;*
2) *$C_k\underline{D}F(x) > -\infty$ для всех $x \in (0,1)$;*
3) *F не принадлежит классу* VBG *на* $[0,1]$.

При $k = 1$ даже всякая C-непрерывная функция, удовлетворяющая пункту 2, является VBG-функцией [18].

Из пунктов 1 и 2 этой теоремы следует, что функция F является C_2P-мажорантой для хотя бы одной действительной функции — например, для

$$f(x) = \begin{cases} C_2\underline{D}F(x) & \text{при } C_2\underline{D}F(x) < +\infty, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Однако, поскольку всякий неопределенный C_kP-интеграл является VBG-функцией, а всякая C_kP-мажоранта интегрируемой функции отличается от неопределенного интеграла на монотонную функцию, функция $f(x)$ не может быть C_kP-интегрируемой. Таким образом, дескриптивные характеристики мажорант произвольных функций и мажорант интегрируемых функций при $k \geqslant 2$ различаются гораздо существеннее, чем при $k = 1$.

Отметим также, что сам факт несовпадения классов мажорант произвольных функций и мажорант интегрируемых функций не является удивительным и имеет место в том числе и для классического интеграла

Перрона, даже если ограничиться только непрерывными мажорантами и минорантами. Действительно, пусть $K(x)$ есть классическая канторова лестница на отрезке $[0,1]$. Определим функцию $\varphi(x) = K(x) - x$. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть монотонно убывающая к нулю последовательность точек, $\psi(x) = (1/n)\varphi((x-a_n)/(a_{n-1}-a_n))$ при $x \in [a_n, a_{n-1}]$, $\chi(x) = \max|\psi(t)|$ по $t \in [0,x]$. Тогда функция $\Psi(x) = \psi(x) + \chi(x)$ является непрерывной перроновской мажорантой для своей нижней производной. Функция $\chi(x)$ монотонна, и потому ее производная интегрируема по Лебегу, а производная функции $\psi(x)$ равна $-(n(a_{n-1}-a_n))^{-1}$ почти всюду на $[a_n, a_{n-1}]$, и потому ее интеграл на $[0, a_1]$ равен $-\infty$. Таким образом, не существует интегрируемой функции, для которой Ψ была бы мажорантой.

Теорема 1.3.9. *Для любого $\alpha \in (0,1)$ и любого натурального $k \geqslant 2$ существует функция $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, такая, что*

1) *F принадлежит классу Lip_α на $[0,1]$;*

2) *$C_k DF(x) = +\infty$ почти всюду на $[0,1]$;*

3) *$F'_{\mathrm{ap}}(x)$ существует и конечна почти всюду на $[0,1]$.*

C-производная C-непрерывной функции не может противоречить аппроксимативной производной на множестве положительной меры [24]. Это свойство, как и принадлежность мажорант классу VBG, оказывается удобным для доказательства теорем типа Марцинкевича, но при $k \geqslant 2$ теряется.

С другой стороны, пункт 2 теоремы 1.3.9 интересен сам по себе: он показывает, что для C_k-производной при $k \geqslant 2$ неверны теоремы типа Варда и не имеют места соотношения Данжуа. Так, в [26, гл. IX] показано, что не существует функции, обыкновенная или даже аппроксимативная производная которой была бы равна $+\infty$ на множестве положительной меры; C-производная также не может быть равна $+\infty$ на множестве положительной меры.

В **главе 2** вводится обобщенное понятие чезаровской производной. С его помощью совершается попытка в весьма общем виде ответить на вопрос: какими именно особенностями определения C_k-производной обусловлено наличие или отсутствие тех или иных свойств?

Конечную разность, определяющая C_k-производную в формуле (2), можно представить в виде

$$C_\varphi \Delta f(x,y) = \frac{\dfrac{1}{y-x} \cdot \displaystyle\int_x^y \varphi\left(\frac{t-x}{y-x}\right) f(t)\,dt - f(x)}{\alpha(y-x)}, \tag{7}$$

где $\varphi(s) = \varphi_k(s) = k(1-s)^{k-1}$, $\alpha = \alpha_k = \displaystyle\int_0^1 s\varphi_k(s)\,ds = \frac{1}{k+1}$.

Однако формула (7) имеет смысл при любых функциях φ, обладающих достаточной гладкостью, а именно, принадлежат классу так называемых VB_k-функций — $(k-1)$-кратных неопределенных интегралов от функций ограниченной вариации. Разумеется, также требуется выполнение условия $\alpha \neq 0$, и желательно, чтобы интеграл от $\varphi(s)$ на отрезке $[0,1]$ был равен 1.

Таким образом, на каждом шаге построения шкалы интегрирования Чезаро–Перрона Беркиля мы можем подменить функцию φ_k на другую функцию весьма общего вида, и получить новое определение понятий предела, непрерывности, производной и, быть может, интеграла Перрона (если удастся обосновать корректность, предъявив соответствующую лемму о монотонности).

Результаты главы 2 состоят в исследовании зависимости свойств определений обобщенных производных Чезаро — "C_φ-производных" — от свойств "ядра усреднения" — функции φ. Так, например, имеет место

Теорема 2.1.8. *Пусть $k \geqslant 1$, и функция $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что*

1) $\varphi \in \mathrm{VB}_k[0,1]$;

2) $\int_0^1 \varphi(s)\,ds = 1$;

3) $\alpha = \int_0^1 s\varphi(s)\,ds \neq 0$;

4) $\varphi(1) = \varphi'(1) = \ldots = \varphi^{(k-2)}(1) = 0$.

Тогда всякая C_k-непрерывная функция является C_φ-непрерывной.

Свойства 1) – 3), как уже отмечалось выше, достаточно естественны для обеспечения корректности определения C_φ-производной и согласованности этого определения с обыкновенной производной на простейших функциях.

Таким образом, общность получаемого определения C_φ-предела и C_φ-непрерывности во многом зависит от скорости убывания функции $\varphi(s)$ при приближении к точке $s = 1$.

Некоторые результаты главы 2 относятся только к неотрицательным функциям φ:

5) $\varphi(s) \geqslant 0$ *для всех* $s \in [0,1]$.

Однако особенно интересными с точки зрения настоящего исследования оказываются свойства производных Чезаро, построенных по функциям φ, обладающих свойством симметрии:

6) $\varphi(s) = \varphi(1-s)$ *для всех* $s \in [0,1]$.

Видно, что C_k-производная является в этом смысле симметричной при $k = 1$ и несимметричной при $k < 1$. Следующие результаты показывают, что все симметричные C_φ-производные обладают интересующими нас свойствами, которые, как мы видели в главе 1, имеются у C_1-производной, но теряются у C_k-производных при $k > 1$:

Теорема 2.2.3. *Пусть функция F имеет аппроксимативную производную F'_{ap} всюду на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}$ и является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[a, b]$, содержащем множество E, а φ удовлетворяет условиям 1) – 4) и 6). Тогда для почти всех $x \in E$ имеют место соотношения*

$$C_\varphi \underline{D} F(x) \leqslant F'_{\text{ap}}(x) \leqslant C_\varphi \overline{D} F(x).$$

Теорема 2.2.5. *Пусть $k \geqslant 1$, φ удовлетворяет условиям 1) – 4) и 6), и C_k-непрерывная функция F такова, что $C_\varphi \underline{D} F(x) > -\infty$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует такое счетное семейство замкнутых множеств $\{H_i\}$, объединение которых совпадает с (a, b), что функция F имеет ограниченную вариацию на каждом из H_i, и для каждого i существует число $K_i \in \mathbb{R}$ такое, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^p$ с концами на H_i имеют место оценки*

$$\sum_{j=1}^{p} \inf_{a_j < x < b_j} \Big(C_\varphi F(a_j, x) - F(a_j) \Big) \geqslant -K_i,$$
$$\sum_{j=1}^{p} \inf_{a_j < x < b_j} \Big(F(b_j) - C_\varphi F(b_j, x) \Big) \geqslant -K_i.$$

Таким образом, в случае симметричной φ C_φ-производные не противоречат аппроксимативной производной, а $C_\varphi P$-мажоранты всегда являются VBG-функциями. Дескриптивная характеристика мажорант, даваемая теоремой 2.2.5, является аналогом леммы 8 из [18] и в некотором смысле оказывается достаточно общей для доказательства теорем типа Марцинкевича.

В **главе 3** рассматривается частный случай конструкции, построенной в главе 2: вводится понятие $C_k^m P$-интеграла — интеграла типа Чезаро–Перрона, основанного на производной, определяемой по формуле (7) ядром усреднения

$$\varphi_k^m(s) = \frac{s^{m-1}(1-s)^{k-1}}{B(m, k)},$$

где $B(m,k)$ есть бета-функция Эйлера. Это семейство функций удовлетворяет условиям 1) – 5) и содержит в качестве частного случая (при $m=1$) классическое чезаровское ядро усреднения $\varphi_k = \varphi_k^1$.

С другой стороны, при $m = k$ функция φ_k^m удовлетворяет также и условию 6), то есть является симметричным ядром усреднения, что дает нам возможность применять к $C_k^k P$-мажорантам и минорантам теоремы 2.2.3 и 2.2.5.

Однако для того, чтобы вывести из этих теорем свойства классического интеграла Беркиля, требуется исследовать взаимосвязь между $C_k^m P$-интегралами с различными m. С этой целью доказываются следующие утверждения:

Теорема 3.1.9. *Если $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и функция F является C_k-непрерывной в окрестности точки x, то имеют место соотношения*

$$C_k^{m+1}\underline{D}_- F(x) \leqslant C_k^m \underline{D}_- F(x) \leqslant C_k^m \overline{D}_- F(x) \leqslant C_k^{m+1}\overline{D}_- F(x),$$
$$C_k^{m+1}\underline{D}_+ F(x) \leqslant C_k^m \underline{D}_+ F(x) \leqslant C_k^m \overline{D}_+ F(x) \leqslant C_k^{m+1}\overline{D}_+ F(x).$$

Лемма 3.2.9. *Пусть $k \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$, и функции Ψ, ψ на отрезке $[a,b]$ таковы, что $C_k^m \underline{D}\Psi(x) > C_k^m \overline{D}\psi(x)$. Тогда существуют такие функции Ψ_*, ψ_* на $[a,b]$, что*

$$C_k^{m+1}\overline{D}\psi_*(x) \leqslant C_k^m \overline{D}\psi(x) < C_k^m \underline{D}\Psi(x) \leqslant C_k^{m+1}\underline{D}\Psi_*(x),$$

и при этом

$$\Big(\Psi_*(b) - \Psi_*(a)\Big) - \Big(\psi_*(b) - \psi_*(a)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{2k}{m} + 1\right)\Big(\Psi(b) - \Psi(a)\Big) - \Big(\psi(b) - \psi(a)\Big).$$

Из теоремы 3.1.9 следует, что C_k^m-производная оказывается все менее и менее общей при увеличении m. Таким образом, класс $C_k^m P$-мажорант является подклассом класса $C_k P$-мажорант, и всякая $C_k^m P$-интегрируемая функция является $C_k P$-интегрируемой с тем же значением интеграла.

Из леммы 3.2.9, напротив, следует, что как только у нас имеется пара из $C_k P$-мажоранты и $C_k P$-миноранты — то всегда можно построить достаточно близкие $C_k^m P$-мажоранту и $C_k^m P$-миноранту. Таким образом, $C_k^m P$-интеграл эквивалентен $C_k P$-интегралу при всех $m \geqslant 1$.

Более того, из леммы 3.2.9 также видно, что теорема Марцинкевича для $C_k^m P$-интеграла эквивалентна теореме Марцинкевича для $C_k P$-интеграла, несмотря на то, что классы мажорант и минорант в определениях этих интегралов, вообще говоря, не совпадают.

В **главе 4** получены основные положительные результаты диссертации. Первым из них является непротиворечие $C_k P$-интеграла и широкого интеграла Данжуа:

Теорема 4.2.5. *Если $k \geqslant 1$ и функция f является одновременно C_kP-интегрируемой на отрезке $[a,b]$ с неопределенным C_kP-интегралом F_1 и D-интегрируемой на $[a,b]$ с неопределенным D-интегралом F_2, то функция $H(x) = F_1(x) - F_2(x)$ является постоянной на всем $[a,b]$.*

Из этой теоремы выводится теорема типа Валле-Пуссена для широкого интеграла Данжуа:

Теорема 4.2.6. *Пусть $k \geqslant 0$ и некоторый тригонометрический ряд ограничен в смысле Чезаро (C,k) всюду на $[-\pi,\pi]$ вместе с сопряженным рядом и суммируется методом Чезаро (C,k) почти всюду к некоторой D-интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ функции f. Тогда коэффициенты этого тригонометрического ряда вычисляются по функции f по формулам Фурье, в которых интеграл понимается как D-интеграл.*

Вторым основным результатом является теорема типа Марцинкевича для C_kP-интеграла.

Теорема 4.3.1. *Пусть $k \geqslant 1$, и у функции f, измеримой по Лебегу на отрезке $[a,b]$, есть хотя бы одна C_kP-мажоранта Ψ и хотя бы одна C_kP-миноранта ψ на $[a,b]$. Тогда f является C_kP-интегрируемой на $[a,b]$.*

Доказательство всех трех теорем этой главы опирается на теоремы 2.2.3 и 2.2.5; несмотря на то, что в силу примеров из главы 1 они не применимы непосредственно к C_kP-интегралу, мы можем применить их к C_k^mP-интегралу, во всяком случае, при $m = k$, а затем, пользуясь теоремой 3.1.9 и леммой 3.2.9, перенести полученные результаты на C_kP-интеграл.

Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора [37, 38, 39, 40, 41], из которых две — в журналах из перечня ВАК.

Автор выражает огромную благодарность научному руководителю профессору Валентину Анатольевичу Скворцову за постановку задачи, многочисленные плодотворные обсуждения и моральную поддержку.

Глава 1

Некоторые особенности конструкции Беркиля

В данной главе мы введем необходимые обозначения, напомним определение C_kP-интеграла Беркиля

$$(C_kP)\int_a^b f(x)\,dx$$

и рассмотрим ряд особенностей этого определения.

1.1 Определение C_kP-интеграла

Шкала дифференцирования и интегрирования Чезаро–Перрона, построенная Беркилем, представляет собой последовательность определений предела, непрерывности, производной и интеграла, занумерованную целым неотрицательным параметром k.

Построение шкалы традиционно ведется индукцией по k, причем для введения и обоснования корректности каждого следующего уровня определений используются аналогичные факты, установленные для предыдущего уровня.

Базой индукции, соответствующей $k = 0$, служат классические понятия предела, непрерывности и дифференцируемости, и классический интеграл Перрона.

Определение 1.1.1. Пусть действительная функция f определена на отрезке $[a, b]$. Тогда функция Ψ называется *непрерывной перроновской мажорантой* (или *C_0P-мажорантой*) для функции f на $[a, b]$, если Ψ непрерывна на $[a, b]$, и ее нижняя производная $\underline{D}\Psi(x) > f(x)$ при $x \in (a, b)$, а в концах отрезка $[a, b]$ имеем соответствующие неравенства для односторонних производных чисел: $\underline{D}_+\Psi(a) > f(a)$ и $\underline{D}_-\Psi(b) > f(b)$. Функция ψ называется *непрерывной перроновской минорантой* (*C_0P-минорантой*) для f на $[a,b]$, если $-\psi$ есть непрерывная перроновская мажоранта для $-f$ на $[a,b]$.

Определение 1.1.2. Функция f называется *интегрируемой по Перрону* (*C_0P-интегрируемой*) на отрезке $[a,b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие C_0P-мажоранта Ψ и C_0P-миноранта ψ для f на $[a,b]$, что

$$\Big(\Psi(b) - \Psi(a)\Big) - \Big(\psi(b) - \psi(a)\Big) < \varepsilon.$$

При этом под *интегралом в смысле Перрона* функции f на $[a,b]$ понимается общая грань, к которой могут сколь угодно приближаться приращения мажоранты и миноранты функции f:

$$(C_0P)\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{\Psi}\Big(\Psi(b) - \Psi(a)\Big) = \sup_{\psi}\Big(\psi(b) - \psi(a)\Big).$$

Замечание 1.1.3. Очевидно, что если в определении 1.1.1 заменить строгое неравенство нестрогим, то мы получим эквивалентное определение интеграла Перрона. Действительно, если $\underline{D}\Psi(x) \geqslant f(x) \geqslant \overline{D}\psi(x)$ и $(\Psi(b) - \Psi(a)) - (\psi(a) - \psi(b)) < \varepsilon/2$, то для функций $\Psi^*(x) = \Psi(x) + \varepsilon x/4$ и $\psi^*(x) = \psi(x) - \varepsilon x/4$ имеют место оценки $\underline{D}\Psi^*(x) \geqslant f(x) \geqslant \overline{D}\psi^*(x)$ и $(\Psi^*(b) - \Psi^*(a)) - (\psi^*(a) - \psi^*(b)) < \varepsilon$. Менее очевидно, что требование непрерывности функций Ψ и ψ в определении 1.1.1 также можно опустить [26, §VIII.3].

Перейдем к шагу индукции. Пусть $k > 0$, и понятие $C_{k-1}P$-интеграла уже определено. $(\Psi(b) - \Psi(a)) - (\psi(a) - \psi(b)) < \varepsilon/2$

Определение 1.1.4. Пусть функция f определена всюду на отрезке, соединяющем две различные точки $x, y \in \mathbb{R}$, и $C_{k-1}P$-интегрируема на этом отрезке. Введем обозначения:

$$C_k f(x,y) = \frac{1}{y-x} \cdot (C_{k-1}P)\int_x^y \varphi_k\left(\frac{t-x}{y-x}\right) f(t)\,dt,$$

$$C_k\Delta f(x,y) = \frac{C_k f(x,y) - f(x)}{(y-x)/(k+1)},$$

где $\varphi_k(s) = k(1-s)^{k-1}$. Назовем эти выражения *C_k-средним* и *C_k-приращением* функции f (от точки x до точки y) соответственно.

Функции $\varphi_k(t)$ — "ядра усреднения", соответствующие порядку усреднения k — монотонно убывают на $[0,1]$ все быстрее и быстрее с ростом k, как показано на рисунке 1.1. Это означает, что при увеличении k все больший вес начинают иметь значения функции $f(t)$ при t близких к x. Ввиду равенства

$$\int_x^y \varphi_k\left(\frac{t-x}{y-x}\right)\,dt = \int_0^1 \varphi_k(s)\,ds = 1,$$

выражение $C_kF(x,y)$ действительно представляет собой некоторое усреднение функции F на отрезке $[x,y]$; в частности, если $F(t) \equiv 1$, то $C_kF(x,y) \equiv 1$.

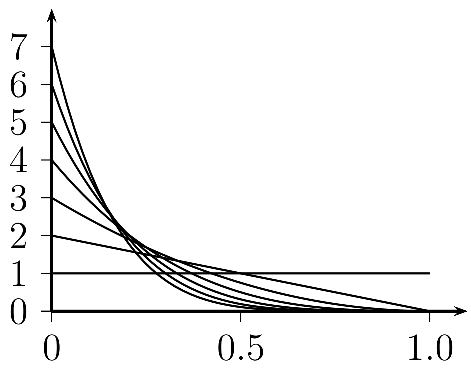

Рисунок 1.1: Графики функций $\varphi_k(s)$ при $s \in [0,1]$, $k = 1, 2, \ldots, 7$.

Множитель в знаменателе выражения $C_k\Delta F(x,y)$ есть ни что иное как

$$\int_0^1 s\varphi_k(s)\,ds = \frac{1}{k+1}.$$

Именно при этом значении множителя имеем $C_k\Delta F(x,y) \equiv 1$ при $F(t) = t$.

Определение 1.1.5. Под C_k-*пределом* функции $f(y)$ при $y \to x$ мы будем понимать выражение

$$(C_k)\lim_{y\to x} f(y) = \lim_{y\to x} C_kf(x,y).$$

Будем говорить, что функция f является C_k-*непрерывной* в точке x, если

$$(C_k)\lim_{y\to x} f(y) = f(x).$$

C_k-*производной* функции f в точке x будем называть предел

$$C_kDf(x) = \lim_{y\to x} C_k\Delta f(x,y).$$

Будем также использовать обозначения для нижних и верхних производных:

$$C_k\underline{D}f(x) = \varliminf_{y\to x} C_k\Delta f(x,y), \quad C_k\overline{D}f(x) = \varlimsup_{y\to x} C_k\Delta f(x,y),$$

и для четырех производных чисел:

$$C_k\underline{D}_-f(x)=\varliminf_{y\to x-}C_k\Delta f(x,y),\quad C_k\overline{D}_-f(x)=\varlimsup_{y\to x-}C_k\Delta f(x,y),$$
$$C_k\underline{D}_+f(x)=\varliminf_{y\to x+}C_k\Delta f(x,y),\quad C_k\overline{D}_+f(x)=\varlimsup_{y\to x+}C_k\Delta f(x,y),$$

Для единообразия будем называть обыкновенный предел C_0-*пределом*, непрерывные в обычном смысле функции C_0-*непрерывными*, а обыкновенную производную C_0-*производной*.

Пример 1.1.6. Класс C_1-непрерывных функций совпадает с классом точных производных. Например, если $F(x)=x^3\sin(1/x^3)$, то функция $f(x)=F'(x)$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$ является C_1-непрерывной (но не непрерывной в обычном смысле, т.е. не C_0-непрерывной) в точке $x=0$. При этом F является неопределенным C_0P-интегралом от функции f. Более того, функция $f(x)$ в точке $x=0$ имеет C_1-производную, равную нулю:

$$C_1\Delta f(0,x)=\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt}{x/2}=\frac{F(x)}{x^2/2}=2x\sin\frac{1}{x^3}\xrightarrow[x\to 0]{}0.$$

Замечание 1.1.7. Равенство $C_kDf(x)=(C_k)\lim\limits_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, вообще говоря, неверно.

Определение 1.1.8. Пусть действительная функция f определена на отрезке $[a,b]$. Тогда функция Ψ называется C_kP-*мажорантой* для функции f на $[a,b]$, если Ψ является C_k-непрерывной функцией на $[a,b]$ и $C_k\underline{D}\Psi(x)>f(x)$ при $x\in(a,b)$, $C_k\underline{D}_+\Psi(a)>f(a)$ и $C_k\underline{D}_-\Psi(b)>f(b)$. Функция ψ называется C_kP-*минорантой* для f на $[a,b]$, если $-\psi$ есть C_kP-мажоранта для функции $-f$ на $[a,b]$.

Как и в определении 1.1.1, неравенства в этом определении можно заменить на нестрогие.

Определение 1.1.9. Функция f называется C_kP-*интегрируемой* на отрезке $[a,b]$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существуют такие C_kP-мажоранта Ψ и C_kP-миноранта ψ для f на $[a,b]$, что

$$\Big(\Psi(b)-\Psi(a)\Big)-\Big(\psi(b)-\psi(a)\Big)<\varepsilon.$$

При этом под C_kP-*интегралом* функции f на $[a,b]$ понимается общая грань, к которой могут сколь угодно приближаться приращения мажоранты и миноранты функции f:

$$(C_kP)\int_a^b f(x)\,dx=\inf_{\Psi}\Big(\Psi(b)-\Psi(a)\Big)=\sup_{\psi}\Big(\psi(b)-\psi(a)\Big).$$

Прежде чем завершить построение шкалы интегрирования Беркиля, необходимо обсудить корректность введенных определений. Так, имеет место следующая теорема о монотонности:

Теорема 1.1.10 (Беркиль[5, теорема 2.2]). *Пусть* $k \geqslant 0$ *и* C_kP-*непрерывная функция* F *такова, что* $C_k\underline{D}F(x) \geqslant 0$ *при* $x \in [a, b]$. *Тогда* F *есть неубывающая функция на* $[a, b]$.

Из этой теоремы следует, что в определениях 1.1.2 и 1.1.9 функция $F = \Psi - \psi$ является неубывающей:

$$C_k\underline{D}F(x) = \varliminf_{y\to x}\Big(C_k\Delta\Psi(x, y) - C_k\Delta\psi(x, y)\Big) \geqslant$$
$$\geqslant C_k\underline{D}\Psi(x) - C_k\overline{D}\psi(x) > f(x) - f(x) = 0.$$

Благодаря этому имеем $\Psi(b) - \Psi(a) \geqslant \psi(b) - \psi(a)$ для любой C_kP-мажоранты Ψ и C_kP-миноранты ψ. Отсюда следует однозначная определенность C_kP-интеграла для любой C_kP-интегрируемой функции на любом отрезке.

Проговорим еще несколько очевидных свойств C_kP-интеграла. Очевидно, что если функции f и g являются C_kP-интегрируемыми на $[a, b]$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ также будет C_kP-интегрируемой. Мажорантами и минорантами в этом случае будут служить подходящие линейные комбинации мажорант и минорант функций f и g.

Отметим также, что если функция f является C_kP-интегрируемой на $[a, b]$, то она C_kP-интегрируема и на любом подотрезке $[c, d] \subset [a, b]$, ведь любые мажоранты и миноранты на $[a, b]$ служат также мажорантами и минорантами на $[c, d]$. Напротив, если функция f интегрируема на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$, то она интегрируема и на $[a, c]$, поскольку подходящие мажоранты и миноранты на $[a, c]$ можно получить, склеивая мажоранты и миноранты на $[a, b]$ и $[b, c]$. Таким образом, вместе с каждой C_kP-интегрируемой функцией на некотором отрезке $[a, b]$ можно говорить о *неопределенном* C_kP-*интеграле* функции f:

$$F(x) = (C_kP)\int_a^x f(t)\,dt + C,$$
$$(C_kP)\int_c^d f(t) = F(d) - F(c) \text{ при } [c, d] \subset [a, b].$$

При этом если существует такая функция F, что $C_kDF(x) = f(x)$ всюду на $[a, b]$, то F является неопределенным C_kP-интегралом для функции f на $[a, b]$, ведь для любого $\varepsilon > 0$ функции $\Psi(x) = F(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}x$ и $\psi(x) = F(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}x$ являются достаточно близкими мажорантами и минорантами для f.

Следуя [5], отметим также, что неопределенный C_kP-интеграл всегда C_k-непрерывен, и его C_k-производная почти всюду по мере Лебега совпадает с подынтегральной функцией. В частности, неопределенный C_kP-интеграл $C_{k-1}P$-интегрируем на $[a,b]$.

Наконец, существование интеграла в определении 1.1.4 для любой $C_{k-1}P$-интегрируемой функции f доказывается при помощи теоремы об интегрировании по частям. Чтобы ее сформулировать, нам потребуется понятие k-выпуклых функций.

Определение 1.1.11. Пусть $k > 2$ — натуральное число и f — действительная функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Будем говорить, что функция f является *k-выпуклой вниз* (*вверх*), если ее обыкновенная $(k-2)$-ая производная выпукла вниз (соответственно, вверх) на $[a,b]$. Для единообразия будем называть все выпуклые вниз (вверх) функции 2-*выпуклыми* вниз (вверх), а монотонно убывающие (возрастающие) функции — 1-*выпуклыми* вниз (*вверх*). Также при всех целых положительных k обозначим символом $\mathrm{VB}_k[a,b]$ множество всех функций, представимых в виде разности двух k-выпуклых функций.

Другими словами, функции класса VB_k есть $(k-1)$-кратные неопределенные интегралы от обыкновенных функций ограниченной вариации. Более глубокое исследование свойств k-выпуклых функций и VB_k-функций производилось в работе [33].

Теорема 1.1.12 (Беркиль[5, теорема 5])**.** *Пусть $k \geqslant 1$, функция f является C_kP-интегрируемой на отрезке $[a,b]$, функция F есть неопределенный C_kP-интеграл f, а функция $G(x)$ принадлежит классу $\mathrm{VB}_{k+1}[a,b]$. Тогда произведение $f \cdot G$ также имеет C_kP-интегрирал на $[a,b]$, равный*

$$(C_kP)\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - (C_{k-1}P)\int_a^b F(x)G'(x)\,dx. \tag{1.1.1}$$

Замечание 1.1.13. Эта теорема в случае $k = 0$ также имеет место, если заменить интеграл в правой части на интеграл Римана–Стилтьеса:

$$(C_0P)\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)\,dG(x). \tag{1.1.2}$$

В таком виде данная формула устанавливается, например, в [26, §VIII.2].

Из теоремы 1.1.12 следует существование интеграла в определении 1.1.4, ведь функция f является $C_{k-1}P$-интегрируемой, а функции $\varphi_k\left(\frac{t-x}{y-x}\right)$, очевидно, принадлежат классу $\mathrm{VB}_k[x,y]$. Здесь не возникает проблем, поскольку, давая определение C_k-среднего, мы пользуемся этой теоремой лишь для $(k-1)$.

Наконец, отметим, что при увеличении k определения предела, непрерывности, производной и интеграла получаются все более общими, оставаясь, тем не менее, согласованными с предыдущими определениями. А именно, имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.1.14 (Беркиль[5, теорема 2.1]). *Пусть $k \geqslant 1$ и функция f является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[a,b]$. Тогда f является также C_kP-интегрируемой на $[a,b]$ с тем же значением интеграла, и для любой точки $x \in (a,b)$ и имеют место неравенства*

$$C_k\underline{D}f(x) \leqslant C_{k+1}\underline{D}f(x) \leqslant C_{k+1}\overline{D}f(x) \leqslant C_k\overline{D}f(x) \tag{1.1.3}$$

Поскольку также известно, что всякая интегрируемая по Лебегу функция является также C_0P-интегрируемой с тем же значением интеграла [26, гл. VI, теорема 3.2], мы можем утверждать, что все C_kP-интегралы являются более общими, чем интеграл Лебега, и не противоречат ему.

В дальнейшем, когда это не будет приводить к путанице, мы будем опускать упоминание об используемом определении интеграла и писать просто

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

подразумевая, что здесь используется понятие C_kP-интеграла для некоторого $k \geqslant 0$, для которого данное выражение заведомо имеет смысл. В частности, придадим смысл средним и разностям порядка k от функций, интегрируемых *хотя бы в каком-нибудь* смысле:

Определение 1.1.15. Пусть $k, l \geqslant 1$ — целые числа, и функция f является $C_{l-1}P$-интегрируемой. Тогда определим понятия C_k-среднего $C_kf(x,y)$ и C_k-приращения $C_k\Delta f(x,y)$ как в определении 1.1.4, используя $C_{l-1}P$-интеграл вместо $C_{k-1}P$-интеграла:

$$C_kf(x,y) = \frac{1}{y-x} \cdot (C_{l-1}P)\int_x^y \varphi_k\left(\frac{t-x}{y-x}\right) f(t)\,dt,$$

$$C_k\Delta f(x,y) = \frac{C_kf(x,y) - f(x)}{(y-x)/(k+1)}.$$

Подобный подход корректен в силу теоремы 1.1.12, так как все функции φ_k принадлежат классу VB_l при всех $l > 0$, и позволяет придать смысл выраженям $C_kf(x,y)$ и $C_k\Delta f(x,y)$ независимо от используемого определения интеграла и свойств функции f, что не приводит к путанице ввиду теоремы 1.1.14.

Мы будем часто пользоваться следующим простым следствием из теоремы 1.1.12:

Лемма 1.1.16. *Если $k \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ и функция F является C_kP-интегрируемой на отрезке $[a,b]$, то*

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t)\,dt = \int_a^b \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} F(x_n)\,dx_n \dots dx_2\,dx_1. \tag{1.1.4}$$

1.2 Связь с производными Пеано

Установим еще одно важное следствие из формулы (1.1.1) — мощный вариант формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Следующая теорема обычно устанавливается для $l = k$ (как, например, в работе [23]). Но в дальнейшем, а именно в процессе доказательства леммы 2.1.3, нам потребуется использовать ее при различных значениях l.

Теорема 1.2.1. *Пусть функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[x, x+h]$ для некоторого $k \geqslant 1$, $F_0 = F$, F_1 — неопределенный $C_{k-1}P$-интеграл от F_0, F_2 — неопределенный $C_{k-2}P$-интеграл от F_1, и т.д. Тогда для всех $l \geqslant 1$ имеет место равенство*

$$F_l(x+h) = \sum_{j=0}^{l} F_{l-j}(x)\frac{h^j}{j!} + C_l\Delta F(x, x+h)\frac{h^{l+1}}{(l+1)!}. \tag{1.2.1}$$

Доказательство. Заметим, что

$$C_l\Delta F(x, x+h)\frac{h^{l+1}}{(l+1)!} = \Big(C_lF(x, x+h) - F(x)\Big)\frac{h^l}{l!}.$$

Таким образом, формулу (1.2.1) можно переписать в виде

$$C_lF(x, x+h) = \frac{F_l(x+h) - F_l(x) - \sum\limits_{j=1}^{l-1} F_{l-j}(x)\frac{h^j}{j!}}{h^l/l!}. \tag{1.2.2}$$

При $l = 1$ формула (1.2.2) принимает вид тождества

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)\,dt = \frac{F_1(x+h) - F_1(x)}{h}.$$

Предположим, что формула (1.2.2) доказана для $l-1$, и докажем ее для l. Поскольку $\varphi_l'(t) = -l\varphi_{l-1}(t)$, а также $\varphi_l(1) = 0$ и $\varphi_l(0) = l$ при $l > 1$, по формуле 1.1.1 имеем

$$\begin{aligned} C_l F(x,x+h) &= \frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h}\varphi_l\left(\frac{t-x}{h}\right)F(t)\,dt = \\ &= -\frac{l}{h}F_1(x)+\frac{l}{h}\cdot\int_x^{x+h}\varphi_{l-1}\left(\frac{t-x}{h}\right)F_1(t)\,dt = \\ &= -\frac{l}{h}F_1(x)+\frac{l}{h}\cdot C_{l-1}F_1(x,x+h). \end{aligned}$$

Поскольку функция F_1 является $C_{l-2}P$-интегрируемой на $[x,x+h]$, мы можем применить предположение индукции к функции F_1:

$$\begin{aligned} C_l F(x,x+h) &= -\frac{l}{h}F_1(x)+\frac{l}{h}\cdot\frac{F_l(x+h)-F_l(x)-\sum\limits_{j=1}^{l-2}F_{l-j}(x)\frac{h^j}{j!}}{h^{(l-1)}/(l-1)!} = \\ &= \frac{F_l(x+h)-F_l(x)-\sum\limits_{j=1}^{l-1}F_{l-j}(x)\frac{h^j}{j!}}{h^l/l!}, \end{aligned}$$

а это и есть формула (1.2.2). □

Теорема 1.2.1 устанавливает также тесную связь между C_k-производными и производными Пеано. Приведем соответствующие определения.

Определение 1.2.2. Если для действительной функции f, определенной в некоторой окрестности точки x, при $h\to 0$ имеет место оценка

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\frac{h^j}{j!}+o(h^k), \tag{1.2.3}$$

где α_j зависят лишь от x, но не от h, то говорят, что функция f имеет *производную в смысле Пеано порядка* k в точке x, обозначаемую $f_{(k)}(x)$ и равную α_k.

Очевидно, что если имеет место равенство 1.2.3, то при всех $j=1,\ldots,k$ верно также равенство $f_{(j)}(x)=\alpha_j$.

Определение 1.2.3. Пусть функция f имеет производную Пеано порядка k в точке x. Тогда *нижняя* (*верхняя*) *производная в смысле Пеано порядка* $(k+1)$ функции f в точке x определяется как нижний (верхний) предел при $h\to 0$ выражения

$$\Delta_{(k+1)}f(x,x+h)=\frac{f(x+h)-f(x)-\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{h^j}{j!}f_{(j)}(x)}{h^{k+1}/(k+1)!}$$

и обозначаются символами $\underline{f}_{(k+1)}(x)$ и $\overline{f}_{(k+1)}(x)$ соответственно.

Теорема 1.2.1 фактически утверждает, что для всякой $C_{k-1}P$-интегрируемой функции F имеет место равенство $C_kF(x,y) = \Delta_{(k)}F_k(x,y)$, C_k-непрерывность любой $C_{k-1}P$-интегрируемой функции F эквивалентна существованию k-й производной Пеано у непрерывной функции F_k, и для всякой C_k-непрерывной функции F имеет место равенство $C_k\Delta F(x,y) = \Delta_{(k+1)}F_k(x,y)$.

Можно дать эквивалентное определение C_kP-интеграла при помощи производных Пеано, как показано в [6, §8].

Отметим еще одно простое следствие из теоремы 1.2.1.

Теорема 1.2.4. *Если $k \geqslant 1$ и F является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[a,b]$, то и сама функция F, и функции $C_k\underline{D}_+F(x)$, $C_k\underline{D}_-F(x)$, $C_k\overline{D}_+F(x)$, $C_k\overline{D}_-F(x)$ являются измеримыми по Лебегу на $[a,b]$.*

Доказательство. Действительно, если функции F_l определены как в теореме 1.2.1, то функции F_l являются $C_{k-l-1}P$-интегрируемыми (при $l \geqslant k$ — непрерывными) и потому измеримыми, а так как $C_{k-1}DF_1(x) = F(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то и сама F измерима.

Докажем измеримость $C_k\underline{D}_+F(x)$. Тогда из (1.2.1) видно, что функция двух переменных $C_k\Delta F_k(x,x+h)$ непрерывна по $h \in (0,H)$ при всех $x \in [a,b)$ для всех $H > 0$ таких, что $x + H < b$. Поэтому имеем

$$C_k\underline{D}_+F(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{h\in\left(0,\frac{1}{n}\right)\cap\mathbb{Q}} C_k\Delta F(x,x+h)\right).$$

Из (1.2.1) и измеримости F_l также видно, что функция $C_k\Delta F(x,x+h)$ измерима как функция $x \in [a,b']$ при всех $h < b - b'$. Таким образом, на любом отрезке $[a,b']$, где $a < b' < b$, а следовательно и на всем $[a,b]$ функция $C_k\underline{D}_+F(x)$ измерима как предел последовательности счетных точных нижних граней измеримых функций. Три других производных числа рассматриваются аналогично. $\square$

1.3 Некоторые примеры C_kP-мажорант

В этой главе мы приведем два примера, показывающих, что, в отличие от частных случаев $k = 0$ и $k = 1$, мажорантные и минорантные функции в смысле C_kP при $k \geqslant 2$ не обязаны обладать рядом удобных свойств.

Сначала установим несколько вспомогательных фактов.

Определение 1.3.1 (см.[26]). Будем говорить, что функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* VBG на отрезке $[a,b]$, если существует такой не более чем счетный набор множеств $E_n \subset [a,b]$, что $\bigcup_n E_n = [a,b]$ и f имеет ограниченную вариацию на каждом из E_n.

Лемма 1.3.2. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и принадлежит классу* VBG *на $[a, b]$, то f имеет производную хотя бы в одной точке $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть E_n — множества из определения 1.3.1. Поскольку f непрерывна, она будет также иметь ограниченную вариацию на замыканиях E_n [26, §VII.4], поэтому множество E_n можно предполагать замкнутыми. Но тогда, согласно теореме Бэра, хотя бы одно из этих множеств целиком содержит некоторый отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Функция f на $[\alpha, \beta]$ имеет ограниченную вариацию и, следовательно, дифференцируема почти всюду. □

Определение 1.3.3. Будем говорить, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* Lip_α на отрезке $[a, b]$, если существует константа $A > 0$, такая, что для любых $x, y \in [a, b]$ имеет место оценка $|f(y) - f(x)| \leqslant A|y - x|^\alpha$.

Лемма 1.3.4. *Для всякого $\alpha \in (0, 1)$ существует функция f класса* Lip_α *на $[0, 1]$, не принадлежащая классу* VBG *на $[0, 1]$.*

Доказательство. Согласно [34, т.I, теорема II.4.9] и [35, теорема 1.31], в классе Lip_α содержатся нигде не дифференцируемые на $[0, 1]$ функции. По лемме 1.3.2 они не могут принадлежать классу VBG. □

В [26, §VII.10] показано, что всякая функция, нижняя производная которой (в обычном смысле) больше $-\infty$ всюду на некотором отрезке, принадлежит классу VBG на этом отрезке. В [18, лемма 8] доказано, что всякая функция F, такая, что $C_1\underline{D}F(x) > -\infty$ на некотором отрезке, также принадлежит классу VBG на этом отрезке. Покажем, что чезаровские производные более высоких порядков не обладают этим свойством.

Теорема 1.3.5. *Для всякого $k \geqslant 2$ существует функция $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такая, что*

1) *F непрерывна на $[0, 1]$;*

2) *$C_k\underline{D}F(x) > -\infty$ для всех $x \in (0, 1)$;*

3) *F не принадлежит классу* VBG *на $[0, 1]$.*

Доказательство. Ввиду неравенств (1.1.3) достаточно доказать теорему лишь для $k = 2$.

Введем следующие обозначения. Для любого отрезка $[a, b]$ положим $\Delta = \frac{b-a}{2} > 0$, $c = \frac{a+b}{2}$, $\gamma_{[a,b]}(t) = \frac{t-c}{\Delta}$. Очевидно, что $\gamma_{[a,b]}(t) \in [-1, 1]$ тогда и только тогда, когда $t \in [a, b]$. Далее обозначим

$$g(\gamma) = \begin{cases} 1, & |\gamma| \leqslant 1; \\ 0, & |\gamma| > 1. \end{cases} \qquad w(\gamma) = \begin{cases} \gamma^3 - \gamma, & |\gamma| \leqslant 1; \\ 0, & |\gamma| > 1. \end{cases}$$

Непосредственным интегрированием проверяется, что если отрезок $[x, y]$ содержит точку a, то имеют место равенства

$$
\begin{aligned}
C_2\big(g\,(\gamma_{[a,b]})\big)(x,y) &= \frac{2}{h^2}\int_a^{\min\{b,y\}} (y-t)\,dt = \\
&= \begin{cases} 4\frac{\Delta(y-c)}{h^2} & \text{при } y > b, \\ \frac{(y-a)^2}{h^2} & \text{при } y \in [a,b], \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
C_2\big(w\,(\gamma_{[a,b]})\big)(x,y) &= \frac{2}{h^2}\int_a^{\min\{b,y\}} \left[\left(\tfrac{t-c}{\Delta}\right)^3 - \left(\tfrac{t-c}{\Delta}\right)\right](y-t)\,dt = \\
&= \begin{cases} \frac{8}{15}\frac{\Delta^2}{h^2} & \text{при } y > b, \\ P(\gamma_{[a,b]}(y))\frac{(y-a)^3}{\Delta h^2} & \text{при } y \in [a,b], \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.3.2}
$$

где $h = y - x$, и $P(\gamma) = \frac{1}{10}\gamma^2 - \frac{3}{10}\gamma + \frac{4}{15} \geqslant \frac{1}{24} = p > 0$. В частности, такие C_2-средние всегда положительны, что естественно, так как C_2-среднее несимметрично относительно середины отрезка усреднения: при $x < y$ точки слева имеют больший вес — см. рисунок 1.2.

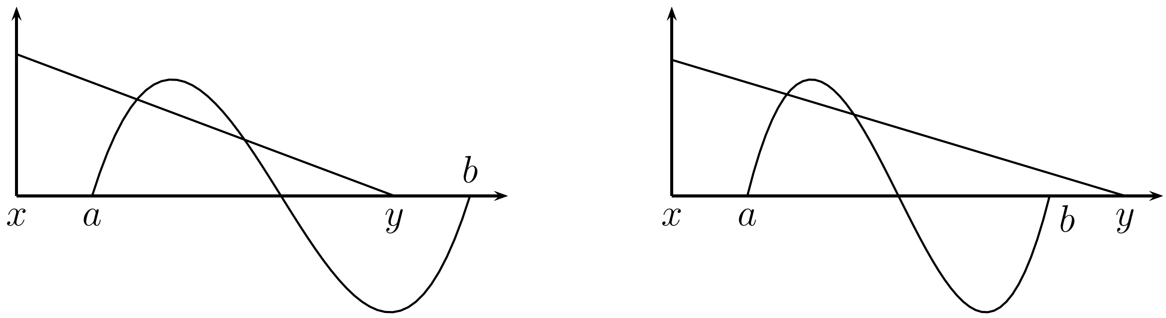

Рисунок 1.2: Графики ядра усреднения $\varphi_2\left(\frac{t-y}{x-y}\right)$ и усредняемой функции $w(\gamma_{[a,b]})(t)$ для различных взаимных расположений точек b и y.

Пусть теперь K — симметричное совершенное множество меры нуль на $[0,1]$, у которого смежные интервалы n-го ранга $I_n^m = [a_n^m, b_n^m]$, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, имеют длину $|I_n^m| = 2\Delta_n = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n$. Обозначим также $c_n^m = \frac{1}{2}(a_n^m + b_n^m)$.

Определим функцию

$$
W(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{n} w\left(\gamma_{[a_n^m, b_n^m]}(t)\right), \tag{1.3.3}
$$

которая равна нулю на K и имеет волну высоты $1/n$ на каждом из интервалов I_n^m. Ясно, что W непрерывна и принадлежит классу VBG на $[0,1]$.

Пусть H — канторова лестница, соответствующая множеству K. Функция H непрерывна и равна $\frac{2m-1}{2^n}$ на I_n^m. Также ясно, что H принадлежит классу $\mathrm{Lip}_{\log_{9/4} 2}$. Пусть A_1 — константа A из определения 1.3.3 для H.

Пусть f — какая-нибудь функция, принадлежащая классу $\mathrm{Lip}_{0{,}8/\log_{9/4}2}$, но не принадлежащая классу VBG на $[0,1]$; такие функции существуют по лемме 1.3.4, так как $0{,}8/\log_{9/4}2<1$. Пусть A_2 — константа A из определения 1.3.3 для f.

Тогда при $x,y\in[0,1]$ имеем

$$\Big|f\big(H(y)\big)-f\big(H(x)\big)\Big|\leqslant A_2\Big|H(y)-H(x)\Big|^{\frac{0{,}8}{\log_{9/4}2}}\leqslant A_2A_1^{\frac{0{,}8}{\log_{9/4}2}}|y-x|^{0{,}8}$$

Положим

$$G(t)=\frac{f\big(H(t)\big)}{A_2A_1^{\frac{0{,}8}{\log_{9/4}2}}}.$$

Ясно, что функция G непрерывна и не принадлежит классу VBG на $[0,1]$, так как вариация G на любом множестве $E\subset[0,1]$ совпадает с вариацией f на $H(E)$ с точностью до постоянного множителя, и при $x,y\in[0,1]$ имеем

$$\Big|G(y)-G(x)\Big|\leqslant|y-x|^{0{,}8}. \tag{1.3.4}$$

С другой стороны, при $t\notin K$, т.е. почти всюду на $[0,1]$, имеет место представление

$$G(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2^{n-1}}G_n^m g\left(\gamma_{[a_n^m,b_n^m]}(t)\right), \tag{1.3.5}$$

где G_n^m есть постоянное значение G на I_n^m.

Наконец, рассмотрим функцию $F(t)=G(t)+W(t)$. Эта функция непрерывна, не принадлежит классу VBG на $[0,1]$, и имеет конечную производную вне K. Докажем, что при $x\in K$ и достаточно малых $h\neq0$ выполняется оценка

$$\frac{C_2F(x,x+h)-F(x)}{h/3}\geqslant-L|h|^{0{,}12},$$

где L — некая положительная числовая константа. Из этой оценки будет следовать, что $C_2\underline{D}F(x)\geqslant0$ при $x\in K$. Мы рассмотрим лишь случай $h>0$ (это имеет смысл лишь при $x\neq1$); случай $h<0$ рассматривается аналогично.

Итак, пусть $x\in K$, $y\in(x,1)$, $h=y-x$. В случае $y\notin K$ положим $z=\max([x,y]\cap K)=a_\nu^\mu$, где μ и ν таковы, что $y\in I_\nu^\mu$, а если $y\in K$, то положим $z=y$. Пусть также число h настолько мало, что

$$\log_{9/4}\frac{1}{8\lambda}\leqslant1/\lambda^{0{,}1} \tag{1.3.6}$$

при всех $\lambda \in (0, h)$.

Тогда по формулам (1.3.3) и (1.3.5) имеем

$$\frac{C_2F(x,y) - F(x)}{h/3} = \frac{3}{h}\Bigg\{ \sum_{\substack{n,m:\\ I_n^m \subset [x,y]}} \bigg[\Big(G_n^m - G(x)\Big) C_2\Big(g\big(\gamma_{[a_n^m, b_n^m]}\big)\Big)(x,y) + \\ + \frac{1}{n}\cdot C_2\Big(w\big(\gamma_{[a_n^m,b_n^m]}\big)\Big)(x,y)\bigg] + \\ + \Big(G_\nu^\mu - G(x)\Big) C_2\Big(g\big(\gamma_{[a_\nu^\mu, b_\nu^\mu]}\big)\Big)(x,y) + \\ + \frac{1}{\nu}\cdot C_2\Big(w\big(\gamma_{[a_\nu^\mu,b_\nu^\mu]}\big)\Big)(x,y)\Bigg\},$$

где последние два слагаемых присутствуют только тогда, когда $y \notin K$. Перестановка суммы и интеграла в данном случае допустима, так как все функции измеримы и ограничены, следовательно, применима теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

При помощи формул (1.3.1) и (1.3.2) получаем

$$\frac{C_2F(x,y) - F(x)}{h/3} = \frac{3}{h^3}\Bigg\{ 4\underbrace{\sum_{\substack{n,m:\\ I_n^m \subset [x,y]}} \Big(G_n^m - G(x)\Big)\Delta_n(y - c_n^m)}_{S_1} + \frac{8}{15}\underbrace{\sum_{\substack{n,m:\\ I_n^m \subset [x,y]}} \frac{\Delta_n^2}{n}}_{S_2} + \\ + \underbrace{\Big(G_\nu^\mu - G(x)\Big)\big(y - z\big)^2}_{S_3} + \underbrace{\frac{P\big(\gamma_{[a_\nu^\mu,b_\nu^\mu]}(y)\big)}{\nu\Delta_\nu}(y-z)^3}_{S_4}\Bigg\} = \\ = \frac{3}{h^3}\Big(4S_1 + \tfrac{8}{15}S_2 + S_3 + S_4\Big),$$

где слагаемые S_3 и S_4 снова присутствует лишь в случае $y \notin K$. Понятно, что слагаемые S_2 и S_4 всегда неотрицательны, а вот слагаемые S_1 и S_3 могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от колебаний функции G.

Для простоты в нижеследующих оценках символом L будет обозначаться некоторая абсолютная числовая константа, возможно, разная в разных формулах.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: существуют такие N и M, что $I_N^M \subset [x,y]$ и $\Delta_N \geqslant 4h^{1,3}$. Тогда, заменяя сумму S_2 лишь на одно слагаемое и пользуясь (1.3.6), получаем

$$\frac{8}{15}S_2 \geqslant \frac{8}{N}h^{2{,}6} = \frac{8}{\log_{9/4}\frac{1}{8\Delta_N}}h^{2{,}6} \geqslant 8\Delta_N^{0{,}1}h^{2{,}6} \geqslant 8h^{2{,}73},$$

в то время как, согласно (1.3.4), и ввиду очевидных оценок $y - c_n^m \leqslant h$ и $y - z \leqslant h$

$$\left|4S_1 + S_3\right| \leqslant 4h^{1{,}8}\left(\sum_{\substack{n,m:\\ I_n^m\subset[x,y]}} \Delta_n + (y-z)\right) = 4h^{2{,}8} \leqslant \frac{8}{15}S_2,$$

так что с учетом $S_4 \geqslant 0$ получаем, что в этом случае разность $C_2F(x,y) - F(x)$ всегда неотрицательна.

Второй случай: для всех n, m, таких, что $I_n^m \subset [x,y]$, имеем $\Delta_n < 4h^{1{,}3}$. Заметим, что всякий отрезок с концами на K обязан содержать в себе смежный интервал K, длина которого составляет не менее $1/9$ длины этого отрезка. Поэтому в этом случае

$$\sum_{\substack{n,m:\\ I_n^m\subset[x,y]}} \Delta_n = z - x \leqslant Lh^{1{,}3},$$

следовательно, исходя из (1.3.4), имеем

$$\left|G_n^m - G(x)\right| \leqslant (z-x)^{0{,}8} \leqslant Lh^{1{,}04}. \tag{1.3.7}$$

Отсюда сразу получаем, что

$$|S_1| \leqslant \sum_{\substack{n,m:\\ I_n^m\subset[x,y]}} \Delta_n(y - c_n^m)\left|G_n^m - G(x)\right| \leqslant Lh^{2{,}04}\sum_{\substack{n,m:\\ I_n^m\subset[x,y]}} \Delta_n \leqslant Lh^{3{,}34}.$$

Теперь оценим снизу $S_3 + S_4$. Если $G_\nu^\mu - G(x) + \frac{p}{\nu\Delta_\nu}(y-z) \geqslant 0$, где $p = \frac{1}{24}$ — минимальное значение квадратного трехчлена $P(\gamma)$ из формулы (1.3.2), то $S_3 + S_4 \geqslant 0$. В противном случае с учетом очевидной оценки $\nu\Delta_\nu < 1$ и формулы (1.3.7) имеем

$$y - z \leqslant \frac{\nu\Delta_\nu}{p}\left|G_\nu^\mu - G(x)\right| \leqslant Lh^{1{,}04}$$

и, снова пользуясь (1.3.7), окончательно находим

$$|S_3| \leqslant Lh^{1{,}04}(h^{1{,}04})^2 = Lh^{3{,}12}.$$

Объединяя оценки для разных случаев, получаем

$$4S_1 + \frac{8}{15}S_2 + S_3 + S_4 \geqslant -Lh^{3{,}34} - Lh^{3{,}12} \geqslant -\frac{Lh^{3{,}12}}{3},$$

откуда

$$\frac{C_2F(x,y)-F(x)}{h/3}=\frac{3}{h^3}\Bigl(4S_1+\frac{8}{15}S_2+S_3+S_4\Bigr)\geqslant -Lh^{0{,}12}.$$

Проделав аналогичную оценку для $h<0$, получаем, что $C_2\underline{D}F(x)\geqslant 0$ при $x\in K$, откуда с учетом дифференцируемости F вне K следует, что $C_2\underline{D}F(x)>-\infty$ всюду на $[0,1]$. □

Для второго примера нам потребуется понятие аппроксимативной производной.

Определение 1.3.6. Точка x называется *точкой внешней плотности* множества $E\subset\mathbb{R}$, если

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mu^*(E\cap[x-h,x+h])}{2h}=1,$$

где μ^* — внешняя мера Лебега. Если множество E измеримо, то его точки внешней плотности E называют просто *точками плотности*.

Лемма 1.3.7 (см.[26, §IV.10])**.** *Почти все точки любого измеримого множества $E\subset\mathbb{R}$ являются его точками плотности.*

Определение 1.3.8. *Аппроксимативной производной* функции F в точке x называется число

$$F'_{\mathrm{ap}}(x)=\lim_{E\ni y\to x}\frac{F(y)-F(x)}{y-x},$$

где E есть любое множество, для которого x — точка плотности.

Ясно, что значение аппроксимативной производной корректно, то есть не зависит от выбора множества E.

Следующий пример показывает, что при $k\geqslant 2$ для C_k-производных не имеют место теоремы типа соотношений Данжуа [26, §IX.4]. Он также показывает, что при $k\geqslant 2$ C_k-производная может противоречить аппроксимативной производной на множествах положительной (и даже полной) меры, что невозможно для C_1-производной [24, леммы 2, 3] (ниже, в теореме 2.2.3, мы также докажем это для более общего класса производных).

Теорема 1.3.9. *Для любого $\alpha\in(0,1)$ и любого натурального $k\geqslant 2$ существует функция $F:[0,1]\to\mathbb{R}$, такая, что*

1) *F принадлежит классу Lip_α на $[0,1]$;*

2) *$C_kDF(x)=+\infty$ почти всюду на $[0,1]$;*

3) $F'_{\mathrm{ap}}(x)$ *существует и конечна почти всюду на* $[0,1]$.

Доказательство. Ввиду неравенств (1.1.3) достаточно доказать теорему лишь для $k=2$.

Пусть K — симметричное совершенное множество меры $\varepsilon = 1 - \frac{\pi^2}{60} > 0$ на $[0,1]$, у которого смежные интервалы n-го ранга $I_n^m = [a_n^m, b_n^m]$, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, имеют длину

$$|I_n^m| = 2\Delta_n = \frac{1}{10 \cdot 2^n n^2} \tag{1.3.8}$$

При доказательстве теоремы 1.3.9 нам потребуется следующее свойство множества K.

Лемма 1.3.10. *Пусть число $h > 0$ настолько мало, что при всех n, таких, что $2^{-n} < h$, имеет место неравенство $\frac{1}{40n^2} > 2^{-0{,}1n}$. Тогда внутри каждого отрезка длины не менее h с концами на K найдется смежный интервал множества K, длина которого составит не менее $h^{1{,}1}$.*

Доказательство. Длина отрезков, из которых состоит множество

$$K^n = [0,1] \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} \bigcup_{m=1}^{2^{\nu-1}} I_\nu^m,$$

очевидно, не превосходит 2^{-n}; если $2^{-n+1} \geqslant h > 2^{-n}$, то никакой отрезок длины h не может целиком содержаться в K^n, и, так как его концы принадлежат K^n, он содержит внутри себя один из интервалов ранга не более n, длина которого составляет, таким образом, не менее

$$\frac{1}{10 \cdot 2^n n^2} \geqslant 2^{-1{,}1n+2} \geqslant h^{1{,}1},$$

что и требовалось. □

Вернемся к доказательству теоремы 1.3.9. Пусть дано $\alpha \in (0,1)$. Определим функцию

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} \Delta_n^\alpha w\left(\gamma_{[a_n^m, b_n^m]}(t)\right), \tag{1.3.9}$$

где w и γ определены как в теореме 1.3.5. Функция W равна нулю на K и имеет волну высоты Δ_n^α на каждом из интервалов I_n^m.

Ясно, что W принадлежит классу Lip_α на $[0,1]$ и дифференцируема вне K, а почти всюду на K (а именно во всех точках плотности K) имеет аппроксимативную производную, равную нулю. Покажем, что $C_2DW(x) = +\infty$ при почти всех $x \in K$. Возьмем любую точку $x \in K$, не являющуюся нулем, единицей или концом какого-либо смежного интервала, зафиксируем произвольное $L > 0$, возьмем $\delta > 0$ настолько малым, что

1) $(x-\delta, x+\delta) \subset (0,1)$,

2) при всех n, таких, что $2^{-n} < \delta$, справедливо неравенство $\frac{1}{40n^2} > 2^{-0{,}1n}$,

3) для всех интервалов I_n^m, длина которых не превосходит δ, имеет место оценка $\frac{1}{n} \geqslant \Delta_n^{0{,}1}$,

4) для всех интервалов I_n^m, пересекающихся с $(x-\delta, x+\delta)$, имеет место оценка $pn2^n > L$, где $p = \frac{1}{24}$ — минимальное значение квадратного трехчлена $P(\gamma)$ из формулы (1.3.2),

5) $10^{-3}\delta^{-0{,}69} > L$,

и покажем, что при $|h| < \delta$ и $h \neq 0$ выполняется оценка

$$\frac{C_2W(x, x+h) - W(x)}{h/3} \geqslant L.$$

Действительно, пусть, скажем, $h > 0$ (случай $h < 0$ рассматривается аналогично), $y = x+h$, и в случае $y \notin K$ положим $z = \max([x,y] \cap K) = a_\nu^\mu$, где ν, μ таковы, что $y \in I_\nu^\mu$; если $y \in K$, то положим $z = y$. Тогда, как и в теореме 1.3.5, по формулам (1.3.9) и (1.3.2) имеем

$$\frac{C_2W(x,y) - W(x)}{h/3} = \frac{3}{h^3}\left(\frac{8}{15}\sum_{\substack{n,m:\\ I_n^m \subset [x,y]}} \frac{\Delta_n^2}{n} + \frac{P\big(\gamma_{[a_\nu^\mu, b_\nu^\mu]}(y)\big)}{\nu\Delta_\nu}(y-z)^3\right), \tag{1.3.10}$$

где последнее слагаемое присутствует только когда $y \notin K$. Заметим также, что все слагаемые в этой сумме неотрицательны.

Как и в теореме 1.3.5, рассмотрим два случая.

Первый случай: $y \notin K$ и $y - z \geqslant h/2$. Тогда ввиду (1.3.8) и п. 4 определения δ имеем

$$\frac{C_2W(x,y) - W(x)}{h/3} \geqslant \frac{3P\big(\gamma_{[a_\nu^\mu, b_\nu^\mu]}(y)\big)}{h^3\nu\Delta_\nu}(y-z)^3 \geqslant p\nu 2^\nu > L.$$

Второй случай: $y \in K$ или $y - z < h/2$. Тогда $z - x > h/2$, и ввиду п. 2 и леммы 1.3.10 должны найтись такие N и M, что $I_N^M \subset [x,y]$ и $\Delta_N \geqslant (z-x)^{1{,}1}/2 \geqslant h^{1{,}1}/10$; в то же время вспомним, что, согласно п. 3, $\frac{1}{N} \geqslant \Delta_N^{0{,}1}$. Поэтому в формуле (1.3.10) можно сделать оценку

$$\frac{C_2W(x,y) - W(x)}{h/3} \geqslant \frac{8}{5h^3}\frac{\Delta_N^2}{N} \geqslant 10^{-3}h^{-0{,}69} > L,$$

где последнее неравенство опирается на п. 5.

Итак, ввиду произвольности L мы доказали, что $C_2DW(x) = +\infty$ почти всюду на K, хотя $W'_{\mathrm{ap}} = 0$ почти всюду на K.

Будем также в дальнейшем считать, что функция W доопределена нулем всюду вне отрезка $[0,1]$.

Определим теперь по индукции последовательность замкнутых множеств K_l и непрерывных функций W_l следующим образом. Положим $K_0 = K$ и $W_0 = W$. Пусть $l \in \mathbb{N}$, и K_{l-1} и W_{l-1} уже определены. Пусть $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность смежных интервалов множества K_{l-1} как подмножества $[0,1]$ и $f_i(x) = \frac{x-u_i}{v_i-u_i}$. Положим

$$K_l = K_{l-1} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(K), \qquad W_l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(v_i-u_i)^{\alpha}}{2^i} W\big(f_i(x)\big).$$

Функция W_l состоит из уменьшенных копий W, расставленных по отрезкам $[u_i, v_i]$. Поскольку $[0,1] \setminus K_l$ есть объединение всех смежных к $[u_i, v_i]$ интервалов замкнутого множества $f_i^{-1}(K)$, множество K_l замкнуто и имеет меру $1-(1-\varepsilon)^{l+1}$. Также очевидно, что функция W_l непрерывна и ограничена числом $\max|W| \leqslant 1$ на $[0,1]$ и равна нулю всюду на K_l, а всюду вне K_l имеет конечную производную; в частности, W_l аппроксимативно дифференцируема почти всюду на $[0,1]$. Заметим также, что, как и W, функция W_l принадлежит классу Lip_{α}. Наконец, $C_2DW_l(x) = +\infty$ почти всюду на $K_l \setminus K_{l-1}$. Положим

$$E = \bigcup_{l=0}^{\infty} K_l, \qquad F(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} W_l(x).$$

Ясно, что множество E имеет меру 1, а функция F непрерывна и принадлежит классу Lip_{α} на $[0,1]$. Поскольку при всех $\lambda \geqslant l$ функция W_{λ} равна нулю на K_l, заключаем, что

$$F(x) = \sum_{\lambda=0}^{l-1} \frac{1}{2^{\lambda}} W_{\lambda}(x) \text{ при } x \in K_l,$$

и, следовательно, F имеет конечную аппроксимативную производную почти всюду на K_l; ввиду произвольности l получаем, что F аппроксимативно дифференцируема почти всюду на $[0,1]$. Наконец, при $x \in K_l \setminus K_{l-1}$ (где считается, что $K_{-1} = \varnothing$) имеем оценку

$$\frac{C_2F(x,x+h) - F(x)}{h/3} \geqslant \sum_{\lambda=0}^{l} \frac{1}{2^{\lambda}} \frac{C_2W_{\lambda}(x,x+h) - W_{\lambda}(x)}{h/3},$$

ведь W_{λ} с номерами $\lambda > l$ представляют собой линейные комбинации функций вида $w(\gamma_{[\alpha_i,\beta_i]})$, где отрезки $[\alpha_i, \beta_i]$ не пересекаются и не содержат x, следовательно, слагаемые с номерами выше l неотрицательны. При $h \to 0+$ все слагаемые в этой сумме, кроме последнего (с номером l), ограничены при $h \to 0$ (так как W_λ дифференцируемы в обычном смысле вне K_λ, и, следовательно, C_2-дифференцируемы), однако последнее слагаемое стремится к плюс бесконечности для почти всех $x \in K_l \setminus K_{l-1}$, поскольку $C_2DW_l(x) = +\infty$ почти всюду на $K_l \setminus K_{l-1}$. Таким образом, $C_2DF(x) = +\infty$ почти всюду на $K_l \setminus K_{l-1}$. Ввиду произвольности l получаем, что $C_2DF(x) = +\infty$ почти всюду на E, т.е. почти всюду на $[0, 1]$. $\square$

Отметим, что в этом примере имеющее меру нуль множество точек, в которых равенство $C_2DF(x) = +\infty$ не доказано, несчетно и является множеством второй категории Бэра.

Глава 2

Производные Чезаро с произвольным ядром усреднения

Давая определение 1.1.4 чезаровского среднего, мы использовали классические чезаровские ядра усреднения

$$\varphi_k(s) = k(1-s)^{k-1}.$$

Однако согласно теореме 1.1.12 для корректности определения достаточно, чтобы ядро усреднения φ принадлежало классу $\mathrm{VB}_k[0,1]$.

Таким образом, на каждом шаге $k \geqslant 1$ построения шкалы интегрирования, когда предыдущее определение интеграла уже дано, у нас есть возможность использовать другое ядро усреднения, требуя от него лишь достаточный класс гладкости, и получить новые определения предела, непрерывности, производной и интеграла Чезаро–Перрона.

В этой главе мы установим некоторые общие факты, справедливые для широких классов ядер усреднения и получающихся из них конструкций.

2.1 Абстрактные ядра усреднения

Определение 2.1.1. Пусть $k \geqslant 1$, функция f определена всюду на отрезке, соединяющем две различные точки $x, y \in \mathbb{R}$, и $C_{k-1}P$-интегрируема на этом отрезке, а φ принадлежит классу $\mathrm{VB}_k[0,1]$. Введем обозначене

$$C_\varphi f(x,y) = \frac{1}{y-x} \cdot (C_{k-1}P) \int_x^y \varphi\left(\frac{t-x}{y-x}\right) f(t)\, dt,$$

Назовем это выражение C_φ-*средним* функции f на отрезке от точки x до точки y.

Лемма 2.1.2. *Пусть $k \geqslant 1$, функция $\varphi \in \mathrm{VB}_k[0,1]$, а функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой в некоторой окрестности точки x. Пусть функции $F_0, F_1, \ldots, F_k$ определены как в теореме 1.2.1. Тогда*

$$C_\varphi F(x, x+h) = \frac{(-1)^k}{h^k} \int_0^h F_k(x+t)\, d\varphi^{(k-1)}\left(\tfrac{t}{h}\right) + \\ + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{h^{l+1}} \Big[\varphi^{(l)}(1) F_{l+1}(x+h) - \varphi^{(l)}(0) F_{l+1}(x)\Big]. \tag{2.1.1}$$

Доказательство. Для получения формулы (2.1.1) достаточно k раз проинтегрировать по частям в выражении для $C_\varphi f(x, x+h)$. Последнее преобразование производится по формуле (1.1.2). □

Каким именно свойствам функции φ мы обязаны общностью определяемого ею понятия предела, непрерывности, производной, интеграла? Следующая лемма поможет нам дать некоторый ответ на этот вопрос: оказывается, важно не столько увеличение веса вблизи точки x, сколько быстрое убывание веса вблизи точки y, то есть быстрое стремление $\varphi(t)$ к нулю при $t \to 1$:

Лемма 2.1.3. *Пусть $k \geqslant 1$, функция $\varphi \in \mathrm{VB}_k[0,1]$, а функция F является C_k-непрерывной в некоторой окрестности точки x. Тогда при $h \to 0$ имеет место асимптотика*

$$C_\varphi F(x, x+h) = F(x) \int_0^1 \varphi(t)\, dt + \\ + \sum_{l=0}^{k-2} \frac{(-1)^l \varphi^{(l)}(1)}{(l+1)!} \cdot \Big(C_{l+1} F(x, x+h) - F(x)\Big) + o(1).$$

Доказательство. Для удобства введем обозначение $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds$. Лемма 2.1.2 дает

$$C_\varphi F(x, x+h) = \frac{(-1)^k}{h^k} \int_0^h F_k(x+t)\, d\Phi^{(k)}\left(\tfrac{t}{h}\right) + \\ + \sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{l-1}}{h^l} \Big[\Phi^{(l)}(1) F_l(x+h) - \Phi^{(l)}(0) F_l(x)\Big]. \tag{2.1.2}$$

Согласно теореме 1.2.1 имеем

$$F_k(x+h) = \sum_{j=0}^{k} F_{k-j}(x) \frac{h^j}{j!} + h^k \theta(h), \\ \theta(h) = h \cdot \frac{C_k \Delta F(x, x+h)}{(k+1)!} = \frac{C_k F(x, x+h) - F(x)}{k!} = o(1) \tag{2.1.3}$$

при $h \to 0$ в силу C_k-непрерывности функции F. Также ввиду оценки

$$\left| \int_0^h t^k \theta(t)\, d\Phi^{(k)}\big(\tfrac{t}{h}\big) \right| \leqslant h^k \max_{[0,h]} |\theta| \operatorname*{Var}_{[0,1]} \Phi^{(k)}$$

можно утверждать, что

$$\frac{(-1)^k}{h^k} \int_0^h t^k \theta(t)\, d\Phi^{(k)}\big(\tfrac{t}{h}\big) = o(1) \tag{2.1.4}$$

при $h \to 0$. Объединяя (2.1.3) и (2.1.4) и делая замену $s = t/h$, имеем при $h \to 0$

$$\frac{(-1)^k}{h^k} \int_0^h F_k(x+t)\, d\Phi^{(k)}\big(\tfrac{t}{h}\big) = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{F_{k-j}(x)}{j!h^{k-j}} \int_0^1 s^j\, d\Phi^{(k)}(s) + o(1). \tag{2.1.5}$$

Подставляя (2.1.5) в (2.1.2), а также преобразуя последнее слагаемое в сумме (2.1.2), соответствующее $l = k$, при помощи (2.1.3), получим

$$\begin{aligned} C_\varphi F(x, x+h) = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{F_{k-j}(x)}{j!h^{k-j}} \int_0^h s^j\, d\Phi^{(k)}(s) + \\ + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(-1)^{l-1}}{h^l} \Big[\Phi^{(l)}(1) F_l(x+h) - \Phi^{(l)}(0) F_l(x)\Big] + \\ + (-1)^{k-1}\Phi^{(k)}(1) \sum_{j=0}^{k} \frac{F_{k-j}(x)}{j!h^{k-j}} - (-1)^{k-1}\Phi^{(k)}(0) \frac{F_k(x)}{h^k} + o(1). \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Пользуясь простейшими свойствами интеграла Стилтьеса, несложно проверить, что

$$\frac{1}{j!} \int_0^1 s^j\, d\Phi^{(k)}(s) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \frac{\Phi^{(k-i)}(1)}{(j-i)!} - (-1)^j \Phi^{(k-j)}(0). \tag{2.1.7}$$

Подставляя (2.1.7) в (2.1.6), получим

$$C_\varphi F(x, x+h) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{F_{k-j}(x)}{h^{k-j}} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{k+i} \frac{\Phi^{(k-i)}(1)}{(j-i)!}}_{S_1} - \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{F_{k-j}(x)}{h^{k-j}} (-1)^{k+j} \Phi^{(k-j)}(0)}_{S_2} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{l=1}^{k-1} \frac{(-1)^{l-1}}{h^l} \Phi^{(l)}(1) F_l(x+h)}_{S_3} - \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{l-1}}{h^l} \Phi^{(l)}(0) F_l(x)}_{S_4} +$$

$$+ \underbrace{(-1)^{k-1} \Phi^{(k)}(1) \sum_{j=0}^{k} \frac{F_{k-j}(x)}{j! h^{k-j}}}_{S_5} + o(1).$$

Сделав в S_2 замену $l = k - j$, заметим, что

$$-S_2 - S_4 = -\sum_{l=0}^{k} \frac{F_l(x)}{h^l} (-1)^l \Phi^{(l)}(0) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^l}{h^l} \Phi^{(l)}(0) F_l(x) = -F(x)\Phi(0) = 0.$$

Далее,

$$S_1 = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^{k-i} F_{k-j}(x) \Phi^{(k-i)}(1)}{h^{k-j}(j-i)!} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \Phi^{(k-i)}(1) \sum_{j=i}^{k} \frac{F_{k-j}(x)}{h^{k-j}(j-i)!},$$

откуда видно, что S_5 уничтожает ту часть S_1, где $i = 0$. Также отделим от S_1 единственное слагаемое, соответствующее $i = k$, и запишем в обратном порядке обе суммы — внешнюю и внутреннюю:

$$S_1 + S_5 = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \Phi^{(i)}(1) \sum_{j=0}^{i} \frac{F_j(x)}{h^j (i-j)!} + F(x)\Phi(1)$$

Окончательно имеем

$$C_\varphi F(x, x+h) = (S_1 + S_5) + (-S_2 - S_4) + S_3 + o(1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \Phi^{(i)}(1) \sum_{j=0}^{i} \frac{F_j(x)}{h^j (i-j)!} + F(x)\Phi(1) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(-1)^{l-1}}{h^l} \Phi^{(l)}(1) F_l(x+h) + o(1)$$

Объединяя внешние суммы в одну и снова меняя индексацию, получим

$$C_\varphi F(x,x+h) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(-1)^{l-1}\Phi^{(l)}(1)}{h^l}\left[F_l(x+h) - \sum_{j=0}^{l}\frac{F_j(x)h^{l-j}}{(l-j)!}\right] + \\ + F(x)\Phi(1) + o(1) = \\ = \sum_{l=0}^{k-2} \frac{(-1)^{l}\varphi^{(l)}(1)}{h^{l+1}}\left[F_{l+1}(x+h) - \sum_{j=0}^{l+1}\frac{F_{l+1-j}(x)h^{j}}{j!}\right] + \\ + F(x)\int_0^1 \varphi(x)\,dx + o(1).$$

Для завершения докательства достаточно заметить, что согласно теореме 1.2.1 выражение в квадратных скобках есть $h^{l+1}\big(C_{l+1}F(x,x+h) - F(x)\big)/(l+1)!$. $\square$

Определение 2.1.4. Назовем функцию $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *ядром усреднения порядка* k с *нормировочной константой* $\alpha \in \mathbb{R}$, если выполнены следующие условия:

1) $\varphi \in \mathrm{VB}_k[0,1]$;
2) $\int_0^1 \varphi(s)\,ds = 1$;
3) $\alpha = \int_0^1 s\varphi(s)\,ds \neq 0$;
4) $\varphi(1) = \varphi'(1) = \ldots = \varphi^{(k-2)}(1) = 0$.

Для всякой $C_{k-1}P$-интегрируемой функции f выражение

$$C_\varphi \Delta f(x,y) = \frac{C_\varphi f(x,y) - f(x)}{\alpha(x-y)}$$

будем называть C_φ*-приращением* функции f от точки x до точки y.

Замечание 2.1.5. Для произвольного абстрактного ядра усреднения мы не будем, подобно определению 1.1.15, определять среднее и разность от функций, интегрируемых в более общем смысле, чем требуется для применения теоремы 1.1.12.

Теорема 2.1.6. *Пусть $k \geqslant 1$, функция φ есть ядро усреднения порядка k, а функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[x,x+H]$ для некоторого $H > 0$. Тогда $C_\varphi F(x,x+h)$ непрерывно зависит от $h \in (0,H]$.*

Доказательство. Согласно п.4 определения 2.1.4 формула (2.1.1) принимает вид

$$C_\varphi F(x,x+h) = \frac{(-1)^k}{h^k}\int_0^h F_k(x+t)\,d\varphi^{(k-1)}\big(\tfrac{t}{h}\big) - \\ - \frac{(-1)^k}{h^k}\Big[\varphi^{(k-1)}(1)F_k(x+h) - \varphi^{(k-1)}(0)F_k(x)\Big].$$

Второе слагаемое, очевидно, непрерывно по $h \in (0,H]$, поскольку функция F_k является C_0-непрерывной как неопределенный C_0P-интеграл. Докажем непрерывность интеграла Стилтьеса

$$I_x(h) = \int_0^h F_k(x+t)\,d\varphi^{(k-1)}\big(\tfrac{t}{h}\big) = \int_0^1 F_k(x+sh)\,d\varphi^{(k-1)}(s).$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной непрерывностью F_k на $[x,x+H]$, найдем такое $\delta > 0$, что $|h_1 - h_2| < \delta$ будет иметь место оценка

$$\max_{h_1,h_2\in[0,H]}\Big|F_k(x+h_1) - F_k(x+h_2)\Big| < \frac{\varepsilon}{\operatorname*{Var}\limits_{[0,1]}\varphi^{(k-1)}}.$$

Тогда при $|h_1 - h_2| < \delta$ имеем $|sh_1 - sh_2| < \delta$ для $s \in [0,1]$, и, следовательно,

$$\Big|I_x(h_1) - I_x(h_2)\Big| = \left|\int_0^1 \Big(F_k(x+sh_1) - F_k(x+sh_2)\Big)\,d\varphi^{(k-1)}(s)\right| < \\ < \frac{\varepsilon}{\operatorname*{Var}\limits_{[0,1]}\varphi^{(k-1)}}\cdot\operatorname*{Var}\limits_{[0,1]}\varphi^{(k-1)} = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Определение 2.1.7. Под C_φ-*пределом* функции $f(y)$ при $y \to x$ мы будем понимать выражение

$$(C_\varphi)\lim_{y\to x} f(y) = \lim_{y\to x} C_\varphi f(x,y).$$

Будем говорить, что функция f является C_φ-*непрерывной* в точке x, если

$$(C_\varphi)\lim_{y\to x} f(y) = f(x).$$

C_φ-*производной* функции f в точке x будем называть предел

$$C_\varphi Df(x) = \lim_{y\to x} C_\varphi \Delta f(x,y).$$

Будем также использовать обозначения для четырех производных чисел, односторонних, нижних и верхних производных:

$$C_\varphi \underline{D}_- f(x) = \varliminf_{y\to x-} C_\varphi \Delta f(x,y), \quad C_\varphi \overline{D}_- f(x) = \varlimsup_{y\to x-} C_\varphi \Delta f(x,y),$$
$$C_\varphi \underline{D}_+ f(x) = \varliminf_{y\to x+} C_\varphi \Delta f(x,y), \quad C_\varphi \overline{D}_+ f(x) = \varlimsup_{y\to x+} C_k \Delta f(x,y),$$
$$C_\varphi D_- f(x) = \lim_{y\to x-} C_\varphi \Delta f(x,y), \quad C_\varphi D_+ f(x) = \lim_{y\to x+} C_\varphi \Delta f(x,y),$$
$$C_\varphi \underline{D} f(x) = \varliminf_{y\to x} C_\varphi \Delta f(x,y), \quad C_\varphi \overline{D} f(x) = \varlimsup_{y\to x} C_\varphi \Delta f(x,y).$$

Так, например, функции φ_k из определения 1.1.4 действительно являются ядрами усреднения порядка k с константой $1/(k+1)$. Соответствующие им понятия C_{φ_k}-предела, непрерывности и производной совпадают с понятиями C_k-предела, непрерывности и производной.

Теорема 2.1.8. *Пусть функция φ — ядро усреднения порядка k. Тогда всякая C_k-непрерывная функция является C_φ-непрерывной.*

Доказательство. Согласно пп. 2 и 4 определения 2.1.4 из леммы 2.1.3 вытекает, что

$$C_\varphi F(x, x+h) = F(x) + o(1),$$

что и требовалось. □

Следующая теорема аналогична теореме 1.2.4.

Теорема 2.1.9. *Пусть φ — ядро усреднения порядка k, а функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой на интервале (a,b). Тогда функции $C_\varphi \underline{D}_- F(x)$, $C_\varphi \overline{D}_- F(x)$, $C_\varphi \underline{D}_+ F(x)$ и $C_\varphi \overline{D}_+ F(x)$ измеримы по Лебегу на (a,b).*

Доказательство. Рассмотрим, например, нижнее правое производное число; три других производных числа рассматриваются аналогично. В силу теоремы 2.1.6 функция $C_\varphi \Delta F(x, x+h)$ непрерывна по $h \in (0, H)$ для всех $H > 0$ таких, что $x + H < b$, поэтому имеем

$$C_\varphi \underline{D}_+ F(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{h \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q}} C_\varphi \Delta F(x, x+h) \right).$$

Из леммы 2.1.2 видно, что функция $C_\varphi F(x, x+h)$, а вместе с ней и $C_\varphi \Delta F(x, x+h)$, измерима по x при фиксированных h. Таким образом, функция $C_\varphi \underline{D}_+ F(x)$ измерима как предел последовательности счетных точных нижних граней измеримых функций. □

Теорема 2.1.10. *Пусть функции φ_1 и φ_2 — два ядра усреднения порядка k, причем существует такая точка $\xi \in [0,1]$, что $\varphi_1(s) \leqslant \varphi_2(s)$ при $s \in (0,\xi)$ и $\varphi_1(s) \geqslant \varphi_2(s)$ при $s \in (\xi,1)$. Тогда для всякой функции F, монотонно неубывающей на отрезке $[x,y]$, имеем*

$$C_{\varphi_1}F(x,y) \geqslant C_{\varphi_2}F(a,b).$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}C_{\varphi_1}F(x,y) - C_{\varphi_2}F(x,y) &= \frac{1}{y-x}\int_x^y \left(\varphi_1\left(\frac{t-x}{y-x}\right) - \varphi_2\left(\frac{t-x}{y-x}\right)\right) f(t)\,dt \geqslant \\ &\geqslant \int_0^{\xi} \Big(\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\Big) f(\xi(y-x)+x)\,ds + \\ &+ \int_{\xi}^{1} \Big(\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\Big) f(\xi(y-x)+x)\,ds \geqslant 0,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Следующие две теоремы устанавливают свойства ядер усреднения, обладающих дополнительным свойством неотрицательности.

Определение 2.1.11. Ядро усреднения φ порядка k называется *неотрицательным*, если $\varphi(s) \geqslant 0$ при всех $s \in [0,1]$.

Покажем, что любое неотрицательное ядро усреднения порождает определение C_k-производной во всяком случае более общее, чем классическая производная.

Теорема 2.1.12. *Если φ — неотрицательное ядро усреднения порядка $k \geqslant 1$ и функция F непрерывна в окрестности точки x, то $C_\varphi \underline{D}F(x) \geqslant \underline{D}F(x)$.*

Доказательство. Пусть α — нормировочная константа для φ и числа $h_n \in (0,1)$ таковы, что

$$\begin{aligned}C_\varphi \underline{D}F(x) &= \lim_{n\to\infty} C_\varphi \Delta F(x, x+h_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha h_n^2}\int_0^{h_n} \varphi\left(\frac{t}{h_n}\right)\Big(F(x+t) - F(x)\Big)\,dt.\end{aligned}$$

Пусть $H > 0$ таково, что F непрерывна на $[x, x+H]$, и M есть наибольшее значение $|F(t)|$ по $t \in [x, x+h]$. Возьмем такие положительные δ_n, что

$$\frac{\max\{1,M\}}{\alpha h_n^2}\int_0^{\delta_n} \varphi\left(\frac{t}{h_n}\right)dt < \frac{1}{n}. \tag{2.1.8}$$

Введем обозначение

$$J_n = \frac{1}{\alpha h_n} \int_{\delta_n}^{h_n} \frac{t}{h_n} \varphi\left(\frac{t}{h_n}\right) dt,$$

тогда с учетом $|t| < 1$ имеем $|J_n - 1| < \frac{1}{n}$.

По теореме о среднем выберем такие точки $\xi_n \in [\delta_n, h_n]$, что

$$\frac{1}{\alpha h_n^2} \int_{\delta_n}^{h_n} \varphi\left(\frac{t}{h_n}\right) \Big(F(x+t) - F(x)\Big)\, dt = \\ = \frac{1}{\alpha h_n} \int_{\delta_n}^{h_n} \varphi\left(\frac{t}{h_n}\right) \frac{t}{h_n} \frac{F(x+t) - F(x)}{t}\, dt = \\ = \frac{F(x+\xi_n) - F(x)}{\xi_n} J_n.$$

Тогда получаем

$$C_\varphi \underline{D} F(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha h_n^2} \int_0^{\delta_n} \varphi\left(\frac{t}{h_n}\right) \Big(F(x+t) - F(x)\Big)\, dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha h_n^2} \int_{\delta_n}^{h_n} \varphi\left(\frac{t}{h_n}\right) \Big(F(x+t) - F(x)\Big)\, dt \right) = \\ = \lim_{n\to\infty} \left(I_n + \frac{F(x+\xi_n) - F(x)}{\xi_n} J_n \right),$$

где с учетом (2.1.8) имеем

$$|I_n| \leqslant \frac{2M}{\alpha h_n^2} \int_0^{\delta_n} \varphi\left(\frac{t}{h_n}\right) dt \leqslant \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

откуда окончательно

$$C_\varphi \underline{D} F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+\xi_n) - F(x)}{\xi_n} \geqslant \underline{D} F(x),$$

что и требовалось. □

Теорема 2.1.13. *Пусть φ есть неотрицательное ядро усреднения порядка k. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и множества E, имеющего меру нуль по Лебегу и ограниченного отрезком $[a, b]$, существует такая непрерывная монотонно неубывающая на $[a, b]$ функция f, что $C_\varphi \underline{D} f(x) = +\infty$ при $x \in E$, но при этом $f(b) - f(a) < \varepsilon$.*

Доказательство. Для всех $n \geqslant 1$ найдем открытое множество G_n, содержащее E и имеющее меру не более $\varepsilon / n2^n$, и функция u_n равна n на

$G_n \cap [a, b]$ и нулю в остальных точках. Пусть v_n есть неопределенный интеграл Лебега от u_n на отрезке $[a, b]$, $v_n(a) = 0$. Положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x).$$

Функция f является монотонно неубывающей и непрерывной. Имеем

$$f(b) - f(a) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\varepsilon}{n 2^n} = \varepsilon$$

С другой стороны, при $x \in [a, b]$, $x + h \in G_n \cap [a, b]$ имеем

$$C_\varphi \Delta f(x, x+h) \geqslant \frac{C_\varphi v_n(x, x+h) - v_n(x)}{\alpha_k^m h} = \frac{n}{\alpha_k^m},$$

поскольку v_n равна n всюду на $[x, x+h]$. Следовательно, $C_k \underline{D} f(x) = +\infty$ при $x \in E$. □

Установим простейшее дискриптивное свойство функций, имеющих конечную нижнюю C_φ-производную.

Теорема 2.1.14. *Пусть $k \geqslant 1$, φ — ядро усреднения порядка k, и $C_{k-1}P$-интегрируемая функция F такова, что $C_\varphi \underline{D} F(x) > -\infty$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует такое счетное семейство множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, объединение которых совпадает с (a, b), что для каждого n и для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{p}$ с концами на E_n имеют место оценки*

$$\sum_{i=1}^{p} \inf_{a_i < x < b_i} \Big(C_\varphi F(a_i, x) - F(a_i) \Big) \geqslant -1,$$
$$\sum_{i=1}^{p} \inf_{a_i < x < b_i} \Big(F(b_i) - C_\varphi F(b_i, x) \Big) \geqslant -1.$$

Доказательство. Пусть α — нормировочная константа для функции φ. Для всех $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$ введем в рассмотрение множество

$$E_n^l = \left\{ x \in \left[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n} \right) \cap (a, b) : 0 < |h| < \frac{1}{n} \ \Rightarrow \ C_\varphi \Delta F(x, x+h) > -\frac{n}{\alpha} \right\}. \tag{2.1.9}$$

Пусть $\{(a_i, b_i)\}$ — набор непересекающихся интервалов с концами на E_n^l. Тогда $a_i < b_i < a_i + 1/n$, и, следовательно, при $x \in (a_j, b_j)$ в силу (2.1.9) имеем

$$C_\varphi F(a_i, x) - F(a_i) = \alpha(x - a_i) C_\varphi \Delta F(a_i, x) > -n(x - a_i) \geqslant -n(b_i - a_i),$$
$$F(b_i) - C_\varphi F(b_i, x) = \alpha(b_i - x) C_\varphi \Delta F(b_i, x) > -n(b_i - x) \geqslant -n(b_i - a_i).$$

Переходя к нижним граням, получаем

$$\sum_{i=1}^{p} \inf_{a_i<x<b_i} \Big(C_\varphi F(a_i,x) - F(a_i)\Big) \geqslant -n \sum_{i=1}^{p} (b_j - a_j) \geqslant -1,$$
$$\sum_{i=1}^{p} \inf_{a_i<x<b_i} \Big(F(b_i) - C_\varphi F(b_i,x)\Big) \geqslant -n \sum_{i=1}^{p} (b_j - a_j) \geqslant -1.$$

□

2.2 Симметричные ядра усреднения

Рассмотрим теперь специальный класс ядер усреднения, обладающий рядом дополнительных удобных свойств по сравнению с общим случаем.

Определение 2.2.1. Ядро усреднения φ порядка k называется *симметричным*, если при всех $s \in [0,1]$ имеет место равенство $\varphi(s) = \varphi(1-s)$.

Так, C_1-производная определяется симметричным ядром усреднения первого порядка $\varphi_1(s) = 1$, а C_2-производная определяется несимметричным ядром усреднения второго порядка $\varphi_2(s) = 2 - 2s$.

Лемма 2.2.2. *Если ядро усреднения φ порядка k симметрично, то его нормировочная константа α равна $1/2$ и имеют место равенства*

$$C_\varphi F(x,y) = C_\varphi F(y,x), \tag{2.2.1}$$

$$C_\varphi \Delta F(x,y) + C_\varphi \Delta F(y,x) = 2\frac{F(y)-F(x)}{y-x}. \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$\alpha = \int_0^1 s\varphi(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^1 s\Big(\varphi(s)+\varphi(1-s)\Big)\,ds =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 s\varphi(s)\,ds + \int_0^1 (1-s)\varphi(s)\,ds\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(s)\,ds = \frac{1}{2}$$

и

$$C_\varphi F(x,y) = \frac{1}{y-x}\int_x^y \varphi\left(1-\frac{t-x}{y-x}\right)F(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{x-y}\int_y^x \varphi\left(\frac{t-y}{x-y}\right)F(t)\,dt = C_\varphi F(y,x).$$

Объединяя эти два факта, получаем

$$\begin{aligned}C_\varphi\Delta F(x,y)+C_\varphi\Delta F(y,x) &= \frac{C_\varphi F(x,y)-F(x)}{(y-x)/2}-\frac{C_\varphi F(x,y)-F(y)}{(y-x)/2}=\\ &=\frac{F(y)-F(x)}{(y-x)/2}+\frac{C_\varphi F(x,y)-C_\varphi F(x,y)}{(y-x)/2}=\\ &=2\frac{F(y)-F(x)}{y-x},\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Как мы видели в теореме 1.3.9, C_2-производная может противоречить аппроксимативной производной на множестве положительной меры. Таким образом, следующее утверждение, обобщающее результаты, полученные в работе [24] для C_1-производной, на любые производные, построенные по симметричному ядру усреднения, вообще говоря, не имеет места для несимметричных ядер усреднения.

Теорема 2.2.3. *Пусть функция F имеет аппроксимативную производную F'_{ap} всюду на ограниченном множестве $E\subset\mathbb{R}$ и является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[a,b]$, содержащем множество E, а φ — симметричное ядро усреднения порядка k. Тогда для почти всех $x\in E$ имеют место соотношения*

$$C_\varphi\underline{D}F(x)\leqslant F'_{\mathrm{ap}}(x)\leqslant C_\varphi\overline{D}F(x). \tag{2.2.3}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим частный случай:

Лемма 2.2.4. *Заключение теоремы 2.2.3 верно, если $F'_{\mathrm{ap}}(x)=0$ всюду на множестве E.*

Доказательство. Введем в рассмотрение множество

$$E^+=\{x\in E: C_\varphi\overline{D}_+F(x)>0\}$$

По теореме 2.1.9 множество E^+ измеримо. Пусть $E^-=E\setminus E^+$. Очевидно, что при $x\in E^+$ имеет место оценка $C_\varphi\overline{D}F(x)\geqslant C_\varphi\overline{D}_+F(x)>0$; докажем, что $C_\varphi\overline{D}F(x)\geqslant C_\varphi\overline{D}_-F(x)\geqslant 0$ для почти всех $x\in E^-$.

Возьмем любое $\varepsilon>0$, и рассмотрим множества

$$E_n^-=\left\{x\in E^-: C_\varphi\Delta F(x,x+h)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\text{ при }0<h\leqslant\frac{1}{n}\right\}.$$

Множества E_n^- также измеримы в силу теоремы 2.1.6, дающей представление

$$E_n^-=\bigcap_{h\in\left(0,\frac{1}{n}\right]\cap\mathbb{Q}}\left\{x\in E^-: C_\varphi\Delta F(x,x+h)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Пусть x_0 — любая точка плотности множества E_n^-. Имеем $F'_{\text{ap}}(x_0) = 0$, поэтому для любого $\delta > 0$ найдется точка $\xi \in (x_0 - \min\{\delta, 1/n\}, x_0) \cap E_n^-$ такая, что

$$\frac{F(\xi) - F(x_0)}{\xi - x_0} > -\frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда в силу формулы (2.2.2) имеем

$$C_\varphi \Delta F(x_0, \xi) = 2\frac{F(\xi) - F(x_0)}{\xi - x_0} - C_\varphi \Delta F(\xi, x_0) > -2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} > -\varepsilon.$$

Ввиду произвольности δ из полученного следует, что $C_\varphi \overline{D}_- F(x_0) \geqslant -\varepsilon$. Поскольку точка x_0 есть произвольная точка плотности E_n^-, из леммы 1.3.7 вытекает, что $C_\varphi \overline{D}_- F(x) \geqslant -\varepsilon$ для почти всех $x \in E_n^-$. Поскольку объединение E_n^- по n, очевидно, покрывает E^-, имеем $C_\varphi \overline{D}_- F(x) \geqslant -\varepsilon$ для почти всех $x \in E^-$. Но поскольку ε произвольно, имеем $C_\varphi \overline{D}_- F(x) \geqslant 0$ почти всюду на E^-, что и требовалось. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 2.2.3. По теореме Лузина [26, гл. VII, теорема 2.3] существует непрерывная на $\mathbb{R}$ функция G такая, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$G'(x) = \begin{cases} F'_{\text{ap}}(x) & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \notin E. \end{cases}$$

Тогда в силу леммы 1.3.7 имеем $(F - G)'_{\text{ap}} = 0$ всюду на некотором множестве $E_1 \subset E$, мера которого равна мере E. Применяя лемму 2.2.4 к функции $F - G$ и множеству E_1, имеем $C_\varphi \overline{D}(F - G)(x) \geqslant 0$ почти всюду на E_1, т.е. почти всюду на E. С другой стороны, функция G выбрана так, что по теореме 2.1.12 почти всюду на E имеем

$$0 \leqslant C_\varphi \overline{D}(F - G)(x) = C_\varphi \overline{D} F(x) - G'(x) = C_\varphi \overline{D} F(x) - F'_{\text{ap}}(x).$$

Это доказывает второе из неравенств (2.2.3). Первое неравенство можно доказать аналогично или свести ко второму заменой F на $-F$. $\square$

Теперь продемонстрируем более мощную версию теоремы 2.1.14 для симметричных ядер усреднения. Она обобщает результаты, полученные в работе [18] для C_1-производной, и в силу теоремы 1.3.5 также не переносится на C_k-производные при $k \geqslant 2$.

Теорема 2.2.5. *Пусть $k \geqslant 1$, φ — симметричное ядро усреднения порядка k, и C_k-непрерывная функция Fтакова, что $C_\varphi \underline{D} F(x) > -\infty$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует такое счетное семейство замкнутых множеств $\{H_i\}$, объединение которых совпадает с (a, b), что функция*

F имеет ограниченную вариацию на каждом из H_i, и для каждого i существует число $K_i \in \mathbb{R}$ такое, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^p$ с концами на H_i имеют место оценки

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} \inf_{a_j<x<b_j} \Big(C_\varphi F(a_j, x) - F(a_j) \Big) \geqslant -K_i, \\ \sum_{j=1}^{p} \inf_{a_j<x<b_j} \Big(F(b_j) - C_\varphi F(b_j, x) \Big) \geqslant -K_i. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Таким образом, по сравнению с теоремой 2.1.14 мы приобретаем замкнутость множеств и дополнительно обнаруживаем, что $F \in \mathrm{VBG}(a,b)$, но теряем возможность выбрать единую константу K_i, не зависящую от i, и вынуждены накладывать на F дополнительное условие C_k-непрерывности.

Доказательство. Определим множества E_n^l формулой (2.1.9). Занумеруем их единым индексом $i = i(n,l)$: $\{H_i^1\}_{i=1}^\infty = \{E_n^l\}_{n\in\mathbb{N}, l\in\mathbb{Z}}$. Пусть H_0 есть объединение множеств изолированных точек всех множеств H_i^1. Положим $H_i^2 = H_i^1 \setminus H_0$, и пусть H_i есть замыкание множества H_i^2. Покажем, что система множеств $\{H_i\}_{i=1}^\infty \cup \{\{x\}\}_{x\in H_0}$ является искомой.

Прежде всего, множество H_0 является не более чем счетным, поскольку каждое из H_i^1, будучи множеством на прямой, имеет не более чем счетное число изолированных точек. Следовательно, наша система множеств не более чем счетна. Далее, ограниченность вариации F и неравенства (2.2.4) выполняются тривиальным образом на одноточечных множествах $\{x\}$. Поэтому достаточно проверить аналогичные факты для множеств H_i. Отметим также, что множества H_i замкнуты и не имеют изолированных точек.

Докажем, что F имеет ограниченную вариацию на E_n^l. Действительно, обозначим $F_n(x) = F(x) + nx$. Тогда в силу определения E_n^l имеем $C_\varphi \Delta F_n(x,y) > 0$ и $C_\varphi \Delta F_n(y,x) > 0$ при $x, y \in E_n^l$ и $x < y$. Тогда по формуле (2.2.2) имеем

$$F_n(y) - F_n(x) = \frac{y-x}{2} \Big(C_\varphi \Delta F_n(x,y) + C_\varphi \Delta(y,x) \Big) > 0.$$

Отсюда видно, что F_n является неубывающей функцией на E_n^l, а сама F, таким образом, во всяком случае имеет на нем ограниченную вариацию.

Докажем, что F имеет ограниченную вариацию на замыкании E_n^l. Пусть, например, точка ξ является предельной справа для E_n^l. Тогда существует возрастающая последовательность $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ точек множества E_n^l, сходящаяся монотонно к ξ. Заметим также, что $x_1 \geqslant \xi - 1/n$. Тогда, пользуясь формулой (2.2.1), из определения E_n^l получаем, что

$$C_\varphi F_n(\xi, x_m) - F_n(x_m) = C_\varphi F_n(x_m, \xi) - F_n(x_m) \geqslant 0. \tag{2.2.5}$$

Но поскольку функция F, а вместе с ней и F_n, является C_k-непрерывной, в (2.2.5) можно перейти к пределу при $m \to \infty$ и получить, что

$$F_n(\xi) \geqslant \lim_{m\to\infty} F_n(x_m).$$

Аналогичное неравенство справедливо и для предельных слева точек E_n^l. Из этого следует, что F_n является монотонно неубывающей функцией и на замыкании E_n^l, а значит функция F имеет на нем ограниченную вариацию.

Поскольку замыкание E_n^l покрывает H_i, мы теперь можем утверждать, что F имеет ограниченную вариацию на H_i.

Осталось установить справедливость неравенств (2.2.4). Мы докажем лишь первое из этих неравенств; второе доказывается аналогично.

Пусть дан набор непересекающихся интервалов $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^p$. Без ограничения общности мы можем считать, что у этих интервалов нет общих концов, то есть $a_j \neq b_{j'}$ ни при каких j и j'; иначе разобьем их на два поднабора, каждый из которых этим свойством обладает.

Так как функция F является C_k-непрерывной, и, следовательно, согласно лемме 2.1.8, C_φ-непрерывной, для всех $j = 1, \dots, p$ существуют такие $\delta_j > 0$, что

$$\Big|C_\varphi F(a_j, x) - F(a_j)\Big| < \frac{1}{p} \tag{2.2.6}$$

при $|x - a_j| < \delta_j$.

Далее, если a_j является изолированной справа точкой H_i (и, следовательно, предельной слева, так как у H_i нет изолированных точек), то положим $A_j^0 = a_j$, иначе возьмем $A_j^0 \in H_i^2$ левее a_j, но так, чтобы отрезки $[A_j^0, b_j]$ по-прежнему не пересекались, что возможно, так как у интервалов $\{(a_j, b_j)\}$ по нашему предположению нет общих концов.

Наконец, для каждого $x \in [a_j + \delta_j, b_j)$ выберем такую точку $A_j(x) \in (A_j^0, a_j + \delta_j) \cap H_i^2$, что

$$\Big|C_\varphi F(a_j, x) - C_\varphi F(A_j(x), x)\Big| < \frac{1}{p}; \tag{2.2.7}$$

это возможно потому, что, ввиду формулы (2.2.1) и теоремы 2.1.6 выражение $C_\varphi F(x, y)$ непрерывно не только по y, но и по x.

Имеем тождество

$$\begin{aligned} C_\varphi F(a_j, x) - F(a_j) = {} & \underbrace{C_\varphi F(a_j, x) - C_\varphi F(A_j(x), x)}_{S_1} + \\ & + \underbrace{C_\varphi F(A_j(x), x) - F(A_j(x))}_{S_2} + \underbrace{F(A_j(x)) - F(A_j^0)}_{S_3} + \\ & + \underbrace{F(A_j^0) - F(a_j)}_{S_4}. \end{aligned}$$

Из (2.2.7) следует, что $S_1 \geqslant -1/p$. Далее в силу $A_j(x) \in H_i^2 \subset E_n^l$, имеем $S_2 \geqslant -n(x - A_j(x)) \geqslant -n(b_j - A_j^0)$. В силу монотонности F_n на H_i имеем $S_3 \geqslant -n(A_j(x) - A_j^0) \geqslant -n(b_j - A_j^0)$. Воспользовавшись также тривиальным неравенством $S_4 \geqslant -|F(A_j^0) - F(a_j)|$, получим

$$\sum_{j=1}^{p} \inf_{a_j<x<b_j} \Big(C_\varphi F(a_j, x) - F(a_j)\Big) \geqslant \sum_{j=1}^{p}\Big(-\frac{1}{p} - 2(b_j - A_j^0) - \\ - \big|F(A_j^0) - F(a_j)\big|\Big) \geqslant -1 - 2(b-a) - \operatorname*{Var}_{H_i} F.$$

С учетом того, что мы взяли, вообще говоря, лишь половину интервалов, окончательное значение константы K_i оценивается величиной $-2 - 4(b-a) - 2\operatorname*{Var}_{H_i} F$. $\square$

Глава 3

$C_k^m P$-интеграл

В этой главе мы рассмотрим понятия предела, непрерывности, производной и интеграла, определяемые для всех целых $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ ядром усреднения

$$\varphi_k^m(s) = \frac{s^{m-1}(1-s)^{k-1}}{B(m,k)},$$

где

$$B(m,k) = \int_0^1 s^{m-1}(1-s)^{k-1}\,ds = \frac{(m-1)!(k-1)!}{(m+k-1)!}$$

есть бета-функция Эйлера.

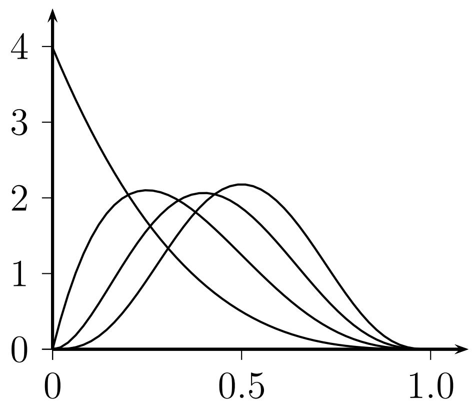

Рисунок 3.1: Графики функций $\varphi_k^m(s)$ при $s \in [0,1]$, $k = 4$, $m = 1,2,3,4$.

Функция φ_k^m является ядром усреднения порядка k, и нормировочной константой α из определения 2.1.4 для нее служит число

$$\alpha_k^m = \int_0^1 s\varphi_k^m(s)\,ds = \frac{B(m+1,k)}{B(m,k)} = \frac{m}{m+k}.$$

Вместо $C_{\varphi_k^m}$ мы будем писать просто C_k^m: например, C_k^m-*предел*, C_k^m-*непрерывная функция*, $C_k^m \underline{D}_+ f(x)$ и т.п.

При $k = m$, очевидно, имеет место равенство $\varphi_k^m(s) = \varphi_k^m(1-s)$, то есть, другими словами, φ_k^k есть симметричное ядро усреднения порядка k. С другой стороны, при $m = 1$ функция φ_k^m совпадает с функцией φ_k, определяющей C_k-производные. Отметим также, что функции φ_k^m неотрицательны, позволяет нам применять теоремы 2.1.12 и 2.1.13.

3.1 Свойства $C_k^m P$-производных

Из теорем 2.2.3 и 2.2.5 видно, что у функций, определенных в теоремах 1.3.5, 1.3.9, нижняя C_2^2-производная оказывается меньше нижней C_2-производной на множестве положительной меры. Таким образом, естественно ожидать, что новые определения окажутся более узкими, чем классическая конструкция Беркиля.

Установим более конкретные утверждения, демонстрирующие связь между $C_k^m P$-производными с различными значениями k и m.

Сначала отметим несколько простых тождеств.

Лемма 3.1.1. *Если $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[x, y]$, то справедливы равенства*

$$C_k^m F(x,y) = \frac{m}{m+k} C_k^{m+1} F(x,y) + \frac{k}{m+k} C_{k+1}^m F(x,y), \tag{3.1.1}$$

$$C_k^m \Delta F(x,y) = \frac{m+1}{m+k+1} C_k^{m+1} \Delta F(x,y) + \frac{k}{m+k+1} C_{k+1}^m \Delta F(x,y). \tag{3.1.2}$$

Доказательство. Действительно, заметим, что

$$\varphi_k^{m+1}(s) = (1-(1-s))\frac{s^{m-1}(s-1)^{k-1}}{B(m+1,k)} =$$
$$= \frac{B(m,k)}{B(m+1,k)}\varphi_k^m(s) - \frac{B(m,k+1)}{B(m+1,k)}\varphi_{k+1}^m(s) = \frac{m+k}{m}\varphi_k^m(s) - \frac{k}{m}\varphi_{k+1}^m(s).$$

Следовательно,

$$C_k^{m+1}F(x,y) = \frac{1}{y-x}\int_x^y \left[\frac{m+k}{m}\varphi_k^m\left(\frac{t-x}{y-x}\right) + \frac{k}{m}\varphi_{k+1}^m\left(\frac{t-x}{y-x}\right)\right] F(t)\,dt =$$
$$= \frac{m+k}{m} C_k^m F(x,y) - \frac{k}{m} C_{k+1}^m F(x,y),$$

что доказывает равенство (3.1.1).

Равенство (3.1.2) сводится к (3.1.1):

$$C_k^m \Delta F(x,y) = \frac{\frac{m}{m+k} C_k^{m+1} F(x,y) + \frac{k}{m+k} C_{k+1}^m F(x,y) - \left(\frac{m}{m+k} + \frac{k}{m+k}\right) F(x)}{\frac{m}{m+k}(y-x)} =$$

$$= \frac{C_k^{m+1} F(x,y) - F(x)}{y-x} + \frac{k}{m} \cdot \frac{C_{k+1}^m F(x,y) - F(x)}{y-x} =$$

$$= \frac{m+1}{m+k+1} C_k^{m+1} \Delta F(x,y) + \frac{k}{m+k+1} C_{k+1}^m \Delta F(x,y),$$

что и требовалось. □

Из (3.1.1) и (3.1.2) видно, что C_k^m-средние и приращения представляют собой линейные комбинации обыкновенных чезаровских средних (соответственно, приращений) высших порядков. Вычислим точные значения коэффициентов этих линейных комбинаций для средних:

Лемма 3.1.2. *Если $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[x, y]$, то справедливо равенство*

$$C_k^m F(a,b) = \frac{1}{B(m,k)} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j \binom{m-1}{j}}{k+j} C_{k+j} F(a,b). \qquad (3.1.3)$$

Доказательство. Из тождества

$$s^l = \Big(1 - (1-s)\Big)^l = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} (-1)^j (1-s)^j$$

и определения φ_k^m немедленно следует, что

$$B(m,k)\varphi_k^m(s) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m-1}{j} (1-s)^{k-1+j} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j \binom{m-1}{j}}{k+j} \varphi_{k+j}(s),$$

после домножения на F и интегрирования получаем формулу (3.1.3). □

Следующие две леммы дают аналог теоремы 1.2.1 для C_k^m-производных.

Лемма 3.1.3. *Пусть $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[x, y]$. Пусть $F_x^m(t) = (t-x)^{m-1}(F(t) - F(x))$. Тогда функция F_x^m также $C_{k-1}P$-интегрируема на $[x, y]$, и имеют место равенства*

$$C_k^m F(x,y) - F(x) = \frac{1}{kB(m,k)} \cdot \frac{C_k F_x^m(x,y)}{(y-x)^{m-1}}, \qquad (3.1.4)$$

$$C_k^m \Delta F(x,y) = \frac{\binom{m+k}{m}}{k+1} \cdot \frac{C_k \Delta F_x^m(x,y)}{(y-x)^{m-1}}. \qquad (3.1.5)$$

Доказательство. Действительно, по теореме 1.1.12 функция F_x^m является $C_{k-1}P$-интегрируемой, и в силу $\int_0^1 \varphi_k^m(s)\,ds = 1$ имеем

$$C_k^m F(x,y) - F(x) = \frac{1}{y-x}\int_x^y \frac{(t-x)^{m-1}(y-t)^{k-1}}{B(m,k)(y-x)^{m+k-2}}\Big(F(t)-F(x)\Big)\,dt =$$
$$= \frac{1}{kB(m,k)(y-x)^{m-1}}\left(\frac{1}{y-x}\int_x^y k\left(\frac{y-t}{y-x}\right)^{k-1} F_x^m(t)\,dt\right) =$$
$$= \frac{C_k F_x^m(x,y)}{kB(m,k)(y-x)^{m-1}},$$

а также, с учетом $F_x^m(x) = 0$,

$$C_k^m \Delta F(x,y) = \frac{\frac{C_k F_x^m(x,y)}{kB(m,k)(y-x)^{m-1}}}{\frac{m}{m+k}(y-x)} = \frac{C_k F_x^m(x,y)}{\frac{mk}{m+k}B(m,k)(y-x)^m} =$$
$$= \frac{(m+k)}{mk(k+1)B(m,k)(y-x)^{m-1}} \cdot \frac{C_k F_x^m(x,y) - F_x^m(x)}{(y-x)/(k+1)} =$$
$$= \frac{\binom{m+k}{m}}{k+1} \cdot \frac{C_k \Delta F_x^m(x,y)}{(y-x)^{m-1}},$$

поскольку $\frac{m+k}{mk(k+1)B(m,k)} = \frac{(m+k)(m+k-1)!}{mk(k+1)(m-1)!(k-1)!} = \frac{(m+k)!}{m!k!(k+1)}$ и $\binom{m+k}{m} = \frac{(m+k)!}{m!k!}$. □

Лемма 3.1.4. *В условиях предыдущей леммы при всех целых $l \geqslant 0$ введем в рассмотрение функции $F_{x,l}^m$, где $F_{x,0}^m = F_x^m$, $F_{x,1}^m$ есть неопределенный интеграл от $F_{x,0}^m$ на $[x,y]$, причем $F_{x,1}^m(x) = 0$, $F_{x,2}^m$ есть неопределенный интеграл от $F_{x,1}^m$ на $[x,y]$, причем $F_{x,2}^m(x) = 0$, и т.д. Тогда функция $F_{x,k}^m$ непрерывна на $[x,y]$, и имеют место равенства*

$$C_k^m F(x,y) - F(x) = \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} \cdot \frac{F_{x,k}^m(y)}{(y-x)^{m+k-1}}, \tag{3.1.6}$$

$$C_k^m \Delta F(x,y) = \frac{(m+k)!}{m!} \cdot \frac{F_{x,k}^m(y)}{(y-x)^{m+k}}. \tag{3.1.7}$$

Доказательство. Действительно, объединяя предыдущую лемму с формулами (1.2.2) и (1.2.1), получим

$$C_k^m F(x,y) - F(x) = \frac{1}{kB(m,k)} \cdot \frac{\frac{F_{x,k}^m(y)}{(y-x)^k/k!}}{(y-x)^{m-1}} = \frac{(k-1)!}{B(m,k)} \cdot \frac{F_{x,k}^m(y)}{(y-x)^{m+k-1}},$$

$$C_k^m \Delta F(x,y) = \frac{\binom{m+k}{k}}{k+1} \cdot \frac{\frac{F_{x,k}^m(y)}{(y-x)^{k+1}/(k+1)!}}{(y-x)^{m-1}} = k!\binom{m+k}{k} \cdot \frac{F_{x,k}^m(y)}{(y-x)^{m+k}},$$

что и требовалось. □

Теорема 3.1.5. *Если $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[x, y]$, то имеет место соотношение*

$$\sup_{x<t<y}\left|C_k^m F(x,t) - F(x)\right| \geqslant \sup_{x<t<y}\left|C_{k+1}^m F(x,t) - F(x)\right|. \tag{3.1.8}$$

Доказательство. В обозначениях леммы 3.1.4 пусть

$$M = \sup_{x<t<y}\left|\frac{F_{x,k}^m(t)}{(t-x)^{m+k-1}}\right|.$$

Тогда в силу (3.1.6) имеем

$$\sup_{x<t<y}\left|C_k^m F(x,t) - F(x)\right| = M\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!},$$

причем в случае $M = \infty$ неравенство (3.1.8) выполняется тривиальным образом, поэтому далее будем считать, что $M < \infty$. Тогда при $x < t < y$ имеем оценку $|F_{x,k}^m(t)| \leqslant M(t-x)^{m+k-1}$.

Следовательно,

$$\left|F_{x,k+1}^m(t)\right| \leqslant \int_x^t \left|F_{x,k}^m(\tau)\right| d\tau \leqslant \int_x^t M(\tau - x)^{m+k-1}\, d\tau = M\frac{(t-x)^{m+k}}{m+k},$$

и имеет место оценка

$$\begin{aligned}\left|C_{k+1}^m F(x,t) - F(x)\right| &= \frac{(m+k)!}{(m-1)!}\left|\frac{F_{x,k+1}^m(t)}{(t-x)^{m+k}}\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!}M = \sup_{x<t<y}\left|C_k^m F(x,t) - F(x)\right|.\end{aligned}$$

Переходя к верхней грани по $t \in (x, y)$, получаем требуемое утверждение. □

Следующая теорема доказывается аналогично предыдущей и распространяет соотношения (1.1.3) на случай $m > 1$.

Теорема 3.1.6. *Если $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой в окрестности точки x, то имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} C_k^m \underline{D}_- F(x) \leqslant C_{k+1}^m \underline{D}_- F(x) \leqslant C_{k+1}^m \overline{D}_- F(x) \leqslant C_k^m \overline{D}_- F(x), \\ C_k^m \underline{D}_+ F(x) \leqslant C_{k+1}^m \underline{D}_+ F(x) \leqslant C_{k+1}^m \overline{D}_+ F(x) \leqslant C_k^m \overline{D}_+ F(x). \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Доказательство. Докажем только неравенство для правого нижнего производного числа, так как остальные неравенства доказываются аналогично.

В обозначениях леммы 3.1.4 пусть

$$M = \varliminf_{y\to x+} \frac{F^m_{x,k}(y)}{(y-x)^{m+k}}.$$

Тогда в силу (3.1.7) имеем

$$C^m_k \underline{D}_+ F(x) = M\frac{(m+k)!}{m!},$$

причем случай $M = -\infty$ тривиален, поэтому далее будем считать, что $M > -\infty$. Тогда возьмем любое число $M' < M$, и найдем такое $\delta > 0$, что при $y \in (x, x+\delta)$ значение $F^m_{x,k}(y)$ будет больше $M'(y-x)^{m+k}$.

Тогда при $y \in (x, x+\delta)$ получаем

$$F^m_{x,k+1}(y) = \int_x^y F^m_{x,k}(t)\,dt \geqslant \int_x^y M'(t-x)^{m+k}\,dt = M'\frac{(y-x)^{m+k+1}}{m+k+1},$$

откуда

$$C^m_{k+1}\Delta F(x,y) = \frac{(m+k+1)!}{m!}\cdot\frac{F^m_{x,k+1}(y)}{(y-x)^{m+k+1}} \geqslant M'\frac{(m+k)!}{m!},$$

что завершает доказательство ввиду произвольности M'. $\square$

Чтобы установить связь между C^m_k-производной и C^{m+1}_k-производной, нам придется решить одно несложное интегральное уравнение.

Лемма 3.1.7. *Пусть $k \geqslant 1$ — целое число, функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $x \in [0, H]$ для некоторого $H > 0$, $f(x) = o(x^{k-1})$ и $g(x) = O(x^{k+1})$ при $x \to 0+$ и имеет место равенство*

$$g(x) = xf(x) - k\int_0^x f(t)\,dt. \tag{3.1.10}$$

Тогда при $x_0 \in (0, H]$ имеем

$$f(x_0) = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)!}\int_0^{x_0}\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{i-1}} \frac{g(x_i)}{x_i^{i+1}}\,dx_i\ldots dx_2\,dx_1, \tag{3.1.11}$$

где при $i = 0$ слагаемое полагается равным $g(x_0)/x_0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для каждой непрерывной функции g существует лишь одна непрерывная функция f, такая, что $f(x) = o(x^{k-1})$ и имеет место формула (3.1.10). Действительно, если бы функции f_1 и f_2 удовлетворяли этому условию, то функция

$$h(x) = \int_0^x \Big(f_1(t) - f_2(t)\Big)\,dt$$

удовлетворяла бы уравнению $xh'(x) = kh(x)$ и, следовательно, имела бы вид Cx^k; но, так как f_1 и f_2 суть $o(x^{k-1})$, остается лишь заключить, что $f_1 = f_2$.

Далее, видно, что функция, определяемая формулой (3.1.11), есть $o(x^{k-1})$, ведь $g(x) = o(x^k)$. Покажем, что она удовлетворяет формуле (3.1.10). Подставляя (3.1.11) в (3.1.10), имеем

$$\begin{aligned}
&-g(x_0) + x_0 f(x_0) - k\int_0^{x_0} f(x_1)\,dx_1 = \\
&\quad = -g(x_0) + x_0\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!}\int_0^{x_0}\dots\int_0^{x_{i-1}}\frac{g(x_i)}{x_i^{i+1}}\,dx_i\dots dx_1 - \\
&\qquad - k\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!}\int_0^{x_0}\int_0^{x_1}\dots\int_0^{x_i}\frac{g(x_{i+1})}{x_{i+1}^{i+1}}\,dx_{i+1}\dots dx_2\,dx_1 = \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{k!}{(k-i)!}\left(\int_0^{x_0}\dots\int_0^{x_i}[(k-i)x_0 - kx_{i+1}]\frac{g(x_{i+1})}{x_{i+1}^{i+2}}\,dx_{i+1}\dots dx_1\right) - \\
&\qquad - kk!\int_0^{x_0}\dots\int_0^{x_k}\frac{g(x_{k+1})}{x_{k+1}^{k+1}}\,dx_{k+1}\dots dx_1.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что полученное выражение равно нулю. Докажем более общий факт: при $n = 1, 2, \dots, k$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k!}{(k-i)!}\left(\int_0^{x_0}\dots\int_0^{x_i}[(k-i)x_0 - kx_{i+1}]\frac{g(x_{i+1})}{x_{i+1}^{i+2}}\,dx_{i+1}\dots dx_1\right) = \\
&\qquad = n\frac{k!}{(k-n)!}\int_0^{x_0}\dots\int_0^{x_n}\frac{g(x_{n+1})}{x_{n+1}^{n+1}}\,dx_{n+1}\dots dx_1.
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

При $n = 1$ формула (3.1.12) следует из леммы 1.1.16:

$$\int_0^{x_0}[kx_0 - kx_1]\frac{g(x_1)}{x_1^2}\,dx_1 = k\int_0^{x_0}\int_0^{x_1}\frac{g(x_2)}{x_2^2}\,dx_2\,dx_1. \tag{3.1.13}$$

Пусть формула (3.1.12) верна для некоторого n, докажем ее для $n+1$. Имеем

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{k!}{(k-i)!}\left(\int_0^{x_0}\dots\int_0^{x_i}\Big[(k-i)x_0-kx_{i+1}\Big]\frac{g(x_{i+1})}{x_{i+1}^{i+2}}\,dx_{i+1}\dots dx_1\right)=$$

$$=\frac{k!}{(k-n)!}\int_0^{x_0}\dots\int_0^{x_n}\Bigg(n\frac{g(x_{n+1})}{x_{n+1}^{n+1}}+$$

$$+\Big[(k-n)x_0-kx_{n+1}\Big]\frac{g(x_{n+1})}{x_{n+1}^{n+2}}\Bigg)\,dx_{n+1}\dots dx_1=$$

$$=\frac{k!}{(k-(n+1))!}\int_0^{x_0}\dots\int_0^{x_n}\Big[x_0-x_{n+1}\Big]\,\frac{g(x_{n+1})}{x_{n+1}^{n+2}}\,dx_{n+1}\dots dx_1.$$

Представляя (x_0-x_{n+1}) в виде $(x_0-x_1)+(x_1-x_2)+\ldots+(x_n-x_{n+1})$ и применяя к каждому слагаемому лемму 1.1.16, получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема 3.1.8. *Если $k\geqslant 1$, $m\geqslant 1$ и функция F является C_k-непрерывной на отрезке $[x,y]$, то имеет место соотношение*

$$\sup_{x<t<y}\Big|C_k^m F(x,t)-F(x)\Big|\leqslant\sup_{x<t<y}\Big|C_k^{m+1}F(x,t)-F(x)\Big|. \tag{3.1.14}$$

Доказательство. Поскольку по сравнению с теоремой 3.1.5 мы наложили дополнительное условие C_k-непрерывности, с учетом теоремы 2.1.6 и левая и правая часть неравенства (3.1.14) всегда конечны.

Пользуясь тождеством (3.1.1) и теоремой 3.1.5, при $t\in(x,y)$ получаем

$$\Big|C_k^m F(x,t)-F(x)\Big|\leqslant\frac{m}{m+k}\Big|C_k^{m+1}F(x,t)-F(x)\Big|+$$

$$+\frac{k}{m+k}\Big|C_{k+1}^{m}F(x,t)-F(x)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m}{m+k}\sup_{x<t<y}\Big|C_k^{m+1}F(x,t)-F(x)\Big|+$$

$$+\frac{k}{m+k}\sup_{x<t<y}\Big|C_k^{m}F(x,t)-F(x)\Big|.$$

Переходя к верхней грани по $t\in(x,y)$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема 3.1.9. *Если $k\geqslant 1$, $m\geqslant 1$ и функция F является C_k-непрерывной в окрестности точки x, то имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}&C_k^{m+1}\underline{D}_-F(x)\leqslant C_k^m\underline{D}_-F(x)\leqslant C_k^m\overline{D}_-F(x)\leqslant C_k^{m+1}\overline{D}_-F(x),\\&C_k^{m+1}\underline{D}_+F(x)\leqslant C_k^m\underline{D}_+F(x)\leqslant C_k^m\overline{D}_+F(x)\leqslant C_k^{m+1}\overline{D}_+F(x).\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Доказательство. Докажем только неравенство для правой нижней производной, остальные неравенства доказываются аналогично.

Случай $C_k^m \underline{D}_+ F(x) = +\infty$ тривиален. В случае $C_k^m \underline{D}_+ F(x) \neq -\infty$ мы можем снова свести эту теорему к тождеству (3.1.2) и теореме 3.1.6: при $y > x$ имеем

$$C_k^m \Delta F(x,y) = \frac{m+1}{m+k+1} C_k^{m+1} \Delta F(x,y) + \frac{k}{m+k+1} C_{k+1}^m \Delta F(x,y) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{m+1}{m+k+1} C_k^{m+1} \underline{D}_+ F(x) + \frac{k}{m+k+1} C_k^m \underline{D}_+ F(x).$$

Переходя к нижнему пределу при $y \to x+$, получаем требуемое утверждение.

Наконец рассмотрим случай $C_k^m \underline{D}_+ F(x) = -\infty$. Будем доказывать, что в этом случае $C_k^{m+1} \underline{D}_+ F(x) = -\infty$. Воспользуемся леммой 3.1.4 и рассмотрим непрерывные при $t \geqslant 0$ функции

$$f(t) = F_{x,k}^m (x+t), \qquad g(t) = F_{x,k}^{m+1}(x+t).$$

Если $C_k^{m+1} \underline{D}_+ F(x) > -\infty$, то существуют такие $\delta > 0$ и $M > 0$, что при $t \in (0, \delta)$ будет иметь место оценка

$$g(t) = \frac{t^{m+k+1}(m+1)!}{(m+k+1)!} C_k^{m+1} \Delta F(x, x+t) > -M t^{m+k+1}. \tag{3.1.16}$$

С другой стороны, как и в предыдущей теореме, из C_k-непрерывности F следует, что функции $C_k^m F(x,t)$ и $C_k^{m+1} F(x,t)$ ограничены при $t \geqslant x$. Следовательно, имеют место оценки

$$f(t) = O(t^{m+k-1}) = O(t^k) = o(t^{k-1}),$$
$$g(t) = O(t^{m+k}) = O(t^{k+1}).$$

Покажем, что функции f и g удовлетворяют формуле (3.1.10). Имеем

$$t_0 f(t_0) - g(t_0) = t_0 \int_0^{t_0} \cdots \int_0^{t_{k-1}} t_k^{m-1} \Big(F(x+t_k) - F(x) \Big)\, dt_k \ldots dt_1 -$$
$$- \int_0^{t_0} \cdots \int_0^{t_{k-1}} t_k^m \Big(F(x+t_k) - F(x) \Big)\, dt_k \ldots dt_1 =$$
$$= \int_0^{t_0} \cdots \int_0^{t_{k-1}} (t_0 - t_k) t_k^{m-1} \Big(F(x+t_k) - F(x) \Big)\, dt_k \ldots dt_1.$$

Снова представляя $(t_0 - t_k)$ в виде $(t_0 - t_1) + (t_1 - t_2) + \ldots + (t_{k-1} - t_k)$ и применяя к каждому слагаемому лемму 1.1.16, получаем формулу (3.1.10).

Таким образом, мы можем воспользоваться формулой (3.1.11), и с учетом (3.1.16) получим

$$f(t_0) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} \int_0^{t_0} \cdots \int_0^{t_{i-1}} \frac{g(t_i)}{t_i^{i+1}}\, dt_i \ldots dt_1 \geqslant$$

$$\geqslant -M \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} \int_0^{t_0} \cdots \int_0^{t_{i-1}} t^{m+k-i}\, dt_i \ldots dt_1 = -KMt_0^{m+k},$$

где K — некая положительная константа, зависящая лишь от k и m. Таким образом, при всех $y \in (x, x+\delta)$ имеем

$$C_k^m \Delta F(x,y) = \frac{(m+k)!}{m!} \cdot \frac{f(y-x)}{(y-x)^{m+k}} > -KM,$$

откуда следует, что $C_k^m \underline{D} F(x) \geqslant -KM > -\infty$. Полученное противоречие завершает доказательство в общем случае. $\square$

Теоремы 3.1.6 и 3.1.9 дают общее представление о связи между понятиями C_k^m-производной с различными k и m: общность производной, даваемая этими определениями и понимаемая в свете близости верхних и нижних производных друг к другу, *возрастает* с ростом k и *убывает* с ростом m.

3.2 Эквивалентность $C_k^m P$-интеграла и $C_k P$-интеграла

Теоремы 3.1.5, 3.1.6, 3.1.8 и 3.1.9 позволяют нам перейти к построению определения интеграла Чезаро–Перрона, основанного на C_k^m-производной. В частности, мы готовы дать аналог теоремы 1.1.10 для, во всяком случае, C_k^m-производной.

Теорема 3.2.1. *Пусть $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и $C_k P$-непрерывная функция F такова, что при $x \in [a,b]$ $C_k^m \underline{D} F(x) \geqslant 0$. Тогда F есть неубывающая функция на $[a,b]$.*

Здесь и далее, говоря о производной в конце отрезка, мы будем подразумевать одностороннюю производную.

Доказательство. Действительно, применяя $(m-1)$ раз теорему 3.1.9, увидим, что $C_k \underline{D} F(x)$ неотрицательна при $x \in [a,b]$. По теореме 1.1.10 функция F является неубывающей. $\square$

Определение 3.2.2. Пусть действительная функция f определена на отрезке $[a,b]$. Тогда функция Ψ называется $C_k^m P$*-мажорантой* для функции f на $[a,b]$, если Ψ является C_k-непрерывной функцией на $[a,b]$ и $C_k^m \underline{D}\Psi(x) > f(x)$ при $x \in [a,b]$. Функция ψ называется $C_k P$*-минорантой* для f на $[a,b]$, если $-\psi$ есть $C_k P$-мажоранта для функции $-f$ на $[a,b]$.

Замечание 3.2.3. Как и в определении 1.1.1, неравенства в этом определении можно заменить на нестрогие. Как мы увидим ниже (теорема 3.3.4), вовсе не обязательно требовать выполнения этого неравенства всюду на отрезке $[a,b]$.

Определение 3.2.4. Функция f называется $C_k^m P$*-интегрируемой* на отрезке $[a,b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие $C_k^m P$-мажоранта Ψ и $C_k^m P$-миноранта ψ для f на $[a,b]$, что

$$\Big(\Psi(b) - \Psi(a)\Big) - \Big(\psi(b) - \psi(a)\Big) < \varepsilon.$$

При этом под $C_k^m P$*-интегралом* функции f на $[a,b]$ понимается общая грань, к которой могут сколь угодно приближаться приращения мажоранты и миноранты функции f:

$$(C_k^m P)\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{\Psi}\Big(\Psi(b) - \Psi(a)\Big) = \sup_{\psi}\Big(\psi(b) - \psi(a)\Big).$$

В дальнейшем нам также понадобится понятие $C_k^m P$-интегрируемости на произвольном ограниченном множестве.

Определение 3.2.5. Будем говорить, что функция f, определенная на ограниченном множестве $Q \subset [a,b]$, является $C_k^m P$*-интегрируемой на множестве* Q, если функция f^*, равная f на Q и 0 вне Q, $C_k^m P$-интегрируема на $[a,b]$. При этом будем обозначать

$$(C_k^m P)\int_Q f(x)\,dx = (C_k^m P)\int_a^b f^*(x)\,dx.$$

Очевидно, что интегрируемость и значение интеграла в этом определении не зависят от выбора отрезка $[a,b] \supset Q$.

Теорема 3.2.6. *Если функция f интегрируема по Лебегу на ограниченном множестве Q, то при $k,m \geqslant 1$ функция f является $C_k^m P$-интегрируемой на множестве Q и*

$$(C_k^m P)\int_Q f(x)\,dx = \int_Q f\,d\mu$$

Доказательство. Пусть $[a, b]$ — какой-нибудь отрезок, ограничивающий множество Q, и функция f^* равна f на Q и 0 вне Q. Функция f^* интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, и ее интеграл равен интегралу f на Q. Согласно [26, гл. VI, теорема 3.2] для любого $\varepsilon > 0$ существуют *непрерывные* перроновские мажоранта Ψ и миноранта ψ для f^* такие, что

$$0 \leqslant \Big(\Psi(b) - \Psi(a)\Big) - \int_Q f\,d\mu \leqslant \varepsilon, \qquad 0 \leqslant \int_Q f\,d\mu - \Big(\psi(b) - \psi(a)\Big) \leqslant \varepsilon$$

Поскольку ядра усреднения φ_k^m неотрицательны, по теореме 2.1.12 функции Ψ и ψ являются также $C_k^m P$-мажорантой и минорантой соответственно. Но это и означает, что f является $C_k^m P$-интегрируемой на Q с соответствующим значением интеграла. $\square$

Теорема 3.2.7. *Пусть $k \geqslant 1$, $m > 1$, и функция f является $C_k^m P$-интегрируемой на отрезке $[a, b]$. Тогда f также является $C_k^{m-1} P$-интегрируемой и $C_{k+1}^m P$-интегрируемой на $[a, b]$, и*

$$(C_k^{m-1}P)\int_a^b f(x)\,dx = (C_k^m P)\int_a^b f(x)\,dx = (C_{k+1}^m P)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Это непосредственно следует из определения $C_k^m P$-интеграла и теорем 3.1.6 и 3.1.9. $\square$

Покажем, что на самом деле $C_k^m P$-интеграл всегда эквивалентен $C_k P$-интегралу. Для этого недостаточно исследовать мажоранты и миноранты по отдельности; нужно существенно пользоваться тем, что у всякой интегрируемой функции есть и мажоранта, и миноранта, и рассматривать их вместе.

Определение 3.2.8. Пара C_k-непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций Ψ, ψ называется *$C_k^m P$-парой*, если $C_k^m \overline{D}\psi(x) < C_k^m \underline{D}\Psi(x)$ всюду на $[a, b]$; в частности, $C_k^m \underline{D}\Psi(x) > -\infty$ и $C_k^m \overline{D}\psi(x) < +\infty$. *Приращением* пары Ψ, ψ называется неотрицательная величина

$$\Delta(\Psi, \psi)[a, b] = \Big(\Psi(b) - \Psi(a)\Big) - \Big(\psi(b) - \psi(a)\Big).$$

Лемма 3.2.9. *Пусть $k \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$. Тогда для всякой $C_k^m P$-пары Ψ, ψ на отрезке $[a, b]$ существует такая C_k^{m+1}-пара Ψ_*, ψ_* на $[a, b]$, что*

$$C_k^{m+1}\overline{D}\psi_*(x) \leqslant C_k^m \overline{D}\psi(x) < C_k^m \underline{D}\Psi(x) \leqslant C_k^{m+1}\underline{D}\Psi_*(x)$$

и при этом $\Delta(\Psi_*, \psi_*)[a, b] \leqslant (2(k/m) + 1)\Delta(\Psi, \psi)[a, b]$.

Доказательство. Действительно, пусть $H(x) = \Psi(x) - \psi(x) - (\Psi(a) - \psi(a))$. Эта функция является неотрицательной, монотонно неубывающей и C_k-непрерывной, и $H(b) - H(a) = \Delta(\Psi, \psi)[a, b]$. Определим функции $\Psi_* = \Psi + (k/m)H$, $\psi_* = \psi - (k/m)H$ и докажем, что Ψ_*, ψ_* — искомая пара. Пусть $x \in [a, b]$. Поскольку $C_k^m \underline{D}\Psi(x) > -\infty$ и, ввиду (3.1.9), $C_{k+1}^m \overline{D}\psi(x) < +\infty$, мы можем для любых чисел $M_1 < C_k^m \underline{D}\Psi(x)$ и $M_2 > C_{k+1}^m \overline{D}\psi(x)$ найти такое $\delta > 0$, что $C_k^m \Delta\Psi(x, y) > M_1$ и $C_{k+1}^m \Delta\psi(x, y) < M_2$ при $x < y < x + \delta$. Тогда для всех таких y по формуле (3.1.2) с учетом $\Psi = \psi + H$ имеем

$$\begin{aligned} C_k^{m+1}\Delta\Psi_*(x, y) = \frac{m+k+1}{m+1} \cdot C_k^m \Delta\Psi(x, y) - \\ - \frac{k}{m+1} \cdot C_{k+1}^m \Delta\Psi(x, y) + \frac{k}{m} \cdot C_k^{m+1} \Delta H(x, y) \geqslant \\ \geqslant \frac{m+k+1}{m+1} M_1 - \frac{k}{m+1} M_2 + \\ + \underbrace{\left(-\frac{k}{m+1} \cdot C_{k+1}^m \Delta H(x, y) + \frac{k}{m} \cdot C_k^{m+1} \Delta H(x, y)\right)}_{S}. \end{aligned}$$

Покажем, что выражение S неотрицательно. Заметим, что функции $\varphi_1 = \varphi_k^{m+1}$ и $\varphi_2 = \varphi_{k+1}^m$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1.10. Следовательно, поскольку функция H монотонна, получаем $C_k^{m+1} H(x, y) \geqslant C_{k+1}^m H(x, y)$. Теперь имеем оценку

$$\begin{aligned} S = \frac{k}{m} \cdot \frac{C_k^{m+1} H(x, y) - H(x)}{\frac{m+1}{m+k+1}(y - x)} - \frac{k}{m+1} \cdot \frac{C_{k+1}^m H(x, y) - H(x)}{\frac{m}{m+k+1}(y - x)} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{y - x} \left(\frac{k(m+k+1)}{m(m+1)} - \frac{k(m+k+1)}{(m+1)m}\right) \left(C_k^{m+1} H(x, y) - H(x)\right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили оценку

$$C_k^{m+1}\Delta\Psi_*(x, y) \geqslant \frac{m+k+1}{m+1} M_1 - \frac{k}{m+1} M_2.$$

В силу произвольности M_1 и M_2 имеем

$$C_k^{m+1}\Delta\Psi_*(x, y) \geqslant \frac{m+k+1}{m+1} C_k^m \underline{D}\Psi(x) - \frac{k}{m+1} C_{k+1}^m \overline{D}\psi(x).$$

С учетом $C_{k+1}^m \overline{D}\psi(x) \leqslant C_k^m \overline{D}\psi(x) < C_k^m \underline{D}\Psi(x)$, переходя к пределу, окончательно получаем требуемое неравенство $C_k^{m+1} \underline{D}\Psi_*(x, y) \geqslant C_k^m \underline{D}\Psi(x)$.

Соотношение между верхними производными ψ и $\psi*$ устанавливается аналогично.

Наконец, имеем

$$\Delta(\Psi_*, \psi_*)[a,b] = \Delta(\Psi, \psi)[a,b] + 2(k/m)\big(H(b) - H(a)\big) = \\ = (2(k/m)+1)\Delta(\Psi, \psi)[a,b],$$

что и требовалось. □

Теорема 3.2.10. *Пусть $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, и функция f является $C_k^m P$-интегрируемой на отрезке $[a,b]$. Тогда f также является $C_k^{m+1}P$-интегрируемой на $[a,b]$, и*

$$(C_k^{m+1}P)\int_a^b f(x)\,dx = (C_k^m P)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Действительно, задавшись любым $\varepsilon > 0$ и взяв для функции f какие-нибудь $C_k^m P$-мажоранту Ψ и $C_k^m P$-миноранту ψ, разность между приращениями которых на $[a,b]$ меньше $\varepsilon/(2(k/m)+1)$, мы можем по лемме 3.2.9 найти такие $C_k^{m+1}P$-мажоранту Ψ_* и $C_k^{m+1}P$-миноранту ψ_* для f на $[a,b]$, разность между приращениями которых на $[a,b]$ меньше ε. □

Таким образом, определение 3.2.4 на самом деле является излишним. Несмотря на это, определение $C_k^m P$-мажоранты и миноранты при $m > 1$ является существенно более узким, чем определение $C_k P$-мажоранты и миноранты.

3.3 Слабые мажоранты и миноранты

Покажем, что, как и в классическом случае, требования, накладываемые на $C_k^m P$-мажоранты и миноранты можно существенно ослабить.

Лемма 3.3.1. *Если $n \geqslant 1$, функция G непрерывна на отрезке $[0,H]$ и $G(h) = o(h^n)$ при $h \to 0$, то существует такая функция $W : [0,H] \to \mathbb{R}$, что*

1) *W является $(n+1)$-выпуклой на $[0,H]$,*

2) *$W^{(n)}$ существует и непрерывна всюду на $[0,H]$,*

3) *$W(h) = o(h^n)$ при $h \to 0$,*

4) *$|G(x)| \leqslant W(x)$ при $x \in [0,H]$,*

5) *$W^{(n)}(h) \leqslant 2^{n+1}(n-1)! \sup\limits_{0<y<H} |G(x)/x^n|$ при $h \in [0,H]$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$w_1(x) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant x} \left| \frac{G(t)}{t^n} \right|.$$

Функция w_1 является неубывающей и стремится к нулю в нуле. Построим по ней функцию w_2, график которой является "выпуклой вверх оболочкой" графика функции w_1:

$$w_2(x) = \max_{0 \leqslant t_1 \leqslant x \leqslant t_2 \leqslant H} \left[w_1(t_1) + \frac{x - t_1}{t_2 - t_1} \Big(w_1(t_2) - w_1(t_1) \Big) \right],$$

где при $t_1 = t_2$ функция под максимумом полагается равной $w_1(x)$. Также положим $w_2(x) = w_2(H)$ при $x \in [H, 2H]$. Функция w_2 также является неубывающей и стремится к нулю в нуле, и имеют место оценки

$$w_1(x) \leqslant w_2(x) \leqslant \sup_{0 < x < H} \left| \frac{G(x)}{x^n} \right|. \tag{3.3.1}$$

Определим функцию

$$W(x) = 2^{n+1} \int_0^x (x - t)^{n-1} w_2(2t)\, dt$$

и проверим, что эта функция удовлетворяет условиям леммы. По лемме 1.1.16 имеем

$$W^{(n)}(x) = 2^{n+1} (n-1)! w_2(2x),$$

откуда с учетом (3.3.1) очевидно, что выполняются пп.1,2,3,5. Неравенство из п.4 также выполнено: с учетом выпуклости вверх функции w_2 имеем

$$\begin{aligned} W(x) &\geqslant 2^{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \int_0^{x/2} w_2(2t)\, dt \geqslant \\ &\geqslant 4x^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot w_2(x) \right) = x^n w_2(x) \geqslant |G(x)|, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Теорема 3.3.2. *Если $k, m \geqslant 1$, функция F является C_k-непрерывной на отрезке $[x, x + H]$, то существует такая функция w на $[x, x + H]$, что*

1) *w есть непрерывная монотонно неубывающая функция на $[x, x + H]$,*

2) *$w(x) = 0$,*

3) $C_k^m \Delta(F+w)(x,y) \geqslant 0$ *при всех* $y \in (x, x+H]$,

4) $w(y) \leqslant \frac{2^{m+k}(m-1)!}{m+k-1} \sup\limits_{x<t<y} \left|C_k^m F(x,t) - F(x)\right|$ *при всех* $y \in (x, x+H]$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 3.1.4 и заметим, что функция $G(h) = F_{x,k}^m(x+h)$ непрерывна при $h \in [0, H]$, и $G(h) = o(h^{m+k-1})$. Последнее следует из того, что в формуле (3.1.6) левая часть, а вместе с ней и правая, стремится к нулю в силу C_k-непрерывности функции F и теоремы 2.1.8. Применяя лемму 3.3.1, к функции G при $n = m+k-1$, получим соответствующую функцию W.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{w}(y) = \frac{W^{(k)}(y-x)}{(y-x)^{m-1}}, \qquad w(y) = \max_{x \leqslant t \leqslant y} \tilde{w}(t), \qquad \tilde{w}(0) = w(0) = 0,$$

и покажем, что функция w — искомая.

Поскольку W является $(m+k)$-выпуклой и $(m+k-1)$ раз непрерывно дифференцируемой и $W(h) = o(h^{m+k-1})$ при $h \to 0$, заключаем, что $w(x+h) = o(1)$ при $h \to 0$. Очевидно, что функция w является непрерывной и монотонно неубывающей на $[x, x+H]$. Таким образом, выполнены пп.1,2 теоремы.

В обозначениях леммы 3.1.4 имеем $\tilde{w}_{x,k}^m(x+h) = W(h)$, и следовательно по формуле (3.1.7)

$$C_k^m \Delta(F+w)(x,y) = \frac{(m+k)!}{m!} \cdot \frac{F_{x,k}^m(y) + W(y-x)}{(y-x)^{m+k}} \geqslant 0$$

в силу п.4 леммы 3.3.1. Это доказывает п.3 настоящей теоремы.

Наконец, при $x < y < x+H$ и $h = y-x$, пользуясь выпуклостью вниз функций $W^{(l)}$ при $l = k, \dots, (m+k-2)$, п.5 леммы 3.3.1 и формулой (3.1.6), получаем

$$\begin{aligned}\tilde{w}(y) &= \frac{W^{(k)}(h)}{h^{m-1}} \leqslant \frac{hW^{(k+1)}(h)}{h^{m-1}} = \frac{W^{(k+1)}(h)}{h^{m-2}} \leqslant \dots \leqslant W^{(m+k-1)}(h) \leqslant \\ &\leqslant 2^{m+k}(m+k-2)! \sup_{x<t<x+H} \left|\frac{F_{x,k}^m(t-x)}{(t-x)^{m+k-1}}\right| = \\ &= \frac{2^{m+k}(m-1)!}{m+k-1} \sup_{x<t<x+H} \left|C_k^m F(x,t) - F(x)\right|,\end{aligned}$$

что доказывает п.4 теоремы. □

Замечание 3.3.3. Применяя теорему 3.3.2 к функции $F_x^*(t) = F(x-(t-x))$, можно также построить аналогичную функцию w для отрезка $[x-H, x]$. Если функция F является C_k-непрерывной на всем отрезке $[x-H, x+H]$, то и функцию w можно естественным образом распространить на весь отрезок $[x-H, x+H]$.

Теорема 3.3.4. *Пусть $k, m \geqslant 1$, действительная функция f определена на отрезке $[a, b]$, а C_k-непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция Ψ такова, что $C_k^m \underline{D}\Psi(x) \geqslant f(x)$ почти всюду на $[a, b]$, причем $C_k^m \underline{D}\Psi(x) > -\infty$ при всех $x \in (a, b)$, кроме, быть может, не более чем счетного числа точек $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная и неубывающая на $[a, b]$ функция W, что $\Psi + W$ есть $C_k^m P$-мажоранта для f на $[a, b]$ и $W(b) - W(a) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пользуясь C_k-непрерывностью функции Ψ, найдем такие $h^a > 0$ и $h^b > 0$, а также для всех точек x_j найдем такие $h_j > 0$, что

$$\begin{aligned} \sup_{a<t<a+h^a} \left|C_k^m F(a, t) - \Psi(a)\right| &< M\frac{\varepsilon}{2}, \\ \sup_{b-h^b<t<b} \left|C_k^m \Psi(b, t) - \Psi(b)\right| &< M\frac{\varepsilon}{2}, \\ \sup_{\substack{x_j-h_j<t<x_j+h_j \\ t\neq x_n}} \left|C_k^m \Psi(x_j, t) - \Psi(x_j)\right| &< M\frac{\varepsilon}{2^j}, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

где $M = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{m+k-1}{2^{m+k}(m-1)!}$ — константа, зависящая лишь от k и m.

Применяя теорему 3.3.2 в точках a, b и x_n, получим непрерывные и монотонно неубывающие на отрезках $[a, a+h^a]$, $[b-h^b, b]$ и $[x_j - h_j, x_j + h_j]$ функции w^a, w^b и w_j. Продолжим эти функции на весь отрезок $[a, b]$ постоянным значением, равным значению этих функций в соответствующем конце их первоначальной области определения. Определим функцию

$$w(x) = w^a(x) + w^b(x) + \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x).$$

Согласно п.4 теоремы 3.3.2 в силу оценок (3.3.2) имеем

$$w(b) - w(a) < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно п.3 теоремы 3.3.2 в силу монотонности w^a, w^b и w_j имеем $C_k^m \Delta(\Psi + w)(x, y) \geqslant 0$ при $x = a, b, x_j$, как только $y \in [a, b]$ достаточно близок к x. Отсюда следует, что для этих x выполняется неравенство $C_k^m \underline{D}(\Psi + w)(x) \geqslant 0$. В частности, для всех $x \in [a, b]$ имеет место оценка $C_k^m \underline{D}(\Psi + w)(x) > -\infty$.

Пусть теперь E — множество точек, в которых $C_k^m \underline{D}(\Psi + w)(x) < f(x)$. Это множество состоит из точек, где $C_k^m \underline{D}\Psi(x) < f(x)$, и, быть может, точек a, b и x_j, и потому имеет меру нуль по Лебегу. По теореме 2.1.13 существует такая функция v на отрезке $[a, b]$, что $C_k^m \underline{D}v(x) = +\infty$ при

$x \in E$, и при этом $v(b) - v(a) < \varepsilon/4$. Тогда имеем $C_k^m\underline{D}(F + w + v)(x) = +\infty > f(x)$ при $x \in E$, откуда следует, что $C_k\underline{D}(\Psi + w + v)(x) \geqslant f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Таким образом, функция

$$W(x) = v(x) + w(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x - a)$$

удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, имеем $W(b) - W(a) < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon$ и $C_k\underline{D}(\Psi + W)(x) \geqslant f(x) + \varepsilon/(4(b - a)) > f(x)$, что и требовалось. □

Из теоремы 3.3.4 видно, что в определении C_k^mP-мажоранты достаточно требовать выполнения неравенства $C_k^m\underline{D}\Psi(x) \geqslant f(x)$ лишь почти всюду, при условии, что множество точек x, в которых $C_k^m\underline{D}\Psi(x) = -\infty$, не более чем счетно.

Глава 4

Применения к теории интеграла Беркиля

4.1 О свойствах Коши и Гарнака

Одним из важных свойств C_kP-интеграла, отмеченных в [21], которые нам в дальнейшем понадобятся для доказательства теоремы Марцинкевича, является замкнутость C_kP-интеграла относительно операций, известных как обобщения в смысле Коши и в смысле Гарнака (см. также [26, гл. VIII §4]). В силу теоремы 3.2.10 эти результаты переносятся на C_k^mP-интеграл.

Тем не менее, в [21] при доказательстве теоремы X допущена ошибка: на странице 244 при доказательстве C_k-непрерывности функции φ имеется неявная отсылка на теорему II, которая сама, с учетом поправки в конце статьи, заранее требует выполнения условия C_k-непрерывности для соответствующей функции.

Мы предоставим прямое доказательство этих свойств для C_k^mP-интеграла, не пользуясь уже установленной эквивалентностью C_kP-интегралу.

Теорема 4.1.1 представляет собой теорему типа Хаке для C_k^mP-интеграла. Она утверждает, что для C_k^mP-интеграла нет смысла вводить "обобщение по Коши" — несобственный интеграл. В силу эквивалентности C_k^mP-интеграла C_kP-интегралу эта теорема не требует отдельного доказательства помимо данного в [36]; однако оно оказывается достаточно простым благодаря теореме 3.3.4.

Теорема 4.1.1. *Если функция f является C_k^mP-интегрируемой на всех подотрезках $[a,b'] \subset [a,b)$, и неопределенный C_k^mP-интеграл F функции f имеет левый C_k-предел в точке b, то функция f является C_k^mP-интегрируемой на всем отрезке $[a,b]$, и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (C_k)\lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)\,dx$$

Доказательство. Возьмем последовательность точек $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, монотонно возрастающую к b при $n \to \infty$, причем $b_1 = a$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Функция f интегрируема на отрезке $[b_n, b_{n+1}]$, поэтому существуют такие мажоранта Ψ_n и миноранта ψ_n функции f на $[b_n, b_{n+1}]$, что

$$\Big(\Psi_n(b_{n+1}) - F(b_{n+1})\Big) - \Big(\Psi_n(b_n) - F(b_n)\Big) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$
$$\Big(F(b_{n+1}) - \psi_n(b_{n+1})\Big) - \Big(F(b_n) - \psi_n(b_n)\Big) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

причем $\Psi_n(b_{n+1}) = \Psi_{n+1}(b_n)$, $\psi_n(b_{n+1}) = \psi_{n+1}(b_n)$, $\Psi_1(a) = \psi_1(a) = 0$. Пусть функции Ψ и ψ равны Ψ_n и ψ_n соответственно на отрезке $[b_n, b_{n+1}]$. Тогда функции $\Psi - F$ и $F - \psi$ монотонно неубывают на $[a, b]$ и ограничены на нем числом $\varepsilon/2$, поэтому их можно доопределить по непрерывности в точке b. Но поскольку F имеет левый C_k-предел в точке b, то и функции Ψ и ψ можно доопределить в точке b до C_k-непрерывных на $[a, b]$ функций. Таким образом, C_k-непрерывные функции Ψ и ψ таковы, что $C_k^m \underline{D}\Psi(x) \geqslant f(x) \geqslant C_k^m \overline{D}\psi(x)$ для всех x из $[a, b]$, кроме, быть может, b и всех или некоторых b_n. Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ по теореме 3.3.4 функция f интегрируема и

$$\int_a^b f(x) = (C_k) \lim_{b' \to b} \Big(F(b') - F(a)\Big),$$

что и требовалось. □

Теперь докажем замкнутость $C_k^m P$-интеграла относительно “обобщения по Гарнаку”, исправив тем самым ошибку в теореме X работы [21], где была допущена неточность при доказательстве C_k-непрерывности функции, обозначенной в [21] как ϕ (а ниже — буквой Ψ): неявное использование теоремы II оказывается некорректным, поскольку, как отмечено в конце второй части [21], она сама уже предполагает C_k-непрерывность функции. Вместо этого мы докажем C_k-непрерывность этой функции вручную, пользуясь разложением (4.1.7).

Теорема 4.1.2. *Пусть функция f и замкнутое подмножество Q отрезка $[a, b]$ таковы, что f является $C_k^m P$-интегрируемой на Q, $n = 1, 2, \ldots$, а также на замыканиях $[a_n, b_n]$ смежных интервалов множества Q, дополняющих его до отрезка $[a, b]$, и имеет на них неопределенные интегралы F_n, причем*

$$\sum_n \sup_{a_n < x < b_n} \Big| C_k^m F_n(a_n, x) - F_n(a_n) \Big| < \infty,$$
$$\sum_n \sup_{a_n < x < b_n} \Big| C_k^m F_n(b_n, x) - F_n(b_n) \Big| < \infty.$$

Тогда функция f является $C_k^m P$-интегрируемой на всем отрезке $[a,b]$, и имеет место формула

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_Q f(t)\,dt + \sum_n \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,dt, \tag{4.1.1}$$

причем последний ряд сходится абсолютно.

Доказательство. Будем считать известными следующие утверждения из работы [21].

Лемма 4.1.3 (Саржент[21, “свойство D”])**.** *Пусть функция F и замкнутое подмножество Q отрезка $[a,b]$ таковы, что F абсолютно непрерывна на Q и $C_{k-1}P$-интегрируема на замыканиях $[a_n,b_n]$ смежных интервалов множества Q, дополняющих его до отрезка $[a,b]$, причем*

$$\sum_n \sup_{a_n<x<b_n} \Big| C_k F(a_n,x) - F(a_n) \Big| < \infty,$$

$$\sum_n \sup_{a_n<x<b_n} \Big| C_k F(b_n,x) - F(b_n) \Big| < \infty.$$

Тогда функция F является $C_{k-1}P$-интегрируемой на всем отрезке $[a,b]$, и для любого целого $l \geqslant 1$ имеем

$$(C_{k-1}P)\int_a^b (b-t)^{l-1}F(t)\,dt = \int_Q (b-t)^{l-1}F(t)\,dt + \\ + \sum_n (C_{k-1}P)\int_{a_n}^{b_n} (b-t)^{l-1}F(t)\,dt.$$

Доказательство леммы 4.1.3 само использует теорему 4.1.2, но только для C_kP-интеграла при *предыдущем* значении k, т.е. содержит шаг индукции. Поскольку теорема 4.1.2 общеизвестна для базы индукции — классического интеграла Перрона [26, гл. VIII, лемма 3.4], лемму 4.1.3 также можно считать надежной.

Лемма 4.1.4 (Саржент[21, лемма 3])**.** *Для всякого $k \geqslant 1$ существует константа H, зависящая лишь от k, что как только для некоторой $C_{k-1}P$-интегрируемой на отрезке $[a,b]$ функции F конечно число*

$$\omega = \max\left\{ \sup_{a<x<b} \Big| C_k F(a,x) - F(a) \Big|,\ \sup_{a<x<b} \Big| C_k F(b,x) - F(b) \Big| \right\},$$

то $|F(b)-F(a)| \leqslant H\omega$ и для любого $l \geqslant 1$ имеют место неравенства

$$\Big| C_l F(a,b) - F(a) \Big| \leqslant H\omega, \qquad \Big| C_l F(b,a) - F(b) \Big| \leqslant H\omega.$$

Приступим к доказательству теоремы 4.1.2. Очевидно, достаточно рассмотреть случай когда $f = 0$ на Q.

Поскольку функции F_n являются C_k-непрерывными на $[a_n, b_n]$, из теоремы 3.1.8 следует, что

$$\begin{aligned} \sum_n \sup_{a_n<x<b_n} \Big| C_k^p F_n(a_n, x) - F_n(a_n) \Big| < \infty, \\ \sum_n \sup_{a_n<x<b_n} \Big| C_k^p F_n(b_n, x) - F_n(b_n) \Big| < \infty. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

при $p = 1, 2, \ldots, m$. Объединяя оценки (4.1.2) при $p = 1$ и лемму 4.1.4, получим

$$\sum_n \Big| F_n(b_n) - F_n(a_n) \Big| = \sum_n \Big| \int_{a_n}^{b_n} f(t)\, dt \Big| < \infty, \tag{4.1.3}$$

т.е. ряд в формуле (4.1.1) действительно сходится абсолютно.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и найдем такие $C_k^m P$-мажоранты Ψ_n для f на $[a_n, b_n]$, что

$$\Big(\Psi_n(b_n) - \Psi_n(a_n)\Big) - \Big(F_n(b_n) - F_n(a_n)\Big) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

С учетом (4.1.3) имеем

$$\sum_n \Big| \Psi_n(b_n) - \Psi_n(a_n) \Big| < \sum_n \Big| F_n(b_n) - F_n(a_n) \Big| + \frac{\varepsilon}{4} < \infty.$$

С учетом (4.1.2) имеем

$$\begin{aligned} \sum_n \sup_{a_n<x<b_n} \Big| C_k^p \Psi_n(a_n, x) - \Psi_n(a_n) \Big| < \infty, \\ \sum_n \sup_{a_n<x<b_n} \Big| C_k^p \Psi_n(b_n, x) - \Psi_n(b_n) \Big| < \infty. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Далее, из (4.1.4) при $p = 1$, леммы 4.1.4 и леммы 3.1.2 следует, что при всех $l \geqslant 1$ и $p = 1, 2, \ldots, m$ сходятся ряды без верхних граней:

$$\begin{aligned} \sum_n \Big| C_l^p \Psi_n(a_n, b_n) - \Psi_n(a_n) \Big| < \infty, \\ \sum_n \Big| C_l^p \Psi_n(b_n, a_n) - \Psi_n(b_n) \Big| < \infty. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Применяя теорему 3.3.2, найдем для каждого смежного интервала и всех $p = 1, 2, \ldots, m$ такие вспомогательные неубывающие непрерывные на

$[a_n, b_n]$ функции u_n^p, что $C_k^p\Delta(\Psi_n + u_n^p)(a_n, x) \geqslant 0$ при $x \in [a_n, b_n]$, и при этом ряд из $u_n^p(b_n) - u_n^p(a_n)$ сходится, что возможно благодаря (4.1.4) и пункта 4) теоремы 3.3.2.

Также на каждом смежном интервале введем в рассмотрение линейную функцию $v_{n,0}(x) = |\Psi_n(b_n) - \Psi_n(a_n)|(x - a_n)/(b_n - a_n)$ и при $l = 1, 2, \dots, k$, $p = 1, 2, \dots, m$ линейные функции $v_{n,l}^p(x) = |C_l^p\Psi_n(a_n, b_n)|(x - a_n)/(b_n - a_n)$. Эти функции также неубывают и непрерывны, и ряды из их приращений на $[a_n, b_n]$ сходятся в силу (4.1.5).

Аналогичным образом построим неубывающие непрерывные функции $\tilde{u}_n^p$ так, что при $x \in [a_n, b_n]$ выполнены неравенства $C_k^p\Delta(\Psi_n + \tilde{u}_n^p)(b_n, x) \geqslant 0$ и при этом ряд из $\tilde{u}_n^p(b_n) - \tilde{u}_n^p(a_n)$ сходится. Пусть также $\tilde{v}_{n,l}^p(x) = |C_l^p\Psi_n(b_n, a_n)|(x - a_n)/(b_n - a_n)$.

Положим

$$w_n(x) = v_{n,0}(x) + \sum_{p=1}^{m}\left(u_n^p(x) + \tilde{u}_n^p(x) + \sum_{l=1}^{k}\Big(v_{n,l}^p(x) + \tilde{v}_{n,l}^p(x)\Big)\right).$$

Видно, что функции w_n обладают следующими свойствами:

1) $\sum\limits_n \big(w_n(b_n) - w_n(a_n)\big) < \infty$,

2) $\big(\Psi_n(b_n) + w_n(b_n)\big) - \big(\Psi_n(a_n) + w_n(a_n)\big) \geqslant 0$,

3) $C_l^p(\Psi_n + w_n)(a_n, b_n) - \big(\Psi_n(a_n) + w_n(a_n)\big) \geqslant 0$ при $l = 1, 2, \dots, k$ и $p = 1, 2, \dots, m$,

4) $C_l^p(\Psi_n + w_n)(b_n, a_n) - \big(\Psi_n(b_n) + w_n(b_n)\big) \leqslant 0$ при $l = 1, 2, \dots, k$ и $p = 1, 2, \dots, m$,

5) $C_k^p(\Psi_n + w_n)(a_n, x) - \big(\Psi_n(a_n) + w_n(a_n)\big) \geqslant 0$ при $p = 1, 2, \dots, m$ и $x \in [a_n, b_n]$,

6) $C_k^p(\Psi_n + w_n)(b_n, x) - \big(\Psi_n(b_n) + w_n(b_n)\big) \geqslant 0$ при $p = 1, 2, \dots, m$ и $x \in [a_n, b_n]$.

Действительно, свойство 1) следует из того, что сходятся приращения для всех вспомогательных функций, свойство 2) следует из определения $v_{n,0}$, свойства 3) и 4) следуют из определения $v_{n,l}^p$ и $\tilde{v}_{n,l}^p$ соответственно, свойства 5) и 6) — из определения u_n^p и $\tilde{u}_n^p$ соответственно.

Теперь найдем такое N, что

$$\sum_{n>N}\Big(w_n(b_n) - w_n(a_n)\Big) < \frac{\varepsilon}{4},$$

и определим функции G_n, которые равны Ψ_n при $n \leqslant N$ и $\Psi_n + w_n$ при $n > N$. Имеем $G_n(b_n) - G_n(a_n) \geqslant 0$ при $n > N$, но по-прежнему

$$\sum_n \Big(G_n(b_n) - G_n(a_n)\Big) < \infty. \tag{4.1.6}$$

Наконец, определим функцию

$$\Psi(x) = \sum_{b_n \leqslant x} \Big(G_n(b_n) - G_n(a_n)\Big) + \Big(G_q(x) - G_q(a_q)\Big),$$

где последнее слагаемое присутствует лишь в случае $x \in (a_q, b_q)$ и опущено при $x \in Q$. Покажем, что функция Ψ является $C_k^m P$-мажорантой для функции f на $[a, b]$, во всяком случае, в смысле теоремы 3.3.4.

Очевидно, что функция Ψ является C_k-непрерывной для всех x из отрезков $[a_n, b_n]$, а также что $C_k^m \underline{D}\Psi(x) \geqslant f(x)$ для всех x внутри (a_n, b_n). Возьмем любую точку $x \in Q$, не совпадающую с точкой b и ни с одной из a_n, и покажем, что Ψ является C_k-непрерывной справа в точке x и $C_k^m \underline{D}_+ \Psi(x) \geqslant f(x) = 0$.

Из (4.1.6) следует, что функция Ψ абсолютно непрерывна на Q. Далее, из (4.1.4) при $p = 1$ и свойства 1) функций w_n следует, что

$$\sum_n \sup_{a_n < x < b_n} \Big| C_k \Psi(a_n, x) - \Psi(a_n) \Big| < \infty,$$
$$\sum_n \sup_{a_n < x < b_n} \Big| C_k \Psi(b_n, x) - \Psi(b_n) \Big| < \infty.$$

Таким образом, мы можем для любого $h \in (0, b - x)$ применить лемму 4.1.3 к функции Ψ и множеству $Q_h = Q \cap [x, x+h]$ на отрезке $[x, x+h]$, и с учетом формулы (3.1.3) получим равенство

$$\begin{aligned} C_k^p \Psi(x, x+h) - \Psi(x) = \frac{1}{h} \int_{Q_h} \varphi_k^p \left(\frac{t-x}{h}\right) \Big(\Psi(t) - \Psi(x)\Big)\, dt\, + \\ + \sum_{(a_n, b_n) \subset (x, x+h)} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_k^p \left(\frac{t-x}{h}\right) \Big(\Psi(t) - \Psi(x)\Big)\, dt\, + \\ + \int_{a_q}^{x+h} \varphi_k^p \left(\frac{t-x}{h}\right) \Big(\Psi(t) - \Psi(x)\Big)\, dt, \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

где последнее слагаемое присутствует лишь при $x + h \in (a_q, b_q)$.

Возьмем любое $\gamma > 0$ и найдем такое $N' > N$, что

$$\sum_{n > N'} \left(\sup_{a_n < x < b_n} \Big| C_k \Psi(a_n, x) - \Psi(a_n) \Big| + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \Big| C_l \Psi(a_n, b_n) - \Psi(a_n) \Big| \right) < \gamma/3, \tag{4.1.8}$$

а затем $\delta > 0$ такое, что отрезок $[x, x+\delta]$ содержится в интервале (a, b) и не пересекается ни с одним из интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_{N'}, b_{N'})$, а при $t \in Q_\delta$ выражение $|\Psi(t) - \Psi(x)|$ не превосходит $\gamma/3$.

Пусть $h \in (0, \delta)$. Рассмотрим отдельно каждое из слагаемых в формуле (4.1.7) при $p = 1$.

Для первого слагаемого имеем

$$\left|\frac{1}{h}\int_{Q_h} \varphi_k\left(\frac{t-x}{h}\right)\Big(\Psi(t) - \Psi(x)\Big)\,dt\right| \leqslant \frac{\gamma}{3h}\int_{Q_h} \varphi_k\left(\frac{t-x}{h}\right)\,dt = J.$$

Пользуясь тем, что $|\Psi(t) - \Psi(x)| \leqslant |\Psi(t) - \Psi(a_n)| + |\Psi(a_n) - \Psi(x)| \leqslant |\Psi(t) - \Psi(a_n)| + \gamma/3$ при $a_n \in [x, x+h]$ и $0 < x + h - b_n < h$ при $b_n \in [x, x+h]$, для второго слагаемого получаем

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\int_{a_n}^{b_n} \varphi_k\left(\frac{t-x}{h}\right)\Big(\Psi(t) - \Psi(x)\Big)dt\right| \leqslant \\
&\quad\leqslant I_n + \left|\frac{k}{h^k}\int_{a_n}^{b_n}(x+h-t)^{k-1}\Big(\Psi(t) - \Psi(a_n)\Big)dt\right| \leqslant \\
&\quad\leqslant I_n + \sum_{l=1}^{k}\binom{k-1}{l-1}\frac{k(x+h-b_n)^{k-l}}{lh^{k-l}}\left|\frac{l}{h^l}\int_{a_n}^{b_n}(b_n-t)^{l-1}\Big(\Psi(t) - \Psi(a_n)\Big)dt\right| \leqslant \\
&\quad\leqslant I_n + \sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}\Big|C_l\Psi(a_n, b_n) - \Psi(a_n)\Big|,
\end{aligned}$$

где $I_n = \dfrac{\gamma}{3h}\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} \varphi_k\left(\frac{t-x}{h}\right)\,dt.$

Третье слагаемое оценивается похожим образом:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\int_{a_q}^{x+h} \varphi_k\left(\frac{t-x}{h}\right)\Big(\Psi(t) - \Psi(x)\Big)\,dt\right| \leqslant \\
&\qquad\leqslant I_q + \left|\frac{k}{h^k}\int_{a_q}^{x+h}(x+h-t)^{k-1}\Big(\Psi(t) - \Psi(a_n)\Big)\,dt\right| \leqslant \\
&\qquad\leqslant I_q + \frac{(x+h-a_q)^{k-1}}{h^{k-1}}\sup_{a_q<t<b_q}\Big|C_k\Psi(a_q, t) - \Psi(a_q)\Big| \leqslant \\
&\qquad\leqslant I_q + \sup_{a_q<t<b_q}\Big|C_k\Psi(a_q, t) - \Psi(a_q)\Big|,
\end{aligned}$$

где $I_q = \dfrac{\gamma}{3h}\displaystyle\int_{a_q}^{x+h} \varphi_k\left(\frac{t-x}{h}\right)\,dt.$

Окончательно при $h \in (0,\delta)$ с учетом (4.1.8) имеем

$$\Big|C_k^p\Psi(x,x+h)-\Psi(x)\Big| \leqslant \left(J+\sum_{(a_n,b_n)\subset(x,x+h)} I_n + I_q\right)+$$
$$+\sum_{(a_n,b_n)\subset(x,x+h)}\binom{k}{l}\Big|C_k\Psi(a_n,b_n)-\Psi(a_n)\Big| + \sup_{a_q<t<b_q}\Big|C_k\Psi(a_q,t)-\Psi(a_q)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\gamma}{3}+\sum_{n>N'}\left(\sup_{a_n<x<b_n}\Big|C_k\Psi(a_n,x)-\Psi(a_n)\Big|+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}\Big|C_l\Psi(a_n,b_n)-\Psi(a_n)\Big|\right)<\gamma.$$

Это доказывает, что функция Ψ является C_k-непрерывной в точке x.

Для доказательства неравенства $C_k^m\underline{D}_+\Psi(x)\geqslant 0$ рассмотрим формулу (4.1.7) при $p=m$. Согласно второму свойству w_n, функция Ψ является неубывающей вдоль Q_h, следовательно в силу неотрицательности φ_k^m первое слагаемое в этой формуле неотрицательно.

Далее, если у нас есть интервал $(a_n,b_n)\subset(x,x+h)$, то вновь ввиду неубывания Ψ на множестве Q_h имеем $\Psi(a_n)\geqslant\Psi(x)$. Поэтому, применяя формулу бинома Ньютона для $((t-a_n)+(a_n-x))^{m-1}$ и $((x+h-b_n)+(b_n-t))^{k-1}$, для второго слагаемого получаем

$$\frac{1}{h}\int_{a_n}^{b_n}\varphi_k^m\left(\frac{t-x}{h}\right)\Big(\Psi(t)-\Psi(x)\Big)\,dt \geqslant \frac{1}{h}\int_{a_n}^{b_n}\varphi_k^m\left(\frac{t-x}{h}\right)\Big(\Psi(t)-\Psi(a_n)\Big)\,dt =$$
$$=\frac{1}{h^{m+k-1}B(m,k)}\int_{a_n}^{b_n}(t-x)^{m-1}(x+h-t)^{k-1}\Big(\Psi(t)-\Psi(a_n)\Big)\,dt=$$
$$=\sum_{p=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{\binom{m-1}{p-1}\binom{k-1}{l-1}(a_n-x)^{m-p}(x+h-b_n)^{k-l}(b_n-a_n)^{p+l-1}B(p,l)}{h^{m+k-1}B(m,k)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\int_{a_n}^{b_n}\frac{(t-a_n)^{p-1}(b_n-t)^{l-1}}{(b_n-a_n)^{p+l-1}B(p,l)}\Big(\Psi(t)-\Psi(a_n)\Big)\,dt\right)=$$
$$=\sum_{p=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\varkappa_l^p\Big(C_l^p\Psi(a_n,b_n)-\Psi(a_n)\Big),$$

где $\varkappa_l^p\geqslant 0$, следовательно с учетом свойства 3) функций w_n все второе слагаемое также неотрицательно.

Наконец, в случае $x \leqslant a_q < x+h < b_q$ вновь имеем $\Psi(a_q) \geqslant \Psi(x)$, и поэтому

$$\frac{1}{h}\int_{a_q}^{x+h} \varphi_k^m\left(\frac{t-x}{h}\right)\Big(\Psi(t)-\Psi(x)\Big)\,dt \geqslant \frac{1}{h}\int_{a_q}^{x+h} \varphi_k^m\left(\frac{t-x}{h}\right)\Big(\Psi(t)-\Psi(a_q)\Big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{h^{m+k-1}B(m,k)}\int_{a_q}^{x+h}(t-x)^{m-1}(x+h-t)^{k-1}\Big(\Psi(t)-\Psi(a_q)\Big)\,dt =$$

$$= \sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\binom{m-1}{p-1}(a_q-x)^{m-p}(x+h-a_q)^{p+k-1}B(p,k)}{h^{k+m-1}B(m,k)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{a_q}^{x+h}\frac{(t-a_q)^{p-1}(x+h-t)^{k-1}}{(x+h-a_q)^{p+k-1}B(p,k)}\Big(\Psi(t)-\Psi(a_q)\Big)\,dt\right) =$$

$$= \sum_{p=1}^{m}\varkappa^p\Big(C_k^p\Psi(a_q,x+h)-\Psi(a_q)\Big),$$

где $\varkappa^p \geqslant 0$, следовательно с учетом свойства 5) функций w_n третье слагаемое также неотрицательно.

Окончательно получаем $C_k^m\Psi(x,x+h)-\Psi(x) \geqslant 0$ при $h \in (0,\delta)$. Следовательно, $C_k^m\underline{D}_+\Psi(x) \geqslant 0$ при $x \in Q$, кроме, быть может, точек a, b, a_n, b_n.

Аналогично проверяется, что функция Ψ непрерывна слева всюду на $[a,b]$, и равенство $C_k^m\underline{D}_-\Psi(x) \geqslant f(x)$ выполняется всюду на $[a,b]$, кроме, быть может, точек a, b, a_n, b_n. При этом будут использоваться свойства 4) и 6) функций w_n.

При этом функция Ψ построена так, что приращение Ψ на $[a,b]$ отличается от правой части формулы (4.1.1) менее чем на $\varepsilon/2$. Следовательно, по теореме 3.3.4 существует функция Ψ^*, являющаяся C_k^mP-мажорантой для функции f на $[a,b]$, приращение которой также отличается от правой части формулы (4.1.1) менее чем на $\varepsilon/2$. C_k^mP-миноранта ψ^* для f на $[a,b]$ строится аналогичным образом, что и доказывает C_k^mP-интегрируемость f и формулу (4.1.1). □

4.2 Связь с широким интегралом Данжуа

В этом и следующем параграфе мы впервые перенесем некоторые результаты работы [18] на C_kP-интеграл при $k>1$.

Напомним дескриптивное определение широкого интеграла Данжуа.

Определение 4.2.1 (см.[26]). Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция f, непрерывная на отрезке $[a,b]$, называется ACG-функцией на $[a,b]$, если существует такой не более чем счетный набор множеств $E_n \subset [a,b]$, что

$\bigcup_n E_n = [a,b]$ и f абсолютно непрерывна на каждом из E_n. Функция f, определенная на отрезке $[a,b]$, называется *D-интегрируемой*, если существует такая ACG-функция F на $[a,b]$, что $F'_{\text{ap}}(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$; при этом функция F называется *неопределенным D-интегралом* функции f на $[a,b]$.

Пользуясь результатами работы [21] и теоремой 2.2.3, покажем, что C_kP-интеграл не противоречит широкому интегралу Данжуа.

Определение 4.2.2 (Саржент[21, определения 5, 6, 7, теоремы II, V])**.** Пусть $k \geqslant 1$. C_k-непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция F называется C_k-AC$_*$*-функцией* на замкнутом множестве $Q \subset [a,b]$ со смежными интервалами $\{(a_i,b_i)\}$, если F абсолютно непрерывна на Q и

$$\sum_i \sup_{a_i<x<b_i} \Big| C_kF(a_i,x) - F(a_i) \Big| < \varepsilon,$$
$$\sum_i \sup_{a_i<x<b_i} \Big| C_kF(b_i,x) - F(b_i) \Big| < \varepsilon.$$

Функция F называется C_k-ACG$_*$*-функцией* на $[a,b]$, если она C_k-непрерывна на $[a,b]$ и всякое замкнутое множество $Q \subset [a,b]$ содержит порцию $P = Q \cap [c,d] \neq \varnothing$, где $c = \min P$ и $d = \max P$, на которой F есть C_k-AC$_*$-функция. Функция f, определенная на отрезке $[a,b]$, называется *C_kD_*-интегрируемой*, если существует такая C_k-ACG$_*$-функция F на $[a,b]$, что $C_kDF(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$; при этом функция F называется *неопределенным C_kD_*-интегралом* функции f на $[a,b]$.

В [21], с учетом поправок в [22], доказано, что C_kD_*-интеграл эквивалентен C_kP-интегралу: всякая C_kP-интегрируемая функция является C_kD_*-интегрируемой, и наоборот, и неопределенный C_kP-интеграл совпадает с неопределенным C_kD_*-интегралом с точностью до константы.

Теорема 4.2.3. *Если $k \geqslant 1$ и функция f является C_kP-интегрируемой на отрезке $[a,b]$ с неопределенным C_kP-интегралом F, то F является* VBG*-функцией на $[a,b]$, и аппроксимативная производная $F'_{\text{ap}}(x)$ существует и равна $f(x)$ для почти всех $x \in [a,b]$.*

Доказательство. Очевидно, что всякая C_k-ACG$_*$-функция является VBG-функцией и измерима по Лебегу (будучи C_k-непрерывной), в частности, почти всюду имеет аппроксимативную производную [26, гл.VII, §5].

Поскольку $C_kDF(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$, по теореме 3.1.9 имеем $C_k^kDF(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Но по теореме 2.2.3, в силу симметрии ядра усреднения $\varphi_k^k(s)$, имеем равенство $F'_{\text{ap}}(x) = C_k^kDF(x) = f(x)$ почти везде, где аппроксимативная производная существует. Таким образом, $F'_{\text{ap}}(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$, что и требовалось. $\square$

Замечание 4.2.4. Как мы видели в теореме 1.3.5, не всякая C_kP-мажоранта является VBG-функцией. Однако из теоремы 4.2.3 следует, что всякая C_kP-мажоранта C_kP-интегрируемой функции является VBG-функцией, поскольку она отличается от неопределенного C_kP-интеграла на монотонную функцию.

Теорема 4.2.5. *Если $k \geqslant 1$ и функция f является одновременно C_kP-интегрируемой на отрезке $[a,b]$ с неопределенным C_kP-интегралом F_1 и D-интегрируемой на $[a,b]$ с неопределенным D-интегралом F_2, то функция $H(x) = F_1(x) - F_2(x)$ является постоянной на всем $[a,b]$.*

Доказательство. Поскольку F_1 является C_k-непрерывной функцией на $[a,b]$, а F_2 непрерывна на $[a,b]$ в обычном смысле, можно утверждать, что и функция H является C_k-непрерывной на $[a,b]$. Далее, из предыдущей теоремы следует, что $H'_{\text{ap}} = 0$ почти всюду на $[a,b]$.

Пусть H не является постоянной, и Q — множество точек $[a,b]$, не содержащихся ни в одном интервале постоянства функции H. Множество Q, очевидно, замкнуто, и H постоянна на каждом смежном интервале множества Q, а в силу C_k-непрерывности — и на замыкании каждого смежного интервала Q. В частности, множество Q не содержит изолированных точек, т.е. является совершенным множеством.

Предположим, что Q не пусто. Тогда найдется порция $P = Q \cap [c,d] \neq \varnothing$, где $c = \min P$ и $d = \max P$, на которой $F_1(x)$ есть C_k-AC$_*$-функция. В частности, $F_1(x)$ абсолютно непрерывна на P. Поскольку F_2 заведомо является ACG-функцией на P, функция H также является ACG-функцией на P. Но H является постоянной на смежных интервалах множества P, дополняющих его до отрезка $[c,d]$, следовательно, H есть ACG-функция на $[c,d]$. Но так как $H'_{\text{ap}} = 0$ почти всюду на $[a,b]$, из этого следует [26, гл.VII, §6], что H постоянна на $[c,d]$, что противоречит непустоте порции P. Противоречие возникло из предположения, что Q не пусто. Следовательно, Q пусто, а это и означает, что H постоянна на $[a,b]$. □

Теорема 4.2.5 позволяет, в частности, получить следующее обобщение теоремы Валле–Пуссена для широкого интеграла Данжуа.

Теорема 4.2.6. *Пусть $k \geqslant 0$ и некоторый тригонометрический ряд ограничен в смысле Чезаро (C,k) всюду на $[-\pi,\pi]$ вместе с сопряженным рядом и суммируется методом Чезаро (C,k) почти всюду к некоторой D-интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ функции f. Тогда коэффициенты этого тригонометрического ряда вычисляются по функции f по формулам Фурье, в которых интеграл понимается как D-интеграл.*

Доказательство. Мы находимся в условиях теоремы Кросса [14]. Следовательно, функция f является $C_{k+1}P$-интегрируемой, и имеют место формулы Фурье в смысле $C_{k+1}P$-интеграла. Но поскольку f также является и

D-интегрируемой, то по теореме 4.2.5 ее D-интеграл совпадает с $C_{k+1}P$-интегралом. Таким образом, формулы Фурье имеют место и в смысле D-интеграла тоже. □

4.3 Теорема Марцинкевича для C_kP-интеграла

Докажем теорему типа Марцинкевича для C_kP-интеграла Беркиля. В нижеследующем рассуждении мы вновь пользуемся возможностью рассмотреть C_k^k-производную вместо C_k-производной и, следовательно, применить теоремы 2.2.3 и 2.2.5.

Теорема 4.3.1. *Пусть $k, m \geqslant 1$, и у функции f, измеримой по Лебегу на отрезке $[a, b]$, есть хотя бы одна C_k^mP-мажоранта Ψ и хотя бы одна C_k^mP-миноранта ψ на $[a, b]$. Тогда f является C_k^mP-интегрируемой на $[a, b]$.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему 4.3.1 для C_k^kP-интеграла. В самом деле, по теореме 3.1.9 функции Ψ и ψ являются C_k^1P-мажорантой и минорантой для f, следовательно по лемме 3.2.9 найдутся функции Ψ^* и ψ^*, являющиеся C_k^kP-мажорантой и минорантой для f, и если теорема 4.3.1 уже установлена для $m = k$, то из этого будет следовать C_k^mP-интегрируемость f при $m = k$, а следовательно и при любом m в силу теоремы 3.2.10.

Итак, мы имеем C_k^kP-мажоранту Ψ и C_k^kP-миноранту ψ для функции f на $[a, b]$. Пусть Q — множество точек отрезка $[a, b]$, ни в какой окрестности которых f не является C_k^kP-интегрируемой.

Очевидно, что множество Q замкнуто, и что f интегрируема на любом отрезке, свободном от точек Q. Докажем, что Q пусто.

Пусть Q не пусто, (α, β) — некоторый смежный интервал Q, функция F есть неопределенный интеграл от f на (α, β). Функция $\Psi - F$ является неубывающей на (α, β) и, с другой стороны, ограничена в окрестности точки β: действительно, взяв любую точку $\gamma \in (\alpha, \beta)$, для всех $x \in (\gamma, \beta)$ имеем $\Psi(x) - F(x) \leqslant \psi(\gamma) - \psi(x) + \Psi(x) - F(\gamma)$. Таким образом, функция F имеет C_k-предел в точке β. Аналогично доказывается, что функция F имеет C_k-предел в точке α. Следовательно, согласно теореме 4.1.1, функция F является C_k^kP-интегрируемой на всем отрезке $[\alpha, \beta]$. Из этого, в частности, следует, что множество Q не содержит изолированных точек.

Пользуясь теоремой 2.2.5 и теоремой Бэра, найдем такую порцию $P = Q \cap [c, d] \neq \varnothing$ множества Q, где $c = \min P$ и $d = \max P$, что функции Ψ и ψ имеют ограниченную вариацию на P, и для некоторого числа $K > 0$ для любой системы непересекающихся интервалов $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^p$ с концами на P

имеют место оценки

$$\sum_{j=1}^{p} \inf_{a_j<x<b_j} \Big(C_k^k \Psi(a_j,x) - \Psi(a_j)\Big) \geqslant -K,$$

$$\sum_{j=1}^{p} \inf_{a_j<x<b_j} \Big(\Psi(b_j) - C_k^k \Psi(b_j,x)\Big) \geqslant -K,$$

$$\sum_{j=1}^{p} \sup_{a_j<x<b_j} \Big(C_k^k \psi(a_j,x) - \psi(a_j)\Big) \leqslant K,$$

$$\sum_{j=1}^{p} \sup_{a_j<x<b_j} \Big(\psi(b_j) - C_k^k \psi(b_j,x)\Big) \leqslant K.$$

Поскольку функции ψ и Ψ имеют ограниченную вариацию на P, они почти всюду на P имеют аппроксимативные производные, интегрируемые по Лебегу на P [26, §VII.4]. По теореме 2.2.3 имеем $\psi'_{\rm ap}(x) \leqslant C_k^k\overline{D}\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant C_k^k\underline{D}\Psi(x) \leqslant \Psi'_{\rm ap}(x)$. Следовательно, функция f, будучи измеримой, интегрируема по Лебегу на P, а значит и C_k^kP-интегрируема на P.

Пусть теперь $\{(c_n,d_n)\}_n$ есть смежные интервалы, дополняющие множество P до отрезка $[c,d]$. Пусть F_n есть неопределенный интеграл функции f на $[c_n,d_n]$. Тогда при $c_n<x<d_n$ имеем оценку

$$\begin{aligned}
C_k^k F_n(c_n,x) - F_n(c_n) &= \frac{1}{x-c_n}\int_{c_n}^{x} \varphi_k^k\left(\frac{t-c_n}{x-c_n}\right) F_n(t)\,dt - F_n(c_n) = \\
&= \frac{1}{x-c_n}\int_{c_n}^{x} \varphi_k^k\left(\frac{t-c_n}{x-c_n}\right) \Big(\Psi(t)-\Psi(c_n)\Big)\,dt + \Psi(c_n) - \\
&\qquad - \frac{1}{x-c_n}\int_{c_n}^{x} \varphi_k^k\left(\frac{t-c_n}{x-c_n}\right) \Big(\Psi(t)-F_n(t)\Big)\,dt - F_n(c_n) \geqslant \\
&\geqslant \Big(C_k^k\Psi(c_n,x) - \Psi(c_n)\Big) + \Psi(c_n) - \Big(\Psi(d_n)-F_n(d_n)\Big) - F_n(c_n) \geqslant \\
&\geqslant \Big(C_k^k\Psi(c_n,x) - \Psi(c_n)\Big) - \Big[\Big(\Psi(d_n)-\psi(d_n)\Big) - \Big(\Psi(c_n)-\psi(c_n)\Big)\Big],
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\sum_{n} \inf_{c_n<x<d_n} \Big(C_k^k F_n(c_n,x) - F_n(c_n)\Big) \geqslant \\
&\qquad \geqslant -K - \Big[\Big(\Psi(b)-\psi(b)\Big) - \Big(\Psi(a)-\psi(a)\Big)\Big] > -\infty.
\end{aligned}$$

Аналогично доказываются три других оценки:

$$\sum_n \inf_{c_n<x<d_n} \Big(F_n(d_n) - C_k^k F_n(d_n, x)\Big) > -\infty,$$
$$\sum_n \sup_{c_n<x<d_n} \Big(C_k^k F_n(c_n, x) - F_n(c_n)\Big) < +\infty,$$
$$\sum_n \sup_{c_n<x<d_n} \Big(F_n(d_n) - C_k^k F_n(d_n, x)\Big) < +\infty.$$

Объединяя имеющиеся факты, получим, что функция f является $C_k^k P$-интегрируемой на множестве P и на замыканиях смежных интервалов $[c_n, d_n]$, дополняющих множество P до отрезка $[c, d]$, и для неопределенных интегралов F_n функции f на $[c_n, d_n]$ выполняются оценки

$$\sum_n \sup_{c_n<x<d_n} \Big|C_k^k F_n(c_n, x) - F_n(c_n)\Big| < \infty,$$
$$\sum_n \sup_{c_n<x<d_n} \Big|F_n(d_n) - C_k^k F_n(d_n, x)\Big| < \infty.$$

Согласно теореме 4.1.2 отсюда следует, что функция f является $C_k^k P$-интегрируемой на отрезке $[c, d]$. Но это противоречит наличию в отрезке $[c, d]$ точек множества P, и, следовательно, множества Q, ни в какой окрестности которых функция f не $C_k^k P$-интегрируема. Противоречие возникло из-за предположения о непустоте множества Q. Следовательно, множество Q пусто, что и означает $C_k^k P$-интегрируемость функции на всем отрезке $[a, b]$. □

Литература

1. A. Denjoy. Une extension de l’intégrale de M. Lebesgue // Comptes Rendus de l’Acad. des Sciences á Paris. 1912. T. 154. C. 859–862.

2. O. Perron. Ueber den Integralbegriff // S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1914. T. 16.

3. R. Henstock. Riemann-type integral of Lebesgue power // Canad. J. Math. 1968. T. 20, № 1. C. 79–87.

4. J.C. Burkill. The Cesàro–Perron integral // Proc. London Math. Soc. 1932. T. 34, № 4. C. 314–322.

5. J.C. Burkill. The Cesàro–Perron scale of integration // Proc. London Math. Soc. 1935. T. 39, № 7. C. 541–552.

6. R.D. James. Generalized nth primitives // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. T. 76, № 1. C. 149–176.

7. P.S. Bullen. The P^n-integral // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. T. 14. C. 219–236.

8. Ch.J. Vallée-Poussin. Sur l’unicité du développement trigonométrique // Bull. Acad. Roy. de Belg. 1912. C. 702–718.

9. A. Denjoy. Leçons sur le calcul des coefficients d’une série trigonométrique. Paris, 1941–1949.

10. R.D. James. Integrals and summable trigonometric series // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. T. 76, № 1. C. 1–15.

11. R.D. James. Summable trigonometric series // Pacif. J. Math. 1956. T. 6, № 1. C. 99–110.

12. J.C. Burkill. Integrals and trigonometrical series // Proc. London Math. Soc. 1951. T. 1. C. 46–57.

13. B.S. Thomson. Symmetric properties of real function // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 1994. T. 183.

14. G. Cross. The expression of trigonometrical series in Fourier form // Canad. J. Math. 1960. T. 12. C. 694–698.

15. P.S. Bullen, C.M. Lee. The SC_nP-integral and the P^{n+1}-integral // Canad. J. Math. 1973. T. 25. C. 1274–1284.

16. G. Cross. The $SC_{k+1}P$-integral and trigonometric series // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. T. 69, № 2.

17. В.А. Скляренко. Об интегрируемых по Данжуа суммах всюду сходящихся тригонометрических рядов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, № 3. С. 533–536.

18. В.А. Скворцов. Некоторые свойства CP-интеграла // Матем. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 304–324.

19. В.А. Скляренко. Об интегрировании по частям в SCP-интеграле Беркилля // Матем. сб. 1980. Т. 112(154). С. 630–646.

20. В.А. Скляренко. Некоторые свойства P^2-примитивной // Матем. заметки. 1972. Т. 12. С. 693–700.

21. W.L.C. Sargent. A descriptive definition of Cesàro–Perron integrals // Proc. London Math. Soc. 1941. T. 47. C. 212–247.

22. S. Verblunsky. On a descriptive definition of Cesàro–Perron integrals // J. London Math. Soc. 1971. T. 3. C. 326–333.

23. W.L.C. Sargent. On generalized derivatives and Cesáro–Denjoy integrals // Proc. London Math. Soc. 1951. T. 52. C. 365–376.

24. W.L.C. Sargent. On the Cesàro derivates of a function // Proc. London Math. Soc. 1935. T. 40, № 3,4. C. 235–254.

25. В.А. Скворцов. Взаимоотношение между общим интегралом Данжуа и тотализацией $(T_{2s})_0$ // Матем. сб. 1960. Т. 52(94). С. 551–578.

26. С. Сакс. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.

27. Г.П. Толстов. Об интеграле Perron'a // Матем. сб. 1939. Т. 5, № 47. С. 647–660.

28. D.N. Sarkhel. A criterion for Perron integrability // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. T. 70. C. 109–112.

29. P.S. Bullen, R. Vyborny. Some applications of a theorem of Marcinkiewicz // Canad. Math. Bull. 1991. T. 34, № 2. C. 165–174.

30. V.A. Skvortsov, B.S. Thomson. Symmetric integrals do not have the Marcinkiewicz property // Real Analysis Exchange. 1995-1996. Т. 21(2). С. 510–520.

31. В.А. Скляренко. Об одном свойстве SCP-интеграла Беркилля // Матем. заметки. 1999. Т. 65. С. 599–606.

32. В.А. Скворцов. О теореме Марцинкевича для двоичного интеграла Перрона // Матем. заметки. 1996. Т. 59. С. 267–277.

33. P.S. Bullen. A criterion for n-convexity // Pacific J. Math. 1971. Т. 36, № 1. С. 81–98.

34. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды: в 2т. М.: Мир, 1965.

35. H. Hardy G. Weierstrass's nondifferentiable function // Trans. Amer. Math. Soc. 1916. Т. 17, № 3. С. 301–325.

36. L.S. Bosanquet. A property of Cesàro–Perron intergals // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1940. Т. 6. С. 160–165.

37. А.В. Дергачев. Некоторые свойства чезаровских производных высших порядков // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. Т. 67, № 3. С. 3–10.

38. А.В. Дергачев. Обобщенные производные и интегралы типа Чезаро–Перрона. I // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2014. Т. 69, № 2. С. 14–25.

39. А.В. Дергачев. Обобщенные производные и интегралы типа Чезаро–Перрона. // Деп. в ВИНИТИ, №276-В2014.

40. А.В. Дергачев. Чезаровские и обобщенные чезаровские производные высших порядков // Материалы 16-ой Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". 2012. С. 64–65.

41. А.В. Дергачев. Интеграл Чезаро–Перрона и свойство Марцинкевича // Международная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV", Тезисы докладов. Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2014. С. 54–55.