УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор – проректор по научной работе Московского физико-технического института (государственного университета), доктор технических наук, профессор

Горшков
Олег Анатольевич

«28» ноября 2014 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию **Дергачева Артема Владимировича** «Обобщенные интегралы типа Чезаро-Перрона и некоторые их приложения», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация посвящена изучению свойств обобщенных интегралов перроновского типа, входящих в “шкалу интегрирования” Чезаро–Перрона, построенную Беркилем, и нашедших применение в задаче восстановления коэффициентов тригонометрических рядов, суммируемых методами Чезаро различных порядков.

Эти интегралы обобщают классический интеграл Перрона, относящийся к неабсолютным обобщениям интеграла Лебега и введенный, прежде всего, для решения проблемы восстановления первообразной по ее производной. Известно эквивалентное определение интеграла Перрона в форме дескриптивного определения узкого интеграла Данжуа. Метод Перрона определения обобщенных интегралов находит применение в теории дифференциальных уравнений и в гармоническом анализе в проблеме восстановления коэффициентов ортогональных рядов по их сумме.

Рассматриваемая в диссертации шкала интегралов Беркиля строится по индукции. Интегралом нулевого порядка является классический интеграл Перрона (P-интеграл). Интеграл первого порядка (CP-интеграл Беркиля) был достаточно хорошо изучен ранее, в то время как перенесение ряда хороших свойств CP-интеграла на интегралы более высокого порядка (C_kP - интегралы) вызывало существенные трудности. В частности, в течение многих лет оставался открытым вопрос о справедливости для этих интегралов, начиная со второго порядка, аналога теоремы Марцинкевича, доказанного для интеграла первого порядка В.А. Скворцовым еще в 60-ые годы прошлого столетия. Именно этому кругу вопросов и посвящена диссертация.

Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на параграфы.

Первая глава посвящена изучению конструкции C_kP - интегралов Беркиля. Мажоранты и миноранты, определяющие эти интегралы, строятся с помощью понятий нижней и верхней производной Чезаро соответствующего порядка. Поэтому естественно, что изучение свойств этих интегралов автор диссертации начинает с исследования тонких свойств чезаровских производных высших порядков (C_k -производных) и получает в этом направлении ряд существенных новых результатов. Показано, что некоторые свойства C_1 - производной не имеют места для C_k -производных при k > 1. В частности, при k > 1 из условия, что нижняя производная Чезаро соответствующего порядка непрерывной функции отлична от $-\infty$, не следует, в отличие от случая k = 1, что эта функция принадлежит классу VBG (Теорема 1.3.5). Это показывает существенное отличие дескриптивных характеристик мажорант высокого порядка по сравнению с первым порядком. Доказано также, что C_k-производные при k > 1 противоречат аппроксимативной производной на множестве положительной меры и не обладают свойством Варда (Теорема 1.3.9).

В главе 2 автор вводит обобщенную шкалу интегрирования, включающую шкалу Беркиля в качестве частного случая, и выделяет классы ядер усреднения, обеспечивающие лучшие свойства производных и интегралов, построенных на их основе. Для понимания причин, по которым C_k - производные обладают или не обладают тем или иным свойством, существенную роль играет рассмотрение их в качестве частного случая более общего понятия производных, вводимых автором с помощью произвольных ядер усреднения. Выясняется, что наиболее хорошими свойствами обладают обобщенные производные Чезаро, построенные по классу в определенном смысле симметричных ядер. В связи с этим становится понятной причина патологических свойств C_k-производных при k > 1: они определяются несимметричными ядрами в то время как при k = 1 ядро симметрично. Показано (Теорема 2.2.3), что в случае симметричного ядра соответствующие производные не противоречат аппроксимативной производной, а определяемые ими мажоранты всегда являются VBG-функциями (Теорема 2.2.5).

В главе 3 рассматривается частный случай общей конструкции, построенной в главе 2. Здесь рассматриваются ядра и соответствующие интегралы (C_k^mP -интегралы), зависящие от двух параметров (m, k), причем при m = k ядро является симметричным, что дает возможность применять к соответствующим мажорантам и минорантам теоремы 2.2.3 и 2.2.5, а при при m = 1 получать классическое чезаровское ядро усреднения. Исследуется взаимосвязь между C_k^mP -интегралами при различных m и k. Решающим для дальнейшего является установление того факта, что C_k^mP -интеграл эквивалентен C_kP -интегралу Беркиля при всех m > 1 (хотя классы мажорант и минорант в определениях этих интегралов, вообще говоря, не совпадают).

В главе 4 доказан аналог теоремы Марцинкевича для C_kP -интеграла (теорема 4.3.1). В теореме 4.3.1 автор устанавливает справедливость свойства Марцинкевича для всех C_k^mP -интегралов, включая интегралы из шкалы Беркиля, причем метод доказательства состоит в том, что на основании предыдущих теорем достаточно доказать теорему для C_k^kP -интеграла, что, в свою очередь, можно установить, пользуясь симметричностью ядра усреднения для этого интеграла.

В главе 4 установлена также непротиворечивость C_kP -интеграла и широкого интеграла Данжуа (теорема 4.2.5). В качестве следствия получена усиленная теорема типа дю Буа-Реймона для D-интеграла, показывающая, что D-интеграл восстанавливает коэффициенты тригонометрического ряда, всюду суммируемого по Чезаро методом (C, k) вместе с сопряженным, как только сумма самого ряда D-интегрируема.

Замечания. 1) На с. 16 в Определении 1.1.4 среднее $C_kf(x,y)$ порядка k определяется при индукционном предположении, что для функции f существует $C_{k-1}P$ -интеграл порядка $k-1$. Но фактически предполагается, что и произведение $f\varphi_k$ также $C_{k-1}P$ -интегрируемо. На это автор указывает лишь на с. 20.

2) В тексте диссертации имеются опечатки. Например, на с. 12 во второй строке сверху вместо неравенства $k<1$ должно быть $k>1$.

3) Перед Определением 1.1.4 вместо неравенства $(\Psi(b)-\Psi(a))-(\psi(a)-\psi(b))<\varepsilon/2$ должно быть $(\Psi(b)-\Psi(a))-(\psi(b)-\psi(a))<\varepsilon/2$, а вместо неравенства $(\Psi^*(b)-\Psi^*(a))-(\psi^*(a)-\psi^*(b))<\varepsilon/2$ должно быть $(\Psi^*(b)-\Psi^*(a))-(\psi^*(b)-\psi^*(a))<\varepsilon/2$

4) Перед Определением 1.1.4 имеется неравенство $(\Psi(b)-\Psi(a))-(\psi(a)-\psi(b))<\varepsilon/2$, которое надо удалить.

Оценка результатов диссертации.

В диссертации решены несколько трудных и актуальных проблем теории обобщенных интегралов. Автор развил тонкие методы метрической теории функций. Полученные им результаты представляют несомненный научный интерес. Они подробно обоснованы и прошли апробацию на Международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IV» (ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2014) и на 16–й Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (СГУ, Саратов, 2012).

Результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора, из которых две — в журналах из перечня ВАК.

Автореферат полностью и точно отражает содержание диссертации и методику исследования.

Результаты диссертации могут быть использованы в научной работе ряда учебных учреждений: в Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского, в Санкт-Петербургском государственном университете, в Московском физико-техническом институте.

Вывод.

Все вышеизложенное позволяет сделать вывод, что диссертация «Обобщенные интегралы типа Чезаро-Перрона и некоторые их приложения», отвечает требованиям Положения о присуждении ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор – Дергачев Артем Владимирович безусловно достоин присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Отзыв на диссертацию составлен доктором физико-математических наук Голубовым Борисом Ивановичем и обсужден на заседании кафедры высшей математики МФТИ «28» ноября 2014 г., протокол № 9.

Профессор кафедры высшей математики МФТИ,
доктор физ.-мат. наук, профессор — Голубов Борис Иванович

Заведующий кафедрой высшей математики МФТИ,
доктор физ.-мат. наук, профессор — Половинкин Евгений Сергеевич

Почтовый адрес: 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер.,9
Телефон: 8 (495) 576-5155
Адрес электронной почты: polovinkin.es@mipt.ru
Организация – место работы: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»