ОТЗЫВ

официального оппонента Нараленкова Кирилла Михайловича о работе Дергачева Артема Владимировича «Обобщенные интегралы типа Чезаро–Перрона и некоторые их приложения» представленной к защите в качестве диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Работа посвящена изучению одного из обобщений классического интеграла Перрона — так-называемой шкалы интегралов Чезаро–Перрона — последовательности C_kP-интегралов занумерованных целым неотрицательным индексом k, предложенной Беркилем в 1935 году, так, что на каждом шаге индуктивно вводятся все более широкие (тем не менее согласующиеся с предыдущими) понятия предела, непрерывности, производной и интеграла. В частности, C_0P-интеграл — классический интеграл Перрона, введённый Перроном в 1914 году и обобщающий интеграл Лебега, а C_1P-интеграл — интеграл Чезаро–Перрона, так-называемый CP-интеграл, введённый Беркилем в 1932 году. Конструкция C_kP-интегралов Беркиля опирается на перроновский подход к определению интеграла, обобщающий классический дескриптивный подход, при котором интегрируемой считается функция имеющая мажоранты и миноранты со сколь угодно близкими приращениями. Таким образом, интегрируемая процессом перроновского типа функция уже не обязана априори иметь первообразную. Следует отметить, что так-называемые теоремы типа Марцинкевича, отвечающие на вопрос о структурных свойствах мажорант и минорант достаточных для того, чтобы установить интегрируемость функции не вычисляя значение интеграла, относятся к наиболее важным в теории перроновских интегралов.

Различные варианты обобщений интеграла Лебега находились в течение более чем ста лет в центре внимания многих исследований по теории функций, функциональному анализу, гармоническому анализу и другим разделам математики. Таким образом, тематика диссертации связана с весьма актуальным и активно развиваемым направлением исследований.

Автор впервые вводит в рассмотрение C_φ-производную для произвольного *ядра усреднения* φ, то есть функции, удовлетворяющей естественным специальным условиям, и исследует в самом общем виде свойства C_φ-производных в зависимости от свойств ядра усреднения φ. Обратим внимание, что на эту же конструкцию опирается и введённый автором для всех целых $m \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$ C_k^mP-интеграл. Хотя C_k^m-производная становиться все менее общей с ростом m и фиксированном k, C_k^mP-мажоранты и C_k^mP-миноранты обладают целым рядом удобных свойств, отсутствующих у обычных C_kP-мажорант и C_kP-минорант при $k \geqslant 2$, в то время как C_k^mP-интеграл остаемся эквивалентным C_kP-интегралу при произвольных целых положительных m и k.

Диссертация состоит из введения и четырёх глав. Введение содержит весьма обстоятельный и содержательный исторический обзор по рассматриваемой тематике, а также аннотацию основных результатов диссертации.

В первой главе изучаются C_k-производные и устанавливаются важные различия в их свойствах при $k \geqslant 2$ и при $k = 0, 1$. Автор вводит определения, касающиеся C_kP-интеграла, и наглядно иллюстрирует примерами основные особенности конструкции этого интеграла. Затем формулируются известные факты из общей теории C_kP-интеграла, необходимые для дальнейшего. Основные отрицательные результаты диссертации даются примерами, построенными в теоремах 1.3.5 и 1.3.9: для всякого $k \geqslant 2$ устанавливается, что во-первых, существует непрерывная, но *не* принадлежащая классу VBG на $[0,1]$ функция такая, что $C_k\underline{D}F(x) > -\infty$ для всех $x \in (0,1)$; во-вторых, для любого $\alpha \in (0,1)$ в классе Lip_α на $[0,1]$ найдется функция F такая, что $C_kDF(x) = +\infty$ почти всюду на $[0,1]$, в то время как аппроксимативная производная $F'_{\mathrm{ap}}(x)$ *конечна* почти всюду на $[0,1]$, что означает невыполнение теоремы типа Варда и соотношений Данжуа для C_k-производной при $k \geqslant 2$.

Во второй главе автор изучает производные Чезаро относительно произвольного ядра усреднения. В первом параграфе в определениях 2.1.1 и 2.1.4 вводятся важные понятия *C_φ-среднего*, абстрактного *ядра усреднения* φ целого положительного порядка k, а также *C_φ-приращения*. Теорема 2.1.8 устанавливает, что понятие C_φ-непрерывности покрывает понятие C_k-непрерывности. В теореме 2.1.9 доказывается измеримость верхних и нижних C_φ-производных. Согласно теореме 2.1.12, для *неотрицательного* ядра усреднения φ C_φ-производная покрывает классическую производную. Во втором параграфе изучаются C_φ-производные для *симметричного* ядра усреднения. Оказывается, что для таких ядер C_φ-производная не противоречит аппроксимативной производной (теорема 2.2.3), а также что функции имеющие конечную нижнюю C_φ-производную обладают рядом важных структурных свойств (теорема 2.2.5). Таким образом, отрицательные результаты главы 1 обусловлены именно отсутствием при $k \geqslant 2$ у классического ядра усреднения Чезаро порядка k свойства симметричности.

Глава 3 посвящена важному частному случаю конструкции из второй главы — C_k^m-производной и определяемому на ее основе C_k^mP-интегралу. В первом параграфе исследуется общность C_k^m-производной при изменении k и m: теоремы 3.1.6 и 3.1.9 утверждают, что общность C_k^m-производной *возрастает* с ростом k и *убывает* с ростом m. Во втором параграфе автор изучает взаимоотношение C_k^mP-интеграла (определение 3.2.4) и C_kP-интеграла. Основные результаты этого параграфа — теоремы 3.2.7 и 3.2.10. В теореме 3.2.7 доказано, что при $k \geqslant 1$ и $m > 1$ из C_k^m-интегрируемости вытекает как C_k^{m-1}-интегрируемость, так и C_{k+1}^m-интегрируемость. Теорема 3.2.10 утверждает, что при $k \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$ из C_k^m-интегрируемости вытекает C_k^{m+1}-интегрируемость. Совмещая заключения теорем 3.2.7 и 3.2.10 можно сделать вывод об *эквивалентности* C_k^mP-интеграла и C_kP-интеграла. В третьем параграфе доказана теорема 3.3.4, которая показывает, что ограничения на C_k^mP-мажоранты и C_k^mP-миноранты в определении C_k^mP-интегралы могут быть существенно ослаблены. Эта теорема закладывает основу для ключевых положительных результатов диссертации.

В заключительной четвертой главе автор применяет результаты второй и третьей глав для развития теории C_kP-интеграла Беркиля. В первом параграфе даётся доказательство свойств Коши (теорема 4.1.1) и Гарнака (теорема 4.1.2) для C_k^m-интеграла. Автор использует для доказательства этих свойств схему, предложенную Саржент, одновременно устраняя некоторые неточности, присутствовавшие в оригинальной работе 1941 года. Наконец, во втором и третьем параграфах получены основные положительные результаты диссертации: теоремы 4.2.5, 4.2.6 и 4.3.1. Теорема 4.2.5 утверждает, что при любом $k \geqslant 2$ C_kP-интеграл *не* противоречит широкому интегралу Данжуа. Эта теорема позволяет получить обобщение *теоремы Валле-Пуссена* для широкого интеграла Данжуа (теорема 4.2.6). Наконец, теорема 4.3.1 показывает, что при любом $k \geqslant 2$ C_kP-интеграл обладает *свойством Марцинкевича.*

К недостаткам диссертации следует отнести некоторую терминологию и обозначения: одинаковые понятия в разных местах называются C_k-непрерывностью (C_k^m-производной) или C_kP-непрерывностью (C_k^mP-производной); при упоминании несимметричного $\mathcal{P}^n$-интеграла в сравнении с C_kP-интегралом более уместно использование обозначения $\mathcal{P}^{k+1}$-интеграл; в первом абзаце параграфа 1.3 вместо слова «глава» предпочтительнее использовать слово «параграф»; на стр. 31 предпочтительнее использование «$10n^2 \cdot 2^n$» вместо «$10 \cdot 2^n n^2$». Кроме того, в работе имеются опечатки: стр. 7 напечатано «1942г.» вместо «1941г.»; стр. 12 «при $k < 1$» вместо «при $k > 1$»; стр. 16 перед определением 1.1.4 присутствует лишняя формула «$(\Psi(b)-\Psi(a))-(\psi(b)-\psi(a)) < \varepsilon/2$»; стр. 42 в вводном предложении к теоремам 2.1.12 и 2.1.13 речь идет о свойствах C_φ-производных, а не о свойствах неотрицательных ядер усреднения; стр. 42 напечатано «C_k-производной» вместо «C_φ-производной»; стр. 44 напечатано «дискриптивное свойство» вместо «дескриптивное свойство». Однако указанные недостатки ни в коей мере не снижают ценность диссертации.

Работа свидетельствует об очень хорошем владении автором литературой по исследуемой тематике и методами, применяемыми в этой области. Развивая современные методы исследования, автору удалось существенно усилить некоторые классические результаты.

Результаты отличаются законченностью формулировок, ясностью и полнотой приведённых доказательств.

Полученные в работе результаты и развитые при их получении методы представляют несомненный научный интерес и могут найти применение в различных разделах математики, где используются обобщённые интегралы.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Работа отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор Дергачев Артем Владимирович заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент,
кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математических
методов и информационных технологий
МГИМО(У) МИД России

Нараленков

К.М. Нараленков
naralenkov@gmail.com
+7 (916) 128 18 85

Московский государственный институт
международных отношений
(Университет) МИД России

Начальник управления
по работе с персоналом ... Кузнецов
433-42-11

10.12.14г.

Нараленков Кирилл Михайлович
доцент кафедры математических методов
и информационных технологий
МГИМО(У) МИД России
шифр научной специальности 01.01.01

naralenkov@gmail.com
+7 (495) 434 60 56 (рабочий)
+7 (916) 128 18 85 (мобильный)

Публикации в реферируемых журналах за последние десять лет

1. K. M. Naralenkov, *A Lusin type measurability property for vector-valued functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **417(1)**, (2014), 293–307.

2. K. M. Naralenkov, *On continuity and compactness of some vector-valued integrals*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **43(3)**, (2013), 1015–1022.

3. K. M. Naralenkov, *A Henstock-Kurzweil integrable vector-valued function which is not McShane integrable on any portion*, Quaestiones Mathematicae, **35(1)**, (2012), 11–21.

4. K. Naralenkov, *Several comments on the Henstock-Kurzweil and McShane integrals of vector-valued functions*, Czechoslovak Mathematical Journal, **61(4)**, (2011), 1091–1106.

5. K. M. Naralenkov, *On continuity properties of some classes of vector-valued functions*, Mathematica Slovaca, **61(3)**, (2011), 895–906.

6. K. Naralenkov, *On Denjoy type extensions of the Pettis integral*, Czechoslovak Mathematical Journal, **60(3)**, (2010), 737–750.

7. K. M. Naralenkov, *Asymptotic structure of Banach spaces and Riemann integration*, Real Analysis Exchange, **33(1)**, (2007/2008), 111–124.

8. K. M. Naralenkov, *On integration by parts for Stieltjes-type integrals of Banach space-valued functions*, Real Analysis Exchange, **30(1)**, (2004/2005), 235–260.