ОТЗЫВ

официального оппонента Холщевниковой Натальи Николаевны на диссертацию Дергачева Артема Владимировича "Обобщенные интегралы типа Чезаро - Перрона и некоторые их приложения", представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - "вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Работа посвящена исследованию свойств обобщенных C_kP-интегралов Беркиля, образующих "шкалу интегрирования" Чезаро-Перрона. В ней решены две важные задачи: установлено свойство Марцинкевича для C_kP - интегралов и доказана непротиворечивость C_kP интегралов широкому интегралу Данжуа при $k > 1$ (при $k = 1$ эти свойства для CP-интеграла установил В.А.Скворцов). Диссертация состоит из введения и четырех глав.

Есть две известные задачи, которые привели к обобщению интеграла Лебега. Это задача о восстановлении функции по ее точной производной и задача о восстановлении коэффициентов всюду сходящегося тригонометрического ряда по его сумме. P - интеграл Перрона, являющийся обобщением интеграла Лебега, решает первую задачу. Вторую задачу решают такие интегралы, как обобщенные интегралы Данжуа - (T_{2s}) и $(T_{2s})_0$ тотализации, P^2 - интеграл Джеймса, ASH - интеграл Хенстока-Курцвейля. Определение интегралов перроновского типа дается с помощью мажорантных и минорантных функций и их обобщенных производных. Ш.Ж.Валле-Пуссен ввел в рассмотрение мажорантные и минорантные функции при исследовании свойств интеграла Лебега. С помощью них им была доказана теорема о единственности представления функции тригонометрическим рядом:

Теорема Валле-Пуссена. Если тригонометрический ряд всюду за исключением, быть может, счетного множества, сходится к конечной суммируемой функции, то он является рядом Фурье этой функции.

Представляют интерес интегралы, которые хотя и не полностью решают задачу восстановления, но решают ее при некоторых дополнительных условиях. Таким является C_kP - интеграл Беркиля.

В первой главе диссертации определяются основные понятия, исследуются свойства C_kP-мажорант при $k \geqslant 2$, показывается, что они существенно отличаются от свойств CP-мажорант (при $k = 1$). Напомним определение интеграла Перрона. Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Непрерывная на $[a, b]$ функция M называется мажорантой функции f, если она удовлетворяет условиям 1) $M(a) = 0$, 2) $\underline{D}M(x) \geqslant f(x)$ всюду и 3)$\underline{D}M(x) > -\infty$. Функция m называется минорантой функции f, если она является мажорантой для функции $-f$. При этих условиях функция $M - m$ оказывается неубывающей. Функция f называется интегрируемой по Перрону на отрезке $[a, b]$, если $\sup_m m(b) = \inf_M M(b)$. Это общее значение называется интегралом Перрона от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $(P) \int_a^b f(x)dx$. В рассматриваемой шкале это C_0P - интеграл. Известно, что требование непрерывности мажорант можно опустить, и получится тот же самый интеграл. Еще более интересно, что для интегрируемости по Перрону измеримой функции необходимо и достаточно, чтобы она имела хотя бы одну непрерывную перроновскую мажоранту и хотя бы одну непрерывную перроновскую миноранту (Марцинкевич). Подобное свойство и для других перроновских интегралов называется свойством Марцинкевича. Известно, что CP - интеграл обладает свойством Марцинкевича (теорема В.А.Скворцова), а SCP - интеграл - нет (В.А.Скляренко). Определение C_kP-интеграла Беркиля вводится по индукции, C_kP-интеграл определяется через $C_{k-1}P$-интеграл. При этом C_kP - средним и C_kP-приращением функции f от точки x до точки y, называются, соответственно,

$$C_kf(x, y) = \frac{1}{y - x}(C_{k-1}\int_x^y \varphi_k(\frac{t - x}{y - x}f(t)dt, C_k\Delta f(x, y) = \frac{C_kf(x, y) - f(x)}{(y - x)/(k + 1}, $$

где $\varphi_k(s) = k(1 - s)^{k-1}$.

Далее определяются C_k-предел, непрерывность, производная, производные числа, мажоранты и миноранты и сам интеграл.

В работе доказано существование функции класса $Lip_\alpha, \alpha \in (0, 1)$, C_k-производная которой почти всюду равна $+\infty$, а аппроксимативная производная существует и конечна почти всюду. В то же время, известно, что обычная, аппроксимативная, и C-производная не могут обращаться в $+\infty$ на множестве положительной меры ни для какой функции. В следующих двух главах строится аппарат, который позволит доказать, что для C_kP-интегралов выполняется свойство Марцинкевича.

Во второй главе определяется и исследуется обобщенное понятие C_φ чезаровской производной. Для этого ядро интегрального оператора, участвующего в определении C_kP-среднего заменяется функцией φ, обладающей достаточной гладкостью. При определенных условиях на новое ядро показано, что всякая C_k - непрерывная функция является также и C_φ - непрерывной (Теорема 2.1.8.). С помощью функции φ строится новая шкала интегрирования Чезаро-Перрона-Беркиля.

В третьей главе рассматривается частный случай, введенных во второй главе понятий, вводится C_k^mP - интеграл, с помощью функции $\varphi_m^k(s) = \frac{s^{m-1}(1-s)^{k-1}}{B(m,k)}$, где $B(m,k)$ - бета-функция Эйлера. При $m=1$ получается C_kP. Далее показано, что всякая C_k^mP - интегрируемая функция является C_kP -интегрируемой с тем же значением интеграла, т.е. при всех $m \geqslant 1$ C_k^mP - интеграл эквивалентен C_kP интегралу.

В четвертой главе доказана непротиворечивость C_kP интеграла и широкого интеграла Данжуа. Обычно, если тригонометрический ряд всюду сходится к интегрируемой в смысле некоторого интеграла функции, то этот ряд оказывается рядом Фурье в смысле этого интеграла. Это верно для интеграла Лебега, Перрона, и многих других, но не для широкого интеграла Данжуа. В.А.Скляренко построил тригонометрический ряд, всюду сходящийся к интегрируемой широким интегралом Данжуа функции, но не являющийся рядом Фурье для этого интеграла. Отсюда, в частности следует, что широкий интеграл Данжуа противоречит P^2 - интегралу Джеймса, (T_{2s}) тотализации Данжуа, ASH - интегралу Хенстока-Курцвейля. При этом CP-интеграл ему не противоречит. В работе доказано, что и C_kP-интеграл при $k>1$ также не противоречит широкому интегралу Данжуа. Отсюда с помощью теоремы Кросса получается аналог теоремы Валле-Пуссена для широкого интеграла Данжуа, при некоторых ограничениях на ряд.

Далее, с помощью разработанного во второй и в третьей главах аппарата, доказано, что если у измеримой по Лебегу на отрезке $[a,b]$ функции f, есть хотя бы одна C_kP-мажоранта и хотя бы одна C_kP-миноранта, то f является C_kP-интегрируемой на $[a,b]$, при $k \geqslant 1$. (Следствие теоремы 4.3.1.). Т.е. доказано, что все C_kP-интегралы $(k \geqslant 1)$ обладают свойством Марцинкевича.

В качестве небольших замечания укажем следующие:

1) На С.5 относительно ряда в формуле (5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$, сказано, что он всюду сходится, но расходится после почленного интегрирования и поэтому не является рядом Фурье. Надо все же сказать, что расходится только в точке $x=0$.

2) Формулировки теоремы 4.3.1. во введении и в Гл.4 отличаются, хотя и эквивалентны. Замечание на С.6 после теоремы Кросса не вполне четкое.

3) Имеется небольшое число описок и опечаток. Например на С.10 в 4-ой строке снизу должно быть "определяющую" вместо "определяющая", в определении 4.2.1 на С.77 дважды повторяется "непрерывная на отрезке $[a, b]$" функция.

Высказанные замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом. Результаты, полученные автором потребовали разработки новых методов исследования, являются новыми и приведены с полными доказательствами. Они относятся к актуальной области исследований теории функций - теории обобщенных интегралов. Основные результаты диссертации опубликованы в математических журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение задач, имеющих существенное значение для теории интеграла и теории единственности представления функций рядами.

Результаты диссертации представляют интерес для специалистов по теории функций и функциональному анализу и могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ им. М.В.Ломоносова, Математическом институте РАН им. В.А.Стеклова, Саратовском, Воронежском, Уральском и других университетах, а также при чтении спецкурсов по обобщенным интегралам.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация удовлетворяет требованиям предъявляемым к кандидатским диссертациям "Положения о порядке присуждения ученых степеней" ВАК РФ, и ее автор Дергачев Артем Владимирович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор физико-математических наук, по специальности 01.01.01., профессор Н.Н. Холщевникова

профессор кафедры прикладной математики МГТУ "Станкин"
8(499) 9729460
Kholshchevnikova@gmail.com

Подпись руки Н.Н. Холщевниковой удостоверяю
УД ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»
Попов ОВ 03.12.2014

Публикации Н.Н.Холщевниковой на темы, близкие к теме диссертации А.В.Дергачева

1) Холщевникова Н.Н. Обобщенный тригонометрический интеграл // Изв. НАН Армении. Математика, 2001. Т.36. N 4. С.82–89.

2) Скворцов В.А., Холщевникова Н.Н. Сравнение двух обобщенных тригонометрических интегралов // Матем. заметки, 2006. Т.79. N 2. С.278–287.

3) Холщевникова Н.Н. Вопросы единственности представления функций рядами в работе семинара Лузина // Принята к печати в сборник "Современные проблемы математики и механики. Математика".

Холщевникова Н.Н.